G. P. Bevz
V. G. Bevz

Algebră

9

Inegalități

$a > b$, dacă numărul $a - b$ este pozitiv, $a < b$, dacă numărul $a - b$ este negativ

Proprietățile inegalităților numerice

Dacă $a < b$, atunci $b > a$

Dacă $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c$

Dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$

Dacă $a < b$ și $c > 0$, atunci $ac < bc$

Dacă $a < b$ și $c < 0$, atunci $ac > bc$

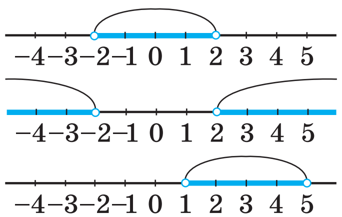
Dacă $a < b$ și $c < d$, atunci $a + c < b + d$

Dacă $0 < a < b$ și $0 < c < d$, atunci $ac < bd$

Inecuații

- cu numere
- Cu variabile
  - Identice
  - Cu necunoscute

$ax > b$	$ax \le b$
Dacă $a > 0$, atunci $x > \frac{b}{a}$, $x \in \left(\frac{b}{a}; \infty\right)$	Dacă $a > 0$, atunci $x \le \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$
Dacă $a < 0$, atunci $x < \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$	Dacă $a < 0$, atunci $x \ge \frac{b}{a}$, $x \in \left[\frac{b}{a}; \infty\right)$



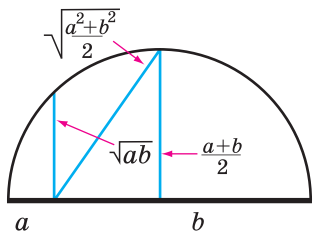
$|x| < 2$ $(-2; 2)$

$|x| > 2$ $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

$|x - 3| < 2$ $(1; 5)$

Dacă $0 < a < b$,

atunci $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b$



Funcția de gradul al doilea

$$y = ax^2 + bx + c$$

Trinomul de gradul al doilea

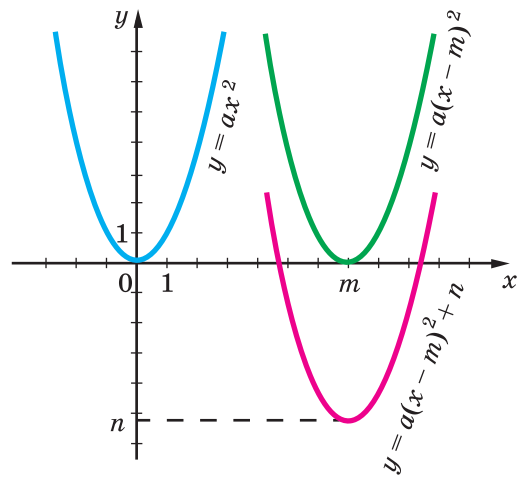
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ecuația de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$



Inecuația de gradul al doilea

Dacă $ax^2 + bx + c > 0$ și $D = b^2 - 4ac$, atunci:		
$a > 0$, $D > 0$; $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$	$a > 0$, $D = 0$; $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; \infty)$	$a > 0$, $D < 0$; $x \in R$, adică $x \in (-\infty; \infty)$
$a < 0$, $D > 0$; $x \in (x_1; x_2)$	$a < 0$, $D = 0$; Nu are soluți	$a < 0$, $D < 0$; Nu are soluții

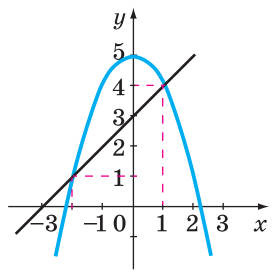
Rezolvarea grafică

a sistemului de ecuații

$$\begin{cases} x^2 + y - 5 = 0, \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

Sistemul are două soluții:

$(-2; 1)$ i $(1; 4)$.



G.P. Bevz, V.G. Bevz

Algebră

Manual pentru clasa a 9-a instituțiilor de învăţământ general cu limba română de predare

Recomandat de Ministerul Învățământului și Științei al Ucrainei

Львів
Видавництво «Світ»
2017

УДК 512(075.3)
Б36

Перекладено за виданням:
Бевз Г.П. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К. : Видавничий дім “Освіта”, 2017.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 20.03.2017 № 417)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника
під час проведення конкурсного відбору проектів підручників
для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів
і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа
«Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Сташенко М. О., завідувач кафедри менеджменту освіти Волинського ІППО, кандидат фізико-математичних наук, доцент;

Семено Л. Д., методист ММК управління освіти Полтавського міськвиконкому, вчитель-методист;

Мордик В. О., учитель КЗ «Гуляйпільський колегіум «Лідер» Гуляйпільської районної ради Запорізької області.

Р е ц е н з е н т

Вовк С. П., учитель математики Зміївського ліцею №1 імені З. К. Слюсаренка Харківської області, вчитель вищої категорії, вчитель-методист

Бевз Г.П.
Б 36 Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навч. румунською мовою / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз ; пер. Ш.Г. Лазарович, Г.Ш. Лазарович. – Львів : Світ, 2017. – 272 с. : іл.

ISBN 978-966-914-067-8

УДК 512(075.3)

ISBN 978-966-914-067-8 (рум.)
ISBN 978-617-656-750-9 (укр.)

STIMAŢI ELEVI DIN CLASA A 9-a!

A început noul an şcolar şi voi cu puteri noi continuaţi studierea algebrei – o componentă interesantă şi importantă a matematicii. Însuşirea acestei ştiinţe este o garanţie pentru însuşirea cu succes a altor obiecte în viitor, pentru o viaţă deplină în societatea actuală.

Valoarea algebrei pentru om au dezvăluit-o matematicienii renumiţi:

- *Algebra extinde şi perfecţionează raţiunea omului (L. Poinsot).*
- *Oamenii, care nu cunosc algebra, nu pot să-şi imagineze acele lucruri neobişnuite, care pot fi realizate cu ajutorul ştiinţei indicate (G. Leibniz).*

În acelaşi timp cu acest manual voi terminaţi studierea algebrei în şcoala de bază. Dar pentru a vă inchipui ce loc aparţine materialului din clasa a 9-a, examinaţi temele enumerate mai jos. Cu culoare este evidenţiat materialul care-l veţi studia anul acesta.

ALGEBRA (clasele 7 – 9)

Expresii întregi. Expresii raţionale. Funcţii$(y = kx + b,\ y = \frac{k}{x},\ y = x^2,\ y = \sqrt{x})$ Ecuaţii liniare şi sistemele lor. Rădăcini pătrate. Numere reale. Ecuaţii pătrate.
Inegalităţi. Funcţii pătrate. Şiruri numerice. Bazele combinatoricii, teoriei probabilităţilor şi statisticii

Noţiunile matematice «inegalitate», «funcţia pătrată» şi «şir numeric» reprezintă corelaţiile, care au un rol important în lumea reală. Pe baza acestor noţiuni şi a proprietăţilor lor se bazează multe metode ale ştiinţei actuale şi se efectuează cercetarea diferitor fenomene şi procese ale naturii şi activităţii umane.

Azi algebra pătrunde aproape toate domeniile de cunoştinţe şi este limba cu care «vorbesc, scriu şi gândesc» alte ştiinţe. Este greu de imaginat domeniul de activitate, în care nu se aplică matematica. Cu ajutorul modelelor matematice se descriu procese reale. Aplică metode matematice sociologii şi inginerii, juriştii şi biologii, arhitectorii şi muzicienii. Doar pentru a deveni specialist în viitor, a obţine studii de valoare şi a fi cu succes în viaţă matură, este necesar de aplicat multe eforturi. Iar studierea algebrei este una din treptele spre succes în calea voastră. Sorbiţi cunoştinţele algebrice, lărgind şi complectând experienţa obţinută în anii precedenţi.

Sperăm, că acest manual va fi un ajutor bun în însuşirea algebrei, în obţinerea noilor cunoştinţe, priceperi şi experienţe, în dezvoltarea armonică a personalităţii voastre.

Vă dorim succese la învătătură!

Autorii

Cum de lucrat cu manualul

Dragi elevi din clasa a 9-a şi colegi!

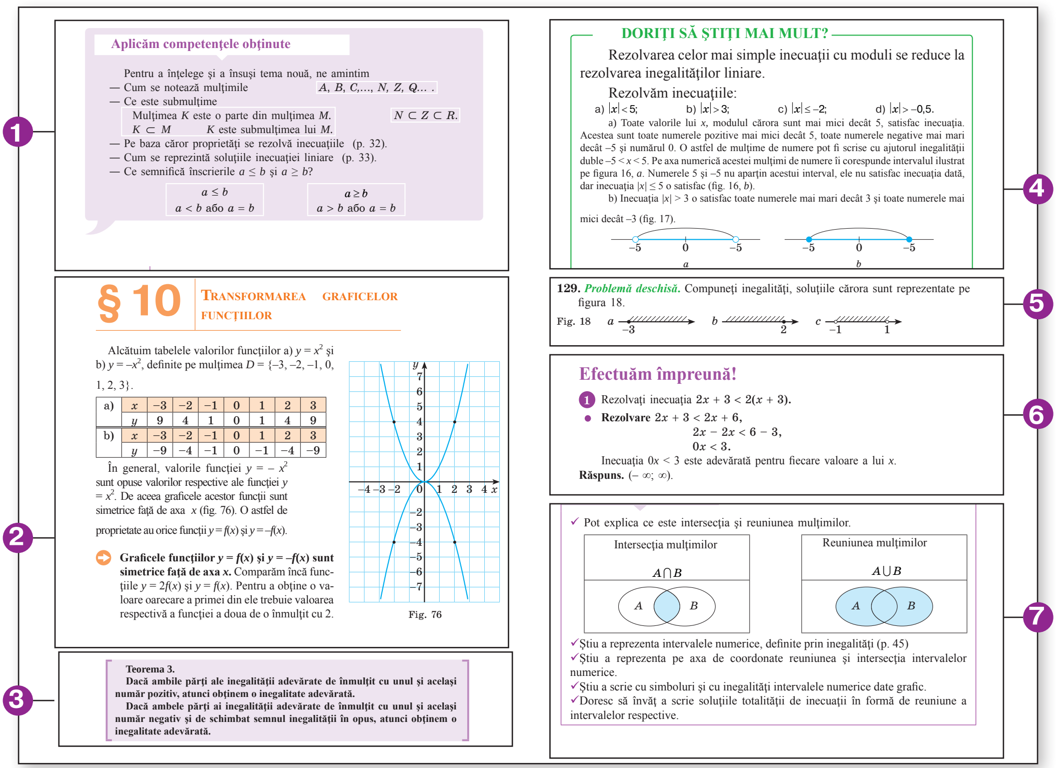
Ţineţi în mâini manualul nou de algebră. Autorii speră că această carte va deveni pentru voi un ajutor de nădejde şi un sfătuitor.

Un motiv ponderabil şi un stimul bun pentru învăţătură trebuie să fie datele despre matematicienii remarcabili şi premii matematice, fondate în cinstea lor. Opiniile matematicienilor pot fi pentru voi îndrumator nu numai în instruire, dar şi pe drumul vieţii.

La începutul fiecărui capitol este dată o prezentare scurtă a conţinutului în limbile română şi engleză.

1

Fiecare paragraf se începe cu rubrica «**Aplicăm competenţele obţinute**» **(1).** Materialul acestei rubrici va accentua atenţia la cunoştinţele principale – definiţiile,



1

Aplicăm competenţele obţinute

Pentru a înţelege şi a însuşi tema nouă, ne amintim
— Cum se notează mulţimile $A, B, C, \ldots, N, Z, Q\ldots$.
— Ce este submulţime
Mulţimea K este o parte din mulţimea M.
$K \subset M$ K este submulţimea lui M.
$N \subset Z \subset R$.
— Pe baza căror proprietăţi se rezolvă inecuaţiile (p. 32).
— Cum se reprezintă soluţiile inecuaţiei liniare (p. 33).
— Ce semnifică înscrierile $a \le b$ şi $a \ge b$?

$a \le b$
$a < b$ або $a = b$

$a \ge b$
$a > b$ або $a = b$

2

§ 10 TRANSFORMAREA GRAFICELOR FUNCŢIILOR

Alcătuim tabelele valorilor funcţiilor a) $y = x^2$ şi b) $y = -x^2$, definite pe mulţimea $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

a)	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	9	4	1	0	1	4	9
b)	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9

În general, valorile funcţiei $y = -x^2$ sunt opuse valorilor respective ale funcţiei $y = x^2$. De aceea graficele acestor funcţii sunt simetrice faţă de axa x (fig. 76). O astfel de proprietate au orice funcţii $y = f(x)$ şi $y = -f(x)$.

Graficele funcţiilor $y = f(x)$ şi $y = -f(x)$ sunt simetrice faţă de axa x. Comparăm încă funcţiile $y = 2f(x)$ şi $y = f(x)$. Pentru a obţine o valoare oarecare a primei din ele trebuie valoarea respectivă a funcţiei a doua de o înmulţit cu 2.

Fig. 76

3

Teorema 3.
Dacă ambile părţi ale inegalităţii adevărate de înmulţit cu unul şi acelaşi număr pozitiv, atunci obţinem o inegalitate adevărată.
Dacă ambele părţi ai inegalităţii adevărate de înmulţit cu unul şi acelaşi număr negativ şi de schimbat semnul inegalităţii în opus, atunci obţinem o inegalitate adevărată.

4

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

Rezolvarea celor mai simple inecuaţii cu moduli se reduce la rezolvarea inegalităţilor liniare.

Rezolvăm inecuaţiile:
a) $|x| < 5$; b) $|x| > 3$; c) $|x| \le -2$; d) $|x| > -0{,}5$.

a) Toate valorile lui x, modulul cărora sunt mai mici decât 5, satisfac inecuaţia. Acestea sunt toate numerele pozitive mai mici decât 5, toate numerele negative mai mari decât –5 şi numărul 0. O astfel de mulţime de numere pot fi scrise cu ajutorul inegalităţii duble $-5 < x < 5$. Pe axa numerică acestei mulţimi de numere îi corespunde intervalul ilustrat pe figura 16, a. Numerele 5 şi –5 nu aparţin acestui interval, ele nu satisfac inecuaţia dată, dar inecuaţia $|x| \le 5$ o satisfac (fig. 16, b).

b) Inecuaţia $|x| > 3$ o satisfac toate numerele mai mari decât 3 şi toate numerele mai mici decât –3 (fig. 17).

–5 0 –5
a

–5 0 –5
b

5

129. ***Problemă deschisă.*** Compuneţi inegalităţi, soluţiile cărora sunt reprezentate pe figura 18.

Fig. 18 a –3 b 2 c –1 1

6

Efectuăm împreună!

1 Rezolvaţi inecuaţia $2x + 3 < 2(x + 3)$.

Rezolvare $2x + 3 < 2x + 6$,
$2x - 2x < 6 - 3$,
$0x < 3$.

Inecuaţia $0x < 3$ este adevărată pentru fiecare valoare a lui x.

Răspuns. $(-\infty; \infty)$.

7

✓ Pot explica ce este intersecţia şi reuniunea mulţimilor.

Intersecţia mulţimilor
$A \cap B$
A B

Reuniunea mulţimilor
$A \cup B$
A B

✓Ştiu a reprezenta intervalele numerice, definite prin inegalităţi (p. 45)
✓Ştiu a reprezenta pe axa de coordonate reuniunea şi intersecţia intervalelor numerice.
✓Ştiu a scrie cu simboluri şi cu inegalităţi intervalele numerice date grafic.
✓Doresc să învăţ a scrie soluţiile totalităţii de inecuaţii în formă de reuniune a intervalelor respective.

proprietăţile, afirmaţiile, pe care voi trebuie să vi le aduceţi aminte pentru perceperea efectivă şi însuşirea materialului nou.

Studiind materialul teoretic, atrageţi atenţia la cuvintele tipărite cu ***aldin cursiv***, aceştia sunt termenii algebrici noi. Trebuie să-i percepeţi şi să-i memorizaţi.

2

Propoziţiile marcate cu caracter **aldin (2),** notate cu săgeţi sunt definiţii fundamentale.

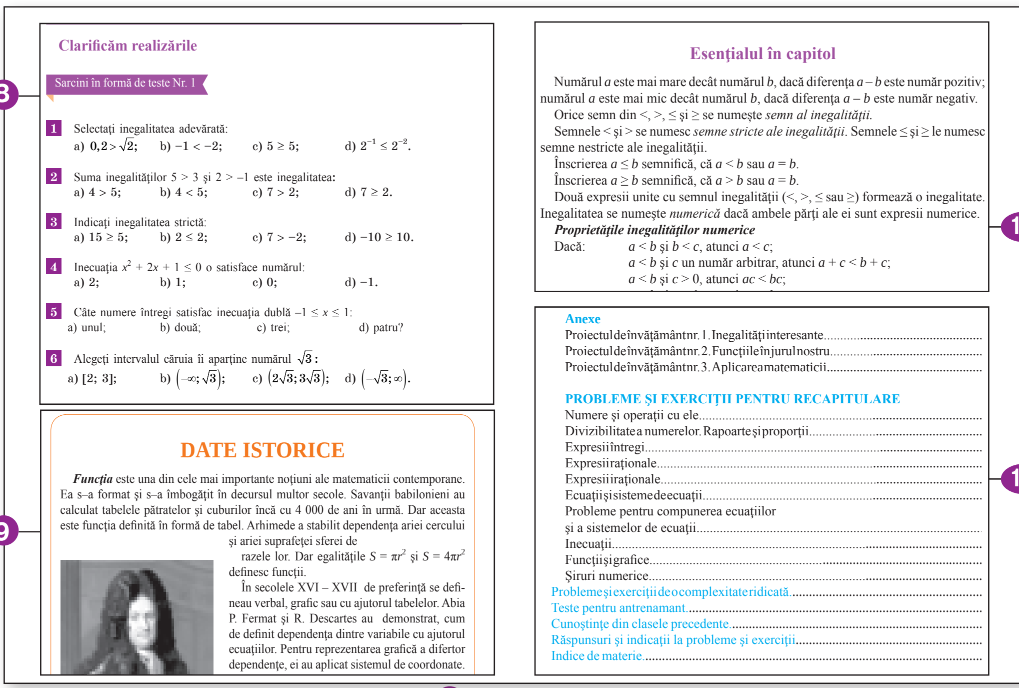
Textul aldin în paranteze pătrate (3) sunt proprietăţile, regulile şi alte afirmaţii importante. Trebuie de ştiut a le formula (se poate cu cuvinte proprii) şi a le aplica la rezolvarea exerciţiilor şi problemelor propuse.

În fiecare paragraf al manualului este rubrica **«Doriţi să ştiţi mai mult?» (4)**. Ea conţine material suplimentar, destinat elevilor care se interesează.

Manualul conţine exerciţii de diferite niveluri de complexitate: pentru rezolvare orală şi nivelurile A şi B. Rezolvarea **«Problemelor deschise» (5)** atribuie dezvoltării gândirii logice, perceperilor de cercetare şi creative.

În rubrica **«Efectuăm împreună» (6)** sunt date modele de rezolvare a exerciţiilor de cele mai importante tipuri. Este util să vă familiarizaţi cu ele înainte de a efectua sarcinile de acasă, numerele cărora sunt evidenţiate cu culoare albastră.

Folosind rubrica **«Comoara succeselor» (7),** care se află la sfârşitul fiecărui paragraf, se poate analiza, percepe, repeta şi îmbunătăţi cunoştinţele şi priceperile obţinute.



Clarificăm realizările

Sarcini în formă de teste Nr. 1

1 Selectaţi inegalitatea adevărată:
a) $0,2>\sqrt{2}$; b) $-1<-2$; c) $5\geq 5$; d) $2^{-1}\leq 2^{-2}$.

2 Suma inegalităţilor $5>3$ şi $2>-1$ este inegalitatea:
a) $4>5$; b) $4<5$; c) $7>2$; d) $7\geq 2$.

3 Indicaţi inegalitatea strictă:
a) $15\geq 5$; b) $2\leq 2$; c) $7>-2$; d) $-10\geq 10$.

4 Inecuaţia $x^2+2x+1\leq 0$ o satisface numărul:
a) 2; b) 1; c) 0; d) -1.

5 Câte numere întregi satisfac inecuaţia dublă $-1\leq x\leq 1$:
a) unul; b) două; c) trei; d) patru?

6 Alegeţi intervalul căruia îi aparţine numărul $\sqrt{3}$:
a) $[2;\ 3]$; b) $(-\infty;\sqrt{3})$; c) $(2\sqrt{3};3\sqrt{3})$; d) $(-\sqrt{3};\infty)$.

DATE ISTORICE

Funcţia este una din cele mai importante noţiuni ale matematicii contemporane. Ea s–a format şi s–a îmbogăţit în decursul multor secole. Savanţii babilonieni au calculat tabelele pătratelor şi cuburilor încă cu 4 000 de ani în urmă. Dar aceasta este funcţia definită în formă de tabel. Arhimede a stabilit dependenţa ariei cercului şi ariei suprafeţei sferei de razele lor. Dar egalităţile $S=\pi r^2$ şi $S=4\pi r^2$ definesc funcţii.

În secolele XVI – XVII de preferinţă se defineau verbal, grafic sau cu ajutorul tabelelor. Abia P. Fermat şi R. Descartes au demonstrat, cum de definit dependenţa dintre variabile cu ajutorul ecuaţiilor. Pentru reprezentarea grafică a difertor dependenţe, ei au aplicat sistemul de coordonate.

Esenţialul în capitol

Numărul a este mai mare decât numărul b, dacă diferenţa $a-b$ este număr pozitiv; numărul a este mai mic decât numărul b, dacă diferenţa $a-b$ este număr negativ.

Orice semn din $<$, $>$, $\leq$ şi $\geq$ se numeşte *semn al inegalităţii.*

Semnele $<$ şi $>$ se numesc *semne stricte ale inegalităţii*. Semnele $\leq$ şi $\geq$ le numesc semne nestricte ale inegalităţii.

Înscrierea $a\leq b$ semnifică, că $a<b$ sau $a=b$.

Înscrierea $a\geq b$ semnifică, că $a>b$ sau $a=b$.

Două expresii unite cu semnul inegalităţii ($<$, $>$, $\leq$ sau $\geq$) formează o inegalitate. Inegalitatea se numeşte *numerică* dacă ambele părţi ale ei sunt expresii numerice.

Proprietăţile inegalităţilor numerice

Dacă: $a<b$ şi $b<c$, atunci $a<c$;
$a<b$ şi c un număr arbitrar, atunci $a+c<b+c$;
$a<b$ şi $c>0$, atunci $ac<bc$;

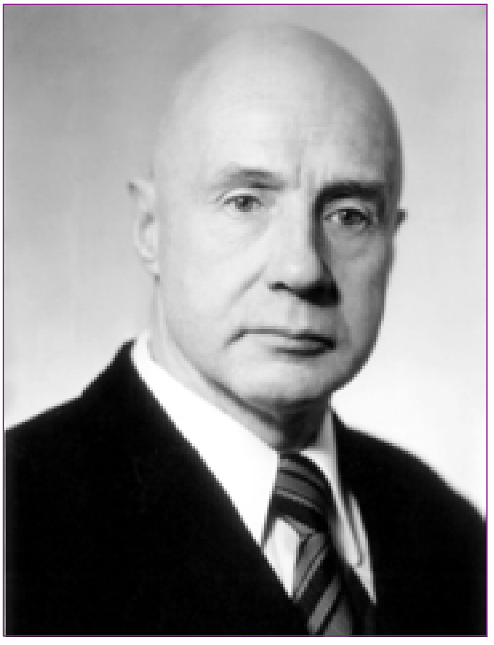
Anexe
Proiectul de învăţământ nr. 1. Inegalităţi interesante........
Proiectul de învăţământ nr. 2. Funcţiile în jurul nostru........
Proiectul de învăţământ nr. 3. Aplicarea matematicii........
PROBLEME ŞI EXERCIŢII PENTRU RECAPITULARE
Numere şi operaţii cu ele........
Divizibilitatea numerelor. Rapoarte şi proporţii........
Expresii întregi........
Expresii raţionale........
Expresii iraţionale........
Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii........
Probleme pentru compunerea ecuaţiilor şi a sistemelor de ecuaţii........
Inecuaţii........
Funcţii şi grafice........
Şiruri numerice........
Probleme şi exerciţii de o complexitate ridicată........
Teste pentru antrenamant........
Cunoştinţe din clasele precedente........
Răspunsuri şi indicaţii la probleme şi exerciţii........
Indice de materie........

Rubrica **«Clarificăm succesele» (8)** este alcătuită aşa, ca să aveţi posibilitate să vă pregătiţi pentru evaluarea independentă externă.

La sfârşitul cărţii sunt rubricile **«Ştiri istorice» (9)** şi **«Esenţialul în capitol» (10)**.

Atrageţi atenţia la «ANEXE» (11) şi completarea lor. Sperăm că veţi obţine satisfacţie de la rezolvarea problemelor şi lucrul asupra proiectelor de instruire.

Vă dorim succese în studierea algebrei!



Capitolul 1

MITROPOLSKII Iurii Olexiiovici (1916–2008)

Matematician şi mecanic ucrainean, academician ANŞ a Ucrainei (1961), academic-corespondent străin al Academiei de ştiinţe în Bolonia (Italia, 1971), Erou al Ucrainei, activist emerit de ştiinţe al Ucrainei, doctor în ştiinţe tehnice, membru activ al societăţii de Ştiinţă T. G. Şevcenko din Lviv.

«Matematica e ca poezia. Această asemănare nu este numai în frumuseaţea formelor, în severitatea rafinată a teoriilor matematice, dar şi în puternica influenţă a matematicii asupra altor ştiinţe».

«Străbătând prin formulele matematice seci, gândul omenesc se transformă într-un cântec eroic al lucrului creativ».

Iu. O. Mitropolskii

PREMIUL în numele lui Iu. O. MITROPOLSKII

Se decernează în Secţia matematică ANŞ a Ucrainei pentru lucrări ştiinţifice remarcabile în domeniul matematicii şi mecanicii neliniare.
Fondată de Academia Naţională de ştiinţe a Ucrainei în anul 2008

LAUREAŢII PREMIULUI:

Samoilenko A. M.
Boiciuk O. A.
Egorova I. E.
Coşmanenko V. D.
Koroliuk V. S.

INECUAŢII

Inecuaţiile se aplică tot aşa de frecvent ca şi egalităţile.

Ca şi egalităţile inecuaţiile sunt numerice sau cu variabile.

Unele din ele se demonstrează, altele se rezolvă.

Cu ajutorul inecuaţiilor este comod de modelat situaţii şi procese reale, mai cu seamă relaţiile mai mare – mai mic, mai scurt – mai lung etc. Un rol important inecuaţiile îl au în studierea funcţiilor: determinarea celor mai mari şi celor mai mici valori ale funcţiilor pe un interval oarecare, determinarea intervalelor de creştere şi descreştere ale funcţiilor, etc.

În acest capitol vom examina următoarele teme:

§ 1 Cunoştinţe generale despre inecuaţii
General Information About Inequalitie

§ 2 Proprietăţile inegalităţilor numerice
Properties of Numerical Inequaliti

§ 3 Inegalităţi duble
Double Inequalities

§ 4 Rezolvarea inecuaţiilor cu o variabilă
The Solution to Inequalities With One Variable

§ 5 Reuniunea şi intersecţia mulţimilor. Intervale numerice
Combination and Section. Numeric Intervals

§ 6 Sisteme de inecuaţii cu o variabilă
Systems of Inequalities With One Variable

§ 7 Demonstrarea inegalităţilor
Inequalities Proof

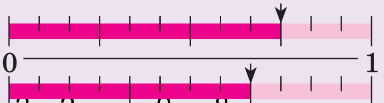
Proiectul de învăţământ Nr. 1
«Inecuaţii interesante»

Aplicăm competenţele obţinute

Reamintim cum se compar numerele pentru a înţelege şi a însuşi bine tema nouă.

Cunoaşteţi deja că:

$\frac{1}{8} < \frac{3}{8}$

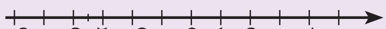


$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, bo $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$

$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

Din două numere pe dreapta de coordonate mai mare este acela, care este amplasat mai la dreapta, iar mai mic este acela care este amplasat mai la stânga.



$-3{,}5 < -2$, $\quad -6 < 4$

§ 1 CUNOŞTINŢE GENERALE DESPRE INEGALITĂŢI

Permanent noi comparăm ceva: vitezele internetului, preţul călătoriei, diagonalele monitoarelor, înălţimile clădirilor, rezultatele întrecerilor, cantităţile punctelor EIE, etc. Modelul matematic al relaţiilor «mai mare» şi «mai mic» este inegalitatea. De exemplu, distanţa de la Kiev până la Harkiv (d_1 = 407 km) este mai mare decât distanţa de la Kiev până la Luţk (d_2 = 368 km). Aceasta se scrie astfel:

$$407 > 368 \text{ sau } d_1 > d_2.$$

Dacă numărul a este mai mic sau mai mare decât numărul b, atunci se scrie respectiv $a < b$ sau $a > b$. De exemplu,

$$3 < 5, \ -7 > -13.$$

Conţinutul corelaţiilor «mai mare» şi «mai mic» se poate dezvălui prin definiţia următoare:

Numărul *a* e mai mare decât *b* dacă diferenţa *a* – *b* este număr pozitiv; numărul *a* e mai mic decât *b* dacă diferenţa *a* – *b* este număr negativ.

Deoarece diferenţa $a - b$ poate fi pozitivă, negativă sau egală cu zero, pentru orice valori reale ale numerelor a şi b se realizează una şi numai una din trei corelaţii:

$$a > b, \ a < b \text{ sau } a = b.$$

Folosind definiţia de mai sus, se pot compara numerele, adică se poate stabili care din ele este mai mare şi care – mai mic. De exemplu, pentru a compara fracţiile $\frac{4}{9}$ şi $\frac{11}{25}$, aflăm diferenţa:

$$\frac{4}{9}-\frac{11}{25}=\frac{4\cdot 25-11\cdot 9}{9\cdot 25}=\frac{1}{225}.$$

Diferenţa fracţiilor date este un număr pozitiv, deci $\frac{4}{9}>\frac{11}{25}$.

Pe axa de coordonate numărului mai mic îi corespunde un punct, care se află la stânga de punctul care îi corespunde numărului mai mare. De exemplu, figura 1 corespunde corelaţiilor următoare:

$$c < a,\ a < b,\ c < b.$$

Fig. 1

Inegalitatea este modelul matematic abstract al relaţiilor mai mare – mai mic, mai jos – mai sus, mai scurt – mai lung, mai îngust – mai larg, mai subţire – mai gros, mai ieftin – mai scump, mai tânăr – mai în vârstă şi a multor altor. Afară de semnele < (mai mic) şi > (mai mare) se folosesc des şi semnele: ≤ – mai mic sau egal (nu este mai mare), ≥ – mai mare sau egal (nu este mai mic).

Înscrierea $a \le b$ semnifică, că $a < b$ sau $a = b$. Înscrierea $a \ge b$ semnifică, că $a > b$ sau $a = b$.

De exemplu, se poate afirma că $2 \le 5$, $4 \ge 4$, $-\frac{1}{2} \le -0{,}5$.

Semnele < şi > se numesc ***semnele inegalităţii stricte.*** Ele sunt opuse una alteia: dacă $a < b$, atunci $b > a$ şi invers. Semnele ≤ şi ≥ tot sunt opuse, ele se numesc ***semnele inegalităţii nestricte***. Oricare din semnele <, >, ≤ şi ≥ se numeşte ***semn al inegalităţii.***

Două expresii unite cu semnul inegalităţii formează o *inegalitate.*

Exemplu de inegalităţi: $3<\sqrt{10}$, $a^2 + b^2 \ge 2ab$, $3x - 5 > 0$.

Expresia care este în partea stângă sau în cea dreaptă de semnul inegalităţii se numeşte respectiv partea stângă sau dreaptă a inegalităţii. De exemplu, partea stângă a inegalităţii $5x + 4 < 8$ este expresia $5x + 4$, iar cea dreptă – numărul 8 (orice număr se consideră tot expresie).

Dacă ambele părţi ale inegalităţii sunt expresii numerice, ea se numeşte *inegalitate numerică.* Astfel de inegalităţi pot fi adevărate sau false. De exemplu, din inegalităţile 2 < 3, ;2 ≥ 1, –3 < –5 primele două sunt adevărate, iar a treia falsă, deoarece numărul –3 este mai mare decât –5.

Inegalităţile cu variabile pentru unele valori ale variabilelor pot fi adevărate, iar pentru altele – false. De exemplu, inegalitatea $2x + 3 > 5$ este adevărată dacă x este egal cu 2, 3, 4, 5, iar dacă x este egal 1, 0, –1, –2 este falsă. Se spune că valorile 2, 3, 4, 5 satisfac inegalitatea dată, iar 1, 0, –1, –2 nu o satisfac.

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

Afară de semnele indicate ale inegalităţii ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$) des se aplică şi semnul $\neq$ (nu-i egal). Dacă, de exemplu, corelaţia «nu e mai mare» ($a \leq b$) denotă $a < b$ sau $a = b$, atunci corelaţia «nu-i egal» ($a \neq b$) semnifică $a < b$ sau $a > b$.

Relaţia «nu-i egal» se deosebeşte principial de «nu e mai mare». Pentru toate relaţiile egalităţii şi inegalităţii pe care le indică semnele $=$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ se îndeplineşte proprietatea *tranzitivă,* adică din $a \leq b$ şi $b \leq c$ reiese că $a \leq c$. Dar pentru relaţia «nu-i egal» această proprietate poate să nu se realizeze: din $a \neq b$ şi $b \neq c$ nu totdeauna reiese că $a \neq c$. De exemplu, $2 \neq 3$ şi $3 \neq 2$, dar relaţia $2 \neq 2$ este falsă, incorectă. De aceea, în continuare, vorbind despre inegalităţi, vom avea în vedere două numere sau expresii unite prin orice semn $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, dar nu cu semnul $\neq$.

Verificaţi-vă

1. Conform cărei condiţie numărul a este mai mare decât c?
2. Ce este inegalitate?
3. Ce feluri de inegalităţi sunt? Daţi exemple.
4. Care inegalităţi se numesc stricte, iar care – nestricte?
5. Ce înseamnă înscrierile $a \leq b$, $a \geq b$? Citiţi-le.

Efectuăm împreună

1 Care din numerele a şi b este mai mic, dacă:

a) $a - b = (-1)^2$; b) $a = b - 3$; c) $a - 5 = b$?

- **Rezolvare**. a) $a - b = (-1)^2 = 1$ (număr pozitiv), deci, $b < a$; b) aflăm diferenţa numerelor a şi b: $a - b = -3$ (număr negativ), deci, $a < b$;

c) $a - b = 5$ (număr pozitiv), deci, $b < a$.

Răspuns. a) $b < a$; b) $a < b$; c) $b < a$.

2 Care este condiţia ca expresia $4 - (2x + 3)^2$ să obţină cea mai mare valoare?

- **Rezolvare**. Expresia dată are cea mai mare valoare dacă scăzătorul este cel mai mic. Iar expresia $(2x + 3)^2$ are cea mai mică valoare, dacă $2x + 3 = 0$, adică pentru $x = -1,5$.

Răspuns. Dacă $x = -1,5$.

3 Care diferenţă este mai mare şi de câte ori:

$2017^{2018} - 2017^{2017}$ sau $2017^{2017} - 2017^{2016}$?

● **Rezolvare**. $2017^{2018} - 2017^{2017} = 2017^{2017}(2017 - 1) = 2016 \cdot 2017^{2017}$;
$2017^{2017} - 2017^{2016} = 2017^{2016}(2017 - 1) = 2016 \cdot 2017^{2016}$;
$(2016 \cdot 2017^{2017}) : (2016 \cdot 2017^{2016}) = 2017$.

Răspuns. Prima diferenţă este mai mare decât a doua de 2017 ori.

Efectuaţi oral

1. Care din numerele x şi y este mai mic, dacă:
a) $x - y = 1$; b) $x - y = -1$; c) $y - x = 2$; d) $y - 5 = x$?

2. Punctele K, L, M cu coordonatele k, l, m sunt situate pe axa de coordonate aşa, cum este arătat pe figura 2. Comparaţi numerele:

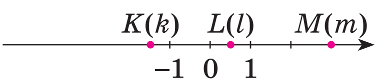


Fig. 2

a) k și m; c) m și l; e) k și l;
b) k i 1; d) 0 și l; f) m și -1.

3. Oare este adevărată inegalitatea:
a) $2 \geq 2$; b) $-3 < -5$; c) $3 \leq 2$; d) $-5 \leq -2$?

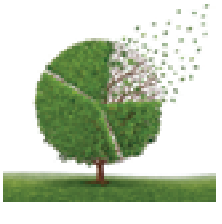
4. Comparaţi numerele:
a) 1,28 și $\frac{5}{4}$; b) 0,02 și $1\frac{1}{50}$; c) $-\frac{1}{3}$ și $-0{,}33$; d) 1,6 și $\frac{5}{3}$.

5. Comparaţi fracţiile:
a) $\frac{5}{7}$ și $\frac{3}{7}$; b) — și $-\frac{4}{5}$; c) $\frac{5}{6}$ și $\frac{6}{7}$; d) $-\frac{7}{13}$ și $-\frac{13}{27}$.

6. Oare totdeauna valoarea 1;x e mai mică decât valoarea respectivă a lui x:
a) $\frac{1}{x}$; b) $\sqrt{x}$?

7. ***Problemă deschisă***. Ca simbol al pierderii unei părţi din piaţă sau al altor probleme financiare sau economice se folosesc diagramele circulare în formă de copaci verzi cu frunze care cad (fig. 3). Compuneţi probleme după figurile 3, *a* şi 3, *b*.

Fig. 3

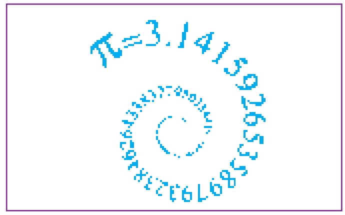

a


b

NIVELUL A

8. Care din numerele a şi b este mai mare, dacă:
a) $a - b = 0{,}01$; c) $a = 2{,}3 + b$; e) $a - b = 0$;
b) $a - b = -3{,}7$; d) $b - a = (-3)^2$; f) $b = a + 1$?

9. Comparaţi numerele m şi n, dacă:
a) $m - n = 0{,}5$; c) $m - 4 = n$;
b) $n - m = 5$; d) $m + 3 = n$.



10. Comparaţi numerele x şi y, dacă:
a) $y - x = -1$; c) $x = y - 3$;
b) $x - y = 7$; d) $y - x = 0$.

11. Care inegalitate este adevărată:

a) $-7 > -5$; c) $\sqrt{5} \le \pi$; e) $\sqrt{2\frac{1}{4}} \ge 1{,}5$;

b) $4{,}3 \ge -3{,}4$; d) $\frac{1}{0{,}5} > 0{,}5$; f) $\pi \le 3{,}14$?

12. Punctele cu coordonatele a, b, c sunt situate pe axa de coordonate astfel, cum este arătat pe figura 4. Care din numerele a, b, c este cel mai mare, care — cel mai mic? Oare sunt adevărate inegalităţile:
a) $a < b$; c) $c < a$;
b) $b < c$; d) $b \ge c$?

Fig. 4

13. Comparaţi numerele:
a) $\frac{10}{11}$ şi $\frac{19}{20}$; c) $\frac{48}{49}$ şi $0{,}98$; e) $\frac{2}{15}$ şi $\frac{9}{17}$;
b) $\frac{28}{29}$ şi $\frac{29}{30}$; d) $-\frac{7}{9}$ şi $-\frac{9}{7}$; f) $-\frac{5}{7}$ şi $-\frac{1}{3}$.

14. Aranjaţi în ordinea descrescătoare numerele:
$3{,}1$; π; $\sqrt{10}$; $2+\sqrt{2}$; $5-\sqrt{3}$.

15. Aranjaţi în ordine crescătoare numerele:

2; $\sqrt{5}$; -12; $2\frac{1}{2}$; 0; -3π.

16. Care număr $1{,}5$; $1\frac{29}{50}$; $\frac{\pi}{2}$; $\sqrt{10}:2$; $\sqrt{7}\cdot 0{,}5$ —e cel mai mare?

17. Comparaţi valorile expresiilor $2x + 3$ şi $3x - 2$, dacă:
a) $x = -1$; b) $x = 0$; c) $x = 5$; d) $x = 7$.

18. Comparaţi valorile funcţiei $y = 2x - 1$, dacă:
a) $x = 1$ і $x = 2$; b) $x = -1$ і $x = -2$; c) $x = 0{,}1$ і $x = 0{,}2$.

19. Comparaţi valorile funcţiei $y = x^2$, dacă:
a) $x = -20$ і $x = 20$; b) $x = -2$ і $x = -1$; c) $x = -8$ і $x = 0$.

20. Demonstraţi, că $10^{11} - 10^{10} > 10^{10} + 10^9$.

21. Este oare adevărată inegalitatea $3x - 2 < 7$, dacă:
a) $x = 4$; b) $x = 3$; c) $x = 2$; d) $x = 0$?

22. Care inegalitate este adevărată în cazul când $x = 10$:
a) $0{,}5x + 1 > 3$; b) $-7x + 3 < x$; c) $3 - x \geq x - 17$?

23. Oare este adevărată inegalitatea pentru toate valorile reale ale lui c:
a) $c^2 + 3 > 0$; b) $(c + 2)^2 > 0$; c) $(c - 1)^2 \geq 0$?

24. Demonstraţi, că pentru fiecare valoare a lui n:
a) $n^4 + 1 > 0$; b) $(n - 5)^2 \geq 0$; c) $n^2 - 2n + 1 \geq 0$.

25. Selectaţi câteva valori ale variabilei x care satisfac inecuaţia:
a) $2x + 3 < 0$; b) $3 - x^2 > 0$; c) $x + \frac{1}{x} < 1$.

NIVELUL B

26. Scrieţi numerele în ordine crescătoare:
$(-\pi)^2$; $\sqrt{2}$; -1^2; $1\frac{2}{3}$; $-\sqrt{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $(-2)^3$; $\sqrt{81}$; -5; $(-3)^0$.

27. Scrieţi numerele în ordine descrescătoare:
-2π; $\sqrt{10}$; 297^0; $\left(-\frac{5}{2}\right)^2$; $\frac{1}{0{,}3}$; $\frac{\pi}{10}$; 0^{297}; $(-2)^5$; π; $-\frac{25}{4}$.

28. Comparaţi valorile expresiilor $5m + 1$ şi $19 - 3m$, dacă:
a) $m = 2$; b) $m = \sqrt{7}$; c) $m = 1 - \sqrt{2}$; d) $m = 1 + \sqrt{3}$.

29. Comparaţi valorile funcţiilor $y = 12 + 45x$ şi $y = \frac{12}{x}$, dacă:
a) $x = \frac{3}{5}$; b) $x = -\frac{1}{2}$; c) $x = -\frac{2}{3}$; d) $x = \frac{2}{5}$.

30. Care diferenţă este mai mare şi de câte ori:
$2019^{2020} - 2019^{2019}$ чи $2019^{2019} - 2019^{2018}$?

31. Demonsraţi, că inegalitatea este adevărată pentru fiecare a:
a) $(a - 3)^2 + 2 > 0$; c) $4a^2 - 4a + 1 \geq 0$;
b) $(2a + 1)^2 + 0{,}5 > 0$; d) $9a^2 + 2 > 6a$.

32. Ce este mai mare: pătratul sumei a două numere pozitive sau suma pătratelor lor?

33. În ce condiţie expresia $1 + (2x - 3)^2$ are cea mai mică valoare?

34. În ce condiţie expresia $1 - (2x - 3)^2$ are cea mai mare valoare?

35. Cum sunt situate pe axa de coordonate punctele $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ şi $D(d)$, dacă:
a) $a > b$, $a + b = 2d$ i $b + d = 2c$;
b) $a < b$, $2a = b + c$ i $2d = a + b$?

36. Selectaţi câteva valori ale variabilei n care satisfac inecuaţia:
a) $3n - 2 > 2n - 3$; b) $5n + 8 \leq 8n - 1$.

37. Suma a două numere inverse este egală cu 2,5. Aflaţi cel mai mare număr din ele:

38. Se va mări sau se va micşora valoarea fracţiei $\dfrac{2}{5}$, dacă la numărătorul şi numitorul ei se va aduna unul şi acelaşi număr natural? Daţi exemple.

39. Care din numerele a şi b este mai mare, dacă:
a) $a + 7{,}8 = b + 3{,}5$; c) $8{,}5 - a = 7{,}3 - b$;
b) $a - 4{,}5 = b - 2{,}3$; d) $2a + 3{,}5 = b - 3{,}5$?

40. Care din numerele pozitve x şi y este mai mare, dacă:
a) $2{,}5x = 3{,}2y$; c) $x : 3{,}8 = y : 2{,}6$;
b) $5{,}3 : x = 7{,}1 : y$; d) $2x - 3y = 5{,}4$?

41. Şapte caiete costă mai scump decât 9 creioane. Ce este mai scump: 12 caiete sau 15 creioane?

42. Patru prietene – Domnica Gherman, Elena Cazacu, Jana Cerchez şi Zina Costaş împreună cu fraţii lor au venit la patinoar. Fiecare frate era mai înalt decât sora. Ei s–au împărţit în perechi şi au început a patina. S-a constatat, că în fiecare pereche «cavalerul» era mai înalt decât «domnişoara» şi nimeni nu patina cu sora sa. Cel mai înalt între prieteni era Andrei Gherman, iar cea mai joasă – Domnica. Se ştie că Jana şi Victor Cerchez sunt mai înalţi decât Ionel Costaş, dar mai mici la statură decât Elena. Cu cine patina Vasile Cazacu?

43. Comparaţi valorile expresiilor:
a) $a^2 + 36$ i $12a$; c) $b^2 + 2$ i $2b + 1$;
b) $4(x + 1)$ i $(x + 2)^2$; d) $(y - 3)^2$ i $(y - 2)(y - 4)$.

44. Comparaţi numerele nenegative a şi b, dacă:
a) $a^2 \geq b^2$; b) $b - a = a - b$; c) $a - b = a + b$.
Examinaţi toate cazurile posibile.

Exerciţii pentru repetare

Calculaţi (45–47).

45. a) $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+12\frac{2}{15}\right):\frac{1}{15}$;

c) $\left(1-\frac{2}{3}\right):\frac{2}{3}+\left(\frac{4}{5}-1\right)\cdot 5$;

b) $\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{10}+\frac{1}{20}\right):1\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$;

d) $\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{2}\right):\frac{3}{4}-5:\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\right)$.

46. a) $2^{13}\cdot 0{,}5^{13}$; c) $0{,}5^{12}\cdot(-2)^{13}$; e) $0{,}1^{-21}\cdot 10^{-20}$;
b) $25^7\cdot 0{,}04^7$; d) $-5^{32}\cdot 0{,}2^{32}$; f) $0{,}2^{-41}\cdot(-0{,}5)^{-40}$.

47. a) $\sqrt{5^2-4^2}$; c) $\sqrt{3^2+4^2}$; e) $\sqrt{45{,}8^2-44{,}2^2}$;
b) $\sqrt{13^2-12^2}$; d) $\sqrt{21{,}8^2-18{,}2^2}$; f) $\sqrt{8{,}2^2-1{,}8^2}$.

Aduceţi la forma cea mai simplă expresiile (**48–50**).

48. a) $(c-5)(c+2)+3c+10$; e) $(c^3-2c)(2c+c^3)+4c^2$;
b) $(x^2+ax+a^2)(x-a)+a^3$; d) $(x^2-y)(x-y^2)-y^3+xy$;
c) $(a^2-a+1)(a+1)-a^3$; f) $(x^2-6x+9)^2-(x-3)^4$.

49. a) $\frac{a^2-1}{a^3+1}\cdot\left(a+\frac{1}{a-1}\right)+\left(a+\frac{1}{a}+1\right)\cdot\left(a+\frac{1}{a}-1\right)$;

b) $\left(\frac{a}{ab-b^2}+\frac{b}{a^2-ab}\right)\cdot\frac{a^2b-ab^2}{a^2+b^2}-1$.

50. a) $\sqrt{a}+\sqrt{4a}+\sqrt{9a}$; d) $\left(\sqrt{15}+2\right)^2-\sqrt{240}$;

b) $7\sqrt{x}-\sqrt{9x}+\sqrt{25x}$; e) $\sqrt{6+\sqrt{20}}-\sqrt{6-\sqrt{20}}$;

c) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{60}$; f) $\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{5-\sqrt{24}}$.

51. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $x^2+8x+15=0$; d) $z^2-9z+14=0$;

b) $x^2+10x+21=0$; e) $\frac{3x-1}{3x+1}=2-\frac{x-3}{x+3}$;

c) $y^2-7y-18=0$; f) $\frac{3c}{3c-2}+\frac{2c-9}{2c-5}=2$.

52. Rezolvaţi sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases}\frac{4}{x-2}-\frac{1}{y-6}=0,\\ \frac{3}{x+5}+\frac{2}{y-3}=2;\end{cases}$

b) $\begin{cases}\frac{3}{x+3}-\frac{2}{y}=0,\\ \frac{4}{x-1}-\frac{5}{y+1}=1.\end{cases}$

53. Construiţi graficele funcţiilor:

a) $y = 3 - x$; b) $y = \frac{6}{x}$; c) $y = x^2$; d) $y = -\sqrt{x}$.

Aflaţi domeniul de definiţie şi codomeniul valorilor fiecăriei funcţii.

54. Amintiţi-vă, care proprietăţi ale funcţiilor aţi examinat în clasele precedente. Privind graficul funcţiei (fig. 5), explicaţi, pe care intervale ea creşte, descreşte, pe care este pozitivă, negativă. Indicaţi valoarea cea mai mare a funcţiei.

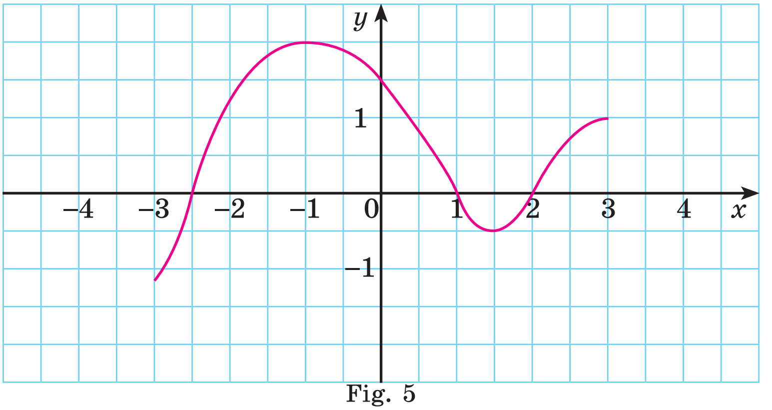


Fig. 5

55. Într-o soluţie care conţine 40 g de sare s-au turnat 200 g de apă, după ce concentraţia ei s-a micşorat cu 10 %. Care era concentraţia soluţiei la început?

Comoara succeselor

✓ Ştiu că:

$a > b$, dacă $a - b$ este număr pozitiv
$a < b$, dacă $a - b$ este număr negativ

✓ Ştiu că:

înscrierea $a \leq b$, semnifică, că $a < b$ sau $a = b$
înscrierea $a \geq b$, semnifică, că $a > b$ sau $a = b$

✓ Ştiu să deosebesc şi se dau exemple de astfel de inegalităţi:

Stricte	Nestricte	Numerice	Cu variabile
$12 > 7$, $x < y$	$-3 \leq 5$, $a \geq a$	$3 > 0$, $1{,}5 < 5{,}1$	$2x - 5 < 1$, $a \geq 7a$

✓ Doresc să mă învăţ a aplica cunoştinţele care se referă la inegalităţi pentru demonstrarea inegalităţilor

Aplicăm competenţele obţinute

Pentru a înţelege şi a însuşi bine tema nouă, ne amintim:
– Ce este inegalitatea numerică (p. 9).
– În ce condiţie numărul a este mai mare decât b:

$a > b$, dacă $a - b$ este număr pozitiv.

– În ce condiţie numărul a este mai mic decât b:

$a < b$, dacă $a - b$ este număr negativ.

— Proprietăţile funcţiilor $y = \sqrt{x}$ i $y = \frac{k}{x}$.

§ 2 Proprietăţile inegalităţilor numerice

Examinăm o situaţie din viaţă. O familie tânără a hotărât să depună lunar o sumă oarecare în bancă sub procente. Soţia a aflat, că cota în procente pentru depozit în banca A este mai mică decât în banca B, iar soţul ştia, cota în procente pentru depozit în banca C este mai mică, decât în banca A. Care bancă, după părerea voastră, va alege această familie pentru păstrarea resursele băneşti, dacă toate celelalte condiţii ale depozitului în băncile A, B şi C sunt identice?

Răspunsul la această întrebare se poate argumenta, aplicând teorema 1.

Examinăm proprietăţile inegalităţilor numerice şi le demonstrăm pentru inegalităţile care conţin semnul «<».

Teorema 1. Dacă $a < b$ **şi** $b < c$, **atunci** $a < c$.

Demonstraţie. Dacă $a < b$ şi $b < c$, atunci numerele $a - b$ şi $b - c$ sunt negative. Suma lor $(a - b) + (b - c) = a - c$ tot este număr negativ. Iar dacă $a - c$ e număr negativ, atunci $a < c$. Aceasta şi trebuia de demonstrat.

Teorema 1 manifestă *proprietatea tranzitivităţii* a inegalităţilor cu acelaşi semn.

Exemplu. Întrucât $\sqrt{1,9} < \sqrt{2}$ şi $\sqrt{2} < 1,42$, atunci $\sqrt{1,9} < 1,42$.

Teorema 2. Dacă la ambele părţi ale inegalităţii adevărate de adunat unul şi acelaşi număr, atunci obţinem o inegalitate adevărată.

De exemplu, dacă $a < b$ şi c este un număr real arbitrar, atunci $a + c < b + c$.

Demonstraţie. Dacă $a < b$, atunci $a - b$ e un număr negativ. Deoarece $a - b = (a + c) - (b + c)$, atunci diferenţa $(a + c) - (b + c)$ tot e un număr negativ. Aceasta înseamnă că $a + c < b + c$.

Teorema 3.
Dacă ambele părţi ale inegalităţii adevărate de înmulţit cu unul şi acelaşi număr pozitiv, atunci obţinem o inegalitate adevărată.
Dacă ambele părţi al inegalităţii adevărate de înmulţit cu unul şi acelaşi număr negativ şi de schimbat semnul inegalităţii în opus, atunci obţinem o inegalitate adevărată.

Demonstraţie. Fie $a < b$ şi c un număr pozitiv arbitrar. În acest caz numerele $a - b$, $(a - b)c$ sunt numere negative, adică, $ac < bc$.

Dacă $a < b$ şi c este un număr negativ arbitrar, atunci produsul $(a - b)c$, deci şi diferenţa $ac - bc$ sunt numere pozitive. De aceea $ac > bc$.

Exemple. a) $3 < 4$ şi $5 > 0$, de aceea $3 \cdot 5 < 4 \cdot 5$ sau $15 < 20$; b) $3 < 4$ şi $-2 < 0$, de aceea $3 \cdot (-2) > 4 \cdot (-2)$ sau $-6 > -8$.

Deoarece împărţirea poate fi înlocuită prin înmulţirea cu numărul invers împărţitorului, atunci în teorema 3 cuvântul «înmulţit» poate fi înlocuit cu cuvântul «împărţit».

Dacă $a < b$ şi $c > 0$, atunci $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$; dacă $a < b$ şi $c < 0$, atunci $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$;

Teorema 4. Inegalităţile cu aceleaşi semne se pot aduna parte cu parte.

De exemplu, dacă $a < b$ şi $c < d$, atunci $a + c < b + d$.

Demonstraţie. Dacă $a < b$ şi $c < d$, atunci după teorema a 2–a $a + c < b + c$ şi $b + c < b + d$, de unde după teorema 1 $a + c < b + d$.

Exemplu. $2 < 3$ şi $5 < 7$, de aceea $2 + 5 < 3 + 7$ sau $7 < 10$.

Teorema 5. Inegalităţile cu aceleaşi semne se pot înmulţi parte cu parte, dacă părţile lor din stânga şi din dreapta sunt numere pozitive.

De exemplu, dacă $a < b$, $c < d$ şi numerele a, b, c, d sunt pozitive, atunci $ac < bd$.

Demonstraţie. Fie $a < b$ şi $c < d$, iar numerele c şi b – pozitive. Conform teoremei nr. 3 $ac < bc$ şi $bc < bd$, de unde după teorema nr.1 $ac < bd$.

Remarcă. Teoremele nr. 4 şi nr. 5- sunt adevărate şi pentru trei sau mai multe inegalităţi. De exemplu, dacă $a < b$, $c < d$ şi $n < m$, atunci $a + c + n < b + d + m$.

Demonstraţia teoremelor nr.1–5 pentru inegalităţi cu semnul «<« aproape cuvânt cu cuvânt se pote repeta pentru inegalităţile asemănătoare cu semnul «>«, «≥» sau «≤».

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

Oare se pot ridica la pătrat sau la cub ambele părţi ale inegalităţii? Fie a şi b numere pozitive; înmulţim parte cu parte inegalităţile $a < b$ şi $a < b$. Obţinem $a^2 < b^2$. Înmulţim părţile ultimei inegalităţi cu $a < b$ şi obţinem $a^3 < b^3$ ş. a. m. d. Deci, dacă numerele a şi b sunt pozitive, iar n – natural, atunci din inegalitatea $a < b$ rezultă $a^n < b^n$.

Dacă cel puţin unul din numerele a şi b este negativ, atunci din inegalitatea $a < b$ nu totdeauna rezultă $a^n < b^n$. De exemplu $-3 < 2$, dar inegalităţile $(-3)^2 < 2^2$, $(-3)^4 < 2^4$ sunt false.

Expresia «dacă numerele a şi b sunt pozitive şi $a < b$» poate fi scrisă mai pe scurt:
«dacă $0 < a < b$».

Cercetați dacă totdeauna este adevărată afirmația:
«dacă $0 < a < b$, atunci $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ».

Verificaţi-vă

1. Formulaţi şi demonstraţi teorema despre tranzitivitatea inegalităţilor.

2. Formulaţi şi demonstraţi teorema despre adunarea la ambele părţi ale inegalităţii a unuia şi aceluiaşi număr.

3. Formulaţi teorema despre înmulţirea ambelor părţi ale inegalităţii cu unul şi acelaşi număr.

4. Formulaţi teorema despre adunarea părţilor inegalităţii cu aceleaşi semne.

5. Formulaţi teorema despre înmulţirea părţilor inegalităţilor cu aceleaşi semne.

Efectuăm împreună

1 Se ştie că numerele a şi b sunt pozitive şi $a < 3$, $b < 6$. Demonstraţi că $ab < 20$.

- **Rezolvare.** Deoarece numerele a şi b sunt pozitive, inegalităţile $a < 3$ şi $b < 6$ se pot înmulţi: $a \cdot b < 3 \cdot 6$, sau $ab < 18$. Dacă $ab < 18$, iar $18 < 20$, atunci $ab < 20$.

2 Oare rezultă din inegalităţile $a < 3$ şi $b < 6$ inegalitatea $ab < 20$, dacă cel puţin unul din numere a şi b este negativ?

- **Rezolvare.** Dacă unul din numerele a şi b este negativ, iar al doilea – pozitiv, atunci produsul ab este negativ. În acest caz inegalitatea $ab < 20$ este adevărată.

Dacă ambele numere a şi b sunt negative, atunci inegalitatea $ab < 20$ poate fi atât adevărată, cât şi falsă. De exemplu, dacă $a = -1$, $b = -2$, atunci
$(-1) \cdot (-2) < 20$, deci, inegalitatea este adevărată. Dacă $a = -7$, $b = -10$, atunci inegalitatea $(-7) \cdot (-10) < 20$ este falsă.

Răspuns. Nu.

3 Se ştie, că $m \geq -5$. Valoarea expresiei $-3m - 20$ este pozitivă sau negativă?

● **Rezolvare.** Înmulţim ambele părţi ale inegalităţii $m \geq -5$ cu -3, obţinem $-3m \leq 15$ (proprietatea 4). Adunăm la ambele părţi ale acestei inegalităţi numărul -20: $-3m - 20 \leq 15 - 20$ (proprietatea a 2-a), de aici $-3m - 20 \leq -5$, deci $-3m - 20 < 0$.

Răspuns. Negativă.

Efectuaţi oral

56. Care din numerele a şi c este mai mare dacă: a) $a - c < 0$; b) $a - c > 2$?

57. Privind figura 6, spuneţi, valoarea cărei expresii este mai mare: a sau $a + 2b$; b sau $b - 2a$

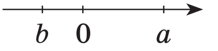


Fig. 6

58. Comparaţi numerele x şi z, dacă:
a) $x < y$ şi $y < z$; b) $x > y$ şi $y > z$; c) $x \leq a$ i $a \leq z$.

59. Numărul n este pozitiv sau negativ, dacă:
a) $3n < 3{,}5n$; b) $-1{,}5n > -n$; c) $0{,}2n < -n$?

60. Care din fracţiile $\frac{1}{a}$ şi $\frac{1}{b}$ este mai mare, dacă $b < a < 0$?

61. Care din două fracţii negative $\frac{x}{y}$ şi $\frac{y}{x}$ este mai mică, dacă $|x| < |y|$?

62. Numărul $a > 1$. Ce număr este: $3a$, $-a$, $1 - a$, $1 + 2a$?

63. Numărul $x < -1$. Ce număr este: $5x$, $5 - x$, x^4, $2 + x^2$?

Nivelul A

64. Comparaţi numerele a şi b dacă diferenţele:
a) $a - c$ şi $c - b$ sunt numere pozitive;
b) $b - c$ şi $c - a$ sunt numere negative;
c) $a - n$ şi $n - b$ sunt numere nenegative.

65. Comparaţi numerele a şi b dacă:

a) $a - c > 0$ şi $b - c < 0$; b) $a - x \leq 0$ şi $x - b \leq 0$.

66. Indicaţi cum sunt situate pe axa de coordonate punctele cu coordonatele a, b, c şi d, dacă $a < c$, $b > c$, $d > b$.

67. Scrieţi inegalitatea adevărată, formată în rezultatul:
a) adunării la ambele părţi ale inegalităţii $12 < 18$ a numărului 5;
b) scăderii din ambele părţi ale inegalităţii $12 < 18$ a numărului 77;
c) înmulţirii ambelor părţi ale inegalităţii $12 < 18$ cu 3; cu -5;
d) împărţirii ambelor părţi ale inegalităţii $12 < 18$ la 3; la -6.

68. ***Problema deschisă.*** Compuneţi câteva probleme, care ilustrează proprietăţile inegalităţilor numerice şi se referă la activitatea omului.

69. Se ştie că $a > b$. Înlocuiţi * cu semnul inegalităţi

a) $2a * 2b$; c) $-a * -b$; e) $-\frac{1}{2}a * -\frac{1}{2}b$;

b) $1,5a * 1,5b$; d) $-3a * -3b$; f) $2a^3 * 2b^3$.

70. Numărul a este pozitiv sau negativ, dacă:

a) $2a < 3a$; b) $0,5a > a$; c) $-5a < -4a$?

71. Adunaţi părţile respective ale inegalităţilor:

a) $5 < 12$ şi $7 < 8$; c) $5 < 6$ şi $x < z$;

b) $3 < 6$ şi $-3 < -2$; d) $a < b$ şi $x \leq z$.

72. Înmulţiţi termenii respectivi ai inegalităţilor:

a) $2 < 3$ şi $5 < 8$; c) $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ şi $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$;

b) $-4 < -1$ şi $-5 < -4$; d) $5 < 7$ şi $\frac{1}{7} < \frac{1}{5}$.

> *«Matematica este ştiinţa care cere cea mai multă fantezie ».*
> S. V. Kovalevska

73. Comparaţi numerele pozitive $\frac{c}{a}$ şi $\frac{c}{b}$, dacă $a < b$ i $c > 0$.

Nivelul B

74. Se ştie că $m < n$. Comparaţi numerele:

a) $m + 7$ şi $n + 7$; d) $1 - m$ şi $1 - n$;

b) $-0,1m$ şi $-0,1n$; e) $5m - 1$ şi $5n - 1$;

c) $\sqrt{(-1)^2}m$ şi $\sqrt{(-1)^2}n$; f) $-2n - 1$ şi $-1 - 2m$.

75. Se ştie, că $x > y > z$. Înlocuiţi * cu semnul inegalităţii:

a) $\sqrt{x} * \sqrt{y}$; c) $(1-\sqrt{2})x * (1-\sqrt{2})y$; e) $\frac{1}{x} * \frac{1}{y}$;

b) $x^2 * xy$; d) $\frac{y}{x} * 1$; f) $\frac{x^2y}{y-x} * \frac{xy^2}{y-x}$.

76*. Se ştie, că $x < y < 0$. Înlocuiţi * cu semnul inegalităţii:

a) $x^3 * y^2$; c) $\sqrt{-x} * \sqrt{-y}$; e) $\frac{x}{x-y} * \frac{y}{x-y}$;

b) $-x * 10y$; d) $\frac{1}{x^2} * \frac{1}{y}$; f) $\frac{x+1}{xy} * \frac{y+1}{xy}$.

77. Demonstraţi, dacă:

a) $x > y$ şi $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, atunci $x > 0$ şi $y < 0$; b) $a < b$ şi $ab < 0$, atunci $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

78. Aranjaţi în ordine crescătoare numerele $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$, dacă ele toate sunt pozitive şi $a < c$, $d < b$ şi $d > c$.

79. Aranjaţi în ordine crescătoare numerele $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$, acă ele toate sunt negative şi $a > c$, $d > b$ şi $d < c$.

80. Demonstraţi, dacă:
a) $a \le b$ şi $b \le c$, atunci $a \le c$;
b) $a \le b$ şi $c > 0$, atunci $ac \le bc$;
c) $a \le b$ şi $c < 0$, atunci $ac \ge bc$.

81. Oare este adevărat, că pentru valori pozitive ale lui a şi b:
a) din $a < b$ rezultă $a^2 < b^2$;
b) din $a^2 < b^2$ rezultă $a < b$;
c) din $a < b$ rezultă $\sqrt{a} < \sqrt{b}$;
d) din $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ rezultă $a < b$?

82. **Sarcina practică.** 1) Construiţi un trapez şi un paralelogram. Măsuraţi laturile şi diagonalele fiecărui din aceste patrulatere. Clarificaţi, dacă este adevărată afirmaţia: «Perimetrul patrulaterului este mai mare decât suma diagonalelor lui». 2) Demonstraţi, că: a) diagonala patrulaterului este mai mică decât semiperimetrul lui; b) suma diagonalelor patrulaterului este mai mică decât perimetrul lui. Examinaţi două cazuri (fig. 6 şi 7).

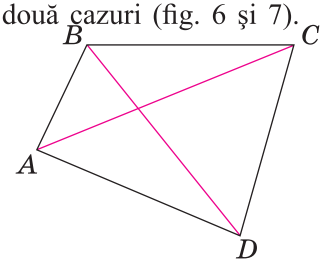


Fig. 6

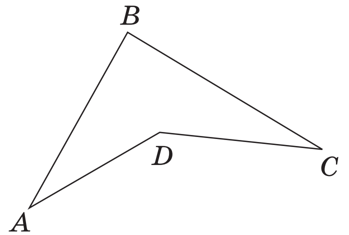


Fig. 7

83.

1. Adunarea inecuaţiei $-12 < 9$ cu inecuaţia dată	**A** $-12 < 10$
2. Împărţirea ambelor părţi ale inecuaţiei date la 3	**B** $-13 < 7$
3. Scăderea inecuaţiei $5 < 8$ din inecuaţia dată	**C** $-30 < 6$
4. Înmulţirea ambelor părţi ale inecuaţiei date cu $\frac{2}{3}$	**D** $-26 < 10$
	E $6 > -5$

84. Folosind identitatea $x - y = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$, $x \ge 0$ şi $y \ge 0$, demonstraţi: dacă $\sqrt{x} > \sqrt{y}$, atunci $x > y$.

85. Demonstraţi, dacă:

a) $m > n > 0$, atunci $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$;

b) $m < n < 0$, atunci $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$.

86. Oare este adevărat că pentru valori arbitrare ale lui a şi b:

a) din $a > b$ rezultă $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

b) din $a < b$ rezultă $|a| > |b|$?

Exerciţii pentru repetare

87. Sunt date punctele A (–3; 14), B (3; 14), C (–2; 20), D (2; 20). Oare trece graficul funcţiei $y = x^2 - 5x + 6$ prin aceste pucte?

88. Pentru care valori ale lui n graficul funcţiei $y = x^2 - 3x + n$ trece prin punctul M (3; 7)? Prin punctul K (–2; 3)?

89. Descompuneţi în factori trinomul:

a) $x^2 + 2x - 35$;

b) $6x^2 - x - 1$;

c) $6a^2 + a - 2$;

d) $c^2 + \sqrt{2}c - 4$.

90. ***Jocul sudoku.*** Copiaţi tabelul în caiet (fig. 8). Completaţi pătrăţelele libere cu cifre de la 1 până la 9 astfel, ca în fiecare rând, în fiecare coloniţă şi în fiecare pătrat 3×3 evidenţiat, fiecare cifră să fie înscrisă numai o dată.

2	4		3		7			
				5	4	3	2	
7		3				5	8	
9				6			3	
8	3	6		1	5		4	2
			9	3		7		
6	1			9				
				7	1	4	6	
3	7		8	4				5

Fig. 8

Comoara succeselor

✓ Cunosc proprietăţile inegalităţilor numerice şi pot să le demonstrez.

Dacă $a < b$ şi $b < c$, atunci $a < c$	Dacă $a < b$ şi $c > 0$, atunci $ac < bc$
Dacă $a < b$ atunci $a + c < b + c$	Dacă $a < b$ şi $c < 0$, atunci $ac > bc$

✓ Ştiu să aplic proprietăţile inegalităţilor numerice.

$12 > 7$, $3 > 0$ $36 > 21$	$12 > 7$, $-2 < 0$ $-24 < -14$

✓ Doresc să mă învăţ a aplica proprietăţile inegalităţilor numerice pentru demonstrarea inegalităţilor.

Aplicăm competenţele obţinute

Pentru a înţelege şi a însuşi bine tema nouă, ne amintim proprietăţile inegalităţilor numerice. Dacă

$a < b$ şi $b < c$, atunci $a < c$;

$a < b$ şi c este un număr arbitrar, atunci $a + c < b + c$;

$a < b$ şi $c > 0$, atunci $ac < bc$;

$a < b$ şi $c < 0$, atunci $ac > bc$;

$a < b$ şi $c < d$, atunci $a + c < b + d$;

$a < b$, $c < d$ şi a, b, c, d sunt numere pozitive, atunci $ac < b$

§ 3 Inegalităţi duble

Ucraina este o ţară cosmică. Vitezele cosmice sunt vitezele minime ale aparatului cosmic, după care el:

- poate deveni satelit al Pământului (prima viteză cosmică: $V_1 = 7{,}9$ km/s);
- poate învinge atracţia gravitaţională a Pământului (viteza a doua cosmică $V_2 = 11{,}2$ km/s);
- poate părăsi sistemul Solar, în care se află Pământul (viteza a treia cosmică $V_3 > 16{,}67$ km/s).

Corelaţia dintre aceste viteze se poate scrie astfel:

$V_1 < V_2 < V_3$.

Dacă inegalităţile $a < x$ şi $x < b$ sunt adevărate, atunci ele pot fi scrise în formă de ***inegalitate dublă***: $a < x < b$. Inegalitatea dublă are trei părţi: stângă, din mijloc şi dreptă şi două semne de inegalitate. Exemple de inegalităţi duble:

$3 < x < 4$ (x este mai mare decât 3 şi mai mic decât 4);

$2a + 3 < x + 3 \leq 5c$ ($x + 3$ e mai mare decât $2a + 3$ şi nu-i mai mare decât $5c$).

Teorema 6. Dacă la fiecare parte a inegalităţii duble adevărate de adunat unul şi acelaşi număr, atunci vom obţine o inegalitate dublă adevărată.

Demonstraţie. Dacă $a < x < b$, atunci sunt adevărate inegalităţile $a < x$ şi $x < b$. Conform teoremei a 2–a pentru orice număr real c sunt adevărate inegalităţile

$a + c < x + c$ şi $x + c < b + c$. Deci, $a + c < x + c < b + c$.

Numărul c poate fi pozitiv, dar şi negativ. De exemplu:
dacă $2{,}5 < x - 3 < 2{,}6$ şi $c = 3$, atunci $5{,}5 < x < 5{,}6$;
dacă $0{,}7 < x + 1 < 1{,}2$ şi $c = -1$, atunci $-0{,}3 < x < 0{,}2$.

În mod similar se pot demonstra următoarele afirmaţii:

- dacă $a < x < b$ şi $k > 0$, atunci $ka < kx < kb$;
- dacă $a < x < b$ şi $k < 0$, atunci $kb < kx < ka$;
- dacă $a < x < b$ şi $c < y < d$, atunci:

$$a + c < x + y < b + d;$$
$$a - d < x - y < b - c;$$
$$ac < xy < bd \text{ (când } a > 0 \text{ şi } c > 0);$$
$$\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c} \text{ (când } a > 0 \text{ şi } c > 0).$$

De exemplu, dacă $4 < x < 6$ şi $2 < y < 3$, atunci

$$4 + 2 < x + y < 6 + 3 \text{ sau } 6 < x + y < 9,$$
$$4 \cdot 2 < x \cdot y < 6 \cdot 3 \text{ sau } 8 < x \cdot y < 18,$$
$$4 - 3 < x - y < 6 - 2 \text{ sau } 1 < x - y < 4;$$
$$\frac{4}{3} < \frac{x}{y} < \frac{6}{2}, \text{ sau } \frac{4}{3} < \frac{x}{y} < 3.$$

Atrageţi atenţia la scăderea şi împărţirea inegalităţilor duble! Din termenul mai mic al primei inegalităţi se scade termenul mai mare al celei de a doua, iar din cel mai mare – cel mai mic. Termenul mai mic al primei inegalităţi se împarte la termenul mai mare al celei de a doua, iar cel mai mare – la cel mai mic.

Proprietăţile studiate dau posibilitatea de a aduce la o formă mai simplă inegalităţile duble. De exemplu, în locul inegalităţii duble $16 < 3x - 2 < 19$ se poate examina inegalitatea $18 < 3x < 21$ sau şi mai simplu: $6 < x < 7$.

Este potrivit de folosit inegalităţile duble pentru ***aprecierea valorilor*** mărimilor sau expresiilor. Valoarea mărimilor, la fel ca masa, distanţa, timpul şi altele totdeauna sunt aproximative. Este dificil, bunăoară, de derminat înălţimea copacului cu exactitate până la un decimetru. De aceea se indică, de exemplu, că ea este mai mare decât 9,2 m, dar mai mică decât 9,4 m. Aceasta se scrie în forma inegalităţii duble: $9{,}2 < h < 9{,}4$.

Atrageţi atenţia la fragmentul etichetei care este amplasată pe sticla cu ulei (fig. 9).

Fig. 9

Această înscriere semnifică că masa uleiului din sticlă nu poate fi mai mică decât 790 g şi mai mare decât 810 g. Cu ajutorul inecuaţiei duble masa uleiului (m) fără sticlă poate fi scrisă aşa: $790 \text{ g} \le m \le 810 \text{ g}$.

Aplicând proprietăţile inegalităţilor duble, se pot aprecia şi valorile expresiilor $x + y$, $x - y$, xy, $\frac{x}{y}$.

Fie, de exemplu, $3{,}5 < x < 3{,}6$ şi $2{,}1 < y < 2{,}2$. Atunci $3{,}5 + 2{,}1 < x + y < 3{,}6 + 2{,}2$ sau $5{,}6 < x + y < 5{,}8$ (fig. 10).

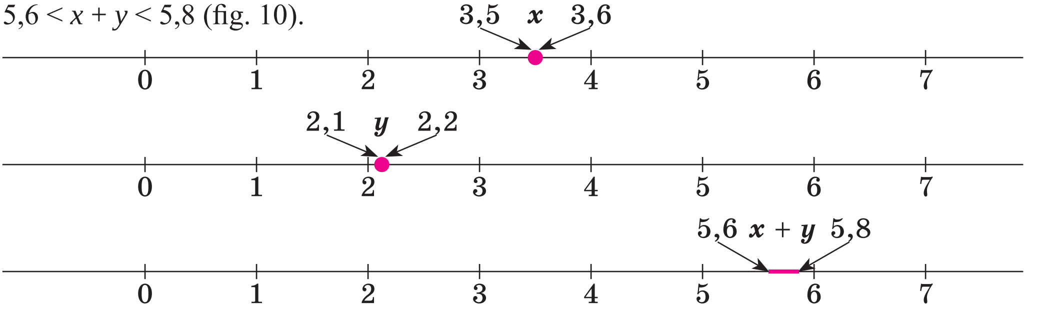


Fig. 10

$3{,}5 - 2{,}2 < x - y < 3{,}6 - 2{,}1$, sau $1{,}3 < x - y < 1{,}5$;

$3{,}5 \cdot 2{,}1 < xy < 3{,}6 \cdot 2{,}2$, sau $7{,}35 < xy < 7{,}92$;

$\frac{3{,}5}{2{,}2} < \frac{x}{y} < \frac{3{,}6}{2{,}1}$, sau $1{,}59 < \frac{x}{y} < 1{,}72$.

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

Cu ajutorul inegalităţilor duble se poate scăpa de modul în inecuaţiile de tipul $|x| < a$ şi $|x| \le a$, unde $a > 0$.

De exemplu, inegalitatea $|x| < 3$ este satisfăcută de toate valorile lui x care au modulul mai mic decât 3. Astfel de numere sunt numerele pozitive mai mici decât 3, numerele negative mai mari decât –3 şi numărul 0. Această mulţime de numere poate fi scrisă cu ajutorul inegalităţii duble astfel: $-3 < x < 3$.

Asemănător poate fi scrisă inegalitatea $|x| \le 3$: $-3 \le x \le 3$.

Atrageţi atenţia! Orice inegalitate de tipul $|M| < a$, unde $a > 0$ şi M – o expresie oarecare poate fi scrisă în formă de inegalitate dublă: $-a < M < a$.

Dar, de exemplu, inegalitatea $|x| > 3$ nu poate fi scrisă în formă de inegalitate dublă. De ce?

Verificaţi-vă

1. Daţi exemple de inegalităţi duble.
2. Ce înseamnă «a aprecia valoarea mărimii»?
3. Cum, cu ajutorul inegalităţilor duble, se poate aprecia valoarea aproximativă a sumei sau a produsului a două valori ale mărimii?
4. Cum, cu ajutorul inegalităţilor duble, se poate aprecia valoarea aproximativă a diferenţei (câtului) a două valori ale mărimii?

Efectuăm împreună

1 Se ştie, că $10 < x < 12$. Ce valori poate obţine expresia: a) $3x - 5$; b) x^2?

● **Rezolvare.** a) Înmulţim toate părţile inegalităţii cu 3:
$3 \cdot 10 < 3 \cdot x < 3 \cdot 12$ sau $30 < 3x < 36$.
Scădem din toate părţile inegalităţii 5:
$30 - 5 < 3x - 5 < 36 - 5$ sau $25 < 3x - 5 < 31$.
b) Deoarece toate părţile inegalităţii date sunt pozitive putem să le ridicăm la pătrat: $100 < x^2 < 144$.
Răspuns. a) $25 < 3x - 5 < 31$; b) $100 < x^2 < 144$.

2 Apreciaţi valoarea expresiei $0{,}2a - b$ dacă $5 < a < 15$ şi $2 < b < 7$.

● **Rezolvare.** Dacă $5 < a < 15$ atunci $1 < 0{,}2a < 3$.
Dacă $2 < b < 7$, atunci $-2 > -b > -7$ sau $-7 < -b < -2$.
Adunăm părţile respective ale inegalităţilor obţinute: $-6 < 0{,}2a - b < 1$.
Răspuns. $-6 < 0{,}2a - b < 1$.

Efectuaţi oral

91. Citiţi inegalitatea dublă:
a) $4 < a < 7$; b) $0 < 0{,}5 < 1$; c) $-3 < x < 3$.

92. Oare sunt adevărate inegalităţile duble:
a) $-7 < 0 < 7$; b) $0 < 5 < 10$; c) $-1 < -2 < -3$?

93. Oare satisfac valorile $x = 3$ şi $x = -3$ condiţia:
a) $0 < x < 2x$; b) $-x < x^2 < 3x$; c) $-x < x^2 < -x^3$?

94. Care valori întregi ale lui a satisfac inegalităţile duble:
a) $-1 < a < 1$; b) $-2 < a < 2$; c) $0{,}1 < a < 1$?

95. Oare există valori ale lui x mai mari decât $\frac{8}{9}$, dar mai mici decât $\frac{6}{7}$?

96. Aflați perimetrul triunghiului echilateral, dacă latura lui este mai mare decât 1,8 m şi mai mică decât 2,1 m. Poate oare aria unui astfel de triunghi fi egală cu $\sqrt{3}$ m^2?

Nivelul A

97. Scrieţi în formă de inegalitate dublă corelaţiile:
a) $x < 12$ şi $x > 3$; b) $x > -2$ şi $x < 2$; c) $x < 30$ şi $x > -0{,}3$.

98. Oare există valori ale lui c care sunt: a) mai mici decât -3 şi mai mari decât $-\sqrt{10}$; b) mai mari decât 10^{-2} şi mai mici decât 10^2? Dacă sunt scrieţi inegalitatea dublă respectivă

99. Se ştie, că $4 < n < 5$. Aflați valoarea expresiilor:
a) $n + 3$; b) $n - 5$; c) $2n$; d) $-3n$; e) n^2.

100. Ştiind că $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, aflați valoarea expresiilor:
a) $2+\sqrt{3}$; b) $\sqrt{3}-1$; c) $-\sqrt{3}$; d) $2\sqrt{3}$.

101. Latura pătratului este egală cu a cm, unde $4{,}2 < a < 4{,}3$. Aflați perimetrul şi aria lui.

102. *Problemă deschisă.* Studiaţi eticheta de pe borcanul cu sos de tomate (fig. 11). Încercați să îmbunătăţiţi caracteristicele numerice pe ea, folosind diferite tipuri de inegalităţi.

ermenul de valabilitate:
3 ani de la data producerii.
Condiţii de păstrare: la t de la 0 ° pânâ la 25 °C
şi umiditatea relativă a aerului nu > 75 %
Produsul deschis de-l păstrat în frigider.
De dorit a-l consuma în decurs de 7 zile.
Data producerii şi numărul lotului
sunt indicate pe capac.

Fig. 11

103. Aflați valoarea diferenţelor $x - y$, dacă;
a) $12 < x < 13$ şi $5 < y < 6$;
b) $0{,}32 < x < 0{,}33$ şi $0{,}25 < y < 0{,}27$.

104. Aflați valoarea produselor xy, dacă;
a) $3 < x \le 4$ şi $5 \le y \le 7$;
b) $-2 < x < -1$ şi $-3 < y < -1$.

105. Aflați valoarea câturilor $x : y$, dacă;
a) $12 < x < 15$ şi $5 < y < 6$;
b) $6 < x < 8$ şi $2 < y < 3$.

106. Se ştie, că $-3 \le x \le 5$. Ce valori pot primi expresiile:
a) $2x + 3$; b) $0{,}1x - 2$; c) $2 - x$; d) $10 - 0{,}1x$?

107. După măsurarea lungimii a şi lăţimii b ale dreptunghiului (în metri) s-a constatat, că $1{,}3 < a < 1{,}4$, $0{,}6 < b < 0{,}8$. Aflați perimetrul şi aria acestui dreptunghi.

108. Lungimea muchiei cubului este c mm şi $1{,}53 \cdot 10^2 < c < 1{,}54 \cdot 10^2$. Aflați: a) suma lungimilor tuturor muchiilor cubului; b) aria suprafeţei cubului; c) volumul cubului. Rezultatul rotunjiţi-l până la zecimi.

109. 1) Pe figura 12 este reprezentat planul unui apartament. Se ştie, că tot apartamentul, la fel şi salonul au formă pătrată. Aflați aria salonului, dormitorului şi a apartamentului, dacă $4{,}9$ m $< x < 5{,}1$ m, $2{,}9$ m $< y < 3{,}1$ m.

2) ***Problemă deschisă***. Efectuaţi măsurările necesare şi aflaţi aria S şi perimetrul P: a) camerei în care locuiţi; b) ferestrei din această cameră.

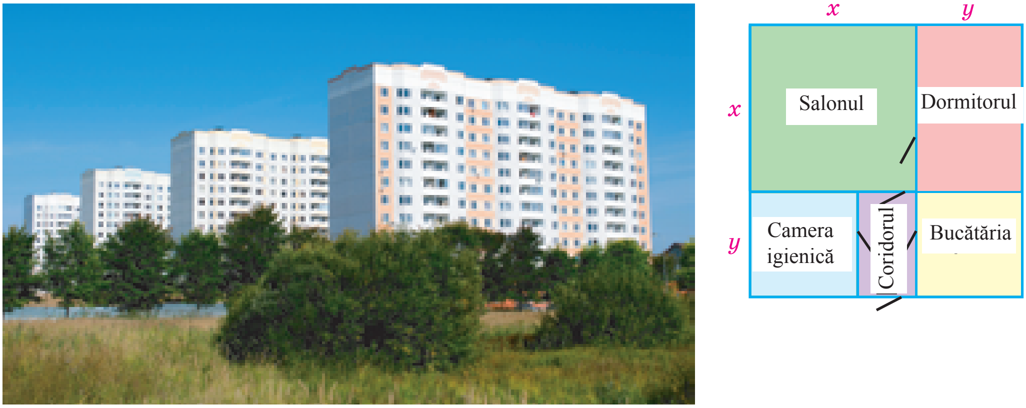


Fig. 12

Nivelul B

110. Se știe, că $1,4<\sqrt{2}<1,5$ și $2,2<\sqrt{5}<2,3,$ Aflați:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$; b) $\sqrt{5}\quad\sqrt{2}$; c) $2-\sqrt{2}$; d) $\sqrt{5}:\sqrt{2}$.

111. Fie α și β unghiurile unui triunghi, $62°<\alpha<63°$; $95°<\beta<96°$. Aflați măsura unghiului al treilea.

112. Se știe, că $3,14<\pi<3,15$. Aflați lungimea circumferinței și aria cercului, dacă raza este mai mare decât 2,5 dm și mai mică decât 2,6 dm.

113. Se știe, că $10 < x < 12$. Ce valori întregi pot primi expresiile:

a) $2x$; b) $\frac{x^2}{5}$; c) $3x - 5$; d) $\frac{12}{x}$?

114. Se știe, că $3 < x < 4$ și $1,2 < y < 1,3$. Ce valori întregi pot primi expresiile:

a) $(x + y)^2$; b) $\sqrt{xy}$; c) $y^2 - x$; d) $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$?

115. În ce limite se află valoarea expresiei $\frac{3x-2}{x}$, dacă:

a) $1 < x < 4$; b) $-5 < x < 0$; c) $-10 \le x \le 10$?

116. Se știe, că $-\frac{3}{4}<m<\frac{5}{6}$ și $3 < n < 10$. Ce valori pot primi expresiile:

a) $2m + 3n$; b) $4m - n$; c) $m + n^2$; d) $n^2 - m$?

117. Catetele a și b ale triunghului dreptunghic sunt astfel că $8,4 < a < 8.5$, $6,5 < b < 6,6$. Aflați aria acestui triunghi și perimetrul lui.

118. Sarcină practică. Scrieţi în formă de inegalitate dublă valoarea ariei figurii reprezentate pe figura 13.

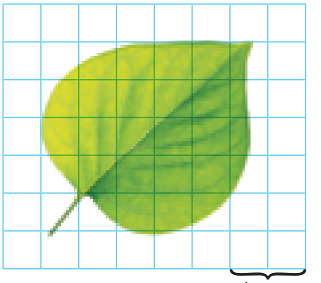


Fig. 13

119. Demonstraţi afirmaţiile:

a) dacă $a < x < b$, atunci $-b < -x < -a$;

b) dacă $a < x < b$ şi $a > 0$, atunci $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$;

c) dacă $a < x < b$ şi $a > 0$, atunci $a^2 < x^2 < b^2$.

120. Demonstraţi afirmaţiile:

a) dacă $a < b$, atunci $a < \frac{a+b}{2} < b$;

b) dacă $0 < a < b$, atunci $a < \sqrt{ab} < b$.

121*. Scrieţi inegalităţile cu moduli în formă de inegalităţi duble:

a) $|x| < 3$; b) $|x| \le 5$; c) $2|x| < \pi$; d) $|x| - 7 \le -6$.

122*. Scrieţi inegalităţile cu moduli în formă de inegalităţi duble şi aduceţi-le la forma cea mai simplă:

a) $|2x - 1| < 3$; b) $|2 - 0,5x| \le 2,5$; c) $|\sqrt{x} - 5| < 1$.

Exerciţii pentru repetare

123. La ora 10 din oraşul A spre oraşul B a plecat un motociclist, iar la 11 la fel din A spre B – un automobil. La ce oră automobilul va ajunge din urmă motociclistul, dacă el a sosit în B la ora 13, iar motociclistul la ora 14?

124. Scrieţi în formă standard masa:

a) Lunii 73 500 000 000 000 000 000 t;

b) Soarelui 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 t.

125. Rezolvaţi sistemele de ecuaţii: a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ x + y = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$

Comoara succeselor

✓ Pot da exemple de inegalităţi duble.

✓ Înţeleg cum se scriu şi se citesc inegalităţile duble.

✓ Ştiu:

– a efectua operaţii cu inegalităţi;

– a aduce la formă mai simplă inegalităţile duble;

– să aflu valoarea mărimilor;

– să aflu valoarea expresiilor

$$\begin{array}{r} 3 \le x + 1 < 7 \\ + \;\; -1 \le y < 1 \\ \hline 2 \le x + y + 1 < 8 \\ 1 \le x + y < 7 \end{array}$$

Aplicăm competenţele obţinute

Pentru a înţelege şi însuşi bine tema nouă, ne amintim:
– Conţinutul relaţiilor «mai mare», «mai mic», «nu mai mare», «nu mai mic».
– Tipurile inecuaţiilor (stricte, nestricte, numerice, cu variabile)
– Proprietăţile inecuaţiilor numerice (p. 17, 23).
– Cum se rezolvă ecuaţiile liniare (p. 255).
– Care ecuaţii se numesc echivalente (p. 255).

§ 4 Rezolvarea inecuaţiilor cu o variabilă

Din clasele precedente ştiţi că egalităţile cu variabile sunt de două tipuri: identităţi şi ecuaţii. Identităţile se demonstrează, ecuaţiile - se rezolvă. La fel se deosebesc două tipuri de inegalităţi cu variabile: ***inegalităţi identice*** şi ***inegalităţi cu necunoscute***. **Inegalitatea cu necunoscute se numeşte inecuaţie.** Inegalităţile identice se demonstrează (vezi § 7), iar inecuaţiile se rezolvă.

Examinăm inecuaţia $5x - 2 > 8$ cu variabila x. Dacă vom substitui x cu numărul 1 vom obţine o inegalitate numerică falsă $5 - 2 > 8$. Se spune că valoarea $x = 1$ inecuaţia dată nu o satisface. Dacă în locul lui x vom înlocui numărul 3, atunci obţinem o inegalitate adevărată $5 \cdot 3 - 2 > 8$. Valoarea $x = 3$ inecuaţia dată o satisface, numărul 3 este soluţia inecuaţiei $5x - 2 > 8$.

Soluţie a inecuaţiei **cu o variabilă se numeşte valoarea acestei variabile care satisface această inecuaţie.**

A rezolva o inecuaţie înseamnă a determina toate soluţiile ei sau a demonstra că ele nu sunt.

La rezolvarea inecuaţiei ea se înlocuieşte cu alte inecuaţii mai simple şi echivalente cu cea dată.

Două inecuaţii se numesc *echivalente* dacă ele au unele şi aceleaşi soluţii, adică, dacă fiecare soluţie a primei inecuaţii o satisface pe a doua, iar fiecare soluţie a inecuaţiei a doua o satisface pe prima. Inecuaţiile care nu au soluţii de asemenea se consideră echivalente.

De exemplu, inecuaţia $5x - 2 > 8$ este echivalentă cu fiecare din inecuaţiile:

$$5x > 2 + 8,\ 5x > 10,\ x > 2.$$

Inecuaţiile au multe proprietăţi asemănătoare cu proprietăţile ecuaţiilor.

1. Dacă dintr-o parte a inecuaţiei vom trece în alta un termen cu semnul opus, vom obţine o inecuaţie echivalentă cu cea dată.

2. Dacă ambele părţi ale inecuaţiei le înmulţim sau le împărţim la unul şi acelaşi număr pozitiv, obţinem o inecuaţie echivalentă cu cea dată.

3. Dacă ambele părţi ale inecuaţiei le înmulţim sau le împărţim la unul şi acelaşi număr negativ, schimbând semnul relaţiei în opus, obţinem o inecuaţie echivalentă cu cea dată.

Aceste proprietăţi ale inecuaţiilor rezultă din teoremele demonstrate în § 2. Folosind aceste proprietăţi, inecuaţiile pot fi rezolvate ca şi ecuaţiile.

Exemplul 1. Rezolvaţi inecuaţia $5x < 2x + 15$.

Rezolvare. Trecem termnul $2x$ în partea stângă a inecuaţiei:

$$5x - 2x < 15.$$

Reducem termenii asemenea:

$$3x < 15.$$

Împărţim ambele părţi ale inecuaţiei la 3:

$$x < 5.$$

Răspuns. Fiecare număr real mai mic decât 5 satisface inecuaţia.

Exemplul 2. Rezolvaţi inecuaţia $7(2 - x) \leq 3x + 44$.

Rezolvare. $14 - 7x \leq 3x + 44$,

$-7x - 3x \leq -14 + 44$,

$-10x \leq 30$,

$x \geq -3$.

Răspuns. Inecuaţia satisface fiecare număr nu mai mic decât –3.

Remarcă. Mulţimea soluţiilor inecuaţiilor este comod de a o scrie în formă de ***intervale***. Mulţimea tuturor numerelor reale mai mici decât 5 se numeşte intervalul de la minus infinit până la 5 şi se notează $(-\infty; 5)$. Pe figura 14 acest interval este marcat prin haşurare, valoarea 5 care nu aparţine mulţimii soluţiilor este marcată printr-un cerculeţ deschis.

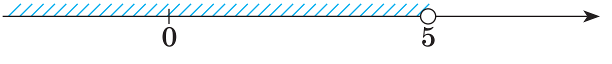


Fig. 14

Mulţimea tuturora numerelor reale nu mai mici decât –3 se numeşte intervalul de la –3 până la infinit, care include şi –3. El se notează $[-3; \infty)$, se reprezintă intuitiv cum este arătat pe fig. 15; valoarea –3 care aparţine mulţimii de soluţii este marcată printr-un cerculeţ negru.

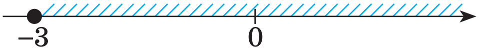


Fig. 15

Deci, răspunsurile inecuaţiilor rezolvate se pot scrie şi cu ajutorul intervalelor: $(-\infty; 5)$, $[-3; \infty)$.

După cum ştiţi din toate ecuaţiile cele mai simple sunt cele liniare de forma $ax = b$. Cele mai simple inecuaţii cu o necunoscută tot sunt liniare.

Dacă a şi b sunt numere date, iar x este variabila necunoscută, atunci fiecare din inecuaţiile

$$ax < b, \quad ax > b, \quad ax \leq b, \quad ax \geq b \qquad (*)$$

se numeşte *inecuaţie liniară* cu o variabilă x.

Exemple de inecuaţii liniare:

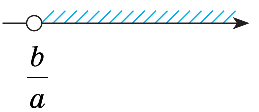
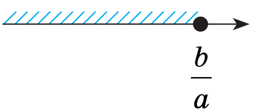
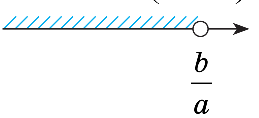
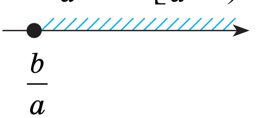
$$2x < 3, \quad -7x > 14, \quad 0{,}5x \leq 1, \quad 9x \geq 0.$$

Ecuaţiile liniare se scriu uneori şi astfel:

$$ax - b < 0, \quad ax - b > 0, \quad ax - b \leq 0, \quad ax - b \geq 0.$$

Dacă numărul a este diferit de zero, fiecare din inecuaţiile (*) are o mulţime de soluţii, căreia îi corespunde o semiaxă numerică nesfârşită (sau semidreaptă fără vârf).

Dependenţa soluţiilor inecuaţiei liniare de valoarea coeficientului variabilei şi a semnului inecuaţiei este dată în tabel:

$ax > b$	$ax \leq b$
Dacă $a > 0$, atunci $x > \frac{b}{a}$, $x \in \left(\frac{b}{a}; \infty\right)$ 	Dacă $a > 0$, atunci $x \leq \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$ 
Dacă $a < 0$, atunci $x < \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$ 	Dacă $a < 0$, atunci $x \geq \frac{b}{a}$, $x \in \left[\frac{b}{a}; \infty\right)$ 

Dacă $a = 0$, fiecare inecuaţie (*) sau nu are soluţii (de exemplu, $0x > 5$), sau mulţimea soluţiilor ei este mulţimea tuturor numerelor reale (de exemplu, $0x < 5$).

Atrageţi atenţia! Reprezentarea intervalelor numerice se poate face şi prin alt procedeu – cu arcuri – cum sunt reprezentate pe figurile 16 –17.

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

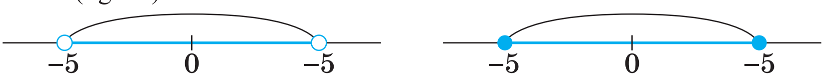
Rezolvarea celor mai simple inecuaţii cu moduli se reduce la rezolvarea inegalităţilor liniare.

Rezolvăm inecuaţiile:

a) $|x| < 5$; b) $|x| > 3$; c) $|x| \leq -2$; d) $|x| > -0{,}5$.

a) Toate valorile lui x, modulul cărora sunt mai mici decât 5, satisfac inecuaţia. Acestea sunt toate numerele pozitive mai mici decât 5, toate numerele negative mai mari decât –5 şi numărul 0. O astfel de mulţime de numere pot fi scrise cu ajutorul inegalităţii duble $-5 < x < 5$. Pe axa numerică acestei mulţimi de numere îi corespunde intervalul ilustrat pe figura 16, *a*. Numerele 5 şi –5 nu aparţin acestui interval, ele nu satisfac inecuaţia dată, dar inecuaţia $|x| \leq 5$ o satisfac (fig. 16, *b*).

b) Inecuaţia $|x| > 3$ o satisfac toate numerele mai mari decât 3 şi toate numerele mai mici decât –3 (fig. 17).



a *b*

Fig. 16

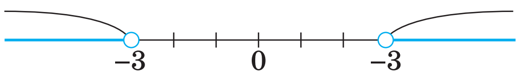


Fig. 17

c) Modulul fiecărui număr este număr nenegativ, el nu poate fi mai mic decât numărul negativ –2 sau egal cu –2. De aceea inecuaţia nu are soluţii.

d) Fiecare număr nenegativ este mai mare decât –0,5. De aceea inecuaţia dată o satisface fiecare număr real.

Verificaţi-vă

1. Daţi exemple de inecuaţii.
2. Ce se numeşte soluţie a inecuaţiei?
3. Câte soluţii poate avea inecuaţia cu o variabilă?
4. Cum se scriu mulţimile soluţiilor inecuaţiei?

Efectuăm împreună!

1 Rezolvaţi inecuaţia $2x + 3 < 2(x + 3)$.

● **Rezolvare** $2x + 3 < 2x + 6,$

$$2x - 2x < 6 - 3,$$

$$0x < 3.$$

Inecuaţia $0x < 3$ este adevărată pentru fiecare valoare a lui x.

Răspuns. $(-\infty;\ \infty)$.

2 Rezolvaţi inecuaţia $6z + 7 \geq 2(3z + 4)$.

● **Rezolvare.** $6z + 7 \geq 6z + 8,$
$$6z - 6z \geq 8 - 7,$$
$$0z \geq 1.$$
Inegalitatea $0z \geq 1$ nu este satisfăcută de nici o valoare a lui z.

Răspuns. Soluţii nu are.

3 Rezolvaţi inecuaţia $\frac{x-5}{6}+\frac{x-8}{3}>\frac{5x}{2}-1.$

● **Rezolvare**. Înmulţim ambele părţi ale inecuaţiei cu 6 (cel mai mic multiplu comun al numerelor 6, 3 şi 2):
$$x - 5 + 2(x - 8) > 3 \cdot 5x - 6,$$
$$x - 5 + 2x - 16 > 15x - 6,$$
$$x + 2x - 15x > -6 + 5 + 16,$$
$$-12x > 15,$$
$$x < -\frac{15}{12},$$
$$x < -1{,}25.$$
Răspuns. $(-\infty; -1{,}25)$.

4 Rezolvaţi inecuaţia dublă: $-2 \leq 10x - 3 \leq 5$.

● **Rezolvare** $-2 + 3 \leq 10x - 3 + 3 \leq 5 + 3,$
$$1 \leq 10x \leq 8,$$
$$0{,}1 \leq x \leq 0{,}8.$$
Răspuns. $[0{,}1;\ 0{,}8]$.

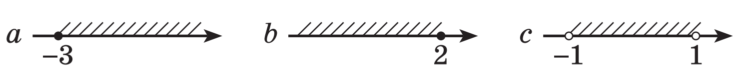
Efectuaţi oral

126. Care din numerele 0, 1, 2, 3, 4, 5 satisfac inecuaţia::
a) $2x - 5 > 0$; b) $4x + 1 \leq 13$; c) $3x + 4 \geq 5$?

127. Rezolvaţi inecuaţiile:
a) $2x < 6$; c) $0{,}5z > 2$; e) $x+3<x$;
b) $-3x > 9$; d) $\frac{2}{3}y<10$; f) $x-3\leq x$.

128. Câte soluţii au inecuaţiile:
a) $x^2 + 1 < 0$; c) $|x|\leq 0$; e) $10x < 20$?
b) $|x|<0$; d) $-\sqrt{2}x>2$;

129. ***Problemă deschisă.*** Compuneţi inegalităţi, soluţiile cărora sunt reprezentate pe figura 18.

Fig. 18


Nivelul A

130. Reprezentaţi pe axa de coordonate în formă de intervale mulţimea de numere care satisfac inecuţiile:

a) $x < 4$; b) $x > -1$; c) $x \leq 0{,}5$.

Rezolvaţi inecuaţiile (**131 – 134**).

131. a) $x + 2 > 5$; c) $2 + x \geq 3$; e) $4y < 36$;
b) $x - 4 > 0$; d) $3x > 15$; f) $5z \geq 35$.

132. a) $3x > 15$; c) $2x - 5 \geq 0$; e) $x - 1{,}5 \leq 0$;
b) $x + 7 > 0$; d) $-4x \geq 20$; f) $10 + 5x < 0$.

133. a) $-x < 5$; c) $-x < 0$; e) $-3x > -3$;
b) $-z \geq -4$; d) $-5x \leq 15$; f) $5z \leq -1$.

134. a) $3x + 2 < 5$; c) $9x + 5 > 5$; e) $6z + 1 > 2z$;
b) $7x - 4 \geq 8$; d) $5x - 4 < 3x$; f) $y + 5 < 2y$.

135. Oare sunt echivalente inecuaţiile:
a) $2x + 3 > x + 8$ şi $x > 5$;
b) $2x - 3 \geq 2$ şi $2x - 4 \geq 1$;
c) $3 - 5x < x$ şi $6x > 3$;
d) $3x - 1 < 6 - 2x$ şi $1 - 3x < 2x - 6$?

Rezolvaţi inecuaţiile (**136 – 139**).

136. a) $8x - 3 > 5x + 6$; e) $3 + x > 2x - 3$;
b) $7y - 13 < 5y - 9$; f) $5 - 2y < y + 8$;
c) $2x - 3 \leq 3x - 8$; e) $3 - 5x > 4 - 5x$;
d) $x - 15 \geq 4x + 3$; є) $8 + 6z \leq 13 + 6z$.

137. a) $6x + 21 \leq 5x + 8$; e) $x - 15 < 6x - 10$;
b) $3x + 7 < 7x + 3$; f) $11x - 3 \leq 8x - 15$;
c) $7x - 5 > 3x + 7$; e) $18 - 7x \geq 5x + 30$;
d) $2x - 9 \geq 9x + 5$; є) $17 - x > 10 - 6x$.

138. a) $3(x + 1) > x + 5$; d) $3(x + 2) - 4 > x + 2$;
b) $2(x - 1) + 4 < x + 7$; e) $2(x + 3) \geq 5x - 9$;
c) $4(x - 2) < x + 1$; f) $4(x + 3) - 3x \leq x - 5$.

139. a) $-5(x - 1) < 3 - 7x$; d) $-3(2 + x) + 5x \leq 2x + 1$;
b) $2(3 - x) - x < 7 + 3x$; e) $8 - 3(x - 2) > 4x$;
c) $3(2 - x) > x - 6$; f) $5y < 12 - 4(y + 5)$.

140. În ce condiţie expresiile obţin valori negative:
a) $7 + 5x$; b) $10 - 0{,}5x$; c) $\sqrt{2} - 2x$?

141. În ce condiţie expresiile obţin valori nenegative:
a) $2{,}5 + 0{,}5x$; b) $3{,}9 + 1{,}5x$; c) $1{,}2 - 3x$?

142 În ce condiţie valorile expresiilor date este mai mare decât 10:

a) $3 + 7x$; b) $5{,}4 - 2{,}3x$; c) $12 - x\sqrt{2}$?

143. În ce condiţie valoarea expresiei $3x - 7$ este mai mare decât valoarea expresiei respective:

a) $2x + 1$; b) $5x - 2$; c) $3x - 5$?

Rezolvaţi inecuaţiile (**144 – 147**)

144. a) $\frac{5x}{7} \le 3$; c) $0 > \frac{5x}{11}$; e) $-\frac{x}{2} \le 1$; e) $\frac{2x+5}{7} > 3$;

b) $\frac{-3x}{4} < 5$; d) $\frac{2x}{5} > -3$; f) $\frac{3x-1}{4} \le 2$; є) $\frac{7x-3}{5} \ge x$.

145. a) $\frac{3x}{5} > 2$; c) $\frac{2x}{3} < -4$; e) $\frac{6x+1}{2} > 3$; e) $\frac{3}{5}(x-4) > 12$.

b) $\frac{4x}{7} < 4$; d) $0 \ge \frac{17x}{5}$; f) $\frac{4x-11}{5} \le 0$;

146. a) $(x + 2)^2 > 5x + x^2$; c) $4 - (x - 2)^2 > x - x^2$;

b) $(x + 3)^2 - 2x \ge 5x + x^2$; d) $(7 - x)^2 - x^2 \le x - 11$.

147. a) $(x - 3)^2 \le x^2 - x$; c) $1 - (x + 2)^2 < 5 - x^2$;

b) $(x - 2)^2 + 7x < x^2 - 3x$; d) $(x - 5)^2 - 7 > x^2 + 8$.

148. ***Problemă deschisă.*** Scrieţi trei inecuaţii diferite, mulţimea soluţiilor cărora vor corespunde intervalului reprezentat pe figura 19.

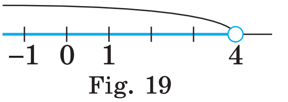


Fig. 19

149. Care este cea mai mare valoare naturală a lui n ce satisface inecuaţia:

a) $18 - 3(n - 15) > 11n$;

b) $0{,}3(n - 2) < 1{,}2 - 0{,}5(n + 2)$?

150. Care este cea mai mică valoare întreagă a lui m ce satisface inecuaţia:

a) $3m + 8(2m - 1) > 5m + 35$;

b) $m^2 + 4m \le (m + 3)^2$?

Nivelul B

151. Pentru ce valori ale lui x valorile funcţiei $y = \frac{2}{3}x - 7$:

a) sunt pozitive; b) sunt negative.;

c) mai mari decât 5; d) nu mai mici decât –1;3? $-\frac{1}{3}$?

152. Pentru ce valori ale lui x valorile funcţiei $y = 5{,}2 - 2{,}5x$ sunt:

a) pozitive; b) negative; c) nu mai mari decât 7,7?

153. Pentru ce valori ale variabilei x au sens expresiile:

a) $\sqrt{3x-6}$; c) $\sqrt{-(2-x)}$; e) $\sqrt{1-5(x+3)}$;

b) $\sqrt{4-x}$; d) $\sqrt{0,5-0,3x}$; f) $x+\sqrt{2-x}$?

Rezolvaţi inecuaţiile (**154–161**).

154. a) $3(x+4)+2(3x-2)>5x-3(2x+4)$;

b) $2x-6-5(2-x)\le 12-5(1-x)$;

c) $x+2<5(2x+8)+13(4-x)-3(x-2)$.

155. a) $y+7>4(2-y)-12(4-2y)+17(y-1)$;

b) $0,2(x-2)-0,3(3-x)\ge 0,4(2x-1)-0,5(x-1)$;

c) $2,5(2-z)-3,5(z-1)\le 2,5(z+2)-1,5(2-z)$.

156. a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}>6$; c) $x+\frac{x}{2}\ge 15$; e) $\frac{3-y}{4}-\frac{y+2}{5}\ge 2$.

b) $\frac{3x}{2}-\frac{x}{3}>2$; d) $\frac{2+x}{3}-\frac{3-x}{2}>0$;

157. a) $\frac{7(x-3)}{2}+5(6-2x)+14<\frac{x-3}{2}$;

b) $3(2x-4)+5(x-2)-3\le\frac{9}{2}(x-2)$.

> Geniul – este un procent de inspiraţie şi nouăzeci şi nouă de procente de transpiraţie.
>
> Th. A. Edison

158. a) $\frac{3(2+c)}{2}-6<\frac{7c-2}{3}-\frac{12+4c}{5}$;

b) $\frac{5z-18}{10}-\frac{27-10z}{14}>\frac{3z-12}{5}-\frac{9-4z}{7}$..

159. a) $(x-2)(x-3)>x^2$; d) $(3x-2)(3+2x)\ge 6x^2$;

b) $(x+5)(x-7)<x^2$; e) $(3x-1)^2\le 9x(x-2)$;

c) $(2x-1)(3x+5)\le 6x^2$; f) $(3x-2)^2\ge(3x+2)^2$.

160. a) $(z-2)^2<(z-3)(z+5)$; c) $\left(\frac{1}{x}+x\right)^2>\frac{1}{x^2}+x^2$;

b) $(y+3)^2\ge y(y-5)$; d) $\left(\frac{1}{x}-x\right)^2>\frac{1}{x^2}+x^2$.

161. a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-3x>\sqrt{2}$; c) $\frac{2x-3}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}>0$;

b) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{x}{2}>\sqrt{2}-1$; d) $\frac{2-\sqrt{2}}{3x+2}<0$.

162. Pe figura 20 sunt reprezentate graficele funcţiilor $y=\sqrt{x}$ i $y=4-\frac{x}{2}$. Privindu-le, indicaţi mulţimea soluţiilor inecuaţiei $\sqrt{x}<4-\frac{x}{2}$.

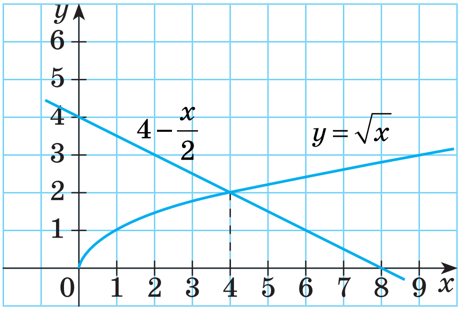


Fig. 20

163. Rezolvaţi grafic inecuaţiile:

a) $\sqrt{x}>\frac{8}{x}$; b) $\sqrt{x}\geq x^2$; c) $\sqrt{x}<x-2$.

164. ***Problemă deschisă.*** Scrieţi inecuaţia cu variabila *x*:
a) care nu are nici o soluţie;
b) pe care o satisface fiecare număr real;
c) pe care o satisface numai numărul 5;
d) pe care o satisfac toate numerele din intervalul (–2; 3).

165. Nişte turişti trebuiau să revină la bază nu mai târziu decât peste 3 h. La ce distanţă pot ei pluti după curentul apei cu o barcă cu motor, dacă viteza proprie a ei este de 18 km/h, iar viteza curentului — 4 km/h?

166*. Rezolvaţi inecuaţiile:
a) $(2x-3)(5x+2)-(3x-1)(4x+2)>2(1-x)(1+x)-x$;
b) $(3x-2)(3x+2)-(2x-3)^2\leq 5x(x+7)+10$;
c) $(4x+1)(3x-5)+(2x+3)(5x-4)<2x^2+5(2x-1)^2$;
d) $(3x+1)^2-(2x-3)(3-2x)\geq(2x+1)^2+(3x-7)(3x+7)$.

167. Rezolvaţi inecuaţiile duble:
a) $-3\leq 5x-1\leq 4$;
b) $1<3x+4<7$;
c) $-5\leq 3-2x<1$;
d) $-\frac{2}{5}<\frac{4x-1}{3}<\frac{3}{5}$;
e) $0,7<3x+1<1,3$;
f) $-3,4\leq 5-2x\leq 1,8$;
e) $-8<7-5x<-3$;
є) $-\frac{2}{3}<\frac{2-0,5x}{5}\leq\frac{1}{3}$.

168. Rezolvaţi inecuaţiile duble şi indicaţi cea mai mare soluţie întreagă a lor:
a) $2<3x-5<7$;
b) $-3\leq 4-2x\leq 3$;
c) $-2\leq 1-3x\leq 4$;
d) $-0,3<2,7+0,1x<1,7$.

Rezolvaţi inecuaţiile (**169** — **170**).

169*. a) $|x|<5$; b) $|x-3|\leq 7$; c) $|2x-3|<1$.

170*. a) $|3x|\leq 1$; b) $|x+7|<3$; c) $|1-5x|\leq 2$.

171*. Pentru fiecare valoare a lui a rezolvaţi inecuaţiile

a) $ax > 5$;
b) $ax \le 0$;
c) $(2a - 1)x < 4a^2 - 4a + 1$;
d) $ax > a$;
e) $a^2x \le 0$;
f) $a^2 + a - 12 \le (9 - a^2)x$.

Exerciţii pentru repetare

172. 1) Iu. O. Mitropolskii a condus Institutul de matematică al ANŞ al Ucrainei 30 de ani din 1958 până în anul 1988. Urmaşul lui a devenit renumitul matematician ucrainean, elevul lui Iu. O. Mitropolskii, numele căruia îl veţi afla, dacă veţi stabili corect corespondenţa dintre numerele primului tabel şi literele celui de al doilea. În rândul doi din tabelul întâi sunt înscrise abscisele, iar în primul rând al tabelului doi – ordonatele respective ale punctelor, care aparţin graficului funcţiei.

$$y = \begin{cases} 3 - 2x - x^2, & x \le 1, \\ x^2 - 6x + 5, & x > 1. \end{cases}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–1	–2	4	3	–3	2,5	–4	1,5	6	–1,5

–5	–4	–3,75	–3	–1,75	0	3	3,75	4	5
Е	О	Л	М	Н	Й	А	О	С	К

2) Folosind punctele obţinute şi formula, construiţi graficul funcţiei date.
3) Alcătuiţi o problemă asemănătoare despre învăţătorul Iu. O. Mitropolskii.

173. Efectuaţi operaţiile: a) $8 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5$; b) $5 \cdot 10^{-8} - 8 \cdot 10^{-7}$; c) $(4{,}2 \cdot 10^9)^2$; d) $(3{,}7 \cdot 10^5) \cdot 2{,}4 \cdot 10^8$.

174. Construiţi graficele ecuaţiilor: a) $xy + 6 = 0$; b) $y^2 - x = 0$.

175. Mai înainte 3 kg de carne costau atât, cât acum costă 2 kg. Cu câte procente s-a scumpit carnea?

Comoara succeselor

✓ Pot da exemple de:
– inecuaţii: $x^2 < 1$ $x + y > 0$
– inecuaţii liniare $2x < 3$ $-x \ge 5$
✓ Deosebesc inegalităţi şi inecuaţii identice.
✓ Înţeleg şi ştiu să formulez proprietăţile inecuaţilor.
✓ Ştiu: – să rezolv inecuaţii liniare cu o necunoscută;
– să scriu soluţiile inecuaţiilor.

Aplicăm competenţele obţinute

Pentru a înţelege şi a însuşi tema nouă, ne amintim

— Cum se notează mulţimile $A, C, C, \ldots, N, Z, Q \ldots$.

— Ce este submulţime

Mulţimea K este o parte din mulţimea M.
$K \subset M$ K este submulţimea lui M.

$N \subset Z \subset R$.

— Pe baza căror proprietăţi se rezolvă inecuaţiile (p. 32).

— Cum se reprezintă soluţiile inecuaţiei liniare (p. 33).

— Ce semnifică înscrierile $a \le b$ şi $a \ge b$?

$a \le b$	$a \ge b$
$a < b$ sau $a = b$	$a > b$ sau $a = b$

§ 5 Reuniunea şi intersecţia mulţimilor. Intervale numerice

Ştiţi deja, că în matematică orice totalităţi se numesc *mulţimi*. Se cercetează mulţimile, elementele cărora sunt şi noţiuni matematice: figuri geometrice (de exemplu, mulţimea patrulaterelor), numere (de exemplu, mulţimea numerelor reale), funcţii (de exemplu, mulţimea funcţiilor liniare), ecuaţii (de exemplu, ecuaţii pătrate), soluţiile inecuaţiilor (de exemplu, mulţimea vidă) etc. Afară de ele se cercetează mulţimile, elementele cărora sunt orice obiecte; animale, plante, anotimpurile anului, zilele săptămânei, planete, centrele regionale ale Ucrainei, mijloacele de comunicaţie, etc. Se întâmplă, că unele mulţimi au elemente comune.

Examinăm, ca exemplu, două mulţimi de «smiley»: mulţimea A, care conţine 3 elemente, şi mulţimea B, care conţine 4 elemente (fig. 21, *a*).

a — Mulţimea A; Mulţimea B

b — Mulţimea $A \cap B$

c — Mulţimea $A \cup B$

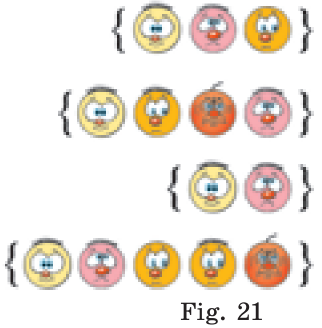


Fig. 21

Atrageţi atenţia, fiecare mulţime conţine «smiley», care zâmbesc, – . Şi «smiley» trişti – L. Dacă mulţimea conţine toate elementele comune ale mulţimilor A şi B şi numai pe ele, atunci această mulţime o numesc intersecţie a mulţimilor A şi B. În cazul dat intersecţia mulţimilor A şi B este mulţimea compusă din două elemente (reprezentată pe figura 21, *b*).

Cu alte cuvinte:

Intersecţie a două mulţimi se numeşte mulţimea, care conţine elementele ce aparţin fiecărei din aceste două mulţimi şi numai aceste elemente.

Se scrie aceasta astfel: $A \bigcap B$.

Priviţi figura 21, *c*. Mulţimea reprezentată pe ea conţine cinci «smiley» diferiţi, fiecare fiind element sau al mulţimii *A* sau al mulţimii *B*. O astfel de mulţime o numesc *reuniune* a mulţimilor *A* şi *B*.

Reuniune a două mulţimi se numeşte mulţimea care conţine fiecare element din fiecare mulţime şi numai aceste elemente.

Se scrie aceasta astfel: $A \bigcup B$.

Examinăm încă un exemplu. Aflăm reuniunea şi intersecţia mulţimilor *A* şi *B*, dacă $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Numerele 2, 4 şi 6 sunt elemente ale fiecărei mulţime, de aceea $A \bigcap B = \{2, 4, 6\}$.

$A \bigcup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, deoarece această mulţime conţine fiecare element al mulţimilor *A* şi *B* şi numai elementele lor.

Intersecţia şi reuniunea mulţimilor este comod de ilustrat cu diagramele lui Euler (fig. 22 şi fig. 23). De exemplu, intersecţia noţiunilor *dreptunghiuri* şi *romburi* este mulţimea *pătratelor* (fig. 22).

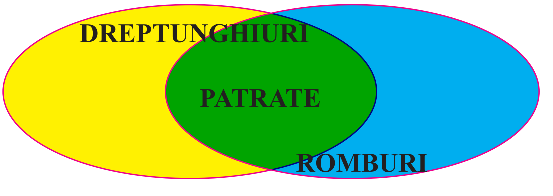


Fig. 22

Reuniunea mulţimilor, a numerelor raţionale şi iraţionale este mulţimea numerelor reale (fig. 23).

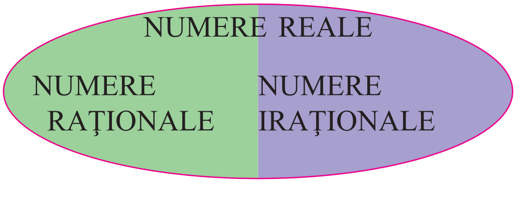


Fig. 23

Un tip particular de mulţimi sunt intervalele numerice, care sunt soluţiile inecuaţiilor (vezi, de exemplu, fig. 14 şi 15). Noţiunea de interval numeric deseori se aplică şi în alte domenii ale matematicii. De aceea este de dorit să deosebim diferite tipuri de intervale numerice şi să învăţăm a afla intersecţia şi reuniunea lor. .

Intersecţie a două intervale numerice se numeşte partea lor comună.

De exemplu, intersecţia intervalelor $(-\infty; 4)$ şi $(-3; \infty)$ este intervalul $(-3; 4)$.

Intersecţia a două mulţimi se notează prin semnul $\cap$. Deci, se scrie: $(-\infty; 4) \cap (-3; \infty) = (-3; 4)$.

Această egalitate este ilustrată pe figura 24..

Alte exemple.

Figurile 25 – 27 corespund egalităţilor:

$$(-3; 5)\cap(-2; 4)=(-2; 4);$$
$$[-3; 5)\cap(-4; -3]=\{-3\};$$
$$(-3; 5)\cap(-5; -4)=\varnothing.$$

Intersecția intervalelor*

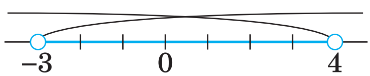


Fig. 24

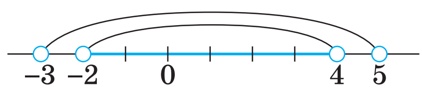


Fig. 25

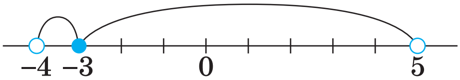


Fig. 26

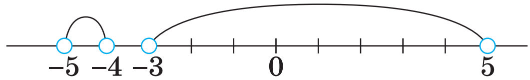


Fig. 27

Egalitatea a doua afirmă că intervalele numerice $[-3; 5)$ şi $(-4; -3]$ au numai un număr comun –3.

Semnul Ø indică *mulţimea vidă*. Ultima egalitate denotă că intervalele numerice $(-3; 5)$ şi $(-5; -4)$ nu au numere comune.

Reuniune a două intervale numerice se numeşte mulţimea numerelor care conţine fiecare număr al fiecărui interval şi numai acele numere.

Reuniunea a două mulţimi se notează prin semnul $\cup$. Se scrie:

$$(2; 4)\cup(3; 5)=(2; 5).$$

Această egalitate este ilustrată pe figura 28.

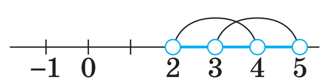


Fig. 28

* Pentru a se folosi de codul QR, trebuie de stabilit asigurarea cu programe speciale pe smartphone/planşetă. De exemplu, pentru dispozitive cu sistemul operaţional Android trebuie lansat programul Google Play Market şi descărcat programul Powerful QR Code Scaner A+ sau orice alta asemănătoare. Descărcarea altor sisteme operaționale, pentru citirea QR-codelor, vor ajuta aplicările respective: Windows Mobile – Windows Store, iOS – Upp Store.

Figurile 29 – 31 corespund egalităţilor:

$$(-3; 5)\cup[-2; 4)=(-3; 5);$$
$$[-3; 5)\cup(-4; -3]=(-4; 5);$$
$$(-\infty; 4)\cup[-3; 0]=(-\infty; 4).$$

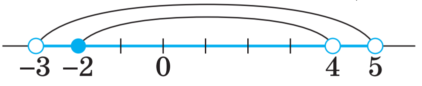


Fig. 29

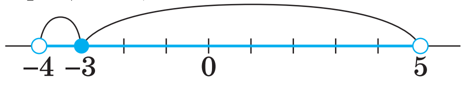


Fig. 30

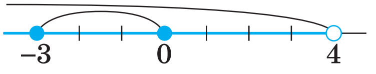


Fig. 31

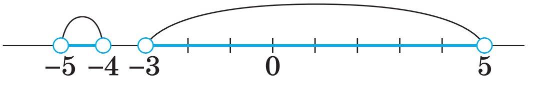


Fig. 32

Reuniunea intervalelor (–3; 5) şi (–5; –4) se compune din două intervale despărţite (fig. 32); ea se notează astfel:

$$(-5; -4)\cup(-3; 5).$$

Uneori trebuie de examinat intersecţia sau reuniunea a trei sau mai multe intervale numerice.

Intersecţia a trei intervale numerice este mulţimea numerelor care conţine numerele comune ale acestor trei intervale şi numai pe ele. De exemplu,

$$(-4; 5)\cap(-\infty; 6)\cap[-3; 7)=[-3; 5).$$

Reuniunea a trei intervale numerice este mulţimea numerelor care conţine fiecare număr al fiecărui interval şi numai pe ele. De exemplu,

$$(-4; 5)\cup(-\infty; 6)\cup[-3; 7)=(-\infty; 7).$$

Aceste egalităţi corespund figurilor 33, *a* şi *b*.

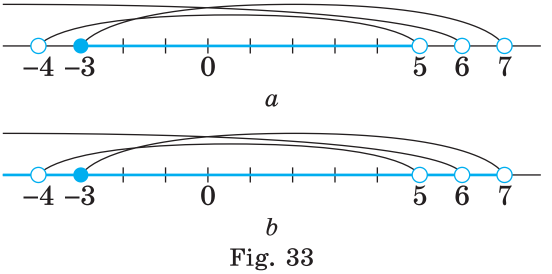


Fig. 33

Deoarece există multe tipuri de intervale numerice, este de dorit a le numi. Dacă *a* şi *b* sunt numere reale arbitrare, atunci:

(–∞; *a*), (*b*; ∞) — intervale numerice infinite;

(*a*; *b*) — interval deschis sau *interval*;

[*a*; *b*] — interval inchis sau *segment*;

[*a*; *b*) — interval deschis din dreapta;

(*a*; *b*] — interval deschis din stânga.

Pe figura 34 sunt reprezentate intervale numerice, reprezentarea lor pe axa numerică şi inegalităţile respective.

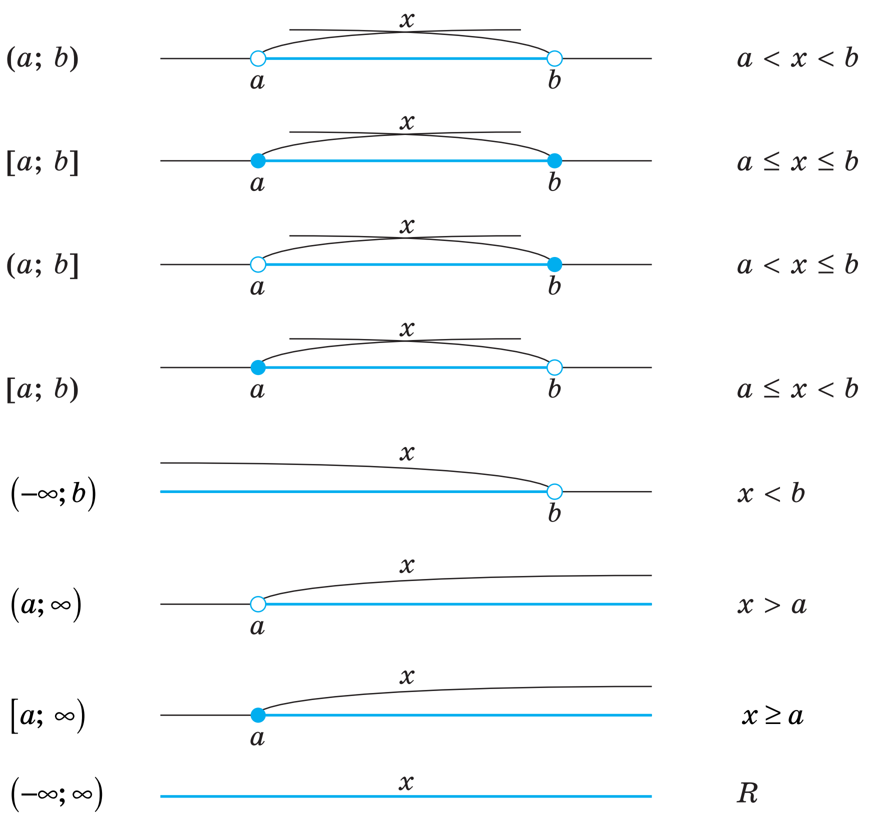


Fig. 34

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

Uneori apare necesitatea de a găsi reuniunea soluţiilor a două sau mai multe inecuaţii. În aceste cazuri se vorbeşte despre o *totalitate de inecuaţii*. Ea se scrie cu ajutorul parantezei pătrate:

$$\left[\begin{array}{l}2x>17,\\ x-1<3;\end{array}\right. \quad \text{sau} \quad \left[\begin{array}{l}x>8{,}5,\\ x<4.\end{array}\right.$$

Soluţie a totalităţii de inecuaţii se numeşte valoarea variabilei care satisface cel puţin una din inecuaţiile date. A rezolva o totalitate de inecuaţii înseamnă a afla toate soluţiile ei sau a demonstra că ele nu există. Mulţimea soluţiilor totalităţii de inecuaţii dată sunt două intervale $(-\infty;\ 4)\ U\ (8{,}5;\ \infty)$.

Totalităţile se aplică pentru rezolvarea unor tipuri de ecuaţii şi inecuaţii, mai cu seamă inecuaţiilor cu moduli. Orice inecuaţie de tipul $|M| > a$, unde M este o expresie oarecare, poate fi scrisă în formă de totalitate:

$$\left[\begin{array}{l}M>a,\\ M<-a.\end{array}\right.$$

Verificaţi-vă

1. Ce este intersecţia a două mulţimi? Cu ce simbol se notează?
2. Ce este intersecţia a două intervale numerice?
3. Ce este reuniunea a două mulţimi? Cu ce simbol se notează?
4. Ce este reuniunea a două intervale numerice?
5. Daţi exemple de intervale, segmente.
6. Daţi exemple de intervale numerice infinite.

Efectuăm împreună

1 Aflaţi intersecţia şi reuniunea intervalelor numerice (–6; 8) şi (5; ∞).

● **Rezolvare.** Reprezentăm intervalele date geometric (fig. 35). Numerele lor comune formează intervalul (–5; 8). Deci, (–6; 8) ∩ (5; ∞) = (5; 8). Reuniunea intervalelor numerice date:

$$(-6; 8) \cup (5; \infty) = (-6; \infty).$$

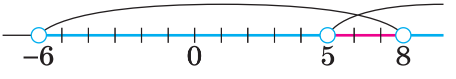


Fig. 35

2 Rezolvaţi inecuaţia $|5x-3| \geq 2$.

● **Rezolvare.** Inecuaţia |5*x* – 35*x*| ≥ 2 este echivalentă totalităţii de inecuaţii $\left[\begin{array}{l} 5x-3 \geq 2, \\ 5x-3 \leq -2, \end{array}\right.$ sau $\left[\begin{array}{l} 5x \geq 5, \\ 5x \leq 1, \end{array}\right.$ de unde $\left[\begin{array}{l} x \geq 1, \\ x \leq 0{,}2. \end{array}\right.$

Pe figura 36 este reprezentată mulţimea numerelor, care corespunde acestei totalităţi şi satisface inecuaţia dată.

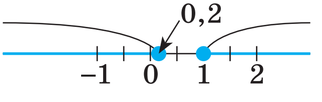


Fig. 36

Răspuns. $(-\infty; 0{,}2] \cup [1; \infty)$.

Efectuaţi oral

176. Aflaţi reuniunea şi intersecţia mulţimilor *A* şi *B*, dacă:
a) *A* = {8, 6, 4, 2, 0} şi *B* = {0, –2, –4, –6};
b) *A* = {Ş, C, O, A, L, Ă} şi *B* = {T, A, B, L, Ă};
c) *A* = {⊛, ⊠, ⊕, ⊜, ⊞} şi *C* = {⊟, ⊠, ⊜, ⊖, ⊡}.

177. Aflaţi reuniunea intervalelor numerice:
a) (0; 1) şi (0; 2);
b) (0; 1) şi (0,5; 1);
c) (1; 2] şi [2; 5);
d) $(-\infty; 0)$ şi [0; 3).

178. Aflaţi intersecţia intervalelor numerice, indicate în exerciţiul precedent.

179. Care numere naturale conţine intervalul numeric (1; 8)? Dar intervalul [1; 8]?

180. Care numere întregi conţin intervalele:

a) $[-3;\ 4]$; b) $(-3;\ 4)$; c) $(-3;\ 4]$; d) $[-3;\ 4)$?

181. Cu ce este egală intersecţia intervalelor $[a;\ b]$ şi $(a;\ b)$? Dar reuniunea lor??

Nivelul A

182. Reprezentaţi pe axa de coordonate intervalele numerice:

a) $(2;\infty)$; b) $(-\infty;0)$; c) $[-3;\infty)$; d) $(-\infty;-4]$.

183. Scrieţi cu simboluri intervalele numerice, care corespund intervalelor reprezentate pe figura 37.

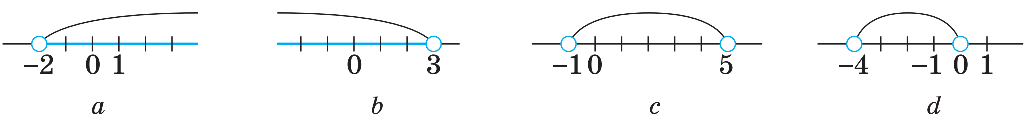


Fig. 37

184. Reprezentaţi în formă de intervale şi pe axa de coordonate mulţimile de numere care satisfac inecuaţiile:

a) $x < 3$; b) $x \geq -2$; c) $x \leq 0$; d) $x > 7$.

185. Care inecuaţie liniară are mulţimea soluţiilor:

a) $(3;\infty)$; b) $(-2;\infty)$; c) $(-\infty;7]$; d) $[-3;\infty)$?

186. ***Problemă deschisă.*** Compuneţi o inecuaţie liniară, care are mulţimea soluţiilor reprezentate pe figura 37?

187. Reprezentaţi cu simboluri şi grafic mulţimea numerelor reale, care satisfac inegalităţile duble:

a) $-3 < x < 2$; b) $0 < x < 4$; c) $-5 < x < 0$.

188. Aflaţi reuniunea şi intersecţia intervalelor numerice:

a) $[2;\ 3]$ şi $[3;\ 5]$; e) $(1;\ 2)$ şi $(-2;\ 1)$;
b) $[-5;\ 0]$ şi $[-3;\ 0]$; d) $(-2;\ -1)$ şi $[-3;\ -1]$;
c) $[-5;\ 7]$ şi $[-7;\ 5)$; f) $(-\infty;2)$ şi $[-2;\infty)$.

189. Copiaţi tabelul în caiet şi înscrieţi în el reuniunea şi intersecţia intervalelor numerice indicate

Nr.	Intervalele	Reuniunea	Intersecţia
1	$(0;\ 3)$ şi $(0;\ 5)$		
2	$(-2;\ 0)$ şi $(-3;\ 0)$		
3	$(-\infty;1)$ şi $(0;\ 2)$		
4	$(-2;\infty)$ şi $(0;\infty)$		
5	$(-\infty;1)$ şi $(0;\infty)$		

190. Comparaţi numerele a şi b, dacă:

a) $(-\infty; a)\cup(c;\infty)=R$; c) $(y; a)\cap(c; y)=\varnothing$;

b) $(a; x)\cap(x; c)=\varnothing$; d) $(a;\infty)\cup(-\infty; c)=R$.

Rezolvaţi inecuaţiile, scrieţi răspunsurile în formă de interval (**191**— **192**).

191. a) $5x - 3 > 12$; c) $0,5x + 2,6 > 3$; e) $5 - 3x < 2$;

b) $3x + 5 \geq 11$; d) $1 + 2x < 7$; f) $-1,3x - 9 \leq 4$.

192. a) $3x \leq 1 - 2x$; c) $5x > x - 2$; e) $2x \leq 7x + 3$;

b) $-7x < 3x + 5$; d) $-2x > 9 - 5x$; f) $1,1x \geq x - 5$.

Reprezentaţi pe axa de coordonate mulţimile soluţiilor inecuaţiilor (**193** — **195**).

193. a) $0,5x - 4(x - 3) > 3x$; c) $0 < y - 0,3(2 - y)$;

b) $6x < 0,2x - 2(x + 3)$; d) $4 \geq 5z - 0,2(1 - z)$.

194. a) $0,3 \leq 1,2 + 0,5(x - 2)$; c) $2,7(x + 3) < 7,2(x - 3)$;

b) $0 < 4,5 + 0,7(2y - 3)$; d) $3,4(2x + 3) < 6(x + 2)$.

195. a) $\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}<\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$; c) $x-\frac{2}{5}(x-3)>0,4$;

b) $\frac{2}{5}y-\frac{3}{4}>\frac{3}{4}y-\frac{2}{5}$; d) $2y-\frac{1}{2}<0,2(y+3)$.

Nivelul B

196. În ce condiţie:

a) $(a;\ b)\ \cap\ (m;\ n) = (a;b)$; b) $(a; b)\cup(m; n)=(a; b)$?

197. Comparaţi numerele x şi a, y şi c, dacă:

a) $(a; c)\cap(x; y)=(a; c)$; c) $(a; c)\cup(x; y)=(a; c)$;

b) $(a; c)\cap(x; y)=(x; y)$; d) $(a; c)\cup(x; y)=(a; y)$.

198. Scrieţi în formă de inegalităţi duble corelaţiile dintre numerele a, x şi y, dacă:

a) $(a;\infty)\cap(x; y)=(a; y)$; c) $(-\infty; a)\cup(x; y)=(-\infty; y)$;

b) $(a;\infty)\cup(x; y)=(a;\infty)$; d) $(-\infty; a)\cap(x; y)=(x; a)$.

199. Care numere fracţionare cu numitorul 2 conţin intervalul:
a) (1; 6); b) (2; 3); c) [−5; 0]; d) [−2; 3]?

200. Pentru care valori ale lui x valorile expresiei $1{,}3 - 0{,}3x$ aparţin intervalelor:
a) (−0,2; 2,5); b) [1; 4); c) (−2,6; 0,2]; d) [−2; 0,1]?

201. Pentru ce valori ale lui x valorile expresiei $3x + 2$ aparţin segmentelor:
a) [−1; 5]; b) (1; 17); c) [0; 3); d) (−7; −1]?

202. O croitoreasă lucrează acasă şi într-o oră de lucru câştigă 10 unităţi de bani. Ea trebuie să procure marfă, costul căreia în magazin este 15 unităţi de bani pentru 1 pachet fără a sta la coadă, iar în magazinul universal această marfă ea poate procura cu 11 unităţi de bani, dar ea trebuie să stea la coadă în decurs de o oră. Clarificaţi: a) în ce condiţii cumpărarea mărfii scumpe este convenabilă; b) câtă marfă trebuie de procurat, pentru ca să fie rentabil de stat la coadă 1 oră.

Rezolvaţi inecuaţiile şi scrieţi soluţiile în formă de intevale (**203–204**).

203. a) $5(x + 2) + 2(x - 3) < 3(x - 1) + 4(x + 3)$;
b) $3(2x - 1) + 3(x - 1) \geq 5(x + 2) + 2(2x + 3)$;
c) $2(x - 3) + 5(x - 2) > 3(2 - x) - 2(3 - x)$;
d) $9(x - 2) - 2(3x - 2) \leq 5(x - 2) - 2(x + 5)$.

204. a) $\frac{x-2}{2} - \frac{2x-3}{3} < \frac{x-4}{6} - \frac{x+1}{3}$;
b) $\frac{x-2}{2} + \frac{1-7x}{4} - \frac{x+11}{3} \geq \frac{5+2x}{4}$;
c) $\frac{3-2x}{2} - \frac{x-1}{3} > \frac{5-3x}{4} - \frac{4x+3}{6}$;
d) $\frac{6x-5}{3} - \frac{11+7x}{5} < \frac{4x+3}{5} - \frac{2x+3}{10}$.

«Câmpul aplicării matematicii nu are limite diferite de limita cunoaşterii».
S. N. Bernştein

205. Luând aria pătratului mai mic de 1, clarificaţi cărui interval numeric aparţine aria figurii vopsite, reprezentate pe figura 38:
a) [1; 2), b) [2; 3), c) [3; 4), d) [4; 5)?

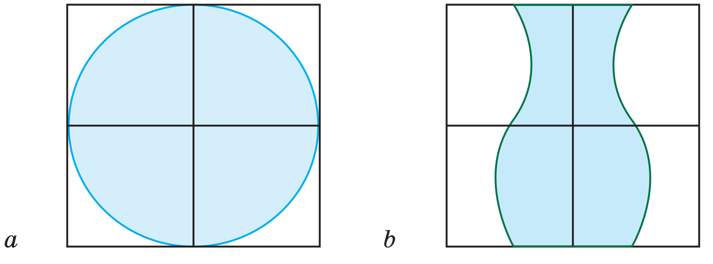


Fig. 38

Aflaţi reuniunea şi intersecţia mulţimilor, care sunt soluţiile inecuaţiilor (**206–207**).

206. a) $\frac{5x-1}{4}+\frac{x+1}{2}<0$ şi $\frac{x-3}{5}-\frac{2x-1}{10}\geq 4$;

b) $\frac{3+x}{2}+\frac{2-x}{3}\geq 0$ şi $\frac{4x+3}{7}+\frac{x+1}{2}<2$.

207. a) $3x-\frac{2x-1}{4}>0$ şi $\frac{x+1}{2}-\frac{x+3}{4}\geq 2$;

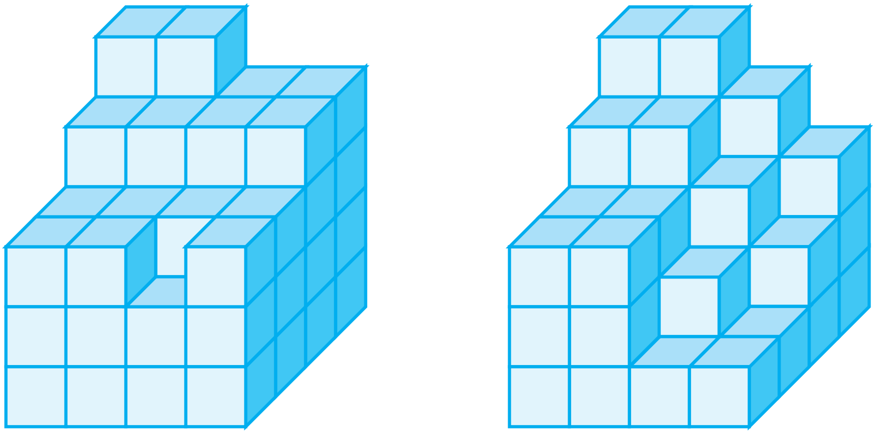
b) $\frac{3-x}{15}-\frac{x-3}{3}>0$ şi $\frac{3x-2}{4}-\frac{5x+1}{3}>1$.

208. Pe figura 39, *a* este reprezentată o figură, alcătuită din *n* cuburi, aşezate pe pătratul 4×4.

1) În care din intervalele (57; 67), (50; 69) sau [45; 55] se conţine numărul *n*?

2) În care din intervalele (13, 23], (25, 35], (10, 20] se conţine numărul *m* de cuburi, cu care trebuie de completat figura dată, pentru a obţine un paralelepiped dreptunghic $4\times4\times5$?

3) ***Problemă deschisă***. Compuneţi şi rezolvaţi probleme asemănătoare reprezentând figura, compusă din *n* cuburi, aşezate pe pătratul 5×5 (fig. 39, *b*).



a *b*

Fig. 39

Rezolvaţi inecuaţiile (**209–210**).

209*. a) $|x|>1$; b) $|x+2|>5$; c) $|3x+1|>5$; d) $|5x|>2$; e) $|x-1|>3$; f) $|5-2x|>3$.

210*. a) $|x+5|>-3$; b) $|1-3x|<-1$; c) $|2x-1|>1$; d) $|x-1|\leq 0$; e) $|5x+3|\geq 0$; f) $|8-4x|<0$.

Exerciţii pentru repetare

211. Aflaţi valoarea produselor:

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{40}$;   c) $\sqrt{42}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt{18}$;

b) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{48}\cdot\sqrt{50}$;   d) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{72}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{45}$.

212. Aflaţi soluţiile ecuaţiilor:

a) $5\sqrt{x}=0$;   c) $6\sqrt{x}-48=0$;   e) $4\sqrt{x}+9=11$;

b) $10\sqrt{x}=4$;   d) $3\sqrt{x}+20=0$;   f) $7-2\sqrt{x}=12$.

213. ***Problema lui al-Carhi.*** Aflaţi aria dreptunghiului, baza căruia este de două ori mai mare decât înălţimea, iar aria numerică este egală cu perimetrul.

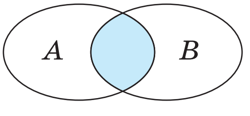
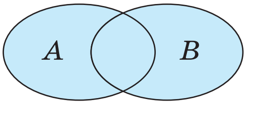
214. Obiectul taxării impozitului pe transport sunt automobilele uşoare, care au nu mai mult de cinci ani (inclusiv) din anul producerii şi al căror cost mediu pe piaţă este 1,03 mln grn. Impozitul pe transport în anul 2016 pentru automobilele uşoare plătesc proprietarii după cota de 25 000 grn. pe an pentru fiecare automobil. Stabiliţi, ce procent din costul automobilului nou va plăti proprietarul în formă de impozit pe transport în 5 ani, dacă automobilul costă:

a) 1 055 835 grn;   c) 2 051 281 grn;

b) 1 187 844 grn;   d) 2 450 448 grn.

Comoara succeselor

✓ Pot explica ce este intersecţia şi reuniunea mulţimilor.

Intersecţia mulţimilor $A \cap B$	Reuniunea mulţimilor $A \cup B$
	

✓Ştiu a reprezenta intervalele numerice, definite prin inegalităţi (p. 45)

✓Ştiu a reprezenta pe axa de coordonate reuniunea şi intersecţia intervalelor numerice.

✓Ştiu a scrie cu simboluri şi cu inegalităţi intervalele numerice date grafic.

✓Vreau să ştiu scrie soluţiile totalităţii de inecuaţii în formă de reuniune a intervalelor respective.

Aplicăm competenţele obţinute

Pentru a înţelege şi însuşi bine tema nouă, ne amintim:
– Conţinutul relaţiilor «mai mare», «mai mic», «nu mai mare», «nu mai mic».
– Tipurile inecuaţiilor (stricte, nestricte, numerice, cu variabile).
– Proprietăţile inegalităţilor numerice.
– Cum se rezolvă inecuaţiile liniare.
– Cum se scriu soluţiile inecuaţiilor.
– Ce este intersecţia şi reuniunea mulţimilor.
– Cum de aflat intersecţia şi reuniunea intervalelor numerice.

§ 6 Sisteme de inecuaţii cu o necunoscută

Uneori apare necesitatea de a determina soluţiile comune a câtorva inecuaţii. Aflăm, de exemplu, soluţiile comune a două inecuaţii

$$2x - 3 < 5 \text{ i } 2 - 3x < 11.$$

Aflăm acele valori ale lui x care satisfac atât prima, cât şi a doua inecuaţie.

În astfel de cazuri se are în vedere ***sistemul de inecuaţii.***

Sistemul de inecuaţii, ca şi sistemul de ecuaţii, se scrie cu ajutorul acoladei:

$$\begin{cases} 2x-3<5, \\ 2-3x<11. \end{cases}$$

Soluţie a sistemului de inecuaţii cu o variabilă se numeşte valoarea variabilei care satisface fiecare inecuaţie din sistemul dat.

A rezolva sistemul de inecuaţii **înseamnă a afla toate soluţiile ei sau a demonstra că ele nu sunt.**

Să rezolvăm sistemul de mai sus, înlocuind treptat fiecare inecuaţie cu mai simple şi echivalente ei:

$$\begin{cases} 2x-3<5, \\ 2-3x<11; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x<8, \\ -3x<9; \end{cases} \quad \begin{cases} x<4, \\ x>-3. \end{cases}$$

Mulţimea soluţiilor sistemului de inecuaţii va fi intersecţia mulţimilor soluţiilor inecuaţiilor care fac parte din el. Aflăm intersecţia cu ajutorul axei de coordonate.

Prima inecuaţie este satisfăcută de toate numerele mai mici decât 4, iar a doua – de toate numerele mai mari decât – 3 (fig. 40).

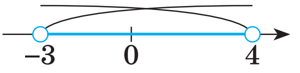


Fig. 40

Ambele inecuaţii ale sistemului sunt satisfăcute de acele valori ale lui *x,* care $-3 < x < 4$. Această mulţime de valori ale lui *x* este intervalul (–3; 4). Numerele –3 şi 4 nu aparţin acestui interval.

Să mai rezolvăm două sisteme de inecuaţii.

a) $\begin{cases} 3x-1>14, \\ 2-x<8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-1>x+3, \\ 5x-1<6-2x. \end{cases}$

Rezolvare.

a) $\begin{cases} 3x-1>14, \\ 2-x<8; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x>15, \\ -x<6; \end{cases}$ $\begin{cases} x>5, \\ x>-6. \end{cases}$

Ambele inecuaţii sunt satisfăcute de valorile lui *x* mai mari decât 5 (fig. 41).

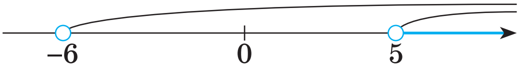


Fig. 41

b) $\begin{cases} 2x>x+4, \\ 5x<7-2x; \end{cases}$ $\begin{cases} x>4, \\ 7x<7; \end{cases}$ $\begin{cases} x>4, \\ x<1. \end{cases}$

Nu sunt numere care ar fi simultan mai mici decât 1 şi mai mari decât 4 (fig. 42).

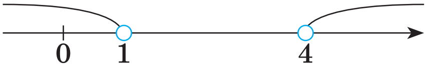


Fig. 42

Răspuns. a) (5; ∞); b) nu are soluţii.

La rezolvarea sistemelor se reduc şi astfel, de exemplu, inecuaţii:

a)$(x-2)(x+5)<0$; b) $\dfrac{x-2}{x+5}<0.$

Rezolvare. a) Produsul a două numere este negativ, dacă unul din aceste numere este negativ, iar al doilea – pozitiv. Deci, rezolvarea inecuaţiei date se reduce la rezolvarea a două sisteme de inecuaţii:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x+5<0 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} x-2<0, \\ x+5>0. \end{cases}$$

Primul sistem nu are soluţii, mulţimea soluţiilor sistemului al doilea este intervalul numeric (–5; 2), care şi este soluţia inecuaţiei date.

b) Valoarea fracţiei este negativă, dacă unul din termenii ei este negativ, iar al doilea – pozitiv. De aceea rezolvarea inecuaţiei b este la fel, ca şi rezolvarea inecuaţiei a şi răspunsul este acelaşi.

Răspuns. a) (–5; 2); b) (–5; 2).

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

Să rezolvăm inecuaţiile:

a) $|2x-3|\le 5$; b) $|x-1|>2x-5$.

Rezolvare.

a) Inecuaţia $|2x-3|\le 5$ şi inecuaţia dublă $-5\le 2x-3\le 5$ sunt echivalente sistemului de inecuaţii: $\begin{cases}2x-3\le 5,\\ 2x-3\ge -5,\end{cases}$ sau $\begin{cases}2x\le 8,\\ 2x\ge -2.\end{cases}$

Mulţimea soluţiilor ei este [–1; 4].

b) Inecuaţia $|x-1|>2x-5$ este echivalentă totalităţii de inecuaţii:

$\left[\begin{array}{l}x-1>2x-5,\\ x-1<-(2x-5);\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x-1>2x-5,\\ x-1<5-2x;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x<4,\\ 3x<6;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x<4,\\ x<2.\end{array}\right.$

Inecuaţia dată o satisfac toate numerele din intervalele (–∞; 4) şi (–∞; 2). Reuniunea lor este (–∞; 4).

Răspuns. a) [–1; 4]; b) (–∞; 4).

Verificaţi-vă

1. Daţi exemplu de sistem de inecuaţii.

2. Ce este soluţia sistemului de inecuaţii cu o necunoscută?

3. Ce înseamnă «a rezolva sistemul de inecuaţii»?

4. Cum de aflat soluţiile sistemului, dacă sunt cunoscute soluţiile fiecărei inecuaţii din sistem?

Efectuăm împreună!

1 Rezolvaţi sistemul de inecuaţii:

$$\begin{cases}(z^2-2)\cdot 3\ge 3z^2-5,\\ z^2+2z\le (z-1)(z+1).\end{cases}$$

● **Rezolvare.** $\begin{cases}3z^2-6\ge 3z^2-5,\\ z^2+z\le z^2-1;\end{cases}$ $\begin{cases}-6\ge -5,\\ z\le -0,5.\end{cases}$

Prima inecuaţie este falsă, de aceea nu are soluţii.

Răspuns. Sistemul nu are soluţii.

2 Pentru care valori ale lui x sens expresia $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}-\sqrt{5-x}$?

- **Rezolvare.** Expresia are sens cu condiţia că:
$\begin{cases} x+1>0, \\ 5-x\geq 0, \end{cases}$ sau $\begin{cases} x>-1, \\ x\leq 5. \end{cases}$
Ambele inecuaţii satisfac acele valori ale lui x, că $1< x \leq 5$ (fig. 43).

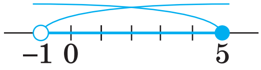


Fig. 43

Răspuns. (–1; 5].

Efectuaţi oral

215. Oare au soluţii sistemele de inecuaţii:

a) $\begin{cases} x>3, \\ x<2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x>0, \\ x<5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x>-3, \\ x<2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x\leq 3, \\ x\leq 2? \end{cases}$

216. Oare satisface sistemul de inecuaţii $\begin{cases} 2x\geq 0, \\ 3x<6 \end{cases}$ numărul:

a) 2; b) 3; c) 0; d) 6?

217. Care din inecuaţiile: a) $|x| < 3$; b) $|x| - 1 < 0{,}5$; c) $|x| > 5$; d) $7 - |x| < 0$ este echivalentă cu un sistem de inecuaţii respective? Iar care cu o totalitate?

Nivelul A

218. Oare este numărul 2 soluţie a sistemului de inecuaţii:

a) $\begin{cases} x-3<5, \\ 4x+2>9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x\geq x+2, \\ 12<8x-5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0{,}5x\geq 2x-3, \\ 3x-1>4? \end{cases}$

219. Care din numerele –1, 0, 1, 2, 3 satisfac sistemul de inecuaţii:

a) $\begin{cases} 3-x\geq 0, \\ 7+x>0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3>5, \\ 1-x<0? \end{cases}$

220. Rezolvaţi sistemul de inecuaţii şi indicaţi două numere întregi care îl satisfac:

a) $\begin{cases} 2x+7\geq 0, \\ 3x+6\geq 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-5<0, \\ 3x+9<0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+1<0, \\ 2x+5>0. \end{cases}$

Rezolvaţi sistemele de inecuaţii (**221–224**).

221. a) $\begin{cases} 2x+3>x, \\ 4x-x<3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2-5x<7, \\ 3x+1<-8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8\leq 4x+8, \\ 0>3x+6. \end{cases}$

222. a) $\begin{cases} 5y-1<2y, \\ 3-2y<y; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4-3y\geq -2y, \\ y-3\geq 4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5y-7\leq 3y, \\ 2-4y<5. \end{cases}$

223. a) $\begin{cases} 0{,}5z-2<z, \\ 0{,}3-2z>3z; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0{,}8x-3\geq 5, \\ 0{,}8x+1\geq 9; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 1-1{,}5x<x, \\ 1+1{,}5x<16. \end{cases}$

224. a) $\begin{cases} \frac{x}{2}-1>\frac{x}{3}, \\ x-1<7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6z+1<4z, \\ \frac{z}{2}-\frac{z}{5}>0{,}3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}<\frac{x-2}{3}, \\ 2x-3>0. \end{cases}$

225. Indicaţi câteva valori ale lui a astfel, ca fiecare din sistemele de inecuaţii a), b), c): 1) va avea o soluţie; 2) nu va avea soluţii:

a) $\begin{cases} x>a, \\ x<3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x<a, \\ x<-3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x\geq a, \\ -x\geq 2. \end{cases}$

Rezolvaţi sistemele de inecuaţii (**226–228**).

226. a) $\begin{cases} 15-3x<9x-12, \\ 8x-7>5x+4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2(x-3)\leq 5x+7, \\ 3+4x>3(x-5); \end{cases}$

b) $\begin{cases} 12-z<8z-15, \\ 7z-6>6z+4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5(x+2)\geq 2x-4, \\ 3(x+3)<7-8x. \end{cases}$

227. a) $\begin{cases} 3-2(x-1)<0, \\ 5-3(x-4)>0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x\leq 2-3(x+1), \\ 5x\geq 3+(x-4); \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4(2x-1)<3, \\ -5(x-3)\geq 4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 8(1+x)>3(2x-1), \\ 5<3x-2(8x-3). \end{cases}$

228. a) $\begin{cases} 2x-0{,}2(x-2)>4, \\ \frac{x}{2}-6\leq\frac{x}{8}; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0{,}5x+3\leq 2{,}5-3x, \\ 5-0{,}2x\leq 0{,}2-5x; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4-\frac{x-1}{3}\geq x, \\ 7x-1\geq 48; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 0{,}4z+2\geq 3{,}5-2z, \\ 7-1{,}3z\geq 0{,}3-5z. \end{cases}$

229. Aflaţi soluţiile întregi ale sistemelor de inecuaţii:

a) $\begin{cases} 2n+3<4(3n-5), \\ 8-4n<7-2(4n-13); \end{cases}$ b) $\begin{cases} n(n+1)>(n+2)(n-2), \\ (n-3)^2\geq 3-n(2-n). \end{cases}$

230. Rezolvaţi inecuaţiile duble

a) $-2<3x-4<5$; d) $0{,}7\leq 3-2x\leq 1{,}2$;

b) $3<2-x<5$; e) $-1\leq\frac{1}{3}(6-z)<1$;

c) $0{,}4 \le 2x + 1 \le 0{,}6$;

f) $-2{,}5 < \frac{1}{2}(1-3y) \le 1{,}5$.

Nivelul B

Rezolvaţi sistemele de inecuaţii (**231–234**).

231. a) $\begin{cases} c^2-3<(c+3)^2, \\ 2c+c^2>(c-2)^2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} (z^2-2)\cdot 3 \ge 3z^2, \\ z^2+2z \le (z-1)z; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5-(x+3)^2>(x-2)(1-x), \\ x(x+7)<(x+7)^2-7; \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x-1)^2+3x \ge (x-1)(x+1), \\ (x+3)(x-1) \ge (x+2)^2-1. \end{cases}$

232. a) $\begin{cases} (x+1)^2>x^2+4, \\ (x-1)^2>x^2-4; \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x-1)^2 \ge x^2+7, \\ (x-2)^2 \ge x^2-8; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7+(x+3)^2<5x+(x-3)^2, \\ (x-1)(x+2)<(x+1)(x-2); \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-(x+1)^2 \le 5-(1-x)^2, \\ (x-3)(x+3)>(x+7)(x-7). \end{cases}$

233. a) $\begin{cases} \frac{2y+15}{9}-\frac{1-y}{5} \ge \frac{y}{3}, \\ 2y>\frac{19-2y}{2}-\frac{11-2y}{4}; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{4x+3}{3}-\frac{3x-1}{8}<1+\frac{8-x}{6}, \\ \frac{7x+3}{5}+\frac{3x+1}{2}>4+\frac{x-4}{2}; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4\frac{2}{3}x-1<3x+3\frac{1}{3}, \\ \frac{3x+12}{5}+3>\frac{8+x}{2}; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{a}{3}+\frac{a}{2}<\frac{5}{3}, \\ 6-\frac{a+16}{3}<-2a. \end{cases}$

234.

a) $\begin{cases} y+0{,}25 \le \frac{14y+3}{12}, \\ y-\frac{1-3y}{4} \le \frac{y+8}{6}; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2x-1}{3}-x \le \frac{11-x}{6}-2, \\ 3(x-1)^2+8x+2 \le x(3x-2)+17. \end{cases}$

Reprezentaţi pe planul de coordonate mulţimea punctelor, ordonata cărora satisfac primul sistem, iar abscisa – sistemul al doilea. Ce figură s-a format? Aflaţi perimetrul şi aria figurii obţinute.

235. Pentru care valori ale lui x are sens expresia:

a) $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}$;

c) $\sqrt{x+3}+\frac{1}{\sqrt{x-3}}$;

b) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+2}$;

d) $\frac{\sqrt{2x+3}}{5}+\frac{5}{\sqrt{3x+2}}$?

236. Pentru ce valori ale lui x valoarea expresiei $4x - 1{,}5$ aparţine intervalului:
a) $(1;\ 2)$; b) $[-2;\ 0]$; c) $(-\infty; 0)$; d) $[3;\ 7)$?

237. Pentru care c valoarea expresiei $\dfrac{2\quad 3}{}$ aparţine intervalului:
a) $(-\infty; 0)$; b) $[0; \infty)$; c) $(-1;\ 1)$; d) $[1;\ 8]$?

Rezolvaţi inecuaţiile (**238–241**)

238. a) $(x + 2)(x - 7) < 0$; d) $(2y + 8)(7 - 4y) \le 0$;
b) $(x - 3)(2x - 5) > 0$; e) $0{,}5x(x + 3) < 0$;
c) $(3 - 2z)(1 + z) \ge 0$; f) $(x^2 + 1)(5 - x) \le 0$.

239. a) $(2x + 1)(10x - 7) \ge 0$; d) $x^3 + 2x^2 + x < 0$;
b) $(5 - 2x)(1 - 3x) \le 0$; e) $5x^2 - 3x - 2 \le 0$;
c) $(x^2 + 5)(x + 5) > 0$; f) $x^3 + 3x^2 > 0$.

240. a) $\dfrac{x+3}{x-7} > 0$; c) $\dfrac{3-x}{2x-1} < 0$; e) $\dfrac{3x+5}{x\left(x^2+1\right)} > 0$;
b) $\dfrac{5-2x}{2x-7} \ge 0$; d) $\dfrac{\left(x^2+3\right)x}{2x-3} \le 0$; f) $\dfrac{x^3}{x-3} \le 0$.

241. a) $\dfrac{3x-1}{x+5} \le 0$; c) $\dfrac{-3x}{7x-14} \le 0$; e) $\dfrac{2x+3}{4-x} > 5$;
b) $\dfrac{5-2x}{2+5x} > 0$; d) $\dfrac{3x-1}{2x+4} < 2$; f) $\dfrac{x-4}{3x+2} > 3$.

242. Pentru care valori ale lui n:
a) diferenţa fracţiilor $\dfrac{1}{n+1}$ şi $\dfrac{1}{n-1}$ este mai mare decât produsul lor;
b) suma fracţiilor $\dfrac{3}{n-4}$ şi i $\dfrac{3}{3-n}$ este mai mică decât produsul lor?

243. Luni dimineaţa în casieria băncii a Fondului asigurării depozitelor au adus 720 000 grn, care trebuia distribuite până sâmbătă inclusiv. Ce sumă poate distribui casieria zilnic, dacă pe zi suma eliberată de bani nu poate depăşi 150 000 grn?

244. Rezolvaţi sistemele din trei inecuaţii;
a) $\begin{cases} 2x-1>5, \\ 4x-3<37, \\ 3x-5>7; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2\le 5x-8, \\ 2x-1\le 4(2-x), \\ 2x-7<3(1-x). \end{cases}$

245. Rezolvaţi sistemele de inecuaţii duble:
a) $\begin{cases} 0<1-2x<1, \\ 3<3x+4<5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1<5-3x<3, \\ -3<3-2x<1. \end{cases}$

246. Rezolvaţi inecuaţiile:
a) $x^2 \le 25$; b) $x^2 > 16$; c) $x^2 < 2$.

247. Oare este adevărat, dacă numărul a este pozitiv, atunci inecuaţia:
a) $x^2 < a^2$ este echivalentă cu inecuaţia $|x| < a$;
b) $x^2 > a^2$ este echivalentă cu inecuaţia $|x| < a$?

248. Rezolvaţi inecuaţiile prin două procedee:
a) $|x-1|<2$; c) $(2x+1)^2 < 9$; e) $(x-2)^2 \ge 25$;
b) $(x-1)^2 < 4$; d) $|x-8|>1$; f) $(5x-3)^2 > 49$.

Rezolvaţi inecuaţiile (**249–250**).

249*. a) $|2x+3|<5$; c) $|3x-1|\ge 2$;
b) $|x-3|+|x+1|\le 7$; d) $|x-2|+|x+1|\ge 3$.

250*. a) $|5-x|>0,5$; c) $|4x-3|<x$;
b) $|x-1|+|1-x|>1$; d) $|x-7|>|x-1|$.

251*. a) $(x-3)\sqrt{x-2}<0$; c) $(5-2x)\sqrt{x^2+3}\ge 0$;
b) $(2x-1)\sqrt{3x-2}>0$; d) $(4x-5):\sqrt{3x-1}\le 0$.

Exerciţii pentru repetare

252. Descompuneţi în factori trinomul pătrat:
a) $x^2-10x+21$; c) $2x^2+5x-3$; e) $9a^2+3a-2$;
b) $a^2+2a-15$; d) $c^2-11c-26$; f) $4c^2+25c+25$.

253. Demonstraţi, că valoarea expresiei $17^{10}+3\cdot 7^{10}-3\cdot 7^9+17^9$ se divide cu 36.

254. Scrieţi numerele în formă standard:
a) 47 000 000; d) 0,00000407; e) $3,7\cdot 100^5$;
b) 308 000 000; e) $803\cdot 10^9$; є) $0,42\cdot 10^{-7}$;
c) 0,000000039; f) $0,067\cdot 10^7$; ж) 2000^5.

255. Construiţi graficele ecuaţiilor
a) $2x+3y=6$; b) $xy=12$; c) $x^2+y^2=4$; d) $y^2-x^2=0$.

Comoara succeselor

✓Pot da exemple de sisteme de inecuaţii cu o variabilă.
✓Înţeleg ce este soluţia sistemului de inecuaţii cu o variabilă.
✓Ştiu:
– să rezolv sisteme de inecuaţii cu o variabilă:
– să scriu soluţiile sistemelor de inecuaţii

Aplicăm cunoştinţele obţinute

Pentru a înţelege şi însuşi bine tema nouă, ne amintim:

Dacă diferenţa $a - b$ e număr pozitiv, atunci numărul a e mai mare decât b

Dacă diferenţa $a - b$ e număr negativ, atunci numărul a e mai mic decât b

Media aritmetică

Media geometrică $\sqrt{ab}$

Valoarea expresiilor

$(a + b)^2 \geq 0$ pentru orice a şi b;

$(a + b)^2 + c > 0$ pentru $c > 0$ şi orice a şi b.

§ 7 Demonstrarea inegalităţilor*

Uneori apare necesitatea de a demonstra că inegalitatea dată cu variabile este adevărată pentru toate valorile indicate ale variabilelor. Aceasta se poate realiza pe baza definiţiilor noţiunilor «mai mare» şi «mai mic»:

$a > b$, dacă diferenţa $a - b$ este un număr pozitiv.

Exemplul 1. Demonstraţi, că pentru fiecare valoare reală a lui a

$a^2 + 2 > 2a$.

Demonstraţie. $a^2 + 2 - 2a = a^2 - 2a + 1 + 1 = (a - 1)^2 + 1$. Pentru orice valoare reală a lui a valoarea expresiei $(a - 1)^2$ este nenegativă, $(a - 1)^2 + 1$ este pozitivă. Deci, totdeauna $a^2 + 2 > 2a$.

Exemplul 2. Demonstraţi, că pentru a şi b pozitivi $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Demonstraţie $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$.

Expresia formată $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ pentru orice a şi b pozitivi nu este negativă. Deci, dacă $a > 0$ şi $b > 0$, atunci

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Egalitatea are loc numai atunci, când $a = b$.

* Pentru acei care doresc să ştie mai mult

Remarcă. Expresia $\frac{a+b}{2}$ se numeşte ***medie aritmetică*** a numerelor a şi b, iar expresi $\sqrt{ab}$ este ***media geometrică*** a lor. De aceea inegalitatea demonstrată se citeşte astfel:

Media aritmetică a două numere pozitive nu este mai mică decât media geometrică a lor.

Exemplul 3. Argumentați, că pentru a, b şi c pozitivi
$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

Demonstraţie. Deoarece media aritmetică a două numere pozitive nu este mai mică decât media geometrică a lor, avem:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab};\quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc};\quad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}.$$

Înmulţind termenii acestor inegalităţi, obţinem:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca},$$

sau

$$(a + b)\,(b + c)\,(c + a) \geq 8abc.$$

Demonstrarea afirmaţiei cu variabile este argumentarea că ea este adevărată pentru *toate* valorile admisibile ale variabilei. *Contestarea afirmaţiei* este argumentarea că ea este falsă.

A contesta inegalitatea cu variabile înseamnă a arăta, că inecuaţia dată este falsă cel puţin pentru *o* valoare a variabilei.

Exemplul. Contestaţi inegalitatea $(n + 1)^2 > n^2$.

Contestarea. Când $n = -1$ inegalitatea are forma $0^2 > 1^2$. Ultima inegalitate este falsă. Deci, şi inegalitatea dată este falsă.

Exemplul care contestează o afirmaţie oarecare se numeşte *contra exemplu*.

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

Afară de media aritmetică şi media geometrică, savanţii examinează media pătrată a doua sau mai multe numere. *Medie pătrată* a câtorva numere se numeşte numărul egal cu rădăcina pătrată din media aritmetică a pătratelor lor.

Media pătratelor numerelor a şi b sau x, y şi z este:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\quad \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}.$$

Media pătratelor a două numere totdeauna este mai mare decât media aritmetică a lor. $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3}$

Încercați să argumentați, că pentru orice numere pozitive a şi b totdeauna:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Ilustraţi corectitudinea acestei inegalităţi duble, folosind figura 44.4.

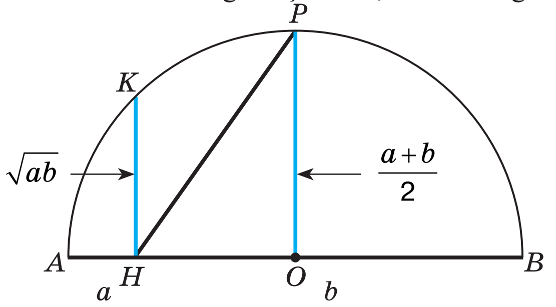


Fig. 44

Verificaţi-vă

1. Ce înseamnă «a demonstra afirmaţia»? Dar a o contesta?
2. Ce înseamnă «a demonstra inegalitatea»?
3. Formulaţi definiţia mediei aritmetice şi mediei geometrice a două numere.
4. Comparaţi media aritmetică şi media geometrică a două numere pozitiv.

Efectuăm împreună

Argumentaţi: dacă $a < b$, atunci $a < \frac{a+b}{2} < b$. Formulaţi această afirmaţie.

- **Demonstraţie.** Dacă $a < b$, atunci $2a < a + b$, de unde $a < \frac{a+b}{2}$.

Dacă $a < b$, atunci $a + b < 2b$, de aici $\frac{a+b}{2} < b$.

Unind ambele cazuri obţinem: dacă $a < b$, atunci $a < \frac{a \quad b}{} < b$

Media aritmetică a două numere reale diferite este mai mare decât cel mai mic din numerele date şi mai mică decât cel mai mare din ele.

Efectuaţi oral

256. Aflaţi mediile aritmetice ale numerelor:
a) 1,3 şi 2,7; b) 38 şi 0; c) 409 şi −409; d) 10, 20şi 30.

257. Aflaţi mediile geometrice ale numerelor:
a) 50 şi 8; b) 1000 şi 40; c) 0,2 şi 0,8; d) 5^{11} şi 5^{-7}.

Argumentați inegalitățile (**258** — **259**).

258. a) $(a-2)^2+3>0$; b) $(1-2a)^2+1>0$; c) $(a+2)^2>4a$.

259. a) $a^2+6a+10>0$; b) $9-12a+4a^2\geq 0$; c) $a^4+1\geq 2a^2$.

Nivelul A

Argumentați inegalităţile **(260 -203)**

260. a) $a^2+2a+2>0$; b) $a^2-2a+5>0$; c) $2a^2+4a+5>0$; d) $2a^2+a+1>0$.

261. a) $a^2+3>2a$; b) $a^2+5>4a$; c) $2a^2+1>2a$; d) $3a^2+1>2a$.

262. a) $(2a-1)(2a+1)<4a^2$; b) $(a-3)^2>a(a-6)$; c) $a^2+65>16a$; d) $a^4+82>18a^2$.

263. a) $(a+1)^2\geq 4a$; b) $99+20a<(a+10)^2$; c) $\frac{\quad}{\quad}\leq 1$; d) $\frac{a^2+4}{4}\geq a$.

264. Demonstraţi, că pentru fiecare valoare negativă a lui x:
a) $(x-1)(x-2)>0$; b) $x^2+9>10x$; c) $(x-3)(3-x)<0$; d) $(2-x)(x-3)<0$.

265. Demonstraţi, că pentru fiecare c pozitiv:
a) $c+\frac{1}{c}\geq 2$; b) $9c+\frac{1}{c}\geq 6$; c) $(c+1)\left(\frac{1}{c}+1\right)\geq 4$.

Nivelul B

Demonstraţi inegalităţile (**266** – **267**).

266. a) $a^2-ab+b^2\geq 0$; b) $a^2+b^2+2\geq 2(a+b)$.

267. a) $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$; b) $a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$.

268. Argumentaţi, că suma pătratelor a oricăror două numere reale nu este mai mică decât îndoitul produs al lor.

269. Ce este mai mare: a) suma pătratelor a două numere pozitive sau pătratul sumei lor; b) suma pătratelor a două numere negative sau pătratul sumei lor?

270. Argumentaţi, că semisuma pătratelor a două numere reale nu este mai mică decât pătratul semisumei lor.

271. Din toate dreptunghiurile, care au arii egale, cel mai mic perimetru are pătratul. Argumentaţi.

272. Din toate triunghiurile dreptunghice cu ipotenuze egale cea mai mare arie o are triunghiul isoscel. Argumentaţi.

273. Din toate dreptunghiurile, înscrise într-o circumferinţă dată, pătratul are cea mai mare arie. Argumentaţi.

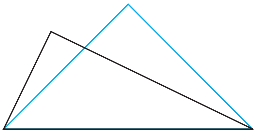


Fig. 45

Demonstraţi inegalitatea pentru orice valori reale ale variabilei (**274–278**).

274. a) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$; b) $(a + b + 1)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + 1)$.

275. a) $a^4 + b^4 + 2c^2 \geq 4abc$; b) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.

276. a) $8a^2 + 14ab + 7b^2 + 1 > 0$; c) $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$;

b) $2a^2 + 5c^2 + 2ac + 1 > 0$; d) $\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}$.

277. a) $|a|+|b| \geq |a+b|$; b) $|a|-|b| \leq |a-b|$.

Demonstraţi veridicitatea inegalităţilor numerice (**278–281**).

278. a) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} < 2$; b) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} < 3$.

279. a) $\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3}}}} < 3$; b) $\sqrt{2-\sqrt{12-\sqrt{12}}} > 3$.

280. a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100} < 1$; b) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{100^2} < 1$.

Exerciţii pentru repetare

281. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $\frac{4}{x+3} = -2x$; b) $\frac{3}{x+3}+\frac{5x}{x-1} = 1$.

282. Una din rădăcinele ecuaţiei $x^3 + 2x^2 - 9x + a = 0$ este egală cu –2. Aflaţi celelalte rădăcini ale ecuaţiei date.

283. Minereul conţine 60 % de fier. Din el s–a topit fontă care conţine 98 % de fier. Din câte tone de minereu se vor topi 1000 t de fontă??

284. Este dată funcţia $f(x) = \frac{2x^2-6x+4}{2x^2-2x-4}$.

1) Calculaţi $f(9)$, $f(99)$, $f(999)$.

2) Aflaţi domeniul de definiţie al funcţiei $f(x)$.

285. Stabiliţi corespondenţa dintre formulele (1– 4), care definesc unele funcţii, şi graficele lor respective (A – D).

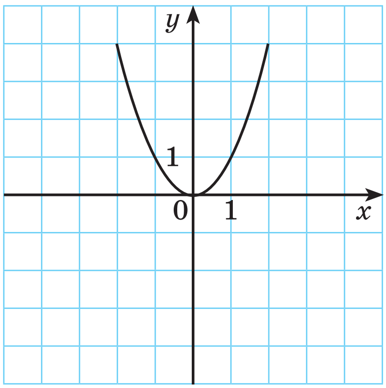
1 $y = 0{,}5x$

2 $y = \sqrt{x}$

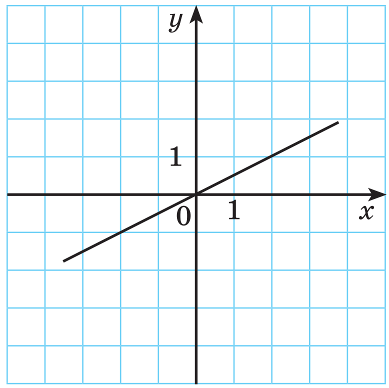
3 $y = x^2$

4 $y = 2 - x$

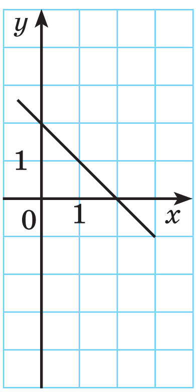
A



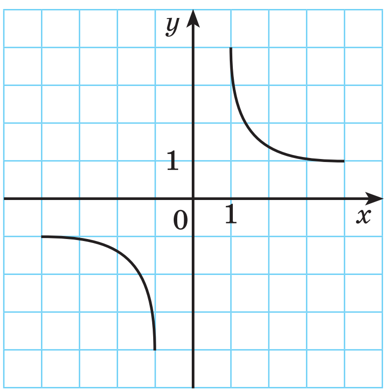
B



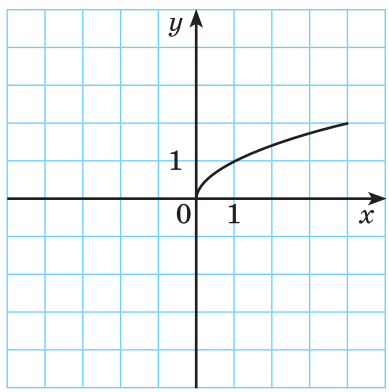
C



D



F



Comoara succeselor

- ✓ Ştiu, că $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$
- ✓ Ştiu, că a contesta inegalitatea cu variabile, înseamnă a arăta, că inecuaţia dată este falsă cel puţin pentru o valoare a variabilei.
- ✓ Ştiu să aplic definiţia noţiunilor «mai mare» şi «mai mic» pentru demonstrarea inegalităţilor cu variabile.

SARCINI PENTRU LUCRUL INDEPENDENT*

Varianta I

1°. Rezolvaţi inecuaţia $3x - 5 < 13$.

2. Rezolvaţi sistemele de inecuaţii:

a°) $\begin{cases} 2x+3>7, \\ x-5\le 1; \end{cases}$ b•) $\begin{cases} 3-\dfrac{x-2}{2}\le x, \\ 5(x-2)<8x+1. \end{cases}$

3•. Rezolvaţi inecuaţia dublă $-1 \le 2x - 3 < 5$.

Varianta II

1°. Rezolvaţi inecuaţia $4x - 7 < 13$.

2. Rezolvaţi sistemele de inecuaţii:

a°) $\begin{cases} 3x-7<5, \\ 2x+1\ge 3; \end{cases}$ b•) $\begin{cases} 2-\dfrac{x-1}{3}\ge x, \\ 7(x-3)>5x-2. \end{cases}$

3•. Rezolvaţi inecuaţia dublă $-3 < 2c + 1 \le 7$.

Varianta III

1°. Rezolvaţi inecuaţia $5x - 4 > 26$.

2. Rezolvaţi sistemul de inecuaţii:

a°) $\begin{cases} 5x-2\le 18, \\ 2x+3>5; \end{cases}$ b•) $\begin{cases} 4-\dfrac{2-x}{3}>x, \\ 2(x-4)\ge 5x-2. \end{cases}$

3•. ˙. Rezolvaţi inecuaţia dublă $-2 \le 3n + 4 < 10$.

Varianta IV

1°. Rezolvaţi inecuaţia $7x + 3 > 38$.

2. Rezolvaţi sistemele de inecuaţii:

a°) $\begin{cases} 4x-3>5, \\ 5x+2\le 27; \end{cases}$ b•) $\begin{cases} 3-\dfrac{x-4}{2}<3x, \\ 5(x-1)\ge 3x-1. \end{cases}$

3•. Rezolvaţi inecuaţia dublă $-5 < 2m - 1 \le 7$.

---

* Aici şi mai departe: ° — nivelul începător şi mediu;
• — nivelul mediu;
•• — nivelul înalt.

DATE ISTORICE

Oamenii ştiau a determina, care număr din două este mai mare, iar care – mai mic, încă pâna la era noastră. În «Bazele» lui Euclid (sec. III p.e.n.) este demonstrată inegalitatea care în prezent se scrie astfel:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Atunci a şi b se considerau nu numere pozitive arbitrare, dar lungimile segmentelor; demonstrarea se propunea pur geometrică şi fără semnele inegalităţii.

Savantul din Grecia Antică Arhimede (sec. III p. e. n.) a demonstrat inegalitatea dublă, care în prezent se scrie astfel:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Matematicianul englez T. Garriot primul în a. 1631 a propus semnele «<» şi «>». Cu toate că semnele inegalităţii au fost propuse mai târziu decât semnul egalităţii ele se foloseau mai devreme, deoarece le tipăreau folosind litera V, iar semnul «=» pe vremea aceea încă nu era.

Matematicanul englez Dj. Vallis în a. 1670 a propus semnele inegalităţilor nestricte, însă liniuţa el o scria deasupra semnului inegalităţii. Aceste semne se foloseau rareori. În a.1734 matematicianul francez P. Baucher a propus semnele «≤» şi «≥» în forma uzuală.

În matematica contemporană şi ştiinţele aplicative se folosesc inegalităţile dintre medii, mai cu seamă dintre media aritmetică şi media pătrată a câtorva numere reale. De exemplu, dacă a_1, a_2, a_3, ..., a_n sunt numere reale arbitrare, $n \in$ N, $n \geq 2$, atunci este adevărată inegalitatea:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Sunt cunoscute inegalităţi care au numiri proprii.

Inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică a n numere pozitive se numeşte *inegalitatea lui Cauchy*:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

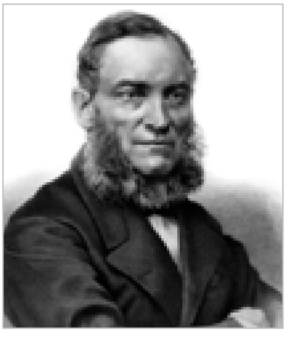
Inegalitatea lui Buneakovski:

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

Oghiusten Lui Cauchy – matematician francez, membru al Academiei din Paris, al societăţii Regale din Londra şi al altor multe academii de ştiinţă. A lucrat în diferite domenii ale matematicii (aritmetica şi teoria numerelor, algebra, analiza matematică, ecuaţiile diferenţiale, mecanica teoretică şi cerească, fizica matematică). În genere el a scris şi a publicat mai mult de 800 de lucrări. Colecţia completă a lucrărilor lui editată de AŞ din Paris Oghiusten Lui Cauchy conţine 27 de volume.

Oghiusten Lui Cauchy
(1789–1857)

Dintre matematicienii ucrainieni ai sec. XIX problemele referitoare la inegalităţi cel mai mult le-a cercetat **V. I. Buneakovski.** El s-a născut în or. Bar (în prezent e în regiunea Viniţa), a făcut studiile în Germania, Franţa. A susţinut teza de doctorat şi a obţinut titlul de doctor în matematică în Paris (1825). Inegalitatea demonstrată de el uneori o atribuie matematicianului neamţ G. Şvarţ, dar V.I.



V.I.Buneakovski
(1804–1889)

Buniacovski a demonstrat-o cu 16 ani mai devreme. El a studiat caracteristicele statistice ale populaţiei, contingentul posibil al armatei ruse, plauzibilitatea mărturiilor în procesul judiciar, eroarea în observări, etc.

Din a. 1858 a fost expertul principal al guvernului în problemele statisticii şi asigurării.

Există şi alte inegalităţi care au nume proprii: *inegalitatea lui Gelder, inegalitatea lui Minkowski, inegalitatea lui Young* ş.a. Aceste inegalităţi se aplică în diferite domenii ale matematicii superioare. Cu ele cu timpul vă veţi familiariza, dacă veţi deveni specialişti în domeniul matematicii.

Inegalităţile se aplică şi în geometrie. De exemplu, ΔABC există atunci şi numai atunci, când se realizează trei inegalităţi:

$AB < BC + CA$; $BC < CA + AB$ şi $CA < AB + BC$.

Esenţialul în capitol

Numărul a este mai mare decât numărul b, dacă diferenţa $a - b$ este număr pozitiv; numărul a este mai mic decât numărul b, dacă diferenţa $a - b$ este număr negativ.

Orice semn din $<$, $>$, $\leq$ şi $\geq$ se numeşte *semn al inegalităţii.*

Semnele $<$ şi $>$ se numesc *semne stricte ale inegalităţii*. Semnele $\leq$ şi $\geq$ le numesc semne nestricte ale inegalităţii.

Înscrierea $a \leq b$ semnifică, că $a < b$ sau $a = b$.

Înscrierea $a \geq b$ semnifică, că $a > b$ sau $a = b$.

Două expresii unite cu semnul inegalităţii ($<$, $>$, $\leq$ sau $\geq$) formează o inegalitate. Inegalitatea se numeşte *numerică* dacă ambele părţi ale ei sunt expresii numerice.

Proprietăţile inegalităţilor numerice

Dacă: $a < b$ şi $b < c$, atunci $a < c$;
$a < b$ şi c un număr arbitrar, atunci $a + c < b + c$;
$a < b$ şi $c > 0$, atunci $ac < bc$;
$a < b$ şi $c < 0$, atunci $ac > bc$;
$a < b$ şi $c < d$, atunci $a + c < b + d$;
$a < b$, $c < d$ şi a, b, c, d sunt numere pozitive, $ac < bd$;

Inecuaţiile de formă $a < x < b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$, $a \leq x \leq b$ se numesc *inecuaţii duble.* Ele se aplică pentru evaluarea valorilor mărimilor şi calculelor aproximative. Deoarece dacă $a < x < b$ şi $c < y < d$, atunci avem:

$a + c < x + y < b + d$, $a - d < x - y < b - c$,

$ac < xy < bd$, $a : d < x : y < b : c$.

Ultimele două inecuaţii duble sunt adevărate cu condiţia că numerele a şi c sunt pozitive.

$2x + 17 < 1$, $12 - 3x \geq 2$ sunt exemple de inecuaţii cu o variabilă x.

Inecuaţiile sunt asemănătoare cu ecuaţiile. Soluţie a inecuaţiei se numeşte un astfel de număr care satisface inecuaţia dată, adică o transformă în inegalitate numerică adevărată.

A rezolva inecuaţia înseamnă a afla toate soluţiile ei sau a demonstra că nu are soluţii.

Mulţimea soluţiilor cel mai des formează *intervale*. De exemplu, mulţimea soluţiilor inecuaţiilor $2x + 7 < 15$ şi $8 + 3x \geq 2$ sunt intervalele respective $(-\infty; 4)$ şi $[-2; \infty)$.

Câteva inecuaţii cu aceeaşi variabilă formează *sistemul de inecuaţii* când trebuie de aflat soluţiile lor comune. A rezolva un sistem de inecuaţii înseamnă a găsi toate soluţiile ei sau a arăta că ele nu există.

Clarificăm realizările

Sarcini în formă de teste Nr. 1

1 Selectaţi inegalitatea adevărată:
a) $0,2>\sqrt{2}$; b) $-1 < -2$; c) $5 \geq 5$; d) $2^{-1} \leq 2^{-2}$.

2 Suma inegalităţilor $5 > 3$ şi $2 > -1$ este inegalitatea:
a) $4 > 5$; b) $4 < 5$; c) $7 > 2$; d) $7 \geq 2$.

3 Indicaţi inegalitatea strictă:
a) $15 \geq 5$; b) $2 \leq 2$; c) $7 > -2$; d) $-10 \geq 10$.

4 Inecuaţia $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ o satisface numărul:
a) 2; b) 1; c) 0; d) −1.

5 Câte numere întregi satisfac inecuaţia dublă $-1 \leq x \leq 1$:
a) unul; b) două; c) trei; d) patru?

6 Alegeţi intervalul căruia îi aparţine numărul $\sqrt{3}$:
a) $[2;\ 3]$; b) $\left(-\infty; \sqrt{3}\right)$; c) $\left(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\right)$; d) $\left(-\sqrt{3}; \infty\right)$.

7 Alegeţi inecuaţia care nu are soluţii:
a) $|x| \geq -3$; b) $x < -3$; c) $7-|x|<0$; d) $x^2 < 0$.

8 Sistemului de inecuaţii $\begin{cases} 2x \leq 3, \\ x+1 \leq 2 \end{cases}$ are mulţimea soluţiilor:
a) $(-\infty; 1]$; b) $[1,5; \infty)$; c) $(-\infty; 1,5]$; d) $[2;\ 3]$.

9 Care cel mai mare număr este soluţie a inecuaţiei $x^2 - 2x \geq x^2 + 2$:
a) 2; b) 1; c) −1; d) −2?

10 Aflaţi domeniul de definiţie al funcţiei $y=\dfrac{1}{x^2}+\sqrt{x}$:
a) $(-\infty; 0]$; b) $(-\infty; 0)$; c) $[0; \infty)$; d) $(0; \infty)$.

Sarcini-tip pentru lucrarea de control nr. 1

1 Comparaţi fracţiile:

a°) $\frac{5}{7}$ i $\frac{3}{7}$; b°) $-\frac{4}{3}$ i $-\frac{4}{3}$; c•) $\frac{5}{6}$ i $\frac{6}{7}$; d•) $-\frac{7}{13}$ i $-\frac{13}{27}$.

2 Se ştie că $x < y$. Comparaţi:

a°) $x-3$ şi $y-3$; c•) $-2x$ şi $-2y$;
b°) $1{,}3x$ şi $1{,}3y$; d•) $5-x$ şi $5-y$.

3 Se dă $7 < b < 12$, $2 < c < 5$. Evaluaţi valoarea expresiei:

a°) $3b$; b°) bc; c•) $3b+2c$; d•) $\frac{3b+2c}{bc}$.

4 Rezolvaţi inecuaţia:

a°) $2x-5<7$; c•) $4-(x-2)^2 > x-x^2$;
b°) $3x+7<7x+3$; d•) $\frac{x-3}{5}-\frac{2x-1}{10}\geq 4$.

5• Aflaţi reuniunea şi intersecţia mulţimilor A şi C, dacă;

a) $A=(2;\ 5)$, $C=(1;\ 3)$;
b) $A=(-3;\infty)$, $C=(-\infty;3]$;
c) $A=(-\infty;\pi)$, $C=[\sqrt{10};\sqrt{11}]$.

6 Rezolvaţi sistemele de inecuaţii:

a°) $\begin{cases}6x-7\geq 4x-3,\\ 3x+16\geq 8x-4;\end{cases}$ b•) $\begin{cases}x(x+7)\geq (x-7)^2,\\ (3-x)(x+3)\geq 0{,}5x-x^2.\end{cases}$

7• Aflaţi domeniul de definiţie al funcţiei:

$$y=\sqrt{2x+3}-\frac{9}{\sqrt{9-2x}}.$$

8• Rezolvaţi inecuaţiile:

a) $|5x-3|\leq 1$; b) $|3x-15|>9$.

9•• Rezolvaţi ecuaţia:

$$|x+1|+|x-2|=3.$$

10•• Demonstraţi inegalitatea când $a>0$, $b>0$, $c>0$:

$$(a+2c)(c+2b)(b+2a)>16\sqrt{2}abc.$$

Capitolul 2

BOGOLIUBOV M.M.
(1909 – 1992)

Matematician şi fizician-teoretician ucrainean cu renume mondial, fondatorul şcolilor ştiinţifice a mecanicii nelineare (Kiev), a fizicii statistice şi a teoriei cuantice a câmpului.

Academician al ANŞ a Ucrainei şi al multor academii de ştiinţe străine. Laureat al Premiului internaţional Denni Hienemann în domeniul fizicei matematice.

«Şi oare nu există câţiva Bogoliubovi fiecare dintre ei fiind cel mai mare specialist în domeniul său?»

N. Wiener

Anii copilăriei şi adolescenţei ai lui Bogoliubov M. M. sunt un exemplu că o persoană tânără, în pofida împrejurărilor, datorită stăruinţei şi capacităţii de muncă poate realiza succese remarcabile şi obţine recunoştinţă mondială.

PREMIUL în numele lui M. M. BOGOLIUBOV

Se decernează pe Secţia matematicii ANŞ a Ucrainei pentru lucrări ştiinţifice remarcabile în domeniile matematicii şi fizicii teoretice. Fondată de Academia Naţională de ştiinţe a Ucrainei în anul 1992

LAUREAŢII PREMIULUI:

Bariahtar V. G.
Mitropolski Iu. O.
Sâtenko O. G.
Şarkovski O. M.
Ahiezer O. I.
Koroliuk V. S.
Şârkov D. V.
Parasiuk O. S.
Berezanski Iu. M.
Samoilenko A. M.
Skripnik I. V.
şi alţii

Funcție de gradul doi

Funcţia este un model matematic avantajos pentru studierea multor procese. Studierea diferitor fenomene şi procese cu ajutorul funcţiilor este una din metodele principale ale ştiinţei actuale. Funcţia care poate fi definită prin formula $y = ax^2 + bx + c$ este de *gradul doi* . Graficul ei este *parabola*. Astfel de funcţii se aplică des în diferite domenii ale ştiinţei. Ele sunt îmbinate cu ecuaţiile şi inecuaţiile pătrate.

În acest capitol vom studia astfel de teme:

§ 8 Funcţii — Functions

§ 9 Proprietăţile funcţiilor — Functions Properties

§ 10 Transformarea graficelor funcţiilor — Functions Graphs Transformations

§ 11 Funcţia de gradul doi — Quadratic Function

§ 12 Inecuaţiile pătrate — Quadratic Inequalities

§ 13 Sisteme de ecuaţii de gradul al doilea — Second Degree Equations Systems

§ 14 Rezolvarea problemelor cu ajutorul sistemelor de ecuaţii — Compilation of Systems of Equations Task Solving

Proiectul de învăţământ nr. 2
„FUNCŢIILE ÎN JURUL NOSTRU”

Aplicăm competenţele obţinute

- Pentru a înţelege şi a însuşi bine tema nouă, ne amintim:
- Ce este funcţia, domeniul de definiţie şi codomeniul funcţiei.
- Metodele de definire ale funcţiei:

prin formulă grafic tabel cu cuvinte, etc.

- Ce este graficul funcţiei şi cum se construieşte el.
- Tipurile funcţiilor

liniară	liniară	pătrată	altele
$y = kx + b$	$y = \frac{k}{x}$	$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$

§ 8 Funcţii

Funcţia este una din cele mai importante noţiuni ale matematicii şi practicii. Dacă vom cugeta bine, atunci putem înţelege, că noi toţi trăim în lumea funcţiilor – schimbărilor, dependenţelor şi relaţiilor. Cu trecerea timpului ziua schimbă noaptea, primăvara – iarna. Sub ritmul acesta se acomodează toate vietăţile, printre altele şi omul. Graficul de lucru cel mai răspândit, orarul lecţiilor, lucrul centrelor de distracţie şi chiar programele radioului şi televiziunii se compun în dependenţă de ora zilei şi anotimpurile anului.

Există numeroase exemple ale dependenţelor şi relaţiilor dintre variabile în diferite domenii ale ştiinţei:

- *geometrie* – formula $S = 4\pi R^2$ exprimă dependenţa ariei suprafeţei sferice (S) de raza ei (R);

fizică – formula $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ stabileşte corespondenţa dintre lungimea pendulului l şi perioada oscilaţiei lui (T). Deci, T este o funcţie de l (aici $\pi \approx 3{,}14$, $g \approx 9{,}8$ m/s^2 sunt constante);

- *economie* – formula $T_R = p \cdot Q$ formula defineşte dependenţa venitului total (T_R) care obţine întreprinderea de preţul (p) mărfii vândute şi volumul vânzării (Q).

Amintim cunoştinţele fundamentale despre funcţie.

Dacă fiecărei valori a variabilei x dintr-o mulţime oarecare D îi corespunde o singură valoare a variabilei y, atunci această corespondenţă se numeşte ***funcţie.***

Aici x se numeşte ***variabilă independentă*** sau ***argument***, y – ***variabilă dependentă*** sau funcţie, iar mulţimea D – ***domeniu de definiţie*** al funcţiei date. Mulţimea tuturor valorilor ale lui y care poate primi funcţia se numeşte ***mulţimea valorilor*** sau ***codomeniul*** funcţiei şi de notează prin litera E.

Grafic al funcţiei se numeşte mulţimea tuturor punctelor din planul de coordonate, abscisele cărora sunt egale cu valorile argumentului, iar ordonatele – cu valorile respective ale funcţiei.

Funcţia cel mai des se defineşte în formă de formule, tabele sau grafice. De exemplu, formula $y = x^2$ defineşte funcţia, care exprimă corespondenţa dintre numere şi pătratele lor. Dacă domeniul de definiţie al acestei funcţii este mulţimea numerelor întregi din intervalul [–3; 3], ea poate fi definită în formă de tabel:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Graficul acestei funcţii sunt şapte puncte (fig. 46). Domeniul ei de definiţie este mulţimea $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, iar codomeniul – mulţimea $E = \{0, 1, 4, 9\}$.

Dacă domeniul de definiţie al funcţiei $y = x^2$ este [–2; 2], atunci graficul ei este o parte din parabola reprezentată pe figura 47, iar codomeniul – segmentul [0; 4].

Graficul funcţiei $y = x^2$ definită pe mulţimea tuturor numerelor reale ***R*** este toată parabola (fig. 48). Domeniul de definiţie al acestei funcţii este mulţimea numerelor reale ***R***, iar codomeniul este intervalul [0; ∞).

Reamintim încă câteva exemple de funcţii.

***y* = *kx* – proporţionalitatea directă** ($k \neq 0$). Graficul ei este o dreaptă care trece prin originea de coordonate. Domeniul de definiţie al ei este mulţimea ***R*,** codomeniul – tot mulţimea ***R*.**

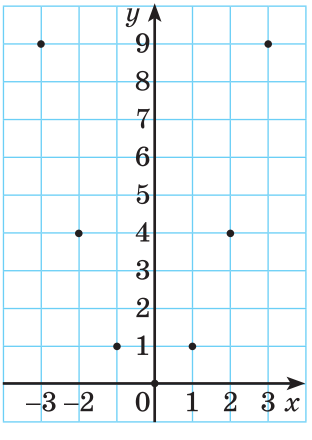


Fig. 46

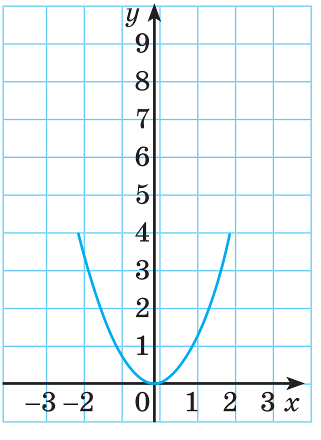


Fig. 47

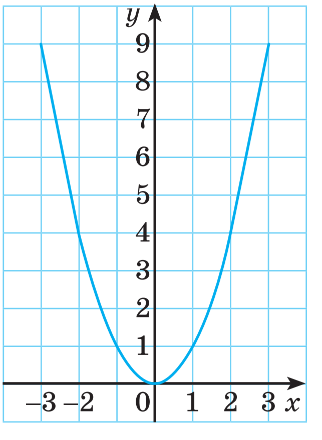


Fig. 48

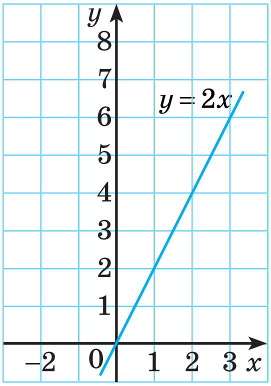


Fig. 49

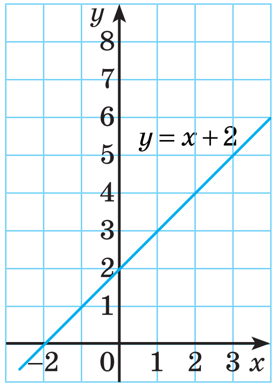


Fig. 50

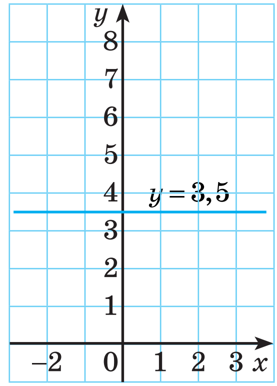


Fig. 51

De exemplu, graficul funcţiei $y = 2x$ este reprezentat pe figura 49.

***$y = kx + b$* – funcţia liniară.** Graficul ei este o dreaptă care nu-i paralelă axei y. Domeniul de definiţie este mulţimea $\boldsymbol{R}$, codomeniul – $\boldsymbol{R}$, dacă $k \neq 0$. Dacă $k = 0$ codomeniul este un număr b. Exemple: $y = x + 2$ (fig. 50), $y = 3{,}5$ (fig. 51).

$y = \frac{k}{x}$ – ***proporţionalitatea inversă*** ($k \neq 0$). Graficul ei este o hiperbolă. Dacă $k > 0$, ramurile hiperbolei sunt situate în cadranele I şi III ale planului de coordonate, dacă $k < 0$, – în sferturile II şi IV. Domeniul de definiţie al funcţiei y = k;x este mulţimea $\boldsymbol{R}$ fără numărul 0, codomeniul – aceeaşi mulţime $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Exemple: $y = \frac{3}{x}$ fig. 52, *a*), $y = -\frac{2}{x}$ (fig. 52, *b*).

Graficul funcţiei $\boldsymbol{y = x^3}$ este reprezentat pe figura 53. Domeniul de definiţie şi codomeniul ei este mulţimea $\boldsymbol{R}$.

Graficul funcţiei $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ este o ramură a parabolei (fig. 54). Domeniul de definiţie al ei este $[0; \infty)$, codomeniul $[0; \infty)$. Dacă variabila y depinde de x, atunci se scrie $y = f(x)$ (se citeşte: igrec este egal cu fe de iks). Simbolul $f(a)$ indică valoarea funcţiei $y = f(x)$, dacă $x = a$. Fie, de exemplu, funcţia definită prin formula $y = 3x^2 - 5$. Se scrie şi aşa: $f(x) = 3x^2 - 5$. În acest caz $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 5 = -5$; $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 5 = 7$.

Remarcă. Dacă $y = f(x)$, atunci se spune că y este funcţie de x, adică variabila y o numesc funcţie. Dar de cele mai multe ori sub funcţie se înţelege nu o variabilă dependentă, dar corespondenţa dintre două variabile. De asemenea, nu orice corespondenţă, dar cea univocă, când fiecărei valori a variabilei x îi corespunde *o singură* valoare a funcţiei y.

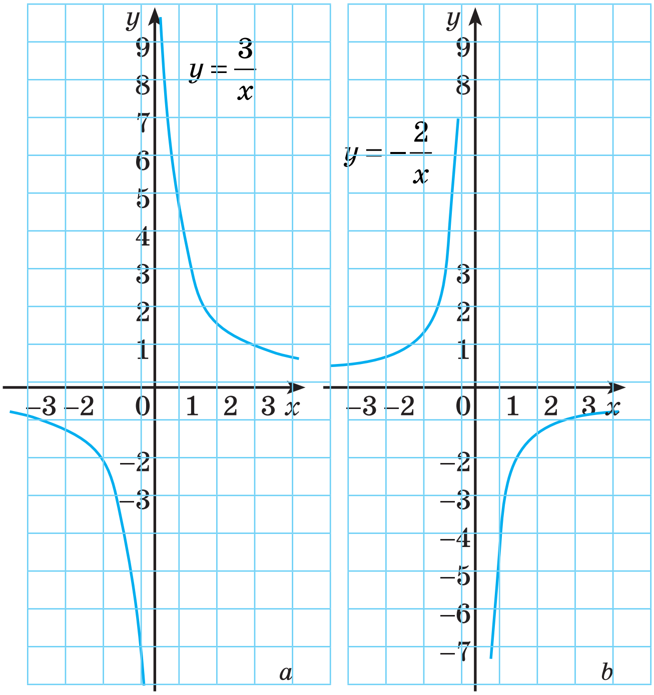


Fig. 52

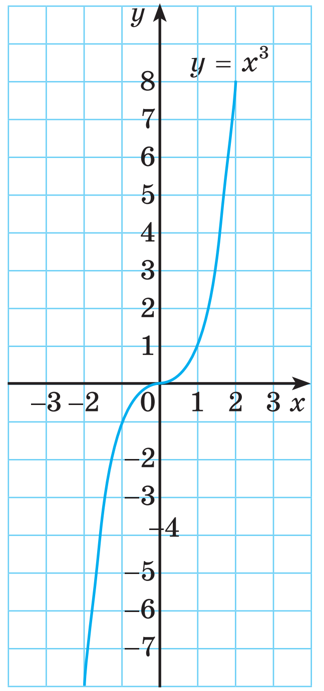


Fig. 53

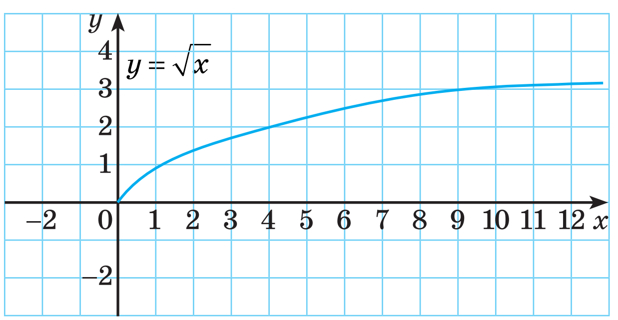


Fig. 54

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

Unele funcţii pe părţi separate ale domeniului de definiţie se definesc prin diferite formule. De exemplu, funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x < 0, \\ x, \text{ dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Valorile acestei funcţii pentru valori negative ale argumentului se află folosind formula $f(x) = x^2$, iar pentru pozitive – după formula $f(x) = x$. Graficul ei este reprezentat pe figura 55.

Există şi alte funcţii care se marchează cu simboluri noi.

Parte întreagă a numărului real x se numeşte cel mai mare număr întreg $[x]$ care nu este mai mare decât x. Graficul funcţiei $y = [x]$ este reprezentat pe figura 56.

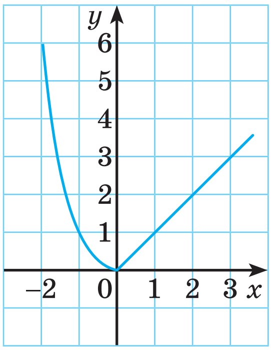


Fig. 55

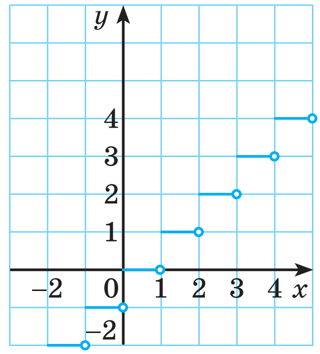


Fig. 56

Parte fracţionară a numărului real x se numeşte diferenţa dintre numărul dat şi partea lui întreagă: $\{x\} = x - [x]$. Graficul funcţiei $y = \{x\}$ este reprezentat pe figura 57.

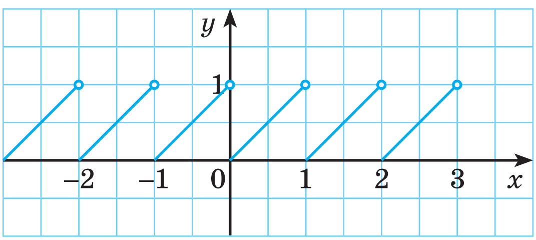


Fig. 57

Verificaţi-vă

1. Formulaţi definiţia funcţiei.
2. Ce este argumentul funcţiei? Daţi exemple.
3. Cum se poate defini funcţia?
4. Ce este domeniul de definiţie şi codomeniul funcţiei?
5. Care funcţii se numesc liniare? Care sunt proprietăţile lor?
6. Numiţi proprietăţile proporţionalităţii inverse.
7. Ce se numeşte graficul funcţiei?

Efectuăm împreună

1 Funcţia este definită prin formula $f(x) = x^3 + 1$. Aflaţi: $f(-3)$, $f(0)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$..

Rezolvare. $f(-3) = (-3)^3 + 1 = -27 + 1 = -26$, $f(0) = 0^3 + 1 = 0 + 1 = 1$,

$f\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^3 + 1 = 2\sqrt{2} + 1.$

Răspuns. $f(-3) = -26$, $f(0) = 1$, $f\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} + 1.$

2 **2.** În care puncte graficul funcţiei $y = x^2 - 3x + 2$ intersectează:
a) axa y; b) axa x?

● **Rezolvare.** a) Dacă graficul intersectează axa y într-un punct oarecare, atunci abscisa acestui punct este egală cu 0, iar coordonatele satisfac ecuaţia care defineşte funcţia.

Avem: $x = 0$; $y = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$.

Deci, graficul funcţiei intersectează axa y în punctul cu coordonatele (0; 2).

b) Dacă graficul intersectează axa x într-un punct oarecare, atunci ordonata acestui punct este egală cu 0, iar coordonatele punctului satisfac ecuaţia care defineşte funcţia.

Avem: $y = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Deci, graficul funcţiei intersectează axa x în punctele cu coordonatele (1; 0) şi (2; 0).

Răspuns. a) (0; 2); b) (1; 0) şi (2; 0).

Efectuaţi oral

286. Declinaţi cuvintele: a) *funcţie*; b) *argument*; c) *grafic*.

287. Alcătuiţi formula funcţiei care exprimă corespondenţa dintre numere şi: a) cuburile lor; b) numerele opuse lor; c) numerele inverse lor; d) modulele lor.

288. Cum este graficul funcţiilor, definite prin formulele:

a) $y = 3x + 1$; c) $y = 3$; e) $y = \dfrac{x}{3}$;

b) $y = x^2$; d) $y = \dfrac{3}{x}$; f) $y = \sqrt{x}$?

289. Oare este adevărat că:

a) graficul funcţiei $y = \dfrac{2}{3}x - 5$ este şi graficul ecuaţiei $2x - 3y = 15$;

b) graficul funcţiei $y = \sqrt{x}$ este şi graficul ecuaţiei $y^2 = x$? De ce?

290. Graficul cărei funcţii trece prin originea de coordonate:

291. Aflaţi domeniul de definiţie al funcţiilor:

a) $y = 3x - 2$; c) $y = -2{,}5$; e) $y = \sqrt{2x - 4}$;

b) $y = 4 - x^2$; d) $\dfrac{\quad}{x(x \qquad)}$ f) $y = \dfrac{1}{x}\sqrt{5 - 2x}$.

Nivelul A

292. Funcţia este definită prin formula $y=\frac{1}{2}x^2$ pe domeniul de definiţie $D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Definiţi-o tabelar şi grafic.

293. Construiţi graficul funcţiei $y=\frac{1}{2}x^2$ pe segmentul $[-4; 4]$. Aflaţi codomeniul ei.

294. Funcţia $y=\frac{1}{2}x^2$ este definită pe mulţimea $\boldsymbol{R}$. Aflaţi codomeniul ei. Oare aparţine graficului acestei funcţii punctul $A(-100; 5\ 000)$?

295. Funcţia este definită în formă de tabel.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	5	10	15	20	25	30	35	40

Definiţi-o prin formulă. Indicaţi domeniul de definiţie şi codomeniul ei..

296. Funcţia este definită prin formula $f(x) = x^2 + 10$. Calculaţi: $f(2)$, $3f(2)$, $2f(3)$, $0{,}5f(10)$.

297. Funcţia este definită prin formula $f(x) = x^3 - 5$. Aflaţi:

$f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(7)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$.

298. Funcţia este definită prin formula $f(x) = x^2 - x$. Calculaţi:
a) $f(-2) + f(-1)$; b) $f(0) + f(1)$; c) $f(2) - f(30)$.

299. $f(x) = x^2 - x + 1$. Aflaţi:
a) $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$; b) $f(10) - f(-9) + f(8) - f(-7)$.

300. Pe figura 58 este reprezentat graficul funcţiei $y = f(x)$.
Aflaţi:
a) domeniul de definiţie şi codomeniul funcţiei date;
b) $f(-5)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(5)$;
c) pentru care valori ale argumentului $f(x) = 4$, $f(x) = 3$;
c) coordonatele punctelor, în care graficul funcţiei intersectează axele de coordonate;
d) pentru care x valoarea funcţiei $f(x)$ e cea mai mare, cea mai mică?

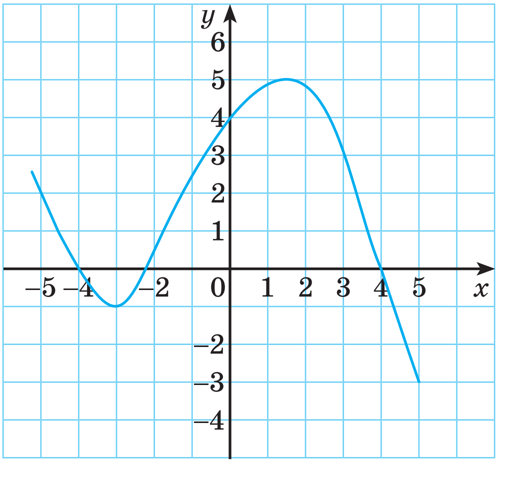


Fig. 58

Aflaţi domeniul de definiţie al funcţiilor (**301** – **302**).

301. a) $y = 3x - 2$; c) $y=\sqrt{x+5}$; e) $y=\sqrt{x^2+1}$;

b) $y=\dfrac{3}{x-2}$; d) $y=\dfrac{1}{(x-3)(x-4)}$; f) $y=\dfrac{10}{x^2+1}$.

302. a) $y = 5x - 1$; c) $y=\sqrt{4-x}$; e) $y=\sqrt{x+1}$;

b) $y=\dfrac{3}{(x-4)(x+1)}$; d) $y=\dfrac{2x}{5-x}$; f) ——

303. Construiţi graficul funcţiilor:

a) $y = 3x - 2$; c) $y = -3x$; e) $y = 5$;

b) $y = 0{,}5x - 1$; d) $y = 7 - 2x$; f) $y = 3 - x$.

304. Construiţi graficul funcţiilor definite prin formule:

a) $f(x) = 2 - 3x$; c) $f(x) = 3 - 2x$;

b) $f(x) = -1$; d) $f(x) = 0{,}5x$.

305. Aflaţi codomeniul funcţiilor:

a) $f(x) = 7$; b) $f(x) = 2x$; c) $y = x^2$.

306. Oare aparţine graficului funcţiei $y=\sqrt{25-x^2}$ punctul $A(3; 4)$? Punctul $B(-4; 3)$?

307. Oare trece graficul funcţiei $y = x(x - 3)$ prin punctele $A(2; -2)$; $B(-1; 4)$, $C(1{,}5; -2{,}25)$?

308. Care din punctele $A(-2; -6)$; $B(1{,}5; 8)$; $C(-3;4)$; $D(-2;-6)$ $E(3; 4)$ aparţin graficului funcţiilor:

a) $y = -10x - 26$; b) $y=\dfrac{12}{x}$; c) $y=\sqrt{x^2+7}$?

309. În care puncte graficul funcţiilor:

a) $y = 2{,}5x$; b) $y = 3 - 2x$; c) $y = 2(x - 1)$?

310. Temperatura scării lui Celsius, lui Fahrenheit şi Kelvin marcăm respectiv t_C, t_F, t_K. Formule de transformare au formă: $t_F=\dfrac{9}{5}(t_C+32)$, $t_K = t_C + 273$.

Pentru 10 valori arbitrare ale temperaturii după Celsius aflaţi valorile respective ale temperaturii după Fahrenheit şi Kelvin. Datele introduceţi-le în tabel. Reprezentaţi grafic dependenţa obţinută.

Nivelul B

311. Funcţia este definită prin formula $f(x) = x^2$. Este oare adevărat, că pentru fiecare a se realizează egalitatea $f(-a) = f(a)$?

312. Funcţia este definită prin formula $f(x) = x^3$. Oare pentru fiecare valoarea a argumentului ei x se realizează egalitatea $f(-x) = -f(x)$?

313. Aflaţi $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$, dacă funcţiile sunt definite prin formulele:

a) $f(x) = 2x^2 + 3$;

b) $f(x) = 3x^3 - 2$;

c) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$;

d) $f(x)=\sqrt{x^2+8x+15}$.

314. Funcţia este definită prin formula $y=\dfrac{6x}{1+x}$ pe mulţimea numerelor naturale a primei zeci. Definiţi-o în formă de tabel.

315. Funcţia este definită prin formula $y=2\sqrt{x+5}$ pe domeniul de definiţie $D = \{-4;\ -2{,}75;\ -1;\ 1{,}75;\ 4;\ 11\}$. Definiţi-o în formă de tabel şi grafic..

316. Fără a construi graficul ecuaţiei $9x - 2y = 14$ aflaţi punctul, ordonata căruia este egală cu abscisa.

317. Fără a construi graficul funcţiei $y = x^2 - 2$ aflaţi punctul, abscisa şi ordonata căruia sunt numere opuse.

318. Fiecărui număr natural îi corespunde numărul opus lui. Oare este această relaţie o funcţie? Dacă e funcţie, definiţi-o prin formulă şi grafic.

319. Fiecărui număr întreg îi corespunde numărul egal lui. Oare este această relaţie o funcţie? Dacă este funcţie, care este graficul ei?

320. Funcţia $y = f(x)$ este definită grafic (fig. 59). Pentru care valori ale argumentului:

a) $f(x) = 0$, $f(x) \le 0$;

b) $f(x) = -2$, $f(x) > -2$, $f(x) \le -2$;

c) $f(x) = 3$, $f(x) \ge 3$, $f(x) < 3$;

d) $0 \le f(x) \le 3$;

e) $-2 < f(x) < 4$?

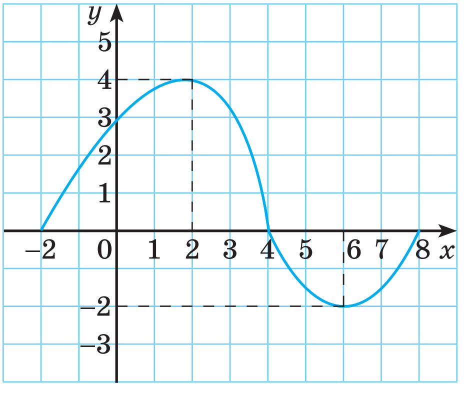


Fig. 59

321. În care puncte graficele funcţiilor intersectează axa x şi axa y:

a) $y=\dfrac{1}{2}x+3$;

b) $y=x-\dfrac{4}{7}$;

c) $y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{5}{2}$;

d) $y = x^2 - 4$;

e) $y = x^2 - 2x$;

f) $y = 6 - 5x - x^2$?

Construiţi într-un sistem de coordonate graficele funcţiilor (**322** –

322. $y = x^2$, $y = x^2 + 3$ şi $y = x^2 - 2$.

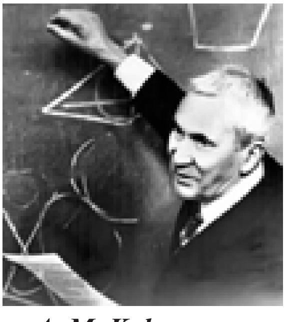
323. $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}+2$ şi $y=\sqrt{x}-3$.

324. $y=|x|$, $y=|x|+11$ şi $y=|x|-2$.

325. Pentru care valoare a lui m graficul funcţiei $y=\sqrt{x+m}$ trece prin punctul $P(5;\ 5)$? Oare trece acest grafic prin punctul $Q\ (–4;\ 4)$?

326. Se ştie, că punctul $A(3;\ 1)$ aparţine graficului fiecăriei funcţii $y = f(x)$. Stabilitţi corespondenţa între funcţiile $f(x)$ (1 – 4) şi punctele (A – E), prin care trece graficele acestor funcţii.

1 $f(x) = x^2 + m$	**A** (4; 8)
2 $f(x) = m - 2x$	**B** (12; 4)
3 $f(x) = \dfrac{m}{x+1}$	**C** (12; –7)
4 $f(x) = \sqrt{3x} + m$	**D** (1; 2)
	F (1; 5)



A. M. Kolmogorov

«*Matematica este aceea, care ajută oamenii să dirijeze natura şi pe sine însuşi*».
A. M. Kolmogorov

327. Construiţi graficul funcţiilor:

a) $y=\dfrac{4}{x}$; c) $y=\dfrac{12}{x}$; e) $y = 0{,}5x^2$;

b) $y=-\dfrac{3}{x}$; d) $y = 2x^2$; f) $y = x^2 - 1$.

328*. Aflaţi domeniul de definiţie al funcţiilor:

a) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5}}$; d) $y=\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}$;

b) $y=\dfrac{-\sqrt{x^3+5x}}{4}$; e) $y=\sqrt{x^2-6x+10}$;

c) $y=\dfrac{1}{x^3+5x^2}$; f) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{16-x^2}$.

329*. ***Problema lui A. M. Kolmogorov.*** Care condiţie suplimentară trebuie aplicată pe valoarile lui x în formula $f(x) = 1$ pentru ca să obţinem definirea funcţiei $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2$?

330*. Construiţi graficul funcţiilor:

a) $y=\begin{cases}4, \text{dacă } x<-2,\\ x^2, \text{dacă } -2\le x\le 1,\\ 2-x, \text{dacă } x>1;\end{cases}$ b) $y=\begin{cases}x+1, \text{dacă } x\le 1,\\ 3-x, \text{dacă } 1-<x<4,\\ -1, \text{dacă } x\ge 4;\end{cases}$

331*. Construiţi graficul funcţiilor:

a) $y = |2x - 3|$; c) $y = |x+1| - |x|$; e) $y = \frac{6}{|x|}$;

b) $y = 2|x| - 3$; d) $y = \frac{|x|}{x}$; f) $y = \sqrt{x^2 + 10x + 25}$.

332*. Funcţia cererii mărfii: $Q_D = 9 - p$. Funcţia propunerii mărfii: $Q_S = 2p - 6$. Aici Q_D este volumul cererii şi Q_S – volumul propunerii (mln. bucăţi pe an), p este preţul (unităţi de bani). Determinaţi preţul echilibrat (cererea este egală cu propunerea) şi volumul vânzării. Cum va influenţa asupra preţului echilibrat al mărfii micşorarea cererii cu 20 %?

Exerciţii pentru repetare

333. Comparaţi valoarea expresiilor:

a) $3\sqrt{2}$ şi $\sqrt{20}$; c) $\sqrt{13}$ şi $2\sqrt{3}$; e) $4\sqrt{5}$ şi 9;

b) $3\sqrt{5}$ şi $\sqrt{44}$; d) $3\sqrt{7}$ şi 8; f) $5\sqrt{2}$ şi 7.

334. Funcţionarului **N** într-o lună de lucru i s-a calculat leafa în mărimea de 5430 grn. Din toate calcule se reţine impozitul pe venit al persoanelor fizice, care constituie 18 %, şi alte reţineri în mărime de 2,5 %. Câţi bani va primi funcţionarul **N** într-o lună? Ce sumă vor alcătui reţinerile într-un an?

335. Rezolvaţi inecuaţiile:

a) $\frac{2x+3}{3x+1} > 0$; b) $\frac{x-6}{1-x} > -1$; c) $\frac{9-2x}{x} \geq 1$.

Comoara succeselor

√ Ştiu, cum se notează funcţiile.

√ Pot da exemple de funcţii studiate:

liniară $y = 2x + 3$;
proporţionalitate directă $y = -0{,}5x$;
proporţionalitate inversă $y =$ k;x;
altei $y = x^2$.

√ Ştiu a calcula valoarea funcţiei într-un punct.

√ Ştiu a construi graficele funcţiilor şi ştiu denumirea graficelor:

$y = kx$ dreaptă	$y = kx + b$ dreaptă	$y =$ k;x `hiperbolă	$y = x^2$ parabolă

√ Doresc să învăţ mai detaliat a caracteriza funcţia după graficul ei.

Aplicăm competenţele obţinute

Pentru a înţelege şi a însuşi bine tema nouă, ne amintim:
– Care caracteristici ale funcţiei se pot determina după graficul ei:
domeniul de definiţie, codomeniul,
valori pozitive, valori negative, etc.

– Tipurile funcţiilor, graficele lor şi proprietăţile principale:

liniară	invers proporţională	de gradul al doilea
$y = kx + b$	$y =$ k;x	$y = x^2$

§ 9 Proprietăţi ale funcţiei

Pentru a studia procesele şi fenomenele mediului ambiant, la început trebuie să ne învăţăm să stabilim trăsăturile caracteristice ale modelelor matematice respective. În primul rând asta se referă la funcţii.

Descriind proprietăţile funcţiilor, de obicei, se începe cu domeniul de definiţie al ei – se indică toate valorile pe care le poate primi argumentul.

Dacă funcţia este definită printr-o formulă, iar despre domeniul de definiţie al ei nimic nu se spune, atunci se consideră că el este acelaşi ca şi domeniul valorilor admisibile al variabilei, care este în această formulă.

Dacă funcţia este definită grafic, domeniul de definiţie al ei este proiecţia graficului ei pe axa x; codomeniul este proiecţia graficului ei pe axa y (fig. 60). De exemplu, domeniul de definiţie al funcţiei $y = x^2$ este mulţimea tuturor numerelor reale $\boldsymbol{R}$, codomeniul – intervalul [0; ∞). Domeniul de definiţie şi codomeniul funcţiei $y = \sqrt{4 - x^2}$ sunt segmentele [–2; 2] şi [0; 2] (fig.61).

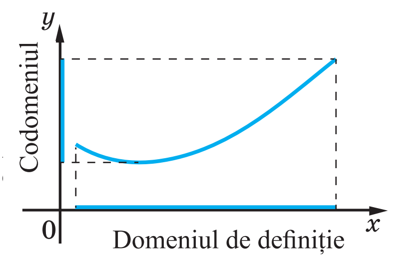


Fig. 60

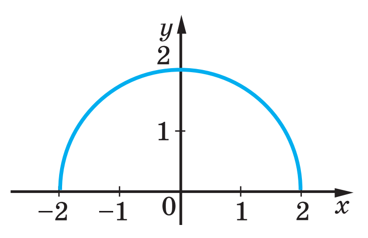


Fig. 61

Examinăm funcţia $y = f(x)$, graficul căreia este reprezentat pe figura 62. Când $x = -2$, $x = 3$ şi $x = 5$, valorile funcţiei sunt egale cu zero.

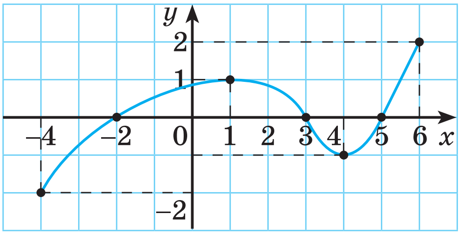


Fig. 62

Valorile argumentului, pentru care valoarea funcţiei este egală cu zero, se numesc *zerourile funcţiei.*

Zeroul funcţiei $y = x - 6$ este numai o valoare x: numai când $x = 6$, valoarea funcţiei este egală cu zero.

Pentru a afla zerourile funcţiei $y = f(x)$ trebuie rezolvată ecuaţia $f(x) = 0$. Soluţiile acestei ecuaţii sunt zerourile funcţiei.

Funcţia $y = f(x)$ graficul, căreia este reprezentat pe figura 62, are valori pozitive, zero şi negative. Pe intervalul (–2; 3) valorile ei sunt pozitive. Acesta-i intervalul cu semnul constant: toate valorile funcţiei pe el au semnul constant «+». Şi intervalul (5; 6) este cu semnul constant «plus». Intervalele (–4; –2) şi (3; 5) de asemenea sunt cu semnul constant: toate valorile funcţiei $y = f(x)$ sunt negative.

Intervalele domeniului de definiţie al funcţiei, pe care funcţia nu-şi schimbă semnul (adică are valori numai pozitive sau numai negative), se numesc *intervale cu semn constant.* Pe intervalele acestea funcţia nu intersectază axa absciselor.

Atrageţi atenţia la graficul funcţiei din figura 62. Pe segmentul [–4; 1] graficul «merge la deal»: la mărirea valorilor lui x din acest interval valorile respective ale funcţiei se măresc.

Dacă $x_1 < x_2$, atunci $f(x_1) < f(x_2)$.

Se spune că pe intervalul [–4; 1] funcţia $y = f(x)$ *creşte* (sau este *crescătoare*). Crescătoare este şi pe intervalul [4; 6].

Pe intervalul [1; 4] graficul funcţiei «merge la vale»: la mărirea valorilor argumentului valorile respective ale funcţiei se micşorează. Se spune că pe acest interval funcţia $y = f(x)$ *descreşte* (sau este *descrescătoare*).

Funcţia se numeşte *crecătoare* pe un interval oarecare, dacă fiecărei valori mai mari ale argumentului din acest interval îi corespunde valoarea mai mare a funcţiei.

Funcţia se numeşte *descrescătoare* pe un interval oarecare dacă fiecărei valori mai mari a argumentului din acest interval îi corespunde valoarea mai mică a funcţiei.

Există funcţii care cresc (sau descresc) pe tot domeniul de definiţie. De exemplu, funcţiile $y = 2x$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ sunt crescătoare, iar $y = -2x$, $y = -\sqrt{x}$ sunt descrescătoare.

Caracterizând proprietăţile funcţiei, deseori se menţionează în care puncte ea are valoarea cea mai mare, în care – cea mai mică. Funcţia, graficul căreia este reprezentat pe figura 62, valoarea cea mai mare are în punctul $x = 6$; ea este egală cu 2. Valoarea cea mai mică –2 această funcţie o primeşte în punctul $x = -4$.

A studia funcţia înseamnă a descoperi cele mai importante proprietăţi ale ei:
1) de indicat domeniul de definiţie;
2) de indicat codomeniul;
3) de aflat punctul de intersecţie cu axa y;
4) de aflat zerourile funcţiei şi intervalele cu semn constant;
5) de determinat intervalele de creştere sau de descreştere;
6) de indicat valoarea cea mai mare şi cea mai mică ale funcţiei;
7) de construit graficul funcţiei.

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

Următorul pas în studierea funcţiei constă în clarificarea parităţii sau imparităţii funcţiei.

Funcţia $y = f(x)$ de numeşte *pară,* dacă domeniul ei de definiţie este simetric faţă de zero şi pentru fiecare valoare a lui x din domeniul de definiţie $f(-x) = f(x)$.

Funcţia $y = f(x)$ se numeşte *impară,* dacă domeniul ei de definiţie este simetric faţă de zero şi pentru fiecare valoare a lui x din domeniul de definiţie $f(-x) = -f(x)$.

Există funcţii nici pare, nici impare. Domeniul de definiţie al lor nu este simetric faţă de zero sau nu se îndeplineşte nici una din condiţiile $f(-x) = \pm f(x)$ (de exemplu, $y = 2x + 3$).

Dacă funcţia este definită grafic, atunci este uşor de cercetat dacă funcţia este pară sau impară, deoarece **graficul funcţiei pare este simetric faţă de axa y, iar al celei impare este simetric faţă de originea de coordonate.**

Exemple. Funcţiile: $y = x^2$ cu domeniul de definiţie $\boldsymbol{R}$ şi $y = x^2$ cu domeniul de definiţie [–5; 5] sunt pare (fig. 63). Funcţiile $y = x^3$ cu domeniul de definiţie $\boldsymbol{R}$ şi $y = x^3$ cu domeniul de definiţie [–27; 27] sunt impare (fig. 64).

Dar, de exemplu, fiecare funcţie cu domeniul de definiţie [–2; 1] şi fiecare funcţie $y = x^2 + x$ cu orice domeniu de definiţie sunt nici pară, nici impară (fig. 65 *a*, *b*).

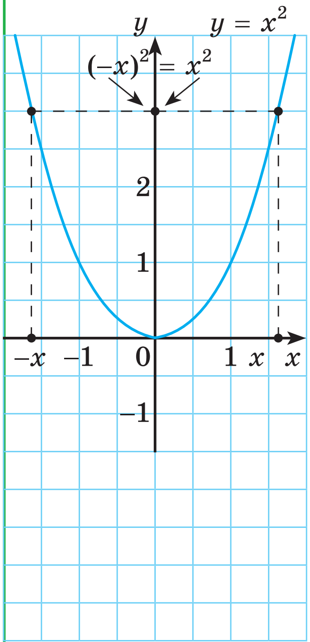


Fig. 63

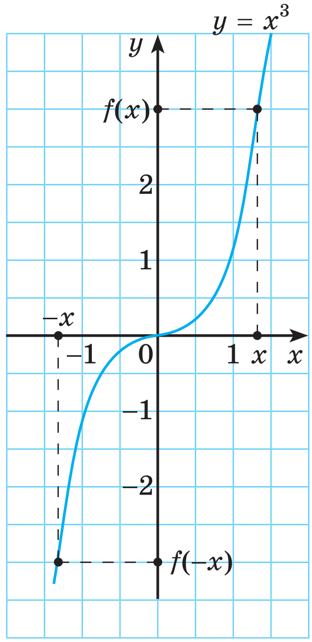


Fig. 64

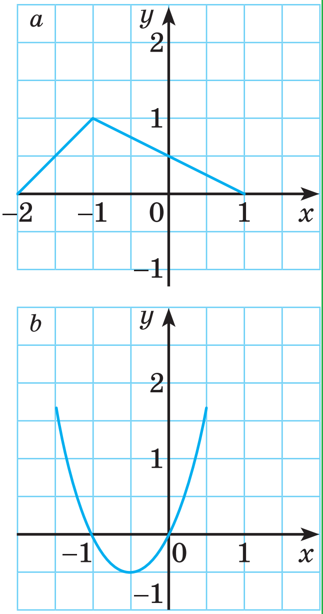


Fig. 65

Verificaţi-vă

1. Ce este domeniul de definiţie şi codomeniul funcţiei? Cum de le aflat cu ajutorul graficului?
2. Ce se numesc intervale cu semn constant?
3. Ce numim zerouri ale funcţiei?
4. Care funcţii se numesc crescătoare? Dar descrescătoare?
5. Ce este valoarea cea mai mare şi cea mai mică a funcţiei.

Rezolvăm împreună

1 Aflaţi zerourile funcţiei $y = x^2 - x - 6$.

Rezolvare. Rezolvăm ecuaţia $x^2 - x - 6 = 0$.

D = (–1)2 – 4 · 1 · (–6) = 1 + 24 = 25;

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{2} = -2; \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3.$$

Răspuns. Zerourile funcţiei sunt numerele –2 şi 3.

2 Demostraţi, că funcţia $y = x^2 + 3$ pe intervalul $(-\infty;\ 0)$ descreşte.

● **Rezolvare.** Fie x_1 şi x_2 două valori arbitrare ale argumentului x din intervalul $(-\infty;\ 0)$, în plus $x_1 < x_2$. Valorile respective ale funcţiei sunt: $y_1 = x_1^2 + 3$, $y_2 = x_2^2 + 3$.

$y_2 - y_1 = (x_2^2 + 3) - (x_1^2 + 3) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$.

Valorile x_1 şi x_2 din $(-\infty;\ 0)$ sunt negative.

Deoarece $x_1 < x_2$, $x_2 - x_1$ este număr pozitiv, $x_2 + x_1$ este număr negativ, produsul lor este negativ, deci, şi diferenţa $y_2 - y_1$ este negativă.

Deci, valorii mai mari a argumentului îi corespunde o valoare mai mică a funcţiei; funcţia dată pe acest interval descreşte (fig. 66).

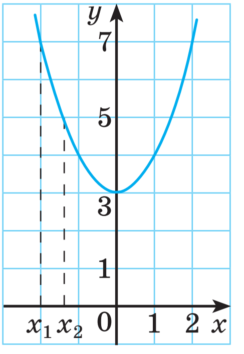


Fig. 66

3 Funcţia este pară sau impară:

a) $y = x^2 - 7$; b) $y = 5x - 1$?

● **Rezolvare.** a) Domeniul de definiţie $D(y)$ al funcţiei $y = x^2 - 7$ este mulţimea tuturor numerelor reale R, ea este simetrică faţă de 0. Aflăm

$f(-x) = (-x)^2 - 7 = x^2 - 7 = f(x)$. Deci, funcţia $y = x^2 - 7$ este pară.

b) $D(y) = R$ şi este simetric faţă de 0.

$f(-x) = 5(-x) - 1 = -5x - 1 = -(5x + 1)$. Această funcţie nu este egală nici cu $f(x)$, nici cu $f(-x)$.

Deci, funcţia $y = 5x - 1$ este nici pară, nici impară.

Răspuns. a) pară; b) nici pară, nici impară.

Efectuaţi oral

336. Aflaţi domeniul de definiţie şi codomeniul funcţiilor:

a) $y = 2x^2$; c) $y = x^3$; e) $y = x - 2$; e) $y = \sqrt{x}$;

b) $y = \dfrac{2}{x}$; d) $y = \dfrac{2x}{x}$; f) $y = \dfrac{2x}{3} + 5$; є) $y = \dfrac{2}{x^2}$.

337. Codomeniile funcţiilor $y = x^2$ şi $y = |x|$ sunt aceleaşi. Daţi alte exemple de funcţii cu aceleaşi codomenii.

338. Oare sunt la fel codomeniile funcţiilor:

a) $y = |x + 3|$ i $y = |x| + 3$; b) $y = x^2 + 3$ i $y = (x + 3)^2$?

339. Care funcţie din problema 336 este pară, care este impară? Daţi alte exemple de funcţii pare şi impare.

340. Oare are zerouri funcţiile:

a) $y = x^2 + 1$; b) $y = x^4 - 4$; c) $y = -x^4 - 9$; d) $y = |x|$?

341. Graficul funcţiei intersectează axa absciselor de n ori. Câte zerouri are această funcţie?

342. Graficul funcţiei $y = f(x)$ intersectează axa absciselor într-un singur punct A (12; 0). Câte zerouri are această funcţie? Câte soluţii are ecuaţia $f(x) = 0$?

343. Indicaţi valoarea cea mai mare şi cea mai mică ale funcţiei, graficul căreia este reprezentat pe figura 61?

344. Numiţi intervalele cu semn constant pentru funcţiile, graficele cărora sunt reprezentate pe figurile 63 – 65.

NIVELUL A

345. Aflaţi domeniul de definiţie al funcţiilor:

a) $y = -7x + 3$; c) $y = \sqrt{x+4}$; e) $y = \dfrac{-1}{x^2+4}$;

b) $y = x^2 - 4$; d) $y = \dfrac{3}{x+9}$; f) $y = \dfrac{x}{1-x}$.

346. Aflaţi codomeniul funcţiilor:

a) $y = 0{,}01x$; c) $y = \sqrt{1-x^2}$; e) $y = 2x^{-1}$;

b) $y = x^2$; d) $y = x^3$; f) $y = \sqrt{1+x^2}$.

347. Aflaţi domeniul de definiţie şi codomeniul funcţiilor:

a) $y = x^2 - 1$; c) $y = \dfrac{1}{x} + 2$; e) $y = |x|$;

b) $y = \dfrac{2-x}{3}$; d) $y = 1 - \sqrt{x}$; f) $y = |x| + 2$.

348. *Problemă deschisă.* Construiţi graficul oricăriei funcţiei $y = f(x)$ pentru care:

a) $D = [-6; 2]$, $E = [-2; 2]$; b) $D = [-1; 3) \cup (3; 5)$, $E = [-3; 1) \cup (1; 3]$.

349. Funcţia $y = 1{,}5x - 2$ este definită pe $[-2; 5]$. Aflaţi domeniul de definiţie şi codomeniul ei.

350. Construiţi graficul funcţiei $y = 0{,}5x^2$ definite pe $[1; 4]$ şi proiectaţi-l pe axele de coordonate. Care este codomeniul funcţiei date?

351. Pentru a stabili dependenţa dintre preţul (p) peştelui şi volumul cererii (K), preţul peştelui şi volumul cererii a fost fixat în decurs de 6 luni. Rezultatele observărilor s-au întrodus în tabel. Construiţi graficul acestei funcţii. Aflaţi domeniul de definiţie şi codomeniul. Oare are această funcţie valoarea cea mai mică? Dar cea mai mare? Funcţia este crescătoare sau descrescătoare?

p (grn. pentru kg)	35	40	50	60	65	70
K (tone pe lună)	16	15	12	9	6	2

352. În mijlocul anilor 70 în regiunea Poltava a fost începută cultivarea organică a pământului în Ucraina. Unul din pionerii cultivării organice a pământului în Ucraina, Semen Antoneţi, conduce din acel timp întreprinderea «Agroecologia», care în activitatea sa se bazează pe producerea organică. Pe figura 67 este dată schimbarea cantităţii întreprinderilor organice certificate pe parcursul anilor 2002 – 2014, iar pe figura 68 – dezvoltarea mărimii medie a întreprinderilor organice în această perioadă. Analizaţi graficele acestor funcţii. Faceţi concluzii despre proprietăţile principale ale funcţiilor reprezentate pe grafice. Cum se schimba cantitatea şi dimensiunile întreprinderilor organice în ultimii anii? De ce? Aflaţi mai mult despre prelucrarea organică a pământului in Ucraina.

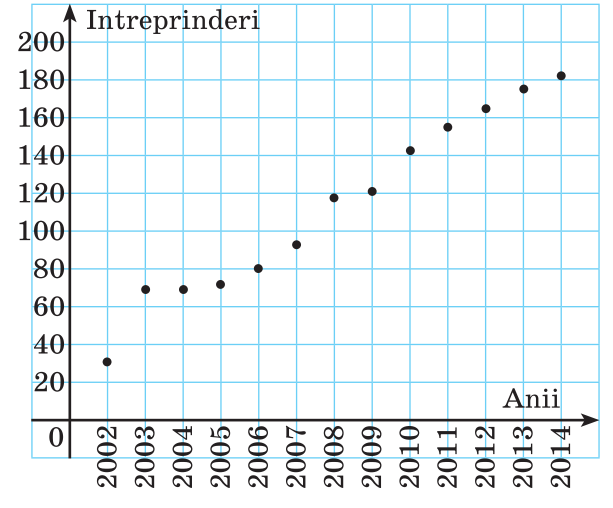


Fig. 67

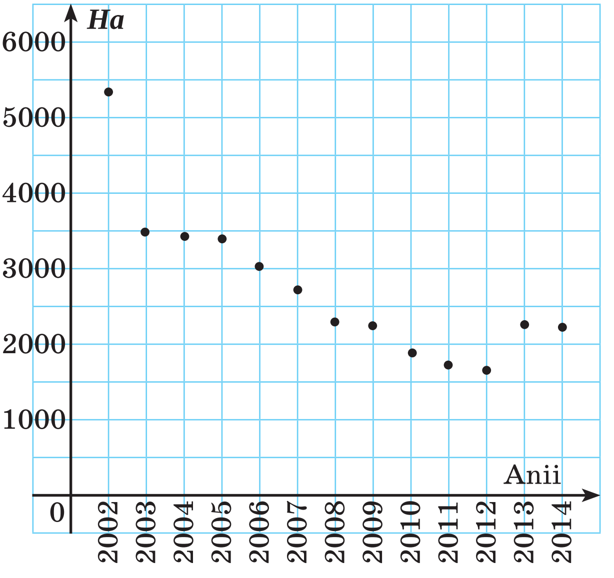


Fig. 68

Oare are zerouri funcţiile:

a) $y = x^4 + 3$; c) $y = 1 : x^2$; e) $y = \sqrt{x}$;

b) $y = x^2 + x$; d) $y = x^2 + x^4$; f) $y = 0{,}5$?

Dacă au, atunci aflaţi zerourile ei şi intervalele cu semn constant.

354. Aflaţi zerourile şi intervalele cu semn constant ale funcţiilor:

a) $y = 2x$; c) $y = x^3 + x$; e) $y = x^2 + 5x + 6$;

b) $y = -x^2 + 1$; d) $y = 2x + 3$; f) $y = \sqrt{x} - 2$.

355. Demonstraţi, că funcţia $f(x) = x^4 + 3$ obţine numai valori pozitive.

Care este domeniul de definiţie al ei? Oare are această funcţie valoarea cea mai mică? Dar cea mai mare?

356. Demonstraţi, că funcţia $f(x) = -x^2 - 3$ primeşte numai valori negative.

Care este domeniul de definiţie al ei? Oare are această funcţie valoarea cea mai mică? Dar cea mai mare?

357. 1) Pe fig. 69 este reprezentat graficul funcţiei $y = f(x)$.

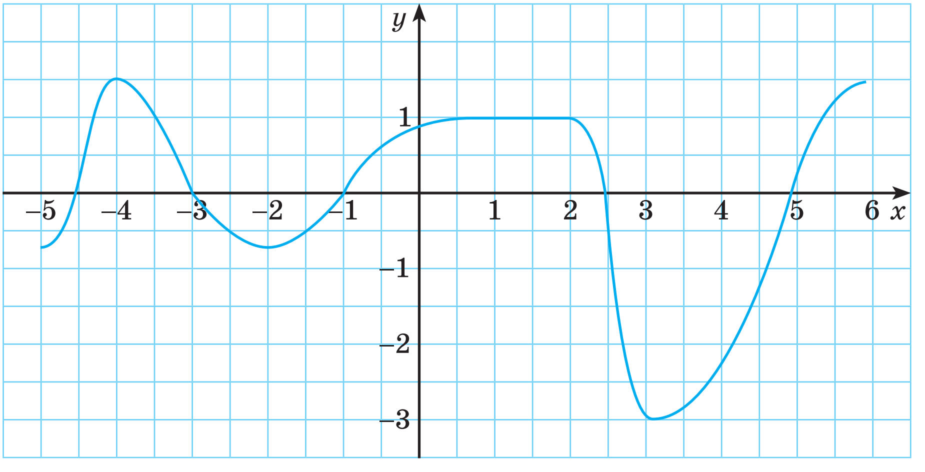


Fig. 69

Aflaţi: a) domeniul de definiţie şi codomeniul funcţiei; b) zerourile funcţiei; c) intervalele cu semn constant; d) valoarea cea mai mare şi cea mai mică ale funcţiei; e) intervalele pe care funcţia creşte;

f) intervalele pe care funcţia descreşte.

2) *Problemă deschisă*. Efectuaţi aceste sarcini pentru graficul funcţiei, construit independent.

358. Aflaţi intervalele cu semn constant şi zerourile funcţiilor:

a) $y = x + x^3$; c) $y = 1 - |x|$; e) $y = x + 3$; e) $y = 3\sqrt{x}$.

b) $y = 6$; d) $y = -7x$; f) $y = x^2 - 4$;

359. Care funcţie este crescătoare şi care – descrescătoare:

a) $y = 2x$; b) $y = -x - 2$; c) $y = x^3$; d) $y = \sqrt{x}$?

360. Crescătoare sau descrescătoare sunt funcţiile::

a) $y=\frac{2x}{5}$; b) $y=\frac{5x}{2}$; c) $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}$; d) $y=\frac{-x}{5x}$?

361. Construiţi graficul funcţiei şi scrieţi proprietăţile ei:

a) $y = 0{,}5x - 1$; b) $y = 2x^2$; c) $y=\sqrt{x+1}$; d) $y = x^{-1}$.

Nivelul B

362. Aflaţi codomeniul funcţiei $y = 4 - x^2$ definite pe intervalul:

a) $[-3; 3]$; b) $[1; 7)$; c) $[0;\infty)$.

363. Aflaţi domeniul de definiţie şi codomeniul funcţiei:

a) $y = 4 + x^2$; b) $y=3+\sqrt{x+2}$; c) $y = 1 : (1 + x^2)$.

364. Aflaţi domeniul de definiţie al funcţiei $y = x^3 - 8$, dacă codomeniul ei este $[-35; 0]$:

365. Fără a construi graficul funcţiei stabiliţi, pentru care valori x ea primeşte valori pozitive, dacă:

a) $y = -2x + 5$; c) $y = 0{,}5x - 3$; e) $y = 3x - x^2 - 2$;

b) $y=\sqrt{x+4}$; d) $y=3-\frac{1}{x}$; f) $y=\frac{x}{x+1}$.

366. Fără a construi graficul funcţiei stabiliţi pentru care valori x ea primeşte valori nepozitive, dacă:

a) $y = 5x - 1$; c) $y = (x + 1)(1 - x)$; e) $y = (x + 2)^3$;

b) $y=\sqrt{x}-4$; d) $y=\frac{6}{x}+2$; f) $y=\frac{1}{x-1}-1$.

367. Demonstraţi, că funcţia:

a) $y = 3x + 5$ creşte pe $\boldsymbol{R}$; c) $y = -x^3$ descreşte pe $\boldsymbol{R}$;

b) $y=1-\sqrt{x}$ descreşte pe $[0; \infty)$; d) $y = 2x^2$ creşte pe $[0; \infty)$.

368. Crescătoare sau descrescătoare sunt funcţiile:

a) $y = x - 5$; c) $y=\sqrt{3+x}$; e) $y = 8 - x^3$;

b) $y = 2x^3$; d) $y=13-\sqrt{x}$; f) $y = x^3 + x$?

369. Indicaţi intervalele de descreştere ale funcţiilor:

a) $y = x^4 + 3$; b) $y=|x-3|$; c) $y=|x|-x$.

370. Pe care intervale funcţia dată creşte:

a) $y=x\cdot|x|$; b) $y=\sqrt{4+x^2}$; c) $y=\sqrt{4-x^2}$?

371. Demonstraţi, că funcţia $f(x) = x^2 + 3$ este pară, iar $f(x) = x^3 + x$ – impară. Arătaţi, că funcţia $f(x) = x^2 + x$ e nici pară, nici impară,

372. Oare au unul şi acelaşi sens propoziţiile «funcţia $y = f(x)$ nu este pară» şi «funcţia $y = f(x)$ este impară»?

373. Determinaţi domeniul de definiţie al funcţiilor. Demonstraţi, că funcţia $y = f(x)$ este pară, dacă:

a) $f(x) = x^4 + 3x^2$;   c) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 4}$;

b) $f(x) = 3x(x^3 - 2x)$;   d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

374. Determinaţi domeniul de definiţie al funcţiilor. Demonstraţi, că funcţia $y = f(x)$ este impară, dacă:

a) $y = x(1 - x^2)$;   b) $y = 7x^3 + x$;   c) $y = \dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{3}$.

375. Care din funcţiile date sunt pare, care – impare:

a) $y = x^4$;   c) $y = -x^2 + 3$;   e) $y = \dfrac{3x^2 + 1}{x}$;

b) $y = x^5$;   d) $y = \dfrac{5}{x^2}$;   f) $y = \sqrt{1 - x^2}$?

376*. Construiţi graficele de pe fig.70 în caiet. Fiecare grafic complectaţi-l astfel, ca funcţia obţinută să fie: 1) pară; 2) impară; 3) nici pară, nici impară.

Pentru fiecare punct 1) – 3) efectuat, stabiliţi zerourile funcţiei, intervalele cu semn constant, de creştere şi de descreştere. Ce concluzii se pot face?

a   *b*

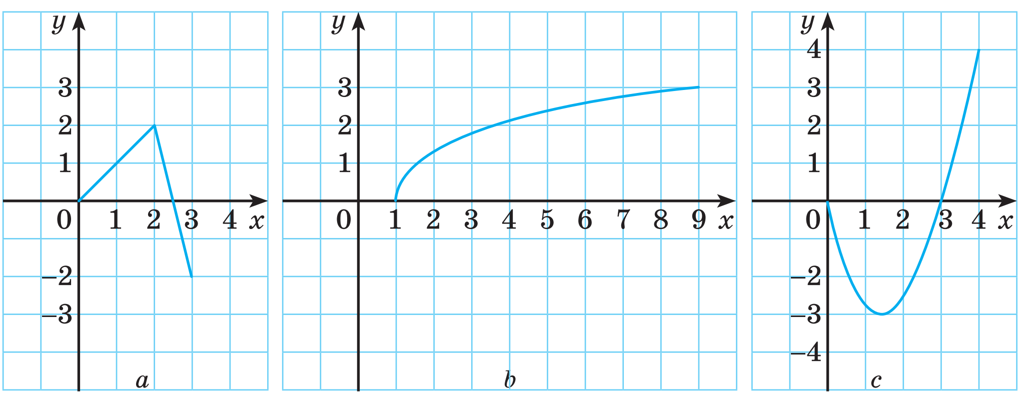


Fig. 70

377*. Funcţia $y = f(x)$ este pară. Pe intervalul $(-\infty; 2)$ ea creşte, iar pe $(-2; 0)$ descreşte. Cum este ea pe restul domeniului de definiţie?

378*. Funcţia $y = f(x)$ este impară. Pe intervalul $(-\infty; -3)$ ea descreşte, iar pe $(-3; 0)$ creşte. Cum este ea pe restul domeniului de definiţie?

379. *Problemă deschisă.* Construiţi schematic graficul funcţiei pare $y = g(x)$, care pe segmentul $[-4; -2]$ creşte de la 1 până la 5, iar pe $[-2; 0]$ descreşte de la 5 până la -1. Pentru funcţia $y = g(x)$ stabiliţi:

a) domeniul de definiţie şi codomeniul; b) zerourile şi intervalele cu semn constant; c) valoarea cea mai mare şi cea mai mică.

380*. *Problemă deschisă.* Construiţi schematic graficul funcţiei impare $y = f(x)$, care pe segmentul $[-4; -1]$ descreşte de la 3 până la -3, iar pe $[-1; 0]$ creşte de la -3 până la 0. Pentru funcţia $y = f(x)$ stabiliţi: a) domeniul de definiţie şi codomeniul; b) zerourile şi intervalele cu semn constant; c) valoarea cea mai mare şi cea mai mică.

381. Descrieţi proprietăţile funcţiilor, graficele cărora sunt reprezente pe figurile 71–73.

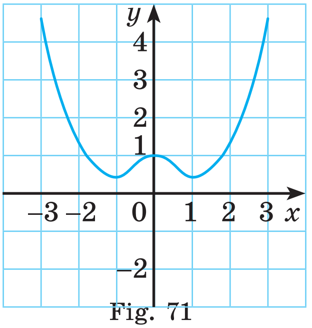


Fig. 71

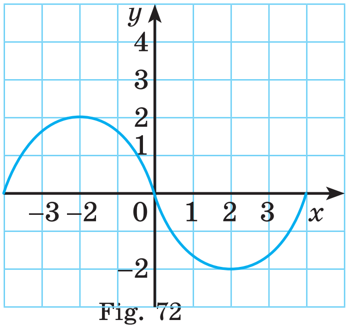


Fig. 72

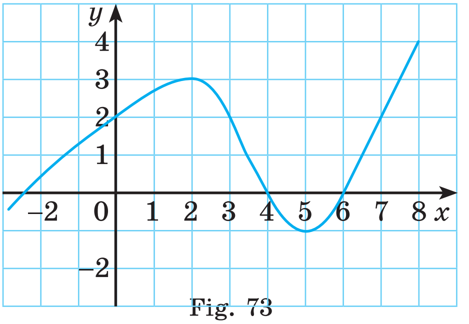


Fig. 73

Construiţi graficele funcţiilor şi descrieţi proprietăţile lor (**382–385**).

382. a) $y = |x|$; b) $y = |x-3|$; c) $y = |x| - 3$.

383. a) $y = \sqrt{x^2}$; b) $y = \sqrt{(x-2)^2}$; c) $y = \sqrt{(4-x)^2}$.

384. a) $y = 6x^{-1}$; b) $y = \dfrac{x-2}{x^2-2x}$; c) $y = \dfrac{x^2}{x}$; d) $y = x^{-2}$.

385. Studiaţi funcţiile şi construiţi graficele lor:

a) $y = x^2 - 6$; b) $y = -x^3$; c) $y = \dfrac{x^2-4}{x^3-4x}$; d) $y = -\sqrt{9-x^2}$.

386. **Sarcină practică**. Dacă vom turna apa într-un bazin cu o viteză constantă, atunci înălţimea apei în el va fi o funcţie de timp $y = f(x)$ (fig. 74). **1**. Examinaţi desenele şi stabiliţi: a) oare depinde viteza creşterii funcţiei de aria bazei bazinului (apa în toate bazinele se dă cu aceeaşi viteză); b) în care caz (a -- *c*) viteza creşterii funcţiei $y = f(x)$ va fi cea mai mare, iar în care – cea mai mică?

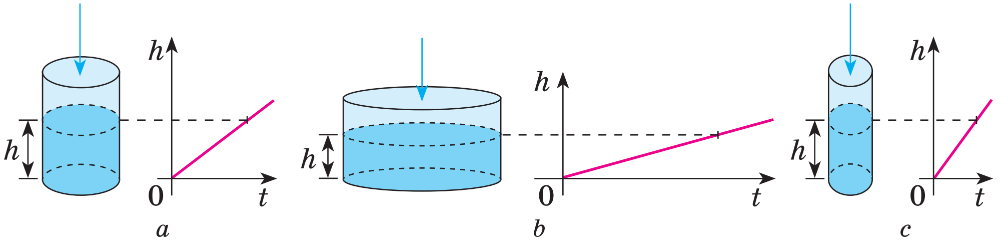


Fig. 74

2. Reprezentaţi schematic graficul dependenţei înălţimei apei de timpul unplerii bazinului, reprezentat pe figura

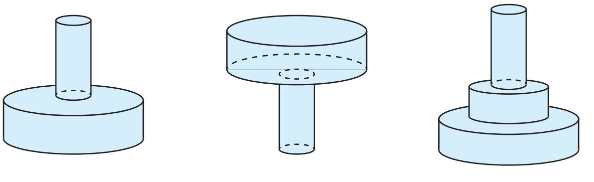


Fig. 75

Exerciţii pentru repetare

387. Este stabilit că masa de prisos a omului este rezultatul consumării unei cantităţi mai mari de calorii, decât utilizate. Deoarece excesivul de masă influenţează negativ asupra stării sănătăţii şi modului de viaţă al omului, atunci e necesar de folosit nu mai puţine calorii decât consumăm. Un pahar de băutură «Coca-Cola» conţine 26,5 g de zahăr în 250 ml, ce este egal cu patru sau cinci linguriţe de ceai cu zahăr sau 108 kal. În câte minute veţi putea prelucra caloriile, primite de la un pahar de această băutură, cu ajutorul:

a) călcatului albiturilor, stând în picioare, dacă în acest timp în 1 oră se folosesc 3,6 kal de la 1 kg din masa corpului vostru;

b) plivitul grădinii cu mâinile, dacă în timpul acesta în 1 h se folosesc 5 kal de la 1 kg din masa corpului vostru;

c) curăţitul covoarelor cu aspiratorul, dacă în acest timp în 1 h se folosesc 2,9 kal de la 1 kg din masa corpului vostru?

Rezolvaţi ecuaţiile (**388–389**)

388. a) $2x^2 + 3x = 9$;
b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$;
c) $5x^2 + 4x = 1$.

389. a) $(x+3)\sqrt{x+5} = 0$; b) $(x+5)\sqrt{x+3} = 0$

390. Scrieţi în formă standard numerele:

a) 7800;	c) 84,17;	e) 0,085;	g) 0,58954;
b) 140000;	d) 486000000;	f) 0,00045;	h) 0,0000008.

Comoara succeselor

√ Pot caracteriza funcţia după graficul ei:

1) pot indica domeniul de definiţie;
2) pot indica codomeniul;
3) pot determina punctul de intersecţie al graficului funcţiei cu axa y;
4) pot afla zerourile funcţiei şi intervalele cu semn constant;
5) pot determina intervalele de creştere sau descreştere;
6) pot indica valoarea cea mai mare şi cea mai mică a funcţiei;
7) pot construi graficul funcţiei;

√ Ştiu a afla cu ajutorul graficului:

domeniul de definiţie al funcţiei ca proiecţia graficului ei pe axa x;

codomeniul funcţiei ca proiecţia graficului ei pe axa y

√ Ştiu ce este:

Ÿ zerourile funcţiei $y = f(x)$:
$f(x) = 0$

Ÿ intervalele cu semn constant ale funcţiei $y = f(x)$:
$f(x) > 0$ sau $f(x) < 0$

√ Ştiu care funcţie se numeşte crescătoare descrescătoare

$x_1 < x_2$ $f(x_1) < f(x_2)$	$x_1 < x_2$ $f(x_1) > f(x_2)$

Aplicăm competenţele obţinute

Aplicăm competenţele obţinute

Pentru a înţelege şi a însuşi bine tema nouă, ne amintim:

– Cum de calculat valoarea funcţiei $f(x)$ în punctul x_0: $f(x_0)$.

– Cum de alcătuit tabelele valorilor funcţiilor după formule.

– Ce este graficul funcţiei şi cum îl construiesc.

– Tipurile funcţiilor şi graficele lor:

funcţia liniară	$y = kx + b$	linie dreaptă
proporţionalitatea inversă	y = k; x	hiperbolă
funcţia de gradul al doilea	$y = x^2$	parabolă

§ 10 TRANSFORMAREA GRAFICELOR FUNCŢIILOR

Alcătuim tabelele valorilor funcţiilor a) $y = x^2$ şi b) $y = -x^2$, definite pe mulţimea $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

a)	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	9	4	1	0	1	4	9
b)	x	–3	–2	–1	0	1	2	3
	y	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9

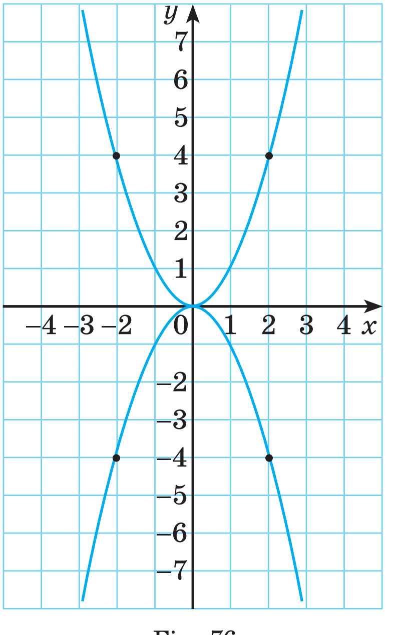


Fig. 76

În general, valorile funcţiei $y = -x^2$ sunt opuse valorilor respective ale funcţiei $y = x^2$. De aceea graficele acestor funcţii sunt simetrice faţă de axa x (fig. 76). O astfel de proprietate are orice funcţie $y = f(x)$ şi $y = -f(x)$.

Graficele funcţiilor $y = f(x)$ şi $y = -f(x)$ sunt simetrice faţă de axa x. Comparăm încă funcţiile $y = 2f(x)$ şi $y = f(x)$. Pentru a obţine o valoare oarecare a primei din ele trebuie valoarea respectivă a funcţiei a doua de o înmulţit cu 2. De aceea graficul primei funcţii se poate obţine din graficul funcţiei a doua dacă îl vom întinde de două ori de la axa x. Dar pentru a construi graficul funcţiei $y = \frac{1}{3} f(x)$, trebuie de comprimat graficul $f(x)$ spre axa x de trei ori.

Pentru a construi graficul funcţiei $y = kf(x)$, $k > 0$, trebuie graficul funcţiei $y = f(x)$ de-l întins de la axa x de k ori, dacă $k > 1$, sau de-l comprimat de $\frac{1}{k}$ ori spre axa x, dacă $0 < k < 1$.

Exemplu. Construiţi graficele funcţiilor: $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0{,}5\sqrt{x}$, $y = -0{,}5\sqrt{x}$.

Rezolvare. Construim graficul funcţiei $y = \sqrt{x}$. Pe figura 77 el este reprezentat prin curba I. Dacă vom mări de două ori ordonata fiecărui punct, vom primi mulţimea de puncte, situate pe curba II. Ea este graficul funcţiei $y = 2\sqrt{x}$. Dacă ordonata fiecărui punct al graficului I o vom micşora de două ori şi vom marca pe planul de coordonate, atunci vom primi curba III care este graficul funcţiei $y = 0{,}5\sqrt{x}$.. Curba IV este simetrică cu curba III faţă de axa x şi este graficul $y = -0{,}5\sqrt{x}$.

Fiecare valoare a funcţiei $y = f(x) + 4$ este cu 4 mai mare decât valoarea respectivă a funcţiei $y = f(x)$. De aceea graficul funcţiei $y = f(x) + 4$ se obţine din graficul funcţiei $y = f(x)$ printr-o translaţie cu 4 unităţi în direcţia axei y (fig. 78). Din graficul funcţiei $y = f(x)$ se obţine graficul funcţiei $y = f(x) - 6$ printr-o translaţie cu 6 unităţi în direcţia opusă.

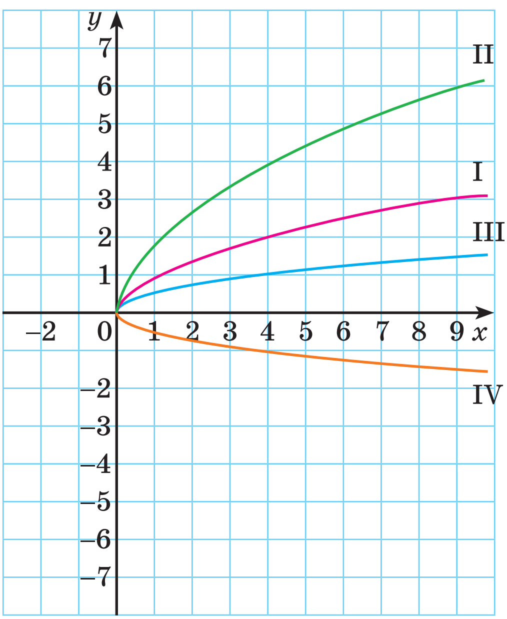


Fig. 77

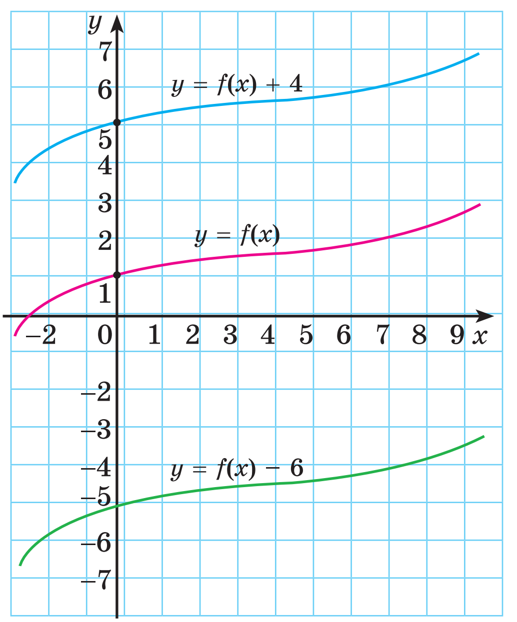


Fig. 78

Pentru a obţine graficul funcţiei $y = f(x) + n$, trebuie graficul funcţiei $y = f(x)$ de-l mutat cu n unităţi în sus (în direcţia axei y), dacă $n > 0$, sau cu $-n$ unităţi în jos (în direcţia opusă), dacă $n < 0$.

Dar cum trebuie de transformat graficul funcţiei $y = f(x)$ pentru a obţine graficul funcţiei $y = f(x - m)$? Calculăm pentru unele şi aceleaşi valori x valorile funcţiilor a) $y = x^2$ şi b) $y = (x - 2)^2$.

a)	x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
	y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

b)	x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
	y	36	25	16	9	4	1	0	1	4

După cum vedem, pentru fiecare valoare $x = c$ valoarea funcţiei $y = (x - 2)^2$ este aşa ca şi valoarea funcţiei $y = x^2$, când $x = c - 2$. De aceea graficul funcţiei $y = (x - 2)^2$ se poate obţine din graficul funcţiei $y = x^2$ printr-o translaţie cu 2 unităţi în direcţia axei x (fig. 79). Graficul funcţiei $y = (x + 3)^2$ se poate obţine din graficul funcţiei $y = x^2$ printr-o translaţie cu 3 unităţi în direcţia opusă direcţiei axei x.

Pentru a obţine graficul funcţiei $y = f(x - m)$, este suficient graficul funcţiei $y = f(x)$ de-l translat cu m unităţi în dreapta (în direcţia axei x), dacă $m > 0$, sau cu m unităţi în stânga (în direcţia opusă), dacă $m < 0$.

Pe figura 80 este arătat cum, de exemplu, din graficul funcţiei $y = x^3$ se obţin graficele funcţiilor $y = (x - 2)^3$ şi $y = (x + 3)^3$.

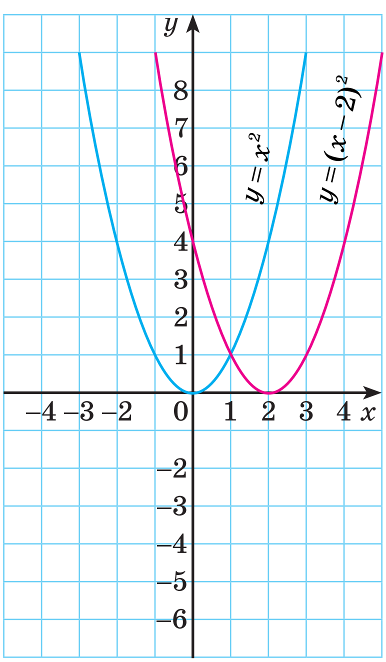


Fig. 79

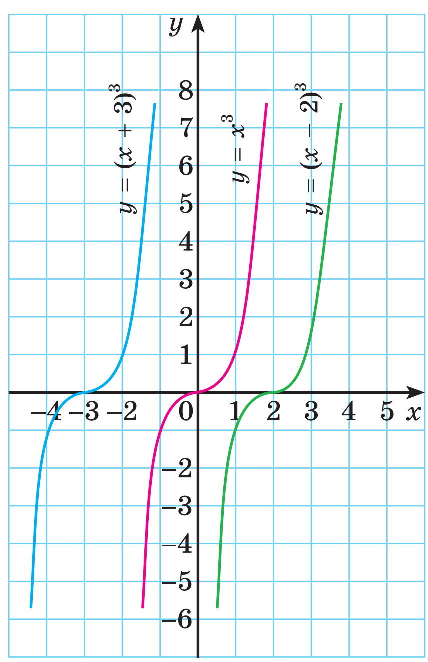


Fig. 80

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

Cum din graficul funcţiei $y = f(x)$ se obţine graficul funcţiei $y = |f(x)|$?

Conform definiţiei modulului,

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ dacă } & f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{ dacă } & f(x) < 0. \end{cases}$$

De aceea valorile funcţiilor $y = |f(x)|$ şi $y = f(x)$ sunt identice cu condiţia că $f(x) \geq 0$ şi opuse dacă $f(x) < 0$. Deci, pentru a construi graficul funcţiei $y = |f(x)|$ este suficient ca părţile graficului $y = f(x)$, care se află mai jos de axa *x,* de le înlocuit cu simetrice lor faţă de aceeaşi axă, iar toate celelalte rămân neschimbate. De exemplu, din graficul funcţiei $y = x^2 - 4$ (fig. 81) se obţine graficul funcţiei $y = |x^2 - 4|$ (fig. 82)

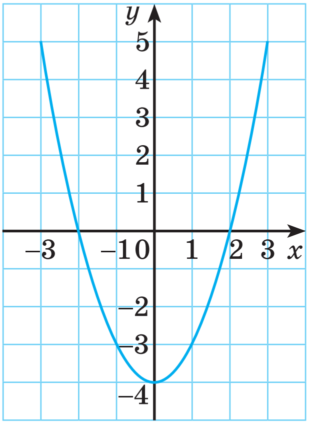


Fig. 81

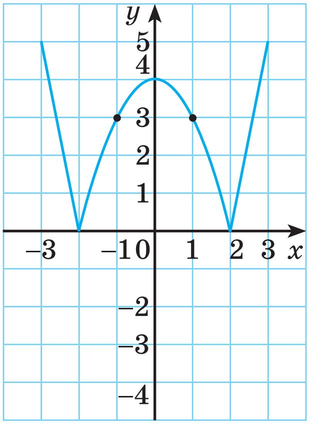


Fig. 82

Cercetaţi, cum se poate obţine graficul funcţiei $y = f(|x|)$ din graficul funcţiei $y = f(x)$.

Verificaţi-vă

1. Ce este graficul funcţiei?

2. Cum din graficul funcţiei $y = f(x)$ se obţine graficul funcţiei:

a) $y = -f(x)$; c) $y = k \cdot f(x)$; e*) $y = |f(x)|$;

b) $y = f(x) + n$; d*) $y = f(x - m)$; f*) $y = f(|x|)$?

3. În care cadran se află graficul funcţiei $y = -f(x)$, dacă graficul funcţiei $y = f(x)$ este amplasat în: a) cadranul al III; b) I şi al II?

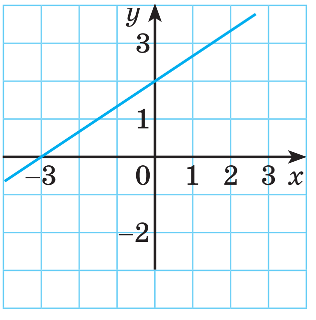
4. Indicaţi cea mai mare valoare a funcţiei $y = -f(x)$, dacă 5 este cea mai mare valoare a funcţiei:

a) $y = f(x) + 5$; b) $y = f(x - 5)$; c) $y = 5f(x)$.

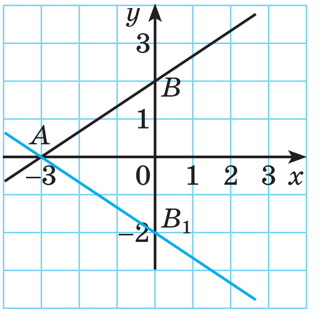
Efectuăm împreună!

1 Pe figura 83 este reprezentat graficul funcţiei liniare $y = f(x)$. Construiţi graficul funcţiei $y = -f(x)$.

- **Rezolvare.** Graficele funcţiilor $y = f(x)$ şi $y = -f(x)$ sunt simetrice faţă de axa absciselor. Punctul $A(-3; 0)$ este comun ambelor grafice, iar punctul simetric lui $B(0; 2)$ faţă de axa x este $B_1(0; -2)$. Dreapta AB_1 este graficul funcţiei $y = -f(x)$.



a



b

Fig. 83

2 Construiţi graficul funcţiilor: a) $y = x^2$; b) $y = \frac{1}{2}x^2$; c) $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$.

- **Rezolvare.** a) Graficul funcţiei $y = x^2$ este o parabolă simplă (fig. 84).

b) Pentru a obţine graficul funcţiei $y = \frac{1}{2}x^2$, trebuie ordonata fiecărui punct al primului grafic de micşorat de două ori; pe figură această parabolă este de culoare albastră.

c) $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2$. Dacă vom micşora ordonata fiecărui punct al parabolei simple de patru ori, vom obţine graficul necesar – parabola de culoare roşie.

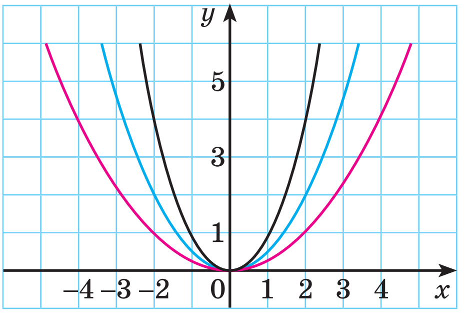


Fig. 84

Efectuăm oral

391. Prin ce se deosebesc graficele funcţiilor:
a) $y = x^2$, $y = (-x)^2$ şi $y = -x^2$;
b) $y = 4x^2$, $y = -(2x)^2$ şi $y = (-2x)^2$;
c) $y = \sqrt{x^2}$, $y = \sqrt{(-x)^2}$ şi $y = |x|$?

392. Cum sunt amplasate reciproc graficele funcţiilor:
a) $y = 2x$ şi $y = -2x$;
b) $y = x^3$ şi $y = -x^3$;
c) $y = \frac{1}{3}x$ şi $y = -\frac{1}{3}x$;
d) $y = \frac{1}{x}$ şi $y = -\frac{1}{x}$?

393. Funcţia $y = f(x)$ este crescătoare pe tot domeniul de definiţie. Crescătoare sau descrescătoare este funcţia:
a) $y = 2f(x)$; b) $y = 0{,}5f(x)$; c) $y = -f(x)$?

394. Este oare adevărat, că graficele funcţiilor $y = 0{,}3x$, $y = 0{,}3x + 2$ şi $y = 0{,}3x - 5$ sunt drepte paralele?

395. Pe figura 95 sunt reprezentate două drepte paralele – graficele a două funcţii. O funcţie este $y = 0{,}5x + 3$. Numiţi formula funcţiei a doua.

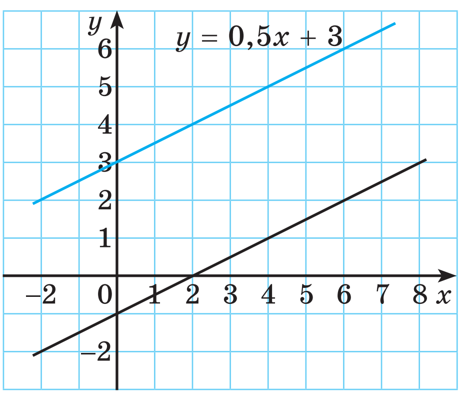


Fig. 85

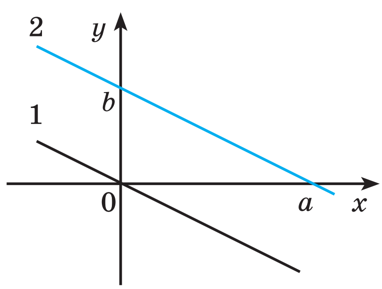


Fig. 86

396. Pe figura 86 dreapta 1 este graficul funcţiei $y = f(x)$, iar dreapta a doua paralelă cu ea intersectează axele de coordonate în punctele a şi b. Un elev consideră, că dreapta a 2 este graficul funcţiei $y = f(x - a)$, altul – că este graficul funcţiei $y = f(b + x)$, iar al treilea – că este graficul funcţiei $y = f(x) + \text{b}$. Cine are dreptate?

397. Prin ce diferă graficele funcţiilor:
a) $y = x^2 + 2$ şi $y = x^2 - 2$;
b) $y = x^2 - 2$ şi $y = (x - 2)^2$;
c) $y = x^3 + 1$ şi $y = (x + 1)^3$;
d) $y = (x - 2)^3$ şi $y = (x + 2)^3$?

398. Domeniul de definiţie al funcţiei $y = f(x)$ este intervalul $(a;\ b)$. Care este domeniul de definiţie al funcţiilor:
a) $y = -f(x)$; b) $y = f(x) + n$; c) $y = |f(x)|$; d) $y = k \cdot f(x)$?

399. Codomeniul funcţiei $y = f(x)$ este $(c;\ \infty)$. Care este codomeniul funcţiilor:
a) $y = -f(x)$; b) $y = f(x) + n$; c) $y = f(x) - m$; d) $y = k \cdot f(x)$?

Nivelul A

400. Pe figura 87 este reprezentat graficul funcţiei $y = f(x)$. Copiaţi-l în caiet şi construiţi pe acelaşi sistem de coordonate graficele funcţiilor $y = -f(x)$ şi $y = 3 \cdot f(x)$.

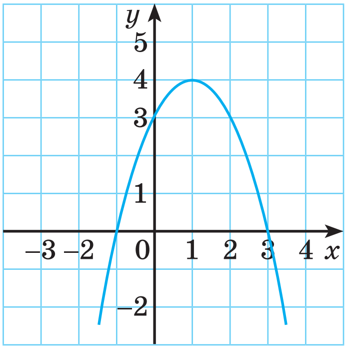


Fig. 87

Construiţi graficul funcţiilor (**401–403**).

401. a) $y = -x^2$; b) $y = -x^3$; c) $y = -|x|$.

402. a) $y = 2\sqrt{x}$; b) $y = \sqrt{9x}$; c) $y = \sqrt{16x}$.

403. a) $y = 3x^2$; b) $y = -3x^2$; c) $y = -0{,}5x^2$.

404. Cum trebuie de transformat graficul funcţiei $y = \sqrt{x}$, pentru a obţine graficul funcţiei $y = -\sqrt{x}$? Oare este adevărat, că reuniunea graficelor funcţiilor $y = \sqrt{x}$ şi $y = -\sqrt{x}$ este graficul ecuaţiei $y^2 = x$?

405. Cum trebuie transformat graficul funcţiei $y = 3x - 4$ pentru a obţine graficul funcţiei $y = 4 - 3x$? Efectuaţi construcţia.

406. Construiţi graficele funcţiilor $y = x^2$ şi $y = x^2 - 4$. Aflaţi codomeniul lor. Pentru care valori ale lui x valorile funcţiei sunt pozitive, pentru care valori sunt negative? Aflaţi coordonatele intersecţiei graficului cu axele de coordonate.

407. Graficele căror funcţii sunt reprezentate pe fig.88, *a*, *b*?

Construiţi într-un sistem de coordonate graficele funcţiilor (**408–409**).

408. a) $y = 2x$, $y = 2x + 1$ şi i $y = 2x - 3$;
b) $y = -x^2$, $y = -x^2 + 2$ şi $y = -x^2 - 1$.

409. a) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x-1}$ şi $y = \sqrt{x} + 2$;
b) $y = 2x^2$, $y = 2x^2 + 1$ şi $y = 2x^2 - 1$.

410. Cum trebuie transformat graficul funcţiei $y = x^2$, pentru a obţine graficul funcţiei:
a) $y = (x + 3)^2$; b) $y = (x - 3)^2$; c) $y = -(x + 3)^2$?

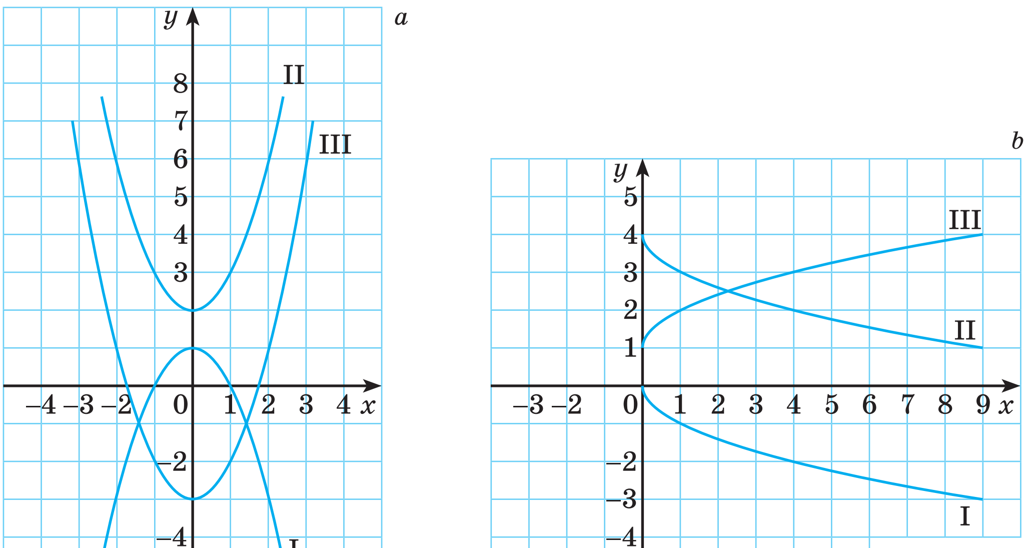


Fig. 88

Construiţi într-un sistem de coordonate graficele funcţiilor (**411–412**).

411. a) $y_1 = 2x$, $y_2 = 2(x-1)$ şi $y_3 = 2(x+3)$;
b) $y_1 = -x^2$, $y_2 = -(x+2)^2$ şi $y_3 = -(x-3)^2$.

412. a) $y_1 = \dfrac{4}{x}$, $y_2 = \dfrac{4}{x-3}$ şi $y_3 = \dfrac{4}{x+1}$; b) $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = \sqrt{x-1}$ şi $y_3 = \sqrt{x+2}$.

413. Care funcţii au graficele reprezentate pe fig. 82, *a*, *b*?

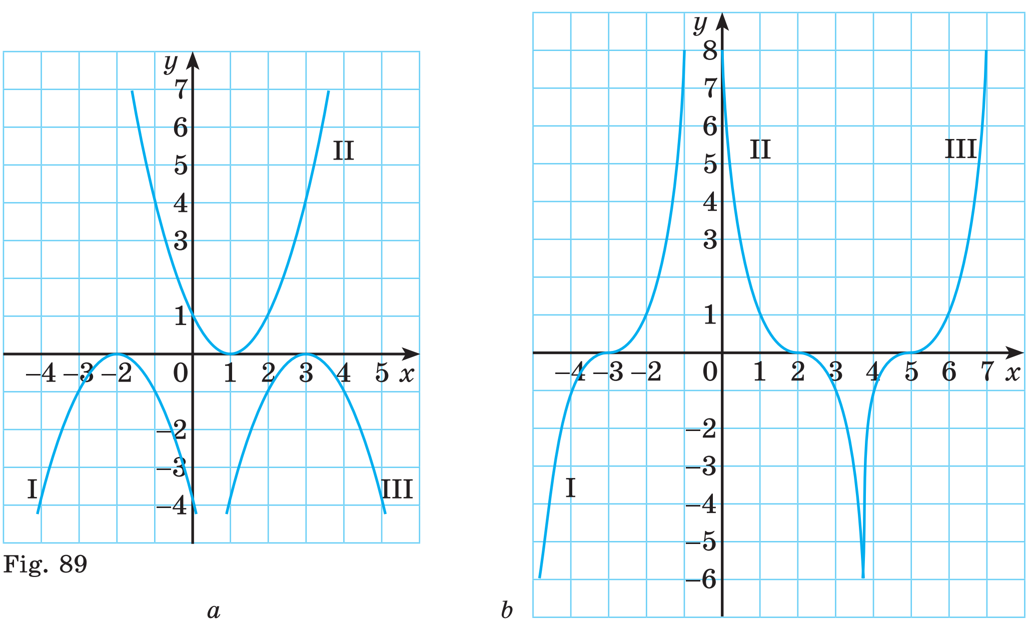


Fig. 89

414. 1) Fie data parabola $y = x^2$. Scrieţi ecuaţia parabolei care se poate obţine din ea, efectuând translaţia:

a) cu 2 unităţi la dreapta şi 3 unităţi în sus;

b) cu 4 unităţi la stânga şi 2 unităţi în jos.

2) *Problemă deschisă*. Este dată hiperbola c . Scrieţi ecuaţia hiperbolei, care se obţine din cea dată cu translarea ei cu c .

415. Construiţi graficul funcţiilor:

a) $y=(x-2)^2+1$ și $y=(x-2)^2-1$; b) $y=(x+1)^2+3$ și $y=(x+1)^2-3$.

Nivelul B

416. Graficul funcţiei $y = f(x)$ este simetric faţă de axa y. Oare este simetric faţă de această axă graficul funcţiilor:

a) $y = 2f(x)$; b) $y = -f(x)$; c) $y = -2f(x)$?

Construiţi graficele respective.

417. Funcţia $y = f(x)$ pe intervalul $(-\infty; a)$ descreşte, iar pe $(a; \infty)$ creşte. Cum sunt pe aceste intervale funcţiile:

a) $y = 2f(x)$; b) $y = 0{,}5f(x)$;

c) $y = -f(x)$?

Construiţi graficele respective..

418. Pe fig. 90 este reprezentat graficul funcţiei $y = 4x^{-2}$. Copiaţi-l în caiet şi construiţi în acelaşi sistem de coordonate graficele funcţiilor:

a) $y=\dfrac{4}{x^2}+2$;

b) $y=\dfrac{4}{x^2}-3$;

c) $y=1-\dfrac{4}{x^2}$.

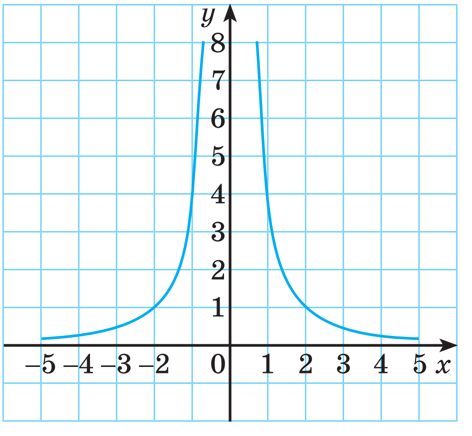


Fig. 90

419. Construiţi într-un sistem de coordonate graficele funcţiilor:

a) $y=-\dfrac{12}{x}$; $y=-\dfrac{12}{x}+3$; $y=-\dfrac{12}{x}-1$.

b) $y=2\sqrt{x}$; $y=2\sqrt{x}-3$; $y=2\sqrt{x}+2$.

420. Construiţi graficul funcţiilor:

a) $y = -x^2 + 3$; c) $y = x^3 + 1$; e) $y = 2x^3 - 1$;

b) $y=\dfrac{4}{x}-3$; d) $y=-\sqrt{x}+1$; f) $y = 0{,}5x^2 - 2$.

421. Completaţi pătrăţelele libere din tabelă. Prin care formulă se poate defini funcţia $y = f(x)$?

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	6	5	6	9	14
$-f(x)$						
$3f(x)$						

422. Pe fig. 91 este reprezentat graficul funcţiei $y=\sqrt[3]{x}$. Copiaţi-l în caiet şi construiţi în acelaşi sistem de coordonate graficele funcţiilor:

a) $y=\sqrt[3]{x-2}$; b) $y=\sqrt[3]{x+1}$; c) $y=3-\sqrt[3]{x}$.

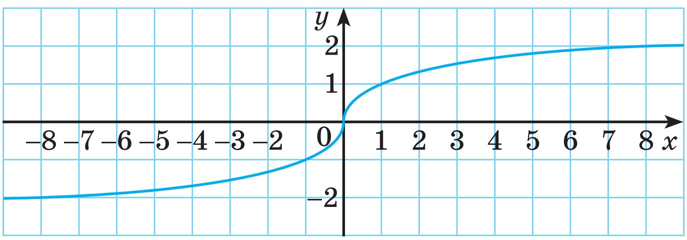


Fig. 91

423. Construiţi graficele funcţiilor:

a) $y = 0,5(x-1)^3$; c) $y = 2(x-2)^2$; e) $y=3\sqrt{x+3}$;

b) $y=\dfrac{1}{2}(x+1)^2$; d) $y=\dfrac{1}{x-3}$; f) $y=\dfrac{-3}{x+3}$.

424. Construiţi graficul şi studiaţi proprietăţile funcţiilor:

a) $y=\dfrac{12}{x-3}+4$; b) $y=\dfrac{6}{x+2}-3$; c) $y=\dfrac{x+2}{x+1}$.

Construiţi graficele funcţiilor (**425** – **428**).

425. a) $y = (x+2)^2 + 3$; c) $y = -2(x+1)^2 + 3$;

b) $y=\dfrac{1}{x-1}+2$; d) $y=5-\dfrac{6}{x+1}$.

426. a) $y=2\sqrt{x-3}+1$; c) $y = -(x+1)^3 + 2$;

b) $y=2-\sqrt{x+3}$. d) $y = 0,5(x-3)^3 - 3$.

427*. a) $y=2|x|-3$; c) $y \quad \sqrt{|x|}$ e) $y=(|x|-1)^2$;

b) $y=|1-|x||$; d) $y=-|x|+2$; f) $y=|x|^3+1$.

428*. a) $y=|3x+1|$; c) $y=|1-\sqrt{x}|$; e) $y=|6x^{-1}-3|$;

b) $y=|-x^2+4|$; d) $y=|0,2x-1|$; f) $y=|x^2-2|$.

Exerciţii pentru repetare

429. Calculaţi:

a) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+1\frac{2}{15}\right):2\frac{7}{15}$; b) $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{20}\right)\cdot 1\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$; c) $\frac{7}{8}-\frac{1}{2}:\frac{3}{4}+5:\frac{1}{3}-\frac{1}{8}$.

430. În tabelă sunt date denumirile, locul amplasării şi aria celor mai mari şi mai frumoase 5 parcuri dendrologice din Ucraina. După aceste date compuneţi o problemă. Folosiţi-vă de informaţii despre alte parcuri dendrologice din Ucraina, printre altele, şi de cel mai apropiat de voi.

Denumirea	Locul amplasării	Aria (ha)
Trostianeţi	s. Trostianeţi din reg. Cernigov	350 ha
Olexandria	or. Bila Ţerkva din reg. Kiev	290 ha
Sofiyvka	or. Umani din reg. Cercasi	179,2 ha
Poltavsky	or. Poltava	124,5 ha
Veseli Bokoveniki	Raionul Molânsky din reg. Kirovograd	109 ha

431. Aflaţi rădăcinile trinomului pătrat:

a) $2x^2 + 7x - 30$; c) $4x^2 - 5x + 3$; e) $x^2 - 6x - 55$;
b) $x^2 - 5x + 6$; d) $7x^2 - 5x - 2$; f) $x^2 + 10x + 25$.

432. Separaţi din trinomul dat pătratul binomului:

a) $x^2 - 6x + 15$; c) $x^2 + 5x + 6$; e) $5x^2 - 10x + 8$;
b) $x^2 + 8x + 8$; d) $x^2 - x - 1$; f) $9 + 2x - 3x^2$.

Comoara succeselor

✓ Înţeleg în ce constă transformarea graficului funcţiei $f(x)$:

$f(x) \to f(x-m)$
translarea graficului
$m > 0$ – la dreapta
$m < 0$ – la stânga

$f(x) \to f(x) + n$
translarea graficului
$n > 0$ – în sus
$n < 0$ – în jos

$f(x) \to kf(x),\ k > 0$
$k > 1$ – întinderea graficului de la axa x de k ori,
$k < 1$ – comprimarea graficului spre axa x de $\frac{1}{k}$ ori.

✓ Înţeleg că graficele funcţiilor $y = f(x)$ şi $y = -f(x)$ sunt simetrice faţă de axa x.
✓ Pot construi graficul funcţiei, folosind regula transformării.
✓ Doresc să învăţ a construi graficele funcţiilor ce conţin moduli.

Aplicăm competenţele obţinute

Pentru a înţelege şi a însuşi bine tema nouă, ne amintim:
– Ce este trinomul pătrat şi rădăcinile lui.
– Cum de aflat rădăcinile trinomului pătrat

$$ax^2 + bx + c \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ unde } D = b^2 - 4ac$$

– Descompunerea trinomului pătrat în factori,
dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile lui: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

– Cum de separat pătratul deplin:
$x^2 + 6x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 1 = (x + 3)^2 - 9 + 1 = (x + 3)^2 - 8$
– Regulile transformării graficului funcţiei:
$f(x) \to f(x) + n \qquad f(x) \to f(x - m) \qquad f(x) \to kf(x)$

§ 11 FUNCŢIA DE GRADUL DOI

Funcţia, care poate fi definită prin formula $y = ax^2 + bx + c$, unde $a \neq 0$, b, c sunt numere arbitrare, iar x – argument, se numeşte *funcţie de gradul al doilea*.

Exemple de funcţii de gradul al doilea: $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = x^2 + 3$, $y = (x + 4)^2$. Graficele lor sunt parabole identice, dar situate diferit pe planul de coordonate. Graficul funcţiei $y = ax^2$ tot este o parabolă; vârful ei coincide cu originea de coordonate, iar ramurile sunt îndreptate în sus, când $a > 0$, şi în jos, când $a < 0$.

Graficele funcţiilor $y = ax^2 + bx + c$ şi $y = ax^2$ sunt *parabole identice* care pot fi suprapuse la o translaţie.

Demonstrăm aceasta:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Deoarece $a \neq 0$, b şi c sunt numere, atunci $\frac{b}{2a}$, şi $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ tot sunt numere.

Notându-le prin $m = -\dfrac{b}{2a}$ i $n = -\dfrac{b^2 + 4ac}{4a}$, primim identitatea:

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n.$$

Deci, funcţia $y = ax^2 + bx + c$, unde $a \neq 0$ poate fi prezentată în forma $y = a(x - m)^2 + n$. De exemplu, funcţia $y = 3x^2 - 12x + 8$ se poate scrie aşa: $y = 3(x - 2)^2 - 4$.

Din § 10 se ştie că graficul funcţiei $y = a(x + m)^2$ se poate obţine cu ajutorul translaţiei cu $|m|$ unităţi de-a lungul axei x a graficului $y = ax^2$.

Dacă graficul funcţiei $y = a(x - m)^2$ îl vom deplasa cu $|n|$ unităţi de-a lungul axei y, vom obţine graficul funcţiei $y = a(x - m)^2 + n$. Deci, cu ajutorul a două translaţii din graficul funcţiei $y = ax^2$ se obţine graficul funcţiei $y = a(x - m)^2 + n$, iar de aici şi a funcţiei date $y = ax^2 + bx + c$.

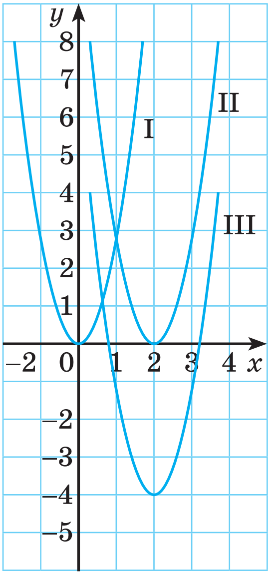


Fig. 92

De exemplu, pentru a construi graficul funcţiei $y = 3x^2 - 12x + 8$ sau $y = 3(x - 2)^2 - 4$ trebuie graficul funcţiei $y = 3x^2$ de-l deplasat în direcţia axei x cu 2 unităţi (fig. 92), după ce curba II de-o mutat cu 4 unităţi în jos. Curba III obţinută este graficul funcţiei date.

Din cugetările prezentate reiese că graficul funcţiei $y = ax^2 + bx + c$ este parabola $y = a(x - m)^2 + n$. Coordonatele vârfului sunt m şi n, adică, $-\dfrac{b}{2a}$ şi $-\dfrac{b^2 + 4ac}{4a}$.

Pentru a construi graficul funcţiei $y = ax^2 + bx + c$ trebuie de aflat coordonatele vârfului parabolei şi câteva puncte ale ei, de le notat pe planul de coordonate şi de le unit cu o linie lină. Putem să ne folosim de alt procedeu: construim graficul funcţiei $y = ax^2 + bx$, iar apoi de-l ridicat sau de-l coborât cu $|c|$ unităţi. Graficul funcţiei $y = ax^2 + bx$ sau $y = x(ax + b)$ se construieşte cu uşurinţă, deoarece el intersectează axa absciselor în punctele $x = 0$ şi $x = -\dfrac{b}{a}$.

Construirea graficului funcţiei $y = 3(x - 2)^2 - 4$

Exemplu. Construiţi graficul funcţiei $y = 2x^2 + 4x + 3$.

Rezolvare. Graficul funcţiei $y = 2x^2 + 4x$, sau $y = x(2x + 4)$ intersectează axa x în punctele $x = 0$ şi $x = -2$. Le marcăm pe plan (fig. 93). Aceste puncte sunt simetrice faţă de axa parabolei care trebuie construită, deci, abscisa vârfului este $x = -1$. Ordonata este egală cu

$$2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = -2.$$

Notăm punctul $(-1; -2)$. Prin aceste trei puncte trece graficul I al funcţiei $y = 2x^2 + 4x$.

Facem o translaţie cu 3 unităţi în sus şi obţinem graficul II al funcţiei date $y = 2x^2 + + 4x + 3$.

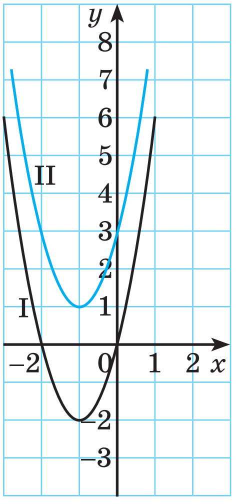


Fig. 93

Analizăm proprietăţile funcţiei $y = 2x^2 + 4x + 3$.

Graficul funcţiei este o parabolă. Fie punctul $M(m;\ n)$ vârful ei, adică

$$m = -\frac{b}{2a}, \quad n = -\frac{D}{4a}, \quad \text{unde } D = b^2 - 4a$$

Dacă $a > 0$ ramurile parabolei sunt indreptate în sus. Atunci:

1) domeniul de definiţie al funcţiei este mulţimea $\boldsymbol{R}$;
2) codomeniul este intervalul $[n;\ \infty)$;
3) dacă $x < m$, funcţia descreşte, pentru $x > m$ ea creşte;
4) dacă $D > 0$, funcţia are două zerouri: x_1 şi x_2;
5) pe intervalul $(x_1;\ x_2)$ valorile funcţiei sunt negative, pe intervalele $(-\infty;\ x_1)$ şi $(x_2;\ \infty)$ sunt pozitive.

Dacă $a < 0$ ramurile parabolei sunt indreptate în jos şi proprietăţile 2), 3), 5) trebuie formulate altfel. Încercaţi să faceţi aceasta independent.

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

Graficul fiecărei funcţii de gradul al doilea este o parabolă. Examinăm unele proprietăţi ale ei.

Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de la un punct dat şi o dreaptă dată. Ilustrăm această afirmaţie pe exemplul funcţiei $y = x^2$. Examinăm punctul $F(0;\ 0{,}25)$, dreapta l ecuaţia căreia este $y = -0{,}25$ şi un punct arbitrar al parabolei $M(x;\ x^2)$ (fig. 94). Fie că perpendiculara MP pe dreapta l intersectează axa absciselor în puctul H. Demonstrăm, că $FM = MP$.

Calculăm FM după formula distanţei dintre două puncte:

$$FM = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - 0{,}25\right)^2} = \sqrt{\left(x^2 + 0{,}25\right)^2} = x^2 + 0{,}25.$$

Deoarece $MP = MH + HP = x^2 + 0{,}25$, pentru fiecare valoare x $MF = MP$.

Punctul F şi dreapta l care au astfel de proprietăţi se numesc *focar* şi *directoare* a parabolei date..

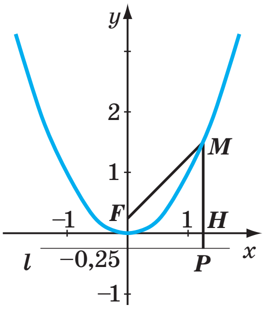


Fig. 94

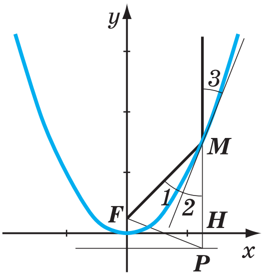


Fig. 95

Interesantă şi foarte importantă este următoarea proprietate a parabolei. Deoarece ΔFMP este isoscel, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ (fig. 95). De aceea raza care pleacă din focarul F şi cade astfel pe o porţiune a parabolei în apropierea punctului M,se reflectă astfel, că unghiul de cădere $(\angle 1)$ este egal cu unghiul de reflecxie $(\angle 3)$.. Deci, raza reflectată este paralelă cu axa y. Dacă secţiunea axială a unei oglinzi concave are forma parabolei, toate razele reflectate de ea nu se vor dispersa, dar vor forma un fascicul de raze paralele. Această proprietate se aplică în reflectoare care trebuie să lumineze obiecte îndepărtate şi invers, dacă pe o astfel de oglindă cad raze paralele axei ei Oy, reflectându-se, ele toate trec prin focarul F. În rezultat corpul fizic care este situat lângă focarul F poate fi încălzit puternic.

Verificaţi-vă

1. Care funcţii se numesc de gradul al doilea?
2. Cum se numeşte linia care este grafic al funcţiei de gradul al doilea?
3. Indicaţi proprietăţile funcţiei $y = ax^2 + bx + c$.
4. Care sunt coordonatele vârfului parabolei, care este graficul funcţiei $y = ax^2 + bx + c$?
5. Care este condiţia, ca graficul funcţiei $y = ax^2 + bx + c$ să intersecteze axa x?
6. Indicaţi zerourile funcţiei $y = ax^2 + bx$.
7. Cum se construieşte graficul funcţiei $y = ax^2 + bx + c$?
8. Prin ce se deosebesc graficele funcţiilor $y = ax^2 + bx + c$ şi $y = x^2$?
9. Care este condiţia ca graficul funcţiei $y = ax^2 + bx + c$:
a) să fie cu ramurile îndreptate în sus;
b) să fie cu ramurile îndreptate în jos;
c) să se atingă de axa x;
d) să intersecteze axa absciselor?

Efectuăm împreună

1 Oare intersectează graficul funcţiei $y = 5x^2 + x + 3$ axa absciselor?

- **Rezolvare.** Dacă graficul funcţiei intersectează axa absciselor într-un punct, valoarea funcţiei în el este egală cu 0. Problema se reduce la alta: oare are soluţii ecuaţia $5x^2 + x + 3 = 0$? Discriminantul ei $D = 1 - 60 < 0$, ecuaţia nu are soluţii.

Răspuns. Nu intersectează.

2 Graficul funcţiei $y = 2x^2 - 7x + n$ intersectează axa ordonatelor y în punctul $y = 5$. În care puncte el va intersecta axa absciselor?

- **Rezolvare.** Punctul cu coordonatele 0 şi 5 aparţine graficului. De aceea trebuie să se realizeze egalitatea $5 = 0 - 0 + n$, de unde $n = 5$. Deci, funcţia este

$y = 2x^2 - 7x + 5$. Aflăm zerourile ei: $2x^2 - 7x + 5 = 0$, $D = 49 - 40 = 9$, $x_1 = -1$, $x_2 = -2{,}5$.

Răspuns. În punctele $A(-2{,}5; 0)$ şi $B(-1; 0)$.

3 Construiţi graficul funcţiei $y = 2x^2 - 4x$.

● **Rezolvare.** La început construim graficul funcţiei mai simple $y = 2x^2 - 4x = 2x(x - 2)$. El intersectează axa x în punctele $O(0; 0)$ şi $B(2; 0)$ (fig. 96). Ele sunt simetrice faţa de axa parabolei, care trece prin mijlocul segmentului OB. De aceea vârful parabolei este punctul cu abscisa $x = 1$ şi ordonata $y(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -2$. Marcăm acest punct $M(1; -2)$ şi trasăm prin el axa.

Marcăm punctul de control $K(-1; 6)$ şi punctul simetric lui faţă de axa parabolei $K_1(3; 6)$.

Unim cu o linie lină punctele marcate şi obţinem graficul funcţiei $y = 2x^2 - 4x$ (curba I).

Apoi deplasăm graficul funcţiei $y = 2x^2 - 4x$ cu 3 unităţi în jos şi avem graficul funcţiei $y = 2x^2 - 4x - 3$ (curba II).

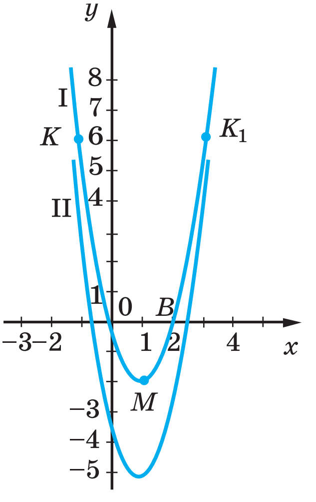


Fig. 96

Efectuaţi oral

433. Indicaţi proprietăţile principale ale funcţiei $y = 2x^2$.

434. Indicaţi zerourile funcţiilor:
a) $y = 2x^2$; b) $y = x^2 - 7x$; c) $y = x^2 - 9$.

435. Pe fig. 97 este reprezentat graficul funcţiei $y = ax^2 + bx + c$. Indicaţi:
a) domeniul de definiţie al funcţiei;
b) semnul coeficientului a;
c) abscisa şi ordonata vârfului parabolei;
d) codomeniul funcţiei;
e) zerourile funcţiei;
f) intervalele pe care funcţia creşte şi pe care descreşte;
g) intervalele pe care funcţia are valori pozitive,- negative;
h) cea mai mică valoarea a funcţiei.

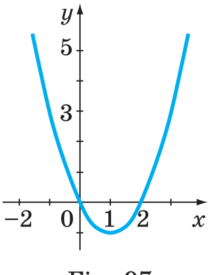


Fig. 97

436. Aflaţi coordonatele vârfului parabolei:

a) $y = (x - 3)^2$;	d) $y = 2(5 - x)^2 - 3$;
b) $y = 2(3 - x)^2$;	e) $y = 2(x + 1)^2 + 1$;
c) $y = (x - 5)^2 + 2$;	f) $y = -2(x - 1)^2 - 3$.

437. Rezolvaţi rebusul (în limba ucraineană; fig. 98).

Nivelul A

Constriţi graficul funcţiilor (**438–439**).

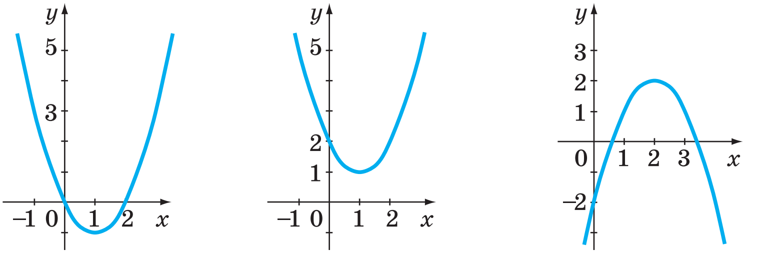
Fig. 98

438. a) $y = 2x^2$, $y = 0,5x^2$, $y = 2x^2 + 1$;
b) $y = -2x^2$, $y = -0,5x^2$, $y = -0,5x^2 - 2$.

439. a) $y = (x - 1)^2$; c) $y = x^2 - 6x + 9$;
b) $y = x^2 - 2x + 1$; d) $y = x^2 + 4x + 4$.

440. În care puncte axa x se intersectează cu graficul funcţiei:
a) $y = x\,(x - 2)$; d) $y = 3x^2 + 5x$;
b) $y = -x(3x + 5)$; e) $y = 2x^2 - 6x$;
c) $y = x^2 - 2x$; f) $y = -3x^2 + 4x$?

441. Pe fig. 99, *a*, *b*, *c* sunt date graficele funcţiilor de gradul al doilea. Aflaţi după grafic pentru fiecare din ele:
a) semnul discriminantului;
b) semnul primului coeficient;
c) coordonatele vârfului parabolei;
d) zerourile funcţiei;
e) intervalele pe care funcţia creşte, descreşte.


a *b* *c*
Fig. 99

442. Aflaţi coordonatele vârfului parabolei fără a constui graficul funcţiilor
a) $y = x^2 + 4$; c) $y = x(x - 4)$; e) $y = x^2 + 4x$;
b) $y = 2x^2 - 6$; d) $y = x(2x + 6)$; f) $y = -8x - 3x^2$.

443. Construiţi graficele funcţiilor:
a) $y = (x - 1)^2 + 2$; c) $y = (x + 4)^2 + 2$;
b) $y = (x + 2)^2 + 1$; d) $y = (x - 4)^2 - 3$.

444. Construiţi parabolele, evidenţiind pătratul binomului:
a) $y = x^2 + 4x + 5$; d) $y = 1 + 4x - x^2$;
b) $y = x^2 - 6x + 5$; e) $y = 4x^2 - 4x + 5$;
c) $y = x^2 - 2x - 1$; f) $y = 5x^2 + 10x + 4$.

Construiţi graficele funcţiilor (**445–446**).

445. a) $y = x^2 - 2x + 5$; c) $y = x^2 + 2x + 4$;
b) $y = x^2 + 2x - 3$; d) $y = x^2 - 2x - 3$.

446. a) $y = x^2 - 2x - 8$; c) $y = x^2 + 2x + 6$;
b) $y = x^2 - 4x - 5$; d) $y = x^2 - 4x + 3$.

447. Punctul M (3; 5) este vârful parabolei $y = x^2 + mx + n$. Aflaţi: a) m şi n; b) în care puncte graficul intersectează axa y.

448. Aflaţi p şi q dacă graficul funcţiei $y = x^2 + px + q$ trece prin punctele $P(1; 4)$; $Q(-1; 10)$.

449. Graficul funcţiei $y = x^2 - 5x + c$ intersectează axa y în punctul $A(0; 4)$. În care puncte el intersectează axa x?

450. Graficul funcţiei $y = x^2 - 3x + c$ intersectează axa y în punctul $A(0; 3)$. Oare intersectează el axa x?

451. Construiţi graficul funcţiei, indicaţi intervalele pe care funcţia creşte (descreşte):
a) $y = x(x - 2)$; c) $y = x^2 - 6x$; e) $y = 3x^2 + 12x$;
b) $y = x(5 - x)$; d) $y = 2x - x^2$; f) $y = x - 2x^2$.

452. Pentru care valori ale argumentului funcţiile date au cele mai mici valori:
a) $y = x(x - 6)$; b) $y = (x - 3)^2 + 1$; c) $y = x^2 + 2x$?

Nivelul B

Fără a construi graficul funcţiei efectuaţi sarcinile (**453–454**).

453. Pentru care valoare a lui c graficul funcţiei $y = x^2 - 5x + c$:
a) trece prin originea de coordonate;
b) este tangent la axa x;
c) intersectează axa x în punctul $A(3; 0)$;
d) intersectează axa y în punctul $B(0; -5)$?

454. Pentru care valoare a lui b graficul funcţiei $y = x^2 + bx + 4$:
a) este tangent la axa x;
b) nu are puncte comune cu axa x;
c) intersectează axa x în punctul $A(4; 0)$;
d) intersectează axa x în punctele, distanţa dintre care este egală cu 3?

Construiţi graficul funcţiilor de gradul al doilea (**455–461**).

455. a) $y = x^2 + x + 1$; c) $y = x^2 - x + 1$;
b) $y = x^2 - (x + 2)$; d) $y = x(x + 1) - 3$.

456. a) $y = -x^2 + 3x + 1$; c) $y = -x^2 - 2x + 3$;
b) $y = 1 - 2x - x^2$; d) $y = 4x - (x^2 - 1)$.

457. a) $y = 1 + x - x^2$; c) $y = 4 - x - x^2$;
b) $y = 2 + x(1 - x)$; d) $y = 3 - x(x - 2)$.

458. a) $y = (x - 1)(x + 2)$; c) $y = (x + 2)(x - 3)$;
b) $y = (x - 2)(x + 3)$; d) $y = 2(3 + x)(x - 1)$.

459. a) $y = (2x - 1)^2 + 3$; c) $y = (0{,}5x + 2)^2 - 3$;
b) $y = 1 - (x + 3)^2$; d) $y = 4(0{,}5x + 1)^2 - 1$.

460. a) $y = 3x^2 + 3x - 1$; c) $y = -3x^2 + 6x - 1$;
b) $y = 2x^2 - 4x + 5$; d) $y = -x^2 + x - 3$.

461. a) $y = 0{,}5x^2 - x + 2$; c) $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$;
b) $y = 0{,}3x^2 - 0{,}6x + 1$; d) $y = \frac{1}{3}x^2 + x + \frac{2}{3}$.

462. Aflaţi intervalele de creştere şi descreştere ale funcţiilor:
a) $y = x^2 + 2x$; c) $y = x^2 - 4x + 3$; e) $y = (1 - x)^2$;
b) $y = 1 - x^2$; d) $y = x(x + 4)$; f) $y = x^2 + x + 1$.

463. Pentru care valori ale lui x funcţiile date au cele mai mici valori:
a) $y = x^2 - 6x + 9$; c) $y = 4x^2 - 12x - 3$;
b) $y = x^2 + 4x + 7$; d) $y = 4x^2 - 4x + 1$?

464. Aflaţi valoarea cea mai mare a funcţiilor:
a) $y = 3 - (x - 2)^2$; c) $y = 6x - x^2 - 10$;
b) $y = -0{,}25(x + 5)^2$; d) $y = -5x^2 + 4x + 1$.

465. a) Valoarea cea mai mică a funcţiei $y = x^2 - 6x + c$ este egală cu –5. Construiţi graficul ei.

b) Valoarea cea mai mare a funcţiei $y = c + 4x - 4x^2$ este egală cu 4. Construiţi graficul ei.

466. Aflaţi coordonatele punctului de intersecţie al graficelor funcţiilor:
a) $y = x^2$ și $y = (x - 4)^2$;
b) $y = 2x^2$ și $y = -x^2 + 3$;
c) $y = 3x^2 + 7$ și $y = 3x^2 + 2x + 1$.

467. Aflaţi distanţa dintre vârfurile parabolelor care sunt graficele funcţiilor:
a) $y = (x - 3)^2$ și $y = (x - 3)^2 + 7$;
b) $y = x^2$ și $y = (x + 5)^2$;
c) $y = x^2 - 2x + 5$ și $y = x^2 - 2x - 4$;
d) $y = x^2 + 4x + 5$ și $y = -x^2 - 4x - 5$.

468. Aflaţi distanţa de la vârful parabolei, ecuaţia căreia este $y = x^2 - 6x + 13$ până la axele x, y şi originea de coordonate.

469. Aflaţi valoarea a lui b, dacă graficul funcţiei $y = x^2 + bx$ este simetric faţă de dreapta $x = 3$.

470*. Construiţi graficul funcţiei:

a) $y = |x^2 - 4x + 3|$; c) $y = |x^2 + 4x| + 3$;

b) $y = |x^2 + x - 6|$; d) $y = |6x| - x^2 - 5$.

471*. ***Problema lui G. Cardano.*** Aflaţi soluţia pozitivă a ecuaţiei $x^2 + 6x = 91$ cu ajutorul construcţiei geometrice.

G. Cardano

Exerciţii pentru repetare

472. Înlocuiţi literele cu cifre ca egalitatea să se realizeze:

PARA + PARA = BOLA.

Câte soluţii are problema?

Rezolvaţi inecuaţiile (**473–474**).

473. a) $2(x + 7) + 3(1 - 2x) \geq 1$; c) $2(x + 1) \geq 3 - (1 - 2x)$;

b) $3(3x - 2) - 4(x + 1) < 2x$; d) $3x - 0,5(1 - 3x) \leq 2,5(x - 3)$.

474. a) $(x - 1)(2 - x) > 0$; c) $(3 - x)(5 + x) \leq 0$;

b) $(3 + x)(x + 7) < 0$; d) $(5 - x)(1 - x) \geq 0$.

475. Câte soluţii au ecuaţiile:

a) $|x - 1| + |x + 2| = 5$; c) $|x - 1| + |x + 2| = 2$;

b) $|x - 1| + |x + 2| = 3$; d) $|x - 1| + |x + 2| = 0$?

Comoara succeselor

✓ Ştiu care funcţii sunt de gradul al doilea:
$y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

✓ Ştiu că graficul funcţiei de gradul al doilea este o *parabolă*.

✓ Pot da exemple de funcţie de gradul al doilea:

$y = 3x^2$; $y = x^2 + x$; $y = -x^2 + 5$; $y = 2x^2 - 3x + 2$

✓ Pot explica algoritmul construirii graficului funcţiei de gradul al doilea.

✓ Pot să caracterizez funcţia după graficul ei.

✓ Ştiu să rezolv exerciţii ce prevăd construirea graficului funcţiei de gradul al doilea.

Aplicăm cunoştinţele obţinute

Pentru a înţelege şi însuşi bine tema nouă, ne amintim:
- Cum se construieşte graficul funcţiei de gradul al doilea?
- Graficul funcţiei $y = ax^2 + bx + c$:

Ramurile sunt îndreptate în sus: $a > 0$	Ramurile sunt îndreptate în jos: $a < 0$
se atinge de axa absciselor $D = b^2 - 4ac = 0$	intersectează axa absciselor $D = b^2 - 4ac > 0$

- Tipurile inecuaţiilor: stricte, nestricte.
- Proprietăţile inecuaţiilor numerice p. 69.
- Cum se scriu soluţiile inecuaţiilor p. 45.

§ 12 Inecuații de gradul doi

Dacă partea stângă a inegalităţii este expresia $ax^2 + bx + c$, unde $a \neq 0$, b, c sunt numere date, iar partea dreaptă este 0, ea se numeşte *inecuaţie de gradul al doilea.*

Exemple de inecuaţii de gradul al doilea:
$x^2 - 5x + 3 < 0, 2x^2 + 4 \leq 0, -3x^2 + 2x \geq 0, -x^2 + 3x + 7 > 0.$

Astfel de inecuaţii este comod de rezolvat cu ajutorul graficelor funcţiilor de gradul al doilea.

Exemplu 1. Rezolvaţi inecuaţia $x^2 - 6x + 3 < 0$.

Rezolvare. Construim graficul funcţiei $y = x^2 - 6x + 3$ (fig. 100). Zerourile ei sunt numerele 1 şi 5. Valori negative funcţia are numai în acel caz, când variabila x aparţine intervalului (1; 5). El este mulţimea soluţiilor inecuaţiei date.

Răspuns. (1; 5).

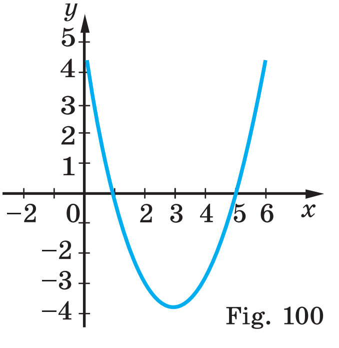


Fig. 100

Este clar, pentru a rezolva aceste inecuaţii construirea exactă a graficelor funcţiilor de gradul al doilea nu este necesară. Este suficient de determinat direcţia ramurilor parabolei şi punctele de intersecţie ale graficului cu axa x (dacă ele există).

Exemplul 2. Rezolvaţi inecuaţia $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

Rezolvare. Graficul funcţiei $y = -x^2 + 2x + 3$ intersectează axa x în punctele cu abscisele –1 şi 3; ramurile parabolei sunt indreptate în jos. Schematic graficul funcţiei poate fi reprezentat ca pe figura 101. Valorile nepozitive ale funcţiei sunt atunci, când x aparţine intervalului $(-\infty; -1]$ sau $[3; \infty)$.

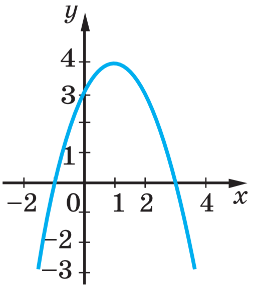


Fig. 101

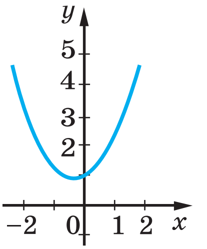


Fig. 102

Deci, mulţimea soluţiilor inecuaţiei este reuniunea acestor intervale. Deoarece reuniunea mulţimilor se marchează cu simbolul $\bigcup$, **răspunsul** poate fi scris aşa: **$(-\infty; -1] \bigcup [3; \infty)$.**

Exemplul 3. Rezolvaţi inecuaţia $x^2 + x + 1 < 0$.

Rezolvare. Discriminantul ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$ este negativ, de aceea graficul funcţiei $y = x^2 + x + 1$ cu axa x nu are puncte comune. Ramurile parabolei sunt îndreptate în sus (fig. 102). Deci, pentru fiecare valoare x valoarea funcţiei $y = x^2 + x + 1$ este pozitivă.

Răspuns. Inecuaţia nu are soluţii.

Exemplul 4. Rezolvaţi inecuaţia $(x + 4)(x + 1) > 0$.

Rezolvare. Expresia $(x + 4)(x + 1)$ este egală identic cu un trinom pătrat cu coeficientul lui x^2 pozitiv. Deci graficul funcţiei $y = (x + 4)(x + 1)$ este parabola cu ramurile întreptate în sus şi care intersectează axa x în punctele cu abscisele – 4 şi – 1 (fig. 103). Valorile funcţiei sunt pozitive, când $x < -4$ sau $x > -1$.

Răspuns. $(-\infty; -4) \bigcup (-1; \infty)$.

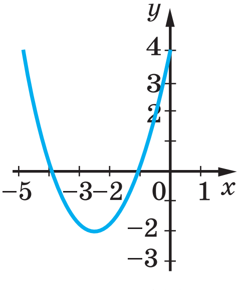


Fig. 103

Deoarece inecuaţia $\frac{x+4}{x+1} > 0$ este echivalentă inecuaţiei $(x + 4)(x + 1) > 0$, prin acest procedeu (grafic) se pot rezolva şi cele mai simple inecuaţii raţionale fracţionare.

Pentru a rezolva inecuţiile de gradul al doilea cu ajutorul graficului este necesar:
a) după semnul primului coeficient de stabilit direcţia ramurilor parabolei;
b) de aflat soluţiile ecuaţiei pătrate respective, dacă ele sunt;
c) de construit schiţa graficului funcţiei de gradul al doilea;
d) de determinat după grafic intervalele pentru x pe care inecuaţia este justă.

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

Procedeul după care se rezolvă inecuaţiile de gradul al doilea poate fi aplicat şi la rezolvarea altor tipuri de inecuaţii.

Exemplu. Să se rezolve inecuaţia $(x - 1)(x - 2)(x + 5) < 0$.

Această problemă este echivalentă cu următoarea: pentru care valori x valorile funcţiei $y = (x - 1)(x - 2)(x + 5)$ sunt negative?

Pentru a răpunde la întrebarea definită, aflăm întâi zerourile funcţiei: 1, 2 şi –5. Ele împart domeniul de definiţie în patru intervale: $(-\infty; -5)$, $(-5; 1)$, $(1; 2)$ şi $(2; \infty)$. Pe fiecare interval fiecare factor al produsului $(x - 1)(x - 2)(x + 5)$ are un semn precis. Prezentăm semnele lor şi a produsului în următorul tabel:

Factorul	$(-\infty; -5)$	$(-5; 1)$	$(1; 2)$	$(2; \infty)$
$x - 1$	—	—	+	+
$x - 2$	—	—	—	+
$x + 5$	–	+	+	+
y	—	+	—	+

Pe figura 104 este reprezentată schiţa graficului funcţiei y.

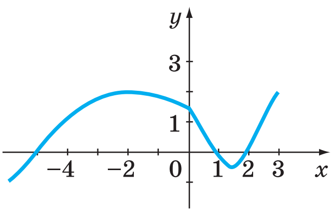


Fig. 104

Deci, funcţia obţine valori negative pe intervalele $(-\infty; 5)$ şi $(1; 2)$.

Răspuns. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei este $(-\infty; 5) \cup (1; 2)$.

În exemplul cercetat intervalele pe care valorile funcţiei sunt pozitive alternează cu cele pe care valorile funcţiei sunt negative. Dar nu totdeauna este aşa.

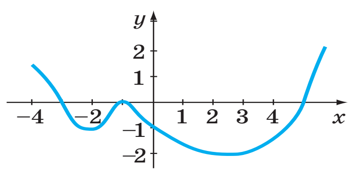
Să rezolvăm inecuaţia $(x + 1)^2(x + 3)(x - 5) \geq 0$.

Partea stângă a inecuaţiei este egală cu zero pentru valorile x egale cu –3, –1 sau 5. După ce alcătuim tabelul respectiv ne convingem că partea stângă a inecuaţiei primeşte valori negative pe intervale vecine $(-3; -1)$ şi $(-1; 5)$. Deci, mulţimea soluţiilor inecuaţiei este $(-\infty; -3] \cup [5; \infty) \cup \{-1\}$.

Schiţa graficului funcţiei $y = (x + 1)^2(x + 3)(x - 5)$ este reprezentată pe figura 105.

Procedeul studiat este un caz particular al *metodei intervalelor*. În clasele superioare îl veţi studia mai detaliat.

Fig. 105



Verificaţi-vă

1. Formulaţi definiţia inecuaţiei de gradul al doilea.
2. Daţi exemple de inecuaţii de gradul al doilea.
3. Cu care simbol se notează reuniunea mulţimilor?
4. Câte soluţii poate avea inecuaţia de gradul al doilea?
5. Daţi exemple de inecuaţii de gradul al doilea care:
a) nu au nici o soluţie;
b) au numai o singură soluţie;
c) sunt satisfăcute de toate numerele reale.

Efectuăm împreună

Rezolvaţi inecuaţiile:
a) $x^2 + 3x < 0$; b) $z^2 - 3z - 2 \le 0$; c) $t^2 + t + 1 > 0$.

Rezolvare. a) Graficul funcţiei $y = x^2 + 3x$ intersectează axa x în punctele $x = 0$ şi $x = -3$, ramurile parabolei sunt îndreptate în sus. Reprezentăm schiţa graficului (fig. 106) şi obţinem mulţimea soluţiilor inecuaţiei $(-3;\ 0)$.

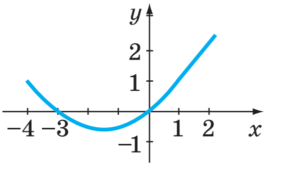


Fig. 106

b) Aflăm rădăcinile ecuaţiei $z^2 - 3z - 2 = 0$.

$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 17$; $z_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$, $z_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

Ramurile parabolei sunt îndreptate în sus, de aceea mulţimea soluţiilor căutate este $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$.

c) Rezolvăm ecuaţia $t^2 + t + 1 = 0$: $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$. Coeficientul lui t^2 este pozitiv şi ramurile parabolei sunt îndreptate în sus. Ea este situată în semiplanul de sus. Deci, mulţimea soluţiilor inecuaţiei este mulţimea R.

Răspuns. a) $(-3;\ 0)$; b) $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$; c) $\boldsymbol{R}$.

Efectuaţi oral

476. Numiţi inecuaţiile de gradul al doilea:

a) $x^2 - 5x + 6 < 0$;
b) $3x^2 + 6 \le 0$;
c) $-2x^2 - 5x + 7 \le 0$;
d) $x^3 - 2x + 6 \ge 0$;
e) $x^2 + \frac{1}{x} + 3 \ge 0$;
f) $\frac{x^2}{3} + 4x + \sqrt{2} < 0$.

477. Determinaţi direcţia ramurilor graficului funcţiilor:
a) $y = 4x^2 - 16x + 5$; d) $y = 6x^2 + 5x$; g) $y = 3x(x - 4)$;
b) $y = - x^2 + 4x + 3$; e) $y = 7 - 4x - x^2$; h) $y = -x(x + 3)$;
c) $y = 3x^2 - 7$; f) $y = 5 + 7x - 5x^2$; i) $y = (x - 1)(2 - x)$.

478. Oare intersectează axa absciselor graficul funcţiilor:
a) $y = x^2 - 2x + 3$; c) $y = 3x^2 - x$; e) $y = 5x^2 + 3x - 1$;
b) $y = -x^2 + 7x - 5$; d) $y = 3x^2 - x + 3$; f) $y = x(7x - 1)$?

479. De ce inecuaţiile nu au soluţii:
a) $3x^2 < -3$; c) $3x^2 - x + 1 < 0$; e) $-(1 - x)^2 > 0$;
b) $(x - 2)^2 + 1 \leq 0$; d) $-x^2 \geq 2$; f) $2x^2 < x - 1$?

Nivelul A

480. Reprezentaţi pe axa de coordonate reuniunea intervalelor:
a) $(-\infty; 2]$ şi $[3; \infty)$; c) $[2; 4]$ şi $(5; 7)$; e) $[-4; 2]$ şi $[2; 3]$;
b) $(-4; 3)$ şi $(4; 7)$; d) $(-\infty; 3)$ şi $(3; 7)$; f) $(-\infty; 1)$ şi $(1; 4)$.

Rezolvaţi inecuaţiile (**481 – 487**).

481. a) $x^2 - 4x < 0$; c) $z^2 + 6z - 7 \leq 0$; e) $2x^2 + 7x \geq 0$;
b) $x^2 + 6x \leq 0$; d) $6x^2 - x > 0$; f) $y^2 - 4y - 5 < 0$.

482. a) $x^2 - 6x + 9 > 0$; d) $z^2 + z + 0,25 \leq 0$;
b) $y^2 - 8y + 16 < 0$; e) $x^2 > 2x - 1$;
c) $x^2 + 4x + 4 \leq 0$; f) $y^2 \geq 4y - 4$.

483. a) $x^2 \leq 3x - 2$; d) $x^2 + 10x + 25 \geq 0$;
b) $t^2 + 9 < 6t$; e) $9x^2 + 6x + 1 \leq 0$;
c) $x^2 - 4x + 3 > 0$; f) $x^2 - 2x + 9 < 0$.

484. a) $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$; d) $y^2 - 4y < 12$;
b) $x^2 + 8 < 6x$; e) $-x^2 + 3x - 2 > 0$;
c) $0,5x^2 - x - 2 > 0$; f) $11z \geq z^2 + 18$.

485. a) $2 - 3y \leq y^2$; d) $4x(x + 1) < 15$;
b) $12x - 36 < x^2$; e) $-2x^2 > 2x + 3$;
c) $3z^2 \leq 5z + 12$; f) $6(t^2 + 1) < 13t$.

486. a) $x(x - 3) < -2$; d) $8 - (5 - y)^2 > 3y$;
b) $2(z^2 + 5) > 9z$; e) $(x - 3)(x + 5) > 0$;
c) $x(2 - x) \geq 4$; f) $(x + 2)(x + 7) < 0$.

487. a) $(x + 7)(x - 1) \geq 0$; d) $(a + 2)(a - 5) \leq 0$;
b) $(x - 3)(x - 5) \leq 0$; e) $(t + 3)(t + 4) \geq 0$;
c) $(x - 2)(x + 3) < 0$; f) $(2 - c)(3 - c) \geq 0$.

488. Pentru care valori ale lui x valorile funcţiei $y = x^2 + 3x$ sunt negative, iar pentru care sunt pozitive?

489. Pentru care valori ale lui x valorile funcţiei $y = f(x)$ sunt pozitive, iar pentru care sunt negative, dacă:

a) $f(x) = x^2 - 4$; c) $f(x) = x^2 + 6x - 7$;
b) $f(x) = 9 - x^2$; d) $f(x) = 3 + 2x - x^2$?

490. Aflaţi domeniul de definiţie al funcţiei:

a) $y=\sqrt{x^2-4}$; c) $y=\sqrt{x^2-5x+4}$; e) $y=\sqrt{2x^2+1}$;
b) $y=\sqrt{1-x^2}$; d) $y=\sqrt{x^2-4x}$; f) $y=\sqrt{x^2-4x+4}$.

491. Aflaţi soluţiile întregi ale inecuaţiei:

a) $x^2 + 5x - 6 < 0$; c) $x^2 - x - 6 < 0$; e) $x^2 + 2x - 8 < 0$;
b) $x^2 - 5x - 6 \le 0$; d) $6 - x^2 \ge x$; f) $x^2 - 4x + 4 \le 0$.

Nivelul B

Rezolvaţi inecuaţiile (**492 – 496**).

492. a) $(2 - x)(3 - x) \le 2$; d) $(x + 2)(x + 3) \ge 10x$;
b) $(x + 4)(x - 5) < 10$; e) $(3 - 2x)(x + 1) \le 2$;
c) $(1 - z)(2 + z) > 2$; f) $3(x^2 + 1) \le 5x + 1$.

493. a) $2(x - 3)(1 - 2x) > 6$; d) $1 - x > 2(x^2 + 1)$;
b) $4(x^2 - 9) > x + 3$; e) $-x(2 - x) \le 5 - 4x^2$;
c) $x(x - 2) > 2 - 3x^2$; f) $3 - x < 3(x^2 + 3)$.

494. a) $\dfrac{x-3}{x+2}<0$; c) $\dfrac{4-x}{2x+5}>0$; e) $\dfrac{3x-2}{5-2x}<0$;
b) $\dfrac{x+2}{x-7}>0$; d) $\dfrac{2x-1}{3-x}<0$; f) $\dfrac{4z-1}{3-2z}>0$.

495. a) $\dfrac{x-1}{x+3}<1$; c) $\dfrac{3x-1}{2x+5}>3$; e) $\dfrac{x^2}{2-x}\le 3-x$;
b) $\dfrac{x+4}{x-1}>5$; d) $\dfrac{7x+4}{3-2x}\ge 2$; f) $\dfrac{2}{2-x}\ge\dfrac{x-8}{10-x}$.

496. a) $\dfrac{x+5}{x+7}\ge 0$; c) $\dfrac{x}{1-x}\le 0$; e) $\dfrac{x+3}{1+3x}\le 1$;
b) $\dfrac{2-x}{3-x}\le 0$; d) $\dfrac{2x+1}{x-7}<1$; f) $\dfrac{5x-1}{1-x}\ge 1$.

497. Rezolvaţi inecuaţiile:

a) $(3x - 1)(x + 3) > x(1 + 5x)$;
b) $(x - 2)(x + 2) + x(x + 7) \le 0$;
c) $(x + 4)(2x - 3) - (5x - 6)(x - 3) \ge 10$;
d) $(x - 4)(3x + 1) < (2x - 6)(x - 2) + 4$.

Rezolvaţi inecuaţiile prin metoda intervalelor (**498–502**).**).**

498*. a) $(x^2 - 3x + 2)(x + 7) \geq 0$;
b) $(x^2 - 16)(x^2 - 25) < 0$;
c) $(x^4 + x^2 + 1)(x - 1)(x + 3) < 0$.

499*. a) $(x - 3)(x + 2)(x^2 + 4x + 5) \leq 0$;
b) $(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6) \leq 0$;
c) $(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 2x - 15) > 0$.

500*. a) $(x^2 - 1)(3x - 2x^2 + 5) \geq 0$;
b) $(x^2 + 3x - 10)(4 - x^2) < 0$;
c) $(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 9) > 0$.

> « *Sunt scumpe nu acele cunoştinţe care se depun în creier ca grăsimea; sunt scumpe acelea care se transformă în muşchi intelectuali».*
> G. Spencer

501*. a) $\dfrac{3x^2+5x-8}{x^2+2x-3} \leq 0$; b) $\dfrac{2x^2-3}{4x-1} \geq \dfrac{x}{2}$; c) $1 > \dfrac{8-3x}{3x^2-2x-16}$.

502*. a) $\dfrac{5x^2-9x-2}{11x-2-5x^2} > 0$; b) $4 > \dfrac{4-3x}{3x^2-x-4}$; c) $\dfrac{x+1}{1-x} < 2x$.

503. Pentru care valori ale lui x valorile funcţiei $y = 2x + 2$ sunt mai mari decât valorile respective ale funcţiei:
a) $y = x^2 - 3x - 4$; b) $y = 4x^2 + 9x - 13$?

504. Aflaţi domeniul de definiţie al funcţiei:
a) $y = \sqrt{8+7x-x^2}$;
b) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x^2-3x-4}$;
c) $y = \sqrt{x^3-x^2-25x+25} - \sqrt{\dfrac{5}{x^2+6x+9}}$;
d) $y = \sqrt{3-5x-2x^2}$;
e) $y = \dfrac{x^2-4}{\sqrt{4+x-5x^2}}$.

505. Pentru care valori ale lui b inecuaţiile nu au soluţii:
a) $x^2 + 2bx + 1 < 0$;
b) $bx^2 + 6x + 1 < 0$;
c) $(b - 1)x^2 + 3b > 2bx$;
d) $b(x^2 + 1) \leq bx + 9$?

506. Pentru care valori ale lui m fiecare număr real satisface inecuaţiile:
a) $x^2 - mx + 4 > 0$;
b) $x^2 - 6x + m \geq 0$;
c) $mx^2 + m + 3 < 4x$;
d) $mx^2 + 4x + 2m < 1$?

Rezolvaţi sistemul de inecuaţii (**507-508**).

507. a) $\begin{cases} x^2-4x<0, \\ x^2-x-6\geq 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x^2-1>0, \\ 2x^2-5x+3<0. \end{cases}$

508. a) $\begin{cases} x^2-3>2x, \\ x^2+28\geq 11x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2+1>4x, \\ 3x^2+2\leq 5x. \end{cases}$

509. Rezolvaţi inecuaţiile duble:

a) $0 < x^2 - 5x < 6$;
b) $1 < x^2 + 2 < 3x$;
c) $x < 2x + 3 < x^2$;
d) $3 < x^2 - 2x + 3 < x^2$.

510. Rezolvaţi inecuaţiile prin metoda grafică:

a) $x^2 < x + 2$;
b) $(x-2)^2 \geq |x|$;
c) $2x^2 < 1+\sqrt{x}$;
d) $x^2 - 3{,}5x \geq \sqrt{x}$.

Exerciţii pentru repetare

511. Rezolvaţi sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x-2y=-2, \\ 2x+y=6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x+y=-4, \\ 3x-y=5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-4y=-16, \\ 3x+5y=9. \end{cases}$

512. Prietenii au procurat un cadou comun în valoare de 260 grn. Dacă ei erau cu 3 persoane mai multe, contribuţia fiecărui ar fi fost cu 6 grn. mai mică. Câte persoane au procurat cadoul?

Aduceţi la forma cea mai simplă expresiile (**513–514**).

513. a) $9x^2y\cdot\left(-0{,}5x^2y\right)$; b) $\left(-0{,}5ab^3\right)\cdot\left(-24a^2b^3\right)$.

514. a) $\dfrac{a^2-4b^2}{ab}:\dfrac{a^2-2ab}{3b}$; b) $\dfrac{x+x^3}{y^2-9}:\dfrac{9-x^2}{2y-6}$.

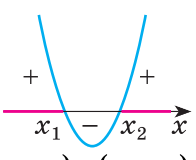
Comoara succeselor

✓ Pot da exemplu de ecuaţie de gradul al doilea cu o variabilă;

$2x^2 + 3x + 1 > 0$ $x^2 + 1 > 0$ $x^2 - 3x < 0$ $-0{,}5x^2 - x + 2 \leq 0$

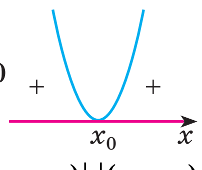
✓ Ştiu a rezolva inecuaţii de gradul al doilea şi a scrie soluţiile lor. Dacă $ax^2 + bx + c > 0$ şi $D = b^2 - 4ac$, atunci:

$a > 0$
$D > 0$



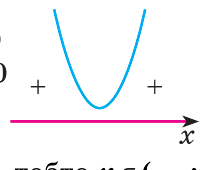
$x \in (-\infty;\ x_1)\quad (x_2;\ \infty)$

$a > 0$
$D = 0$



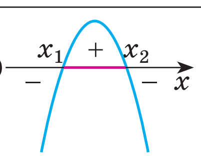
$x \in (-\infty;\ x_0) \cup (x_0;\ \infty)$

$a > 0$
$D < 0$



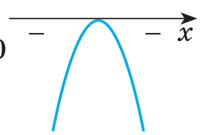
$x \in R$, тобто $x \in (-\infty;\ \infty)$

$a < 0$
$D > 0$



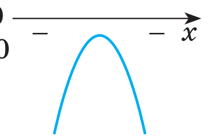
$x \in (x_1;\ x_2)$

$a < 0$
$D = 0$



Soluţii nu are

$a < 0$
$D < 0$



Soluţii nu are

✓ Doresc să învăţ a rezolva inecuaţiile prin metoda intervalelor.

Aplicăm cunoştinţele obţinute

Pentru a înţelege şi însuşi bine tema nouă, ne amintim:
— Ce este sistemul de ecuaţii liniare (p. 261).
— Ce este soluţia sistemului de ecuaţii cu două variabile (p. 261).
— Cum se rezolvă sistemul de ecuaţii prin metoda grafică.
— Care figură este graficul ecuaţiei:

$y = x^2$ şi $y = ax^2 + bx + c$ — parabolă	
$y = \dfrac{k}{x}$ — hiperbolă	$y = \sqrt{x}$ — ramură a parabolei
$x^2 + y^2 = r^2$ şi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ — circumferinţă	

— Câte soluţii poate avea sistemul a două ecuaţii liniare cu două variabile.

§ 13 Sisteme de ecuaţii de gradul al doilea

Cu noţiunea de «sistem de ecuaţii» aţi făcut cunoştinţă în clasa a 7-a. Aţi examinat sistemul de două ecuaţii liniare cu două variabile şi procedeele rezolvării lor. În practică deseori trebuie de examinat sisteme ce conţin ecuaţii de gradul al doilea.

Exemple de ecuaţii de gradul al doilea cu două variabile:

$$x^2 + 2y^2 = 9,\ 8z - t^2 = 12,\ 0{,}5xy + y = 0.$$

Fiecare ecuaţie are două variabile şi cel puţin un termen de gradul al doilea referitor la aceste variabile. Adică, sau o variabilă este la pătrat, sau produsul a două variabile.

Exemple de ecuaţii de gradul întâi, al treilea şi al patrulea:

$$x - 2y = 0,\ \ 5x^2y + 10 = 0,\ \ x^2z^2 - x^2 + z = 0$$

Dacă sistemul este format dintr-o ecuaţie de gradul al doilea şi una de gradul întâi sau al doilea cu aceleaşi variabile, sistemul se numeşte *sistem de două ecuaţii de gradul al doilea cu două variabile.*

Reamintim. *Soluţie a ecuaţiei* cu două variabile se numeşte fiecare pereche de numere care transformă această ecuaţie în egalitate justă.

Soluţie a sistemului de ecuaţii se numeşte soluţia comună a tuturor ecuaţiilor lui.

A rezolva sistemul de ecuaţii înseamnă a afla mulţimea tuturor soluţiilor ei.

De exemplu, pentru ecuaţiile $x^2 + y - 5 = 0$ şi $x - y + 3 = 0$ soluţiile comune sunt perechile de numere (–2; 1) şi (1; 4) (fig. 107). Verificaţi oral. Alte soluţii comune aceste ecuaţii nu au.

Deci, sistemul $\begin{cases} x^2 + y - 5 = 0, \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$ are două soluţii, el este satisfacut de două perechi de numere: (–2; 1) şi (1; 4).

Există diferite procedee de rezolvare a sistemelor de ecuaţii. Principalele sunt:

- procedeul substituţiei;
- procedeul adunării algebrice;
- procedeul grafic.

Demonstrăm pe exemple concrete cum se aplică aceste metode la rezolvarea ecuaţiilor de gradul al doilea.

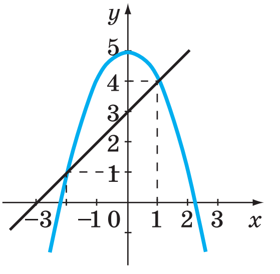


Fig. 107

Exemplu. Rezolvaţi sistemul de ecuaţii:

a) $\begin{cases} 2x^2 - y = 17, \\ x^2 + y = 10; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 2, \\ x^2 - y = 5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

Rezolvare. a) *Procedeul adunării*. Adunăm sistemele de ecuaţii, avem $3x^2 = 27$, de unde $x^2 = 9$, $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Deoarece $x^2 = 9$, din ecuaţia a doua aflăm $y_1 = y_2 = 1$.

Deci, sistemul are două soluţii: (3; 1) şi (–3; 1).

b) *Procedeul substituţiei.* Exprimăm x^2 din ecuaţia a doua prin y şi substituim în prima ecuaţie:

$2(y + 5) - y^2 = 2$ sau $y^2 - 2y - 8 = 0$.

După teorema lui Viete aflăm soluţiile $y_1 = 4$, $y_2 = -2$.

Dacă $y = 4$, atunci $x^2 = 9$, de unde $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Dacă $y = -2$, atunci $x^2 = 3$, de unde $x_3 = \sqrt{3}$, , $x_4 = -\sqrt{3}$.

Deci, sistemul dat are 4 soluţii: $(3;\ 4)$, $(-3;\ 4)$, $\left(\sqrt{3}; -2\right)$, $\left(-\sqrt{3}; -2\right)$.

c) *Procedeul grafic*. Graficul primei ecuaţii este circumferinţa cu centrul în originea de coordonate şi raza egală cu 5 unităţi.

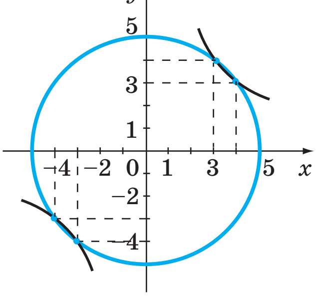


Fig. 108

Graficul ecuaţiei a doua este hiperbola $y = \dfrac{12}{x}$.

Construim graficele acestor ecuaţii într-un sistem de coordonate (fig. 108) şi determinăm coordonatele punctelor de intersecţie.

Din grafic vedem că sistemul are 4 soluţii: (–4; –3), (–3; –4), (3; 4), (4; 3).

Răspuns. a) (3; 1) şi (–3; 1); b) (–3; 4), (3; 4), $(\sqrt{3}; -2)$, $(-\sqrt{3}; -2)$;

c) (–4; –3), (–3; –4), (3; 4), (4; 3).

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

Pentru rezolvarea unor tipuri de sisteme se aplică *procedeul înlocuirii variabilelor*. Rezolvăm prin aceast procedeu astfel de sisteme de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30, \\ x + xy + y = 11. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 4x + (x-2y)^2 = 1, \\ (x-2)^2 + 2y - x = 3. \end{cases}$

Rezolvare. a) $\begin{cases} xy(x+y) = 30, \\ x + y = 11 - xy, \end{cases}$ de unde $xy(11 - xy) = 30$.

Înlocuind $xy = a$ din ultima ecuaţie, avem: $a^2 - 11a + 30 = 0$. Soluţiile acestei ecuaţii sunt 5 şi 6.

Dacă $xy = 5$, atunci $x + y = 6$; dacă $xy = 6$, atunci $x + y = 5$. Obţinem două sisteme de ecuaţii:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 5 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Rezolvând ambele sisteme, obţinem soluţiile sistemului dat:

a) (5; 1), (1; 5); (3; 2), (2; 3).

b) Formăm pătratul complet al binomului în primul sistem de ecuaţii. Avem:

$$\begin{cases} (x-2)^2 - 4 + (x-2y)^2 = 1, \\ (x-2)^2 + 2y - x = 3 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} (x-2)^2 + (x-2y)^2 = 5, \\ (x-2)^2 - (x-2y) = 3. \end{cases}$$

Introducem variabile noi: $a = x - 2$, $b = x - 2y$. Atunci sistemul dat are forma:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5, \\ a^2 - b = 3. \end{cases} \quad (*)$$

Dacă din prima ecuaţie scădem a doua, obţinem ecuaţia pătrată cu o variabilă $b^2 + b = 2$, care are soluţiile $b_1 = -2$ şi $b_2 = 1$.

Înlocuim această valoare în sistemul (*) şi aflăm valorile respective ale variabilei a.

Dacă $b_1 = -2$, atunci $a^2 + 2 = 3$, de unde $a_1 = -1$ sau $a_2 = 1$.

Dacă $b_2 = 1$, atunci $a^2 - 1 = 3$, de unde $a_3 = -2$ sau $a_4 = 2$.

Deci, soluţiile sistemului (*) sunt perechile de numere:

(–1; –2), (1; –2), (–2; 1), (2; 1).

Pentru a afla soluţiile sistemului dat trebuie de trecut la variabilele x şi y şi de rezolvat (se poate oral) sistemele respective:

$$\begin{cases} x-2=-1, \\ x-2y=-2; \end{cases} \begin{cases} x-2=1, \\ x-2y=-2; \end{cases} \begin{cases} x-2=-2, \\ x-2y=1; \end{cases} \begin{cases} x-2=2, \\ x-2y=1. \end{cases}$$

Obţinem: (1; 1,5), (3; 2,5), (0; –0,5), (4; 1,5).

Răspuns. a) (5; 1), (1; 5); (3; 2), (2; 3); b) (1; 1,5), (3; 2,5); (0; –0,5), (4; 1,5).

Verificaţi-vă

1. Daţi exemple de ecuaţii de gradul al doilea cu două variabile.
2. Ce este soluţia ecuaţiei cu două variabile?
3. Câte soluţii poate avea ecuaţia cu două variabile?
4. Care figură este graficul ecuaţiilor: a) $y = x^2$; b) $x^2 + y^2 = 4$;
   c) $(x – 1) + (y – 2)^2 = 9$; d) $y^2 = x$?
5. Ce este sistemul de două ecuaţii de gradul al doilea cu două variabile?
6. Câte soluţii poate avea sistemul de două ecuaţii de gradul al doilea cu două variabile?
7. Numiţi procedeele principale de rezolvare ale sistemului de ecuaţii de gradul al doilea cu două variabile.

Efectuăm împreună

1 Rezolvaţi sistemul de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=61, \\ x^2-y^2=11; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy-x^2=2, \\ y^2-xy=3. \end{cases}$

- **Rezolvare.** a) Adunăm membru cu membru ecuaţiile sistemului dat, obţinem ecuaţia $2x^2 = 72$, soluţiile cărei sunt –6 şi 6. Înlocuind cu orice valoare din acestea în ecuaţia a doua a sistemului obţinem $36 – y^2 = = 11$, care are soluţiile –5 şi 5. Deci, sistemul are patru soluţii: (6; 5), (–6; –5), (–6; 5) şi (6; –5).

b) Scădem membru cu membru prima ecuaţie din a doua: $y^2 – 2xy + + x^2 = 1$, sau $(y – x)^2 = 1$, de unde $y – x = 1$ sau $y – x = –1$.

Dacă $y – x = 1$, atunci $y = x + 1$. Substituim în prima ecuaţie $xy – x^2 = = 2$ în locul lui y expresia $x + 1$:

$x(x + 1) – x^2 = 2$, $x^2 + x – x^2 = 2$, $x = 2$, atunci $y = 2 + 1 = 3$.

Dacă $y – x = –1$, atunci $y = x – 1$, şi din prima ecuaţie $xy – x^2 = 2$ avem:

$x(x – 1) – x^2 = 2$, $x^2 – x – x^2 = 2$, $x = –2$ şi $y = –2 – 1 = –3$.

Deci, sistemul are două soluţii: (2; 3), (–2; –3).

Răspuns. a) (6; 5), (–6; –5), (–6; 5), (6; –5); b) (2; 3), (–2; –3).

2 Oare are soluţii sistemul de ecuaţii;

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2, \\ y = 2 - x^2 ? \end{cases}$$

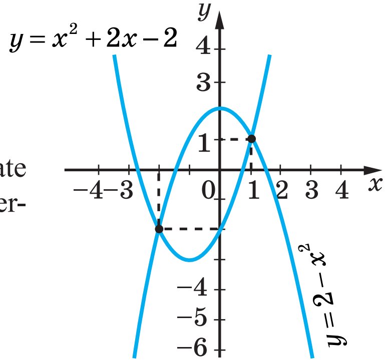


Fig. 109

- **Rezolvare.** Construim într-un sistem de coordonate graficele ambelor ecuaţii. Aceste parabole se intersectează în două puncte (fig. 109).

Răspuns. Sistemul de ecuaţii are două soluţii.

Efectuaţi oral

515. Oare sunt soluţie a ecuaţiei $x^2 - 3x = y$ perechile de numere:
a) (0; 0); c) (0; 3); e) (0; − 3);
b) (3; 0); d) (−3; 0); f) (3; 3)?

516. De ce ecuaţiile nu au soluţii:
a) $x^2 + y^2 + 4 = 0$; b) $x^2 + y^2 = 2xy - 3$?

517. Oare este perechea de numere (0; 2), (1; 1), (–1; 1), (2; 0), (3; 3) soluţie a sistemului de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ 2xy + y = 3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ xy + 2y = 4? \end{cases}$

518. 1) De ce nu au soluţii sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 7 = 0, \\ 3xy - y^2 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 - y^2 = 4? \end{cases}$

2) *Problemă deschisă*. Alcăuiţi un sistem de ecuaţii de gradul al doilea, care nu are soluţii.

519. Care ecuaţie corespunde graficului (fig. 110): a) cu culoare albastră; b) cu culoare roşie; c) cu culorile albastră şi roşie împreună?

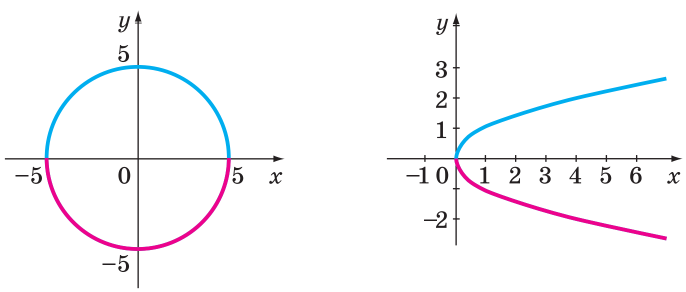


Fig. 110

a *b*

Nivelul A

520. Construiţi graficul ecuaţiilor:

a) $x + 2y = 0$; c) $x^2 + y^2 = 9$; e) $y+\sqrt{x}=1$;

b) $xy = 12$; d) $x^2 - y = 2$; f) $y + 1 = (x + 1)^3$.

Oare graficele construite se pot considera grafice ale funcţiilor?

Rezolvaţi sistemul de ecuaţii grafic (**521–524**).

521. a) $\begin{cases} y+x=1, \\ y+x^2=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8y=x^2, \\ y-\sqrt{x}=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy=6, \\ y+2=0. \end{cases}$

522. a) $\begin{cases} x^2+y^2=18, \\ x-y=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy=16, \\ x-y=0. \end{cases}$

523. a) $\begin{cases} y^2=x, \\ y=x^2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y^2=0, \\ y-2=x; \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy-8=0, \\ x^2-y=0. \end{cases}$

524. a) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2-y=5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2=18, \\ xy=9; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y-2=x. \end{cases}$

Rezolvaţi sistemul de ecuaţii prin procedeul substituţiei (**525–527**).

525. a) $\begin{cases} x-y=3, \\ x^2+y^2=9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy-2y=4, \\ y=x-2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+4y=8, \\ xy=1. \end{cases}$

526. a) $\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ x-6=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy+2=0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+1=0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-y^2=16, \\ x-y=2. \end{cases}$

527. a) $\begin{cases} 3x+y=7, \\ x-2y^2=2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+y=6, \\ x-y=0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y=8, \\ 2x^2-y^2=32; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+y=2. \end{cases}$

Rezolvaţi sistemul de ecuaţii prin metoda adunării algebrice (**528–529**).

528. a) $\begin{cases} x+y-xy=-23, \\ x-y+xy=49; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ (x-y)(x+y)=8; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+xy=15, \\ y^2+xy=10; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$

529. a) $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ xy=20; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2-2=xy, \\ y^2+1=xy; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+z^2=34, \\ xz=15; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y=5xy, \\ x-y=xy. \end{cases}$

Diofant din Alexandria

Rezolvaţi sistemele de ecuaţii. ***Problema lui Diofan***

a) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2+y^2=68; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=20, \\ x^2-y^2=80. \end{cases}$

531. ***Problema lui Ioan din Palerma.***

a) $\begin{cases} xy-y=42, \\ x-y=2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy-x=40, \\ x-y=2. \end{cases}$

532. ***Problema lui Leonardo Fibonacci.***

a) $\begin{cases} x+y=10, \\ x(x-y)=24y; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2=32y. \end{cases}$

Compuneţi sisteme asemănătoare problemelor 530–532 şi rezolvaţi-le

Nivelul B

533. Construiţi graficul ecuaţiilor:

a) $y^2 - x = 1$;
b) $x^2 + y^2 = 9$;
c) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 1$;
d) $x^2 + y^2 - 2x = 3$;
e) $x^2 - y^2 = 0$;
f) $x^2 + 1 + y^2 - 2y = 0$.

Oare graficele construite se pot considera grafice ale funcţiilor?

Rezolvaţi grafic sistemele de ecuaţii, de asemenea şi cel *deschis* (c) (**534–536**).

534. a) $\begin{cases} y=6x-x^2-7, \\ y=|x|-1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=x^2-2x-1, \\ y=\dfrac{3}{x}+1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=x^2+\triangle+\square, \\ y=\square. \end{cases}$

535. a) $\begin{cases} y=\sqrt{x-4}, \\ 3y-x+2=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \triangle=36, \\ xy=\square. \end{cases}$

536. a) $\begin{cases} x^2+y^2=32, \\ |x|-y=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-y=0, \\ |x|-y=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \triangle-y=0, \\ y-\square=0. \end{cases}$

Rezolvaţi sistemele de ecuaţii (**537–540**).

537. a) $\begin{cases} x^2-xy=3{,}36, \\ 3x+y=2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-y^2=2, \\ 3x+y=-4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ (x-8)(x-3)=0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-y^2=50, \\ x(y+1)=0. \end{cases}$

538. a) $\begin{cases} x+y=8, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{3}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=0, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y=0, \\ 5xy+y^2=44; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x-y=13, \\ 2x^2-xy=21. \end{cases}$

539. a) $\begin{cases} xy-x-y=7, \\ xy+x-y=13; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{34}{15}, \\ x^2+y^2=34; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y+xy=5, \\ x+y-xy=4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=5,2, \\ x^2-y^2=24. \end{cases}$

540. a) $\begin{cases} x^2+2y^2=3, \\ x+y^2=2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2-xy=0, \\ x^2y-4y=0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+3y^2=13, \\ 2x^2+y^2=6; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6. \end{cases}$

«Dragostea faţă de ştiinţe m-a îndemnat să compun o carte scurtă despre calculele algebrei şi almukabalei, deoarece acestea sunt necesare oamenilor la împărţirea moştenirii, la alcătuirea testamentelor, la împărţirea averii şi în procesele judiciare, în târguială şi în diferite contracte, de asemenea, când măsoară pământul, când construiesc canale...».
Al-Horezmi

Rezolvaţi sistemele de ecuaţii din lucrările autorilor vestiţi (**541– 542**)

541. ***Din** «**Cartea abacului**» **(a. 1202) a lui Leonardo Fibonacci***:

a) $\begin{cases} x+y=12, \\ \dfrac{xy}{x-y}=4\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=10, \\ \left(\dfrac{x}{y}+10\right)\left(\dfrac{y}{x}+10\right)=122\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

542. ***Din** «**Algebra**» **Al-Horezmi*** (sec. IX):

a) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2=4xy; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=10, \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=2\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

Al-Horezmi

Rezolvaţi sistemele de ecuaţii (**543–545**).

543. a) $\begin{cases} x^2-y^2=24, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{26}{5}; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y^2+x^2-3xy=4, \\ y^2-x^2+4x=4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}; \end{cases}$ d) $\begin{cases} y^2-4x^2-4x=1, \\ 4x^2+y^2+3xy=1. \end{cases}$

544. a) $\begin{cases} x^2+y=2, \\ y^2+x=2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+2y^2=6, \\ y^2+4x=9; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ xy=4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6. \end{cases}$

545. a) $\begin{cases} x^2+y^2=90, \\ x(x-3y)=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2y^2+xy=72, \\ x+y=6; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x+y)(x-y)=0, \\ x^2+y^2=64; \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x+y)^2-4(x+y)=45, \\ (x-y)^2-2(x+y)=7. \end{cases}$

Rezolvaţi sistemele de ecuaţii prin procedeul substituţiei variabilelor (**546–548**).

546*. a) $\begin{cases} 5(x+y)+2xy=-19, \\ x+y+3xy=-35; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^3+y^3=28, \\ x+y=4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy+x+y=11, \\ x^2y+y^2x=30; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^3y^3=-8, \\ x^3+y^3=7. \end{cases}$

> *«Aplicarea substituţiei variabilelor pentru reducerea obiectelor compuse la mai simple este o idee matematică extraordinar de mănoasă».*
>
> A. M. Samoilenko

547*. a) $\begin{cases} 2xy-3\dfrac{x}{y}=15, \\ xy+\dfrac{x}{y}=15; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{4}; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4}; \\ x^2+y^2=17; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}; \\ x^2+y^2=160. \end{cases}$

548*. a) $\begin{cases} x^2+y^2-xy=12, \\ x^3+y^3=72; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x\left(1+\dfrac{x}{y}\right)=1{,}5, \\ y\left(1+\dfrac{y}{x}\right)=6; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=109, \\ x^3-y^3=218; \end{cases}$ d) $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=26, \\ xy-\dfrac{y}{x}=26. \end{cases}$

549. З Aflaţi numerele a şi b, dacă:

a) $3a+4b=8ab=8$; d) $a^2+b^2-6b=2a+b=0$;
b) $a^2-0{,}5b=a-b=1$; e) $a^2+b-2a=a+b=-1$;
c) $a^2+ab-5=b^2+ab=10$; f) $3(a-2)(b+1)=a-b=3$.

550. Aflaţi distanţa dintre punctele de intersecţie:

a) al dreptei şi circumferinţei, ecuaţiile cărora sunt $x-y=7$ şi $x^2+y^2=169$;

b) al circumferinţelor, ecuaţiile cărora $x^2+y^2=25$ şi $(x-4)^2+(y-4)^2=1$.

Construiţi graficele respective şi verificaţi prin măsurarea directă sau vizuală, dacă sarcina este efectuată corect. Compuneţi şi rezolvaţi o problemă asemănătoare despre hiperbolă.

Exerciţii pentru repetare

551. Stabiliţi corespondenţa dintre perechile de funcţii $f(x)$ şi $g(x)$ (1–4) şi distanţa dintre punctele (A–E), în care se intersectează graficele acestor funcţii.

1 $f(x) = 5 - x$ şi $g(x) = 4/x$ — **A** $2\sqrt{17}$
2 $f(x) = \sqrt{x}$ şi $g(x) = 0,25(x + 3)$ — **B** $\sqrt{2}$
3 $f(x) = x^2$ şi $g(x) = \sqrt[3]{x}$ — **C** $3\sqrt{2}$
4 $f(x) = x^2 - 2x$ şi $g(x) = -x^2 + 6x - 6$ — **D** $5\sqrt{3}$
F $2\sqrt{5}$

552. 1) Viteza luminii este egală cu $3 \cdot 10^5$ km/s. Ce distanţă parcurge lumina în: a) 5 s; b) 1 h; c) 1 an?

2) Viteza sunetului în aer este egală aproximativ cu 343 m/s. Ce distanţa parcurge sunetul în: a) 5 s; b) 15 s; c) 0,5 min?

3) Aţi observat fulgerul, iar peste 10 s aţi auzit tunetul. Cum de aflat distanţa până la fulger? Oare vă aflaţi în siguranţă la această distanţa în aceste condiţii?

Atrageţi atenţia! Fulgerul se deplasează foarte repede şi poate lovi oamenii ce sunt la distanţa de 15 km până la el.

553. Aflaţi suma şi diferenţa fracţiilor:

a) $\dfrac{1}{2x^2+5x-3}$ şi $\dfrac{1}{2x^2-7x+3}$; b) $\dfrac{2}{6a^2-13a+6}$ şi $\dfrac{1}{3a^2-11a+6}$.

554. Simplificaţi fracţiile:

a) $\dfrac{2a^2-5a+2}{3a^2-3,5a+1}$; b) $\dfrac{x^2-3}{x^2-2\sqrt{3}x+3}$; c) $\dfrac{c^2+\sqrt{5}c-10}{c^2-3\sqrt{5}c+10}$.

Comoara succeselor

✓ Înţeleg ce este sistemul de două ecuaţii de gradul al doilea cu două variabile şi ce este soluţia lui. Pot da exemple.

Sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ xy=1 \end{cases}$ are soluţiile $(1;\ 1)$ şi $(-1;\ -1)$.

✓ Ştiu procedeele principale de rezolvare ale sistemului de ecuaţii de gradul al doilea cu două variabile:

Substituţia | Adunarea algebrică | Grafică

✓ Ştiu câte soluţii poate avea sistemul de două ecuaţii de gradul al doilea cu două variabile.

✓ Pot afla soluţia sistemului de două ecuaţii de gradul al doilea cu două variabile.

Aplicăm cunoştinţele obţinute

Pentru a înţelege şi însuşi tema nouă, ne amintim:
– Ce este problemă aplicată.
– Ce este modelul matematic.
– Etapele principale de rezolvare a problemelor cu ajutorul ecuaţiilor:
1) de selectat necunoscuta şi de o notat printr-o literă;
2) cu ajutorul acestei litere de exprimat toate celelalte necunoscute şi dependenţele;
3) de alcătuit ecuaţia;
4) de rezolvat ecuaţia;
5) de verificat cum soluţia obţinută a ecuaţiei corespunde condiţiei problemei.

§ 14 Rezolvarea problemelor prin compunerea sistemelor de ecuaţii

Problema este o cerinţă de a executa ceva sau o întrebare echivalentă cu cerinţa. În problemele algebrice cel mai mult se cere de calculat, de demonstrat, de transformat, de studiat ceva. Dacă la rezolvarea problemelor ca modele se folosesc expresii algebrice, ecuaţii, inecuaţii, sisteme de ecuaţii, atunci se vorbeşte despre metodele algebrice.

Rezolvarea problemelor cu ajutorul sistemelor de ecuaţii liniare le-aţi învăţat în clasa a 7-a. Printr-un procedeu asemănător se rezolvă şi problemele care se reduc la sistemul de ecuaţii de gradul al doilea cu două necunoscute.

Problema 1. Aflaţi laturile dreptunghiului, diagonala căruia este egală cu 10 cm, iar perimetrul cu 18 cm mai mare.

Rezolvare. Notăm lungimile laturilor căutate ale dreptunghiului x cm şi y cm (fig. 111). Atunci pătratul diagonalei este $x^2 + y^2$, iar semiperimentrul este $x + y$. Deoarece diagonala este egală cu 10 cm, iar perimetrul cu 28 cm, avem sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x + y = 14. \end{cases}$$

Să o rezolvăm. Din ecuaţia a doua aflăm y şi substituim valoarea lui în prima ecuaţie:

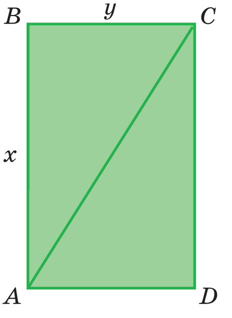


Fig. 111

$y = 14 - x$ i $x^2 + (14 - x)^2 = 100$,
$x^2 + 196 - 28x + x^2 = 100$, sau $2x^2 - 28x + 96 = 0$, atunci
$x^2 - 14x + 48 = 0$.

Soluţiile ecuaţiei sunt: $x_1 = 8$, $x_2 = 6$. Dacăo $x = 8$, atunci $y = 6$; dacă $x = 6$, atunci $y = 8$.

Răspuns. 8 cm şi 6 cm.

Problema 2. Un ciclist se mişcă cu o viteză mai mare cu 2 km/h decât altul, de aceea distanţa de 28 km el o parcurge cu 20 min mai repede decât al doilea. Aflaţi vitezele ambilor ciclişti.

Rezolvare. Fie vitezele cicliştilor (în kilometri pe oră) egale cu u şi v. Viteza primului este mai mare cu 2, de aceea avem ecuaţia: $u - v = 2$.

Deoarece primul ciclist distanţa de 28 km o parcurge în $\frac{28}{u}$, iar al doilea – în $\frac{28}{v}$ h şi primul o parcurge cu 20 min sau cu $\frac{1}{3}$ h mai repede, avem ecuaţia a doua:

$$\frac{28}{v} - \frac{28}{u} = \frac{1}{3}, \text{ abo } 84(u - v) = uv.$$

Rezolvăm sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} u - v = 2, \\ 84(u - v) = uv, \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} u - v = 2, \\ 168 = uv, \end{cases}$$

de unde $u(u - 2) = 168$, $u^2 - 2u - 168 = 0$.
Soluţiile ecuaţiei pătrate obţinute: $u_1 = 14$, $u_2 = -12$.
Valoarea –12 nu satisface condiţia problemei. Deci, $u = 14$, iar $v = 14 - 2 = 12$.

Răspuns. 14 km/h şi 12 km/h.

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

La rezolvarea problemelor cu parametri răspunsul se obţine în formă de expresie cu variabile. Rezolvarea completă a acestor probleme cere studierea: trebuie de indicat pentru care valori ale parametrilor problema are soluţie şi câte.

Problemă. Dintr-un port au plecat în acelaşi timp două motonave: una – spre sud, alta – spre vest. Peste 2 h distanţa dintre ele era egală cu 60 km. Aflaţi vitezele motonavelor, dacă viteza primei era cu a km/h mai mare decât viteza celei de a doua.

Rezolvare. Fie vitezele motonavelor respectiv egale cu x km/h şi y km/h. În două ore ele au parcurs (în direcţii perpendiculare una faţa de alta) respectiv $2x$ şi $2y$ km (fig. 105). După teorema lui Pitagora $4x^2 + 4y^2 = 60^2$, sau $x^2 + y^2 = 900$. În afară de această avem $x - y = a$.

Obţinem sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 900, \\ x - y = a. \end{cases}$$

Să-l rezolvăm. Din ecuaţia a doua aflăm $x = y + a$.
Substituind valoarea aceasta în prima ecuaţie, avem:
$(y + a)^2 + y^2 = 900$, $2y^2 + 2ay + a^2 - 900 = 0$.
Să rezolvăm ecuaţia pătrată referitor de y:

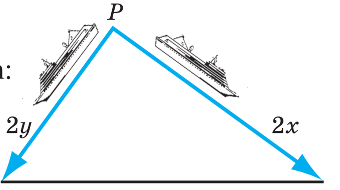


Fig. 112

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 2a^2 + 1800}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{1800 - a^2}}{2}.$$

Potrivit condiţiei problemei a şi y trebuie să fie pozitivi, de aceea este posibil numai un caz:

$$y = \frac{\sqrt{1800 - a^2} - a}{2}.$$

Dar trebuie să se îndeplinească condiţiile:

$$\begin{cases} a > 0, \\ 1800 - a^2 \geq 0, \\ \sqrt{1800 - a^2} > a, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} a > 0, \\ -30\sqrt{2} \leq a \leq 30\sqrt{2}, \\ -30 < a < 30. \end{cases}$$

Deci, problema o satisface numai o valoare a variabilei y:

$y = 0{,}5\left(\sqrt{1800 - a^2} - a\right)$, dacă $0 < a < 30$.

Atunci $x = y + a = 0{,}5\left(\sqrt{1800 - a^2} + a\right)$.

Răspuns. Dacă $0 < a < 30$, problema are o soluţie: $x = 0{,}5\left(\sqrt{1800 - a^2} + a\right)$ km/h şi $y = 0{,}5\left(\sqrt{1800 - a^2} - a\right)$ km/h. Dacă $a \leq 0$ sau $a \geq 30$, problema nu are soluţii.

Verificaţi-vă

1. Ce este problemă?
2. Ce probleme există?
3. Alcătuiţi trei modele diferite pentru problema: «Aflaţi două numere, suma cărora este 15, iar produsul lor 56».

Efectuăm împreună!

1 Aflaţi numărul de două cifre, care este de 4 ori mai mare decât suma cifrelor lui şi de 3 ori mai mare decât produsul lor.

- **Rezolvare**. Notăm cifrele zecilor şi unităţilor prin litere x şi y. Atunci numărul căutat este $10x + y$. Deoarece el este de 4 ori mai mare decât suma cifrelor, $10x + y = 4(x + y)$, de unde $6x = 3y$, sau $2x = y$.

Numărul $10x + y$ este de 3 ori mai mare decât produsul cifrelor, de aceea $10x + y = 3xy$. Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 2x = y, \\ 10x + y = 3xy. \end{cases}$$

Substituim valoarea lui y în ecuaţia a doua:
$10x + 2x = 3x \cdot 2x$, $12x = 6x^2$, de unde $x = 0$ sau $x = 2$.
Prima cifră a numărului de două cifre nu este 0. De aceea $x = 2$, iar $y = 2x = 4$.
Verificare. $24 = 4(2 + 4)$ şi $24 = 3 \cdot 2 \cdot 4$.
Remarcă. Deoarece aici x şi y sunt numere naturale, clarificând că $y = 2x$, se poate să nu rezolvăm sistemul, dar să probăm 12, 24, 36 şi 48. Problema o satisface numai numărul 48.

Răspuns. Numărul 48.

2 Perimetrele triunghiului echilateral şi a hexagonului regulat sunt egale, iar suma ariilor lor este egală cu $10\sqrt{3}$ m^2. Aflaţi ariile acestor poligoane.

● **Rezolvare.** Fie laturile căutate ale triunghiului şi hexagonului egale cu x şi y (fig. 113). Deoarece perimetrele sunt egale, $3x = 6y$, de unde $x = 2y$.

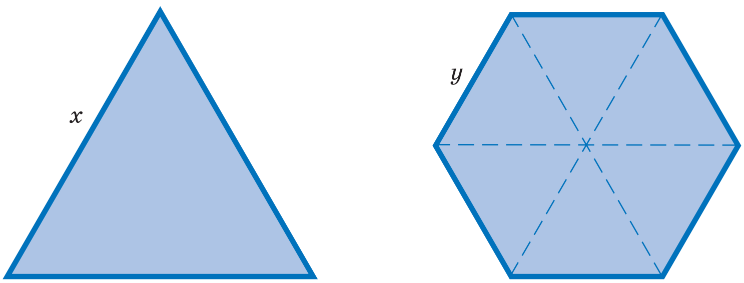


Fig. 113

Aria triunghiului echilateral cu latura x este egală cu $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Hexagonul regulat se compune din şase triunghiuri echilatelare cu latura y, de aceea aria lui este egală cu $6 \cdot \frac{y^2\sqrt{3}}{4}$. Avem sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x \quad 2y, \\ \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{y^2 \cdot 6\sqrt{3}}{4} = 10\sqrt{3}, \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = 2y, \\ x^2 + 6y^2 = 40. \end{cases}$$

Substituind în ecuaţia a doua valoarea $x = 2y$, obţinem ecuaţia $10y^2 = 40$, de unde $y^2 = 4$, iar $y = 2$. Atunci $x = 4$.

Răspuns. 4 m şi 2 m.

Efectuati oral

555. ***Problemă deschisă.*** Compuneţi o problemă care ar avea ca model matematic sistemul de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=40; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=7, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$

Nivelul A

556. Aflaţi două numere, suma cărora este egală cu 21, iar produsul este 90.

557. Aflaţi două numere, diferenţa cărora este egală cu 1,1, iar produsul este 0,6.

558. Aflaţi două numere, suma cărora este egală cu 31, iar suma pătratelor lor este 625.

559. Media geometriă a două numere este egală cu 3. Aflaţi aceste numere, dacă unul din ele este mai mare decât al doilea cu 9,1.

560. Perimetrul triunghiului dreptunghic este 90 cm, iar ipotenuza este 41 cm. Aflaţi catetele triunghiului.

561. Aflaţi două numere, dacă:

a) diferenţa lor este egală cu 2, iar diferenţa pătratelor cu 88;
b) semisuma lor este egală cu 9,5, iar suma pătratelor lor 185;
c) suma lor este egală cu 20, iar produsul cu 84.

562. Aflaţi catetele triunghiului dreptughic, care are:

a) ipotenuza egală cu 13 dm, iar aria cu 30 dm^2;
b) perimetrul egal cu 30 cm, iar suma catetelor cu 17 cm;
c) ipotenuza egală cu 17 cm, iar perimetrul cu 40 cm.

563. Aflaţi laturile dreptunghiului, diagonala căruia este egală cu 10 m, iar aria cu 48 m^2.

564. Aflaţi catetele triunghiului dreptunghic, dacă una din ele este mai mică decât ipotenuza cu 2 cm, iar a doua cu 25 cm.

565. Conturul interior şi cel exterior al unei rame sunt pătrate. Latura unuia din ei este egală cu diagonala celuilalt (fig. 114). Aflaţi laturile acestor pătrate, dacă aria ramei este egală cu 32 cm^2.

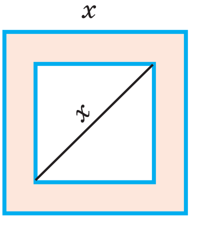


Fig. 114

566. Aflaţi raza interioară şi cea exterioară ale unui inel, dacă diferenţa lor este egală cu 5 cm, iar aria inelului cu 125π cm^2 (fig. 115).

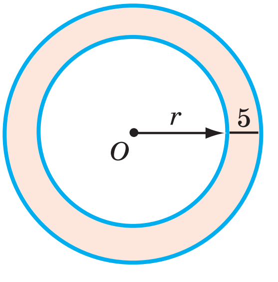


Fig. 115

567. Aflaţi lungimile muchiilor unui paralelipiped dreptunghic, dacă lungimea uneia din ele, aria suprafeţei şi volumul paralelipipedului sunt egale respectiv cu 8 cm, 158 cm^2 şi 120 cm^3.

568. Un combiner poate recolta grâul de pe un lot cu 24 h mai repede decât altul. Dacă combinerii vor lucra împreună, atunci pot termina lucrul în 35 h. În câte ore poate recolta toată roada fiecare combiner?

569. ***Problema lui Luca Pacioli.*** Suma pătratelor a două numere este egală cu 20, iar produsul cu 8. Aflaţi numerele.

570. Numărătorul fracţiei ordinare ireductibile este cu 3 mai mic decât numitorul, iar dacă la ambii membrii ai ei vom aduna 10, valoarea fracţiei se va mări de două ori. Care este fracţia aceasta?

Nivelul B

571. Un automat confecţionează piese identice. Dacă el va confecţiona în fiecare minută cu o piesă mai mult, atunci 720 de piese va confecţiona cu 1 h mai repede. Câte piese confecţionează automatul într-o oră?

572. O comandă de a produce 150 de maşini uzina trebuia să o execute în câteva zile. Însă, producând zilnic cu 2 maşini mai mult decât se prevedea, cu 2 zile înainte de termen uzina nu numai că a executat comanda deplin, dar a produs încă 6 maşini în plus. În câte zile uzina trebuia se execute comanda?

573. O uzină trebuia să producă un lot de strunguri în câteva zile. Supraîmplinind sarcina zilnică cu 9 strunguri, cu 3 zile înainte de termen ea a produs 588 de strunguri, ce alcătuieşte 98 % din comandă. Câte strunguri producea zilnic uzina?

574. O echipă de muncitori forestieri trebuia să pregătească în câteva zile 216 m^3 de lemne. Primele trei zile ea a lucrat cum se prevedea, iar apoi pregătea zilnic cu 8 m^3 mai mult şi de aceea deja cu o zi înainte de termen a pregătit 232 m^3 de lemne. Câţi metri cubi de lemne pregătea zilnic echipa?

575*. O ţeavă poate umple un bazin cu apă cu 36 min mai repede decât alta. Dacă la început jumătate de bazin va umple o ţeavă, iar apoi restul a doua, el se va umple cu jumătate de oră mai târziu decât va umple ambele pompe lucrând împreună. În câte minute fiecare pompă umple bazinul cu apă?

576. ***Din «Manual de matematică» (a. 1813) pentru şcolile militare franceze*.** Suma a trei laturi ale unui triunghi dreptunghic este egală cu 156 m, iar aria cu 1014 m^2. Aflaţi laturile lui.

577. Un tren trebuia să parcurgă drumul de la staţia *A* pâna la staţia *B* în 4 h. Însă la distanţă de 150 km de la staţia *A* el a fost reţinut 20 min. Pentru a sosi în *B* după orar el restul distanţei a parcurs cu o viteză mai mare decât cea iniţială cu 15 km/h. Aflaţi distanţa de la *A* până la *B*.

578. Un motociclist a parcurs distanţa dintr-un sat până la oraş în 5 h. La întoarcere primii 36 km el se deplasa cu aceeaşi viteză, iar restul drumului (partea cea mai mare) – cu o viteză mai mare cu 3 km/h şi de aceea la întoarcere el a folosit cu 15 min mai puţin. Cu ce viteză se mişca motociclistul spre oraş?

579. Drumul dintre satele *A* şi *B* constă dintr-un urcuş şi coborâş. Un ciclist, mişcându-se pe coborâş cu o viteză cu 6 km/h mai mare decât pe urcuş, drumul de la *A* până la *B* îl parcurge în 2h 40 min, iar de la *B* la *A* – cu 20 min mai repede. Să se afle viteza ciclistului pe urcuş şi pe coborâş şi lungimea urcuşului de la *A* la *B*, dacă distanţa de la *A* până la *B* este egală cu 36 km.

580. O motonavă în 9 h a parcurs 100 km după curentul apei râului şi 64 km contra curentului apei. Altă dată în acelaşi timp ea a parcurs 80 km după curentul apei şi 80 km – contra curentului. Aflaţi viteza proprie a motonavei şi viteza curentului de apă.

581. Viteza unui avion este cu 100 km/h mai mare decât viteza altuia, de aceea primul parcurge distanţa de 980 km cu 0,4 h mai mult, decât al doilea distanţa de 600 km. Aflaţi vitezele avioanelor.

582. De la cheiul *A* a plecat o plută după curentul apei râului. Peste 3 h de la cheiul *B*, care se află la o distanţă de 60 km de *A*, a plecat o motonavă care a sosit în *A* peste 1 h după întâlnirea cu pluta. Aflaţi viteza curentului de apă, dacă viteza motonavei în apă stătătoare este egală cu 24 km/h.

583. Dintr-un sat spre oraş situat la o distanţă de 20 km a plecat un ciclist, iar peste 15 min din urmă altul. Ajungându-l pe primul, ciclistul al doilea s-a întors şi a revenit în sat cu 45 min înaintea sosirii primului ciclist în oraş. Aflaţi viteza primului ciclist, dacă al doilea se mişca cu viteza de 15 km/h.

584. Din punctul *A* în acelaşi timp şi în aceeaşi direcţie au plecat doi ciclişti cu vitezele de 18 km/h şi 24 km/h. Peste 1 h după ei a plecat un automobil care le-a ajuns la început pe un ciclist, iar peste 10 min şi pe al doilea. Aflaţi viteza automobilului.

585. Din punctul *A* spre *B*, distanţa dintre care este de 90 km, a plecat un ciclist cu viteza de 12 km/h. Peste jumate de oră din *A* spre *B* a plecat alt ciclist cu viteza de 15 km/h. În acelaşi timp din *B* în direcţia lui *A* a plecat un motociclist care a întâlnit la început pe primul ciclist, iar peste 2 min pe al doilea. Aflaţi viteza motociclistului.

Exerciţii pentru repetare

586. Pe masă într-un rând sunt patru figuri: triunghi, cerc, hexagon şi romb. Ele sunt vopsite în diferite culori: roşie, albastră, galbenă şi verde. Se ştie că în dreapta de figura galbenă este rombul; cercul este situat la dreapta de triunghi şi romb; figura roşie se află între albastră şi verde; triungiul nu este la marginea mesei; figurile albastră şi galbenă nu sunt alături. Determinaţi în ce ordine sunt amplasate figurile şi de ce culoare ele sunt.

587. Construiţi graficul funcţiei $y=\dfrac{12}{x-3}$.. Aflaţi coordonatele punctelor de intersecţie acestui grafic cu graficele ecuaţiilor $3y - x + 3 = 0$, $y - 3x + 9 = 0$ şi $x^2 - 6x + y^2 = 16$.

588. Folosind rezultatele problemei Nr. 587, stabiliţi corespondenţa dintre abscisele punctelor aflate şi ordonatele lor respective care sunt date în tabel împreună cu litere. Amplasaţi abscisele (împreună cu litere respective) în ordine descrescătoare şi veţi afla denumirea oraşului, unde este situată universitatea în care a lucrat M.M.Bogoliubov şi pe faţada căruia este instalată placa memorială consacrată lui (fig. 116).

−6	6	−4	4	−3	3	−2	2
І	Н	С	Р	Ц	Е	І	Ч

Demonstraţi identităţile (**589–590**).

589. $4a^4 + 1 = (2a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 2a + 1)$.

590. $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$.

591. Aduceţi la forma cea mai simplă expresiile:

a) $\dfrac{1}{(a+c)^2}+\dfrac{1}{a^2-c^2}-\dfrac{1}{(a-c)^2}$;

b) $\dfrac{a+2c}{3a-3c}-\dfrac{3c-a}{2a-2c}+\dfrac{a^2-c^2}{(a-c)^2}$.

592. Aflaţi valoarea funcţiei $y = 1 - x^2$ pentru primele 5 numere naturale.

Fig. 116

Comoara succeselor

✓ Înţeleg, că sistemul de două ecuaţii de gradul al doilea cu două variabile poate fi modelul matematic al problemelor aplicative.

✓ Ştiu a rezolva probleme prin compunerea sistemelor de ecuaţii.

SARCINI PENTRU LUCRUL INDEPENDENT

Varianta I

1°. Construiţi graficul funcţiei a) $y = –x^2$; b) $y = 2 + \sqrt{x}$.

2°. Rezolvaţi inecuaţia $x^2 – 2x < 0$.

3•. Aria dreptunghiului este egală cu 180 cm^2, iar perimetrul cu 54 cm. Aflaţi laturile dreptunghiului.

4•. Construiţi graficul funcţiei $y= x^2 – 2x – 3$, studiaţi-o.

Varianta II

1°. Construiţi graficul funcţiei a) $y = -\sqrt{x}$; b) $y = x^2 –4$.

2°. Rezolvaţi inecuaţia $2x – x^2 < 0$.

3•. Lungimea ipotenuzei triunghiului dreptunghic este egală cu 61 cm. Aflaţi lungimea catetelor triunghiului, dacă aria lui este 330 cm^2.

4•. Construiţi graficul funcţiei $y= x^2 + 2x – 3$, studiaţi-o.

Varianta III

1°. Construiţi graficul funcţiei: a) $y = x^{–1}$; b) $y = x^2 + 2$.

2°. Rezolvaţi inecuaţia $x^2 + 3x \le 0$.

3•. Suma ariilor a două pătrate este egală cu 65 m^2, iar suma perimetrelor cu 44 m. Aflaţi laturile pătratelor.

4•. Construiţi graficul funcţiei $y= 4x – x^2$, studiaţi-o.

Varianta IV

1°. Construiţi graficul funcţiei a) $y = –x^3$; b) $y = 4 – x^2$.

2°. Rezolvaţi inecuaţia $x^2 – 4x \ge 0$.

3•. Aria dreptunghiului este egală cu 120 cm^2, iar perimetrul cu 46 cm. Aflaţi laturile şi diagonala dreptunghiului.

4•. Construiţi graficul funcţiei $y= x^2 – 5x + 4$, studiaţi-o.

DATE ISTORICE

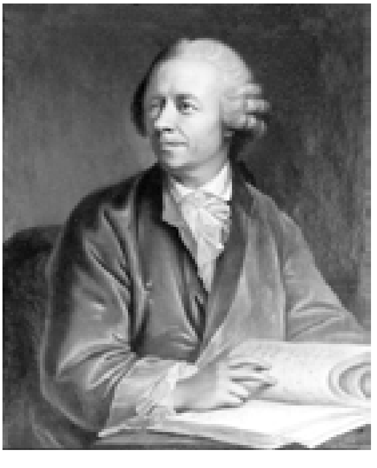
Funcţia este una din cele mai importante noţiuni ale matematicii contemporane. Ea s–a format şi s–a îmbogăţit în decursul multor secole. Savanţii babilonieni au calculat tabelele pătratelor şi cuburilor încă cu 4 000 de ani în urmă. Dar aceasta este funcţia definită în formă de tabel. Arhimede a stabilit dependenţa ariei cercului şi ariei suprafeţei sferei de razele lor. Dar egalităţile $S = \pi r^2$ şi $S = 4\pi r^2$ definesc funcţii.

Gotfrid Leibniz
(1707 – 1783)

În secolele XVI – XVII defuncțiile se defineau verbal, grafic sau cu ajutorul tabelelor. Abia P. Fermat şi R. Descartes au demonstrat, cum de definit dependenţa dintre variabile cu ajutorul ecuaţiilor. Pentru reprezentarea grafică a difertor dependenţe, ei au aplicat sistemul de coordonate.

Termenul «funcţie» l-a folosit pentru prima dată matematicianul neamţ **Gotfrid Leibniz** (din 1673 – în manuscrise, iar din 1692 – în publicări). Simbolurile de notare generală a funcţiei $f(x)$ şi $y = g(x)$ a introdus în a. 1734 matematicianul elveţian **Leonardo Euler** .

Chiar şi după apariţia cuvântului «funcţia» noţiunea corespunzătoare cu timpul se schimba. G. Leibniz numea funcţii lungimele segmentelor care se schimbau în dependenţă de variaţia lungimilor altor segmente. L.Euler numea funcţie expresia alcătuită din variabile şi numere. De exemplu, expresia $3x + 5$ este funcţie de variabila x, fiindcă valoarea expresiei date depinde de valorile lui x. Matematicianul ceh B. Bolzano (1781–1848) a extins şi mai mult noţiunea de funcţie, el sub funcţie înţelegea orice dependenţă a unei mărimi de alta.



Leonardo Euler
(1707 – 1783)

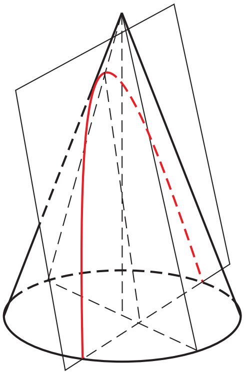
Mai târziu majoritatea matematicienilor sub funcţie pricepeau o mărime variabilă dependentă, alţii – corespondenţa dintre mulţimile numerelor sau relaţia (corelaţia) dintre elementele mulţimilor arbitrare.

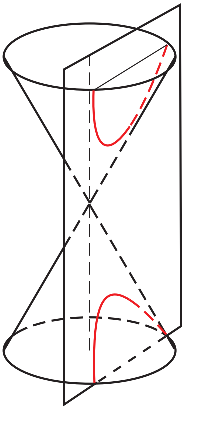
Definiţia actuală a funcţiei în forma cea mai generală a fost propusă în sec. XX de o grupă de matematicieni, care se prezenta sub pseudonimul N. Bourbaki: «Funcţia este relaţia la care fiecărui element din domeniul de expediere îi corespunde exact un element din domeniul sosirii». Sub domeniul de expediere (domeniul de defniţie al funcţiei), domeniul de sosire (codomeniul ei) se consideră orice mulţimi, nu numai cele numerice.

Deci, în diferite timpuri cu cuvântul «funcţie» numeau uneori lungimea segmentului, uneori expresia cu variabile, uneori valoarea variabilă, uneori dependenţa dintre mărimi, uneori corespondenţa dintre valorile mărimilor, uneori relaţia dintre elementele a două mulţimi.

În şcoala de bază se studiază numai cele mai importante şi mai simple exemple de funcţii. Ceva mai târziu veţi face cunoştinţă şi cu alte clase de funcţii: putere, exponenţiale, logaritmice, trigonometrice, etc. Savanţii studiază şi funcţii cu două, trei şi mai multe variabile.

Denumirile «parabolă», «hiperbolă» le-a introdus matematicianul din Grecia Antică Apollonios (sec. III p. e. n.). El examina aceste curbe ca liniile de intersecţie ale suprafeţei conice cu un plan.





În matematica contemporană se examinează multe şi diferite tipuri de funcţii. Ele se studiază detaliat în discipline separate ale matematicii: analiza matematică şi teoria funcţiilor. În aceste domenii cu succes au lucrat şi matematicienii ucraineni M. V. Ostrogradski, M. P. Cravciuk,

S. N. Bernştein, E. Ia. Remez, G. M. Fihtengolţ, M.G.Grein, M. I. Şkili şi alţi.

Esenţialul în capitol

Funcţia este corespondenţa la care fiecărei valori a variabilei x dintr-o mulţime D îi corespunde o singură valoare a variabilei y. Mulţimea D se numeşte *domeniul de definiţie*, iar mulţimea tuturor valorilor respective ale variabilei y este *codomeniul* funcţiei date. Dacă y este funcţiei de x, se scrie $y = f(x)$.

$y = ax^2 + bx + c$ este o funcţie de gradul al doilea ($a \neq 0$, b, c – numere arbitrare, iar x – argument).

Graficele funcţiilor $y = ax^2 + bx + c$, $y = ax^2 + bx$, şi $y = ax^2$ sunt parabole identice care se pot suprapune la o translaţie.

Zerourile funcţiei sunt valorile argumentului ei, pentru care valoarea funcţiei este egală cu zero. Intervalale din domeniul de definiţie, pe care funcţia nu-şi schimbă semnul (adică are numai valori pozitive sau numai negative), se numesc *intervale cu semn constant*. Funcţia se numeşte *crescătoare* (sau *descrescătoare*) pe intervalul dat, dacă fiecărei valori mai mari a argumentului din acest interval îi corepunde valoarea mai mare (mai mică) a funcţiei.

Funcţia $y = f(x)$ se numeşte *pară,* dacă domeniul ei de definiţie este simetric faţă de zero şi pentru toate valorile argumentului $f(–x) = f(x)$.

Funcţia $y = f(x)$ se numeşte *impară,* dacă domeniul ei de definiţie este simetric faţă de zero şi pentru toate valorile argumentului $f(–x) = –f(x)$.

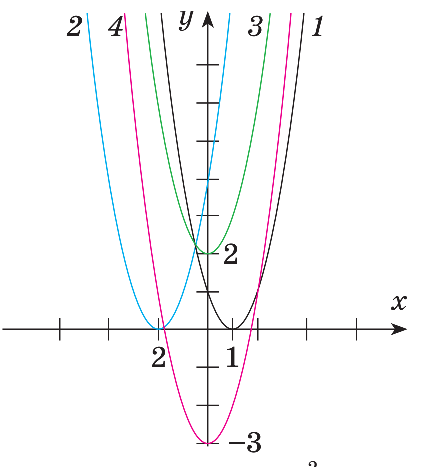
Există funcţii care nu sunt nici pare, nici impare.

Dacă este cunoscut graficul funcţiei $y = f(x)$, atunci cu ajutorul transformărilor geometrice se poate obţine graficele funcţiilor $y = –f(x)$, $y = f(x – a)$, $y = f(x) + b$.

De exemplu, pe figură este arătat, cum cu ajutorul transformărilor şi graficului funcţiei $y = x^2$ se pot obţine graficele funcţiilor

$y = (x – 1)^2$, $y = (x + 2)^2$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 – 3$.

Inecuaţie de gradul al doilea se numeşte fiecare inegalitate de forma $ax^2 + bx + c * 0$, unde a, b, c sunt numere date, x — variabila, iar $*$ — un semn oarecare al inegalităţii: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$. Rezolvând aşa inecuaţii, este bine de imaginat, cum este situat graficul funcţiei $y = ax^2 + bx + c$ faţă de axa x.



1 — $y = (x - 1)^2$
2 — $y = (x + 2)^2$
3 — $y = x^2 + 2$
4 — $y = x^2 - 3$

Clarificăm succesele

Sarcini în formă de test nr. 2

1 R este domeniul de definiţiei al funcţiei:

a) $y=\sqrt{x+1}$; b) $y = 2x^{-1}$; c) $y = -x^2$; d) $y=x^{\frac{1}{2}}$.

2 Codomeniul funcţiei $y = x^2 - 2x - 1$ este intervalul:
a) $(-\infty; -2)$; b) $(1; \infty)$; c) $[1; 2)$; d) $[-2; \infty)$.

3 Pe intervalul $(0; \infty)$ crescătoare este funcţia:
a) $y = -5x$; b) $y = 2 - x^2$; c) $y = 3x^{-1}$; d) $y=\sqrt{x}-1$.

4 Câte zerouri are funcţia $y = x(x^2 + 2)(x + 4)$:
a) unul; b) două; c) trei; d) patru?

5 Parabola este graficul funcţiei:
a) $y = x^{-2}$; b) $y = x - 3x^2$; c) $y = 2x$; d) $y=\sqrt{x}$.

6 Soluţia inecuaţiei $x^2 + 2x + 3 > 2$ este intervalul:
a) $(-\infty; -3)$; b) $(-\infty; -1)\cup(-1; \infty)$; c) $(1; 2)$; d) R.

7 Simetric faţă de punctul (0; 0) este graficul funcţiei:
a) $y = x^{-2}$; b) $y = 3x^2$; c) $y = 2x$; d) $y=\sqrt{x}$.

8 Soluţia sistemului de ecuaţii $\begin{cases} y=x^2+4, \\ 4x+y=0 \end{cases}$ este punctul:
a) $(-8; -2)$; b) $(8; 2)$; c) $(4; 2)$; d) $(-2; 8)$.

9 Pară este funcţia:
a) $y=\sqrt{x}$; b) $y = 2x$; c) $y = 3x^2$; d) $(x - 2)^2$.

10 Funcţia $y = 2x - x^2$ obţine cea mai mare valoare, dacă:o:
a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x = 2$; d) $x = -2$.

Sarcini-tip pentru lucrarea de control nr. 2

1° Construiţi graficul funcţiei $y = 2x + 3$. Aflaţi domeniul de definiţie şi codomeniul ei. Stabiliţi zerourile funcţiei şi intervalele cu semnul constant.

2° Funcţia este definită prin formula $f(x) = (2x + 3)^2$. Aflaţi:
a) $f(0)$; b) $f(-4)$; c) $f(3{,}5)$.

3 Construiţi graficul şi studiaţi proprietăţile funcţiei:
a°) $y = -x^2 + 1$; b•) $y = (x + 1)^2 - 4$.

4 Rezolvaţi inecuaţia:
a°) $(x + 5)(x - 3) > 0$; b•) $-5x^2 + 3x + 2 \le 0$.

5• Construiţi graficul funcţiei:
a) $y = x^2 + 4x + 3$; b) $y = |6x - x^2 - 5|$.

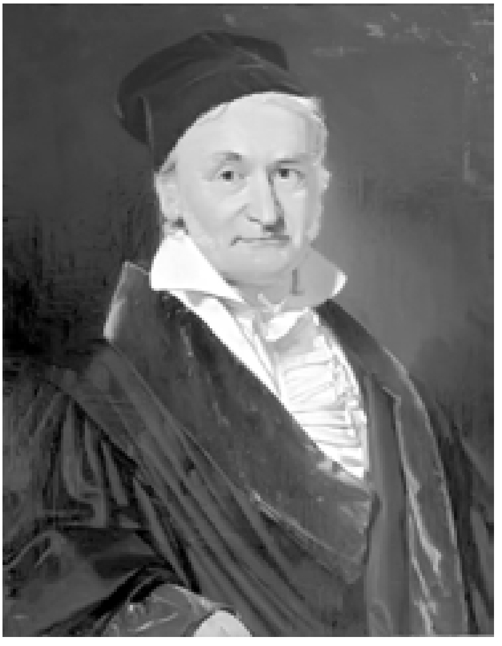
6 Rezolvaţi grafic sistemul de ecuaţii:
a°) $\begin{cases} x^2 + y = 1, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$ b•) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ x^2 - y + 2 = 0. \end{cases}$

7• Rezolvaţi sistemul de ecuaţii:
a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ 3x - y + 1 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - xy - 3 = 0, \\ x^2 - xy + 2 = 0. \end{cases}$

8• Dacă un număr de două cifre v-a fi împărţit la suma cifrelor, încât vom obţine 8 şi în rest v-a fi 5, iar dacă îl v-a împărţi la produsul cifrelor, încât vom obţine 10 şi în rest va fi 1. Aflaţi acest număr.

9•• Rezolvaţi inecuaţia:
a) $(x + 5)^2(x - 3)(1 + x) > 0$; b) $\dfrac{x^3 - 16x}{x^3 - 5x^2 + 4x} \le 0$.

10•• Aflaţi pentru care valori c ecuaţia $(c + 1)x^2 + (3c - 2)x - c = 0$ are două soluţii reale diferite.



Capitolul 3

Gauss
Iogann Karl Friedrich
(1777 – 1855)
Matematician, astronom,
fizician geodezian german.
unul din cei mai mari
şi cu cel mai mare prestigiu din toţi
matematicienii din toate timpurile.
Trăsăturile caracteristice ale cercetărilor
lui Gauss sunt variaţia lor uimitoare
şi legătura organică dintre teorie şi
matematica aplicativă.
Laureat al medaliei Copley (cea mai înaltă
distincţie anuală a societăţii
Regale din Mare Britanie) (1838).

„Nimic nu este făcut, dacă ceva a rămas neterminat”.
„ Matematicienii stau unul pe umerii altuia”.
„ Astronomia şi matematica pură sunt polii magnetici, spre care veşnic se întoarce busola raţiunii mele”
„Matematica este regina ştiinţelor şi aritmetica – regina matematicii”
K.F.Gauss

Premiul lui Gauss
este acordat de asociaţia Internaţională a matematicienilor şi societatea matematicienilor din Germania o dată în 4 ani, la congresul matematicienilor, pentru realizări remarcabile în domeniul matematicii
aplicative.

Scopul premiului – stimularea matematicienilor, care favorizează progresul în alte domenii diferite de matematică, incluzând tehnologii, afaceri şi viaţa de toate zilele.
A fost fondată la 30 aprilie anul 2002 în ziua aniversării a 225-a de la ziua naşterii lui Gauss.

Laureaţii premiului
Kiioi Itos
Iv Meyer
Stenli Oşer

Şiruri numerice

Şir este o mulţime de obiecte, amplasate într-o anumită ordine. Dacă termenii şirului sunt numere, atunci el se numeşte *şir numeric*. Cele mai simple şi mai importante exemple de şiruri numerice: progresia aritmetică şi progresia geometrică.

Studiind acest capitol, veţi putea observa frumuseţea corelaţiilor matematice în diferite tipuri de şiruri şi procedeele definirii lor, în dependenţe şi legităţi neprevăzute, în figuri stranii şi procedeele construirii lor, etc.

În capitolul dat vom studia astfel de teme:

§ 15 Şir — Succession

§ 17 Progresie geometrică — Geometric Progression

§ 16 Progresie aritmetică — Arithmetic Progression

§ 18 Probleme de calcul ale sumelor — Sums Calculation Tasks

Proiectul de învăţământ Nr. 3
„Aplicarea matematicii"

Aplicăm cunoştinţele obţinute

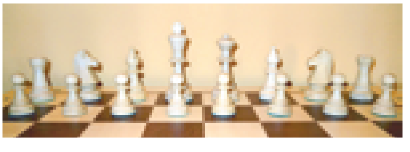
Pentru a înţelege şi a însuşi bine tema nouă, ne amintim:
– Ce se numeşte funcţie şi domeniul ei de definiţie.
– Care funcţii se numesc crescătoare, iar care – descrescătoare.
– Cum de aflat valoarea funcţiei într-un punct.
– Care numere sunt naturale.

Primele zece numere naturale 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Cel mai mic număr natural este 1.

Numere pare (se împart la 2 fără rest)	Numere impare
2, 4, 6, 8, 10, ...	1, 3, 5, 7, 9,11, ...

§ 15 Şir

Să ne închipuim o continuitate de evenimente sau fenomene, ordinea plasării obiectelor, sunetelor, culorilor, etc. – asta şi este şir. Amintiţi-vă, cum sunt aşezate piesele pe tabla de şah (fig. 117, *a*) şi notele muzicale (fig. 117, *b*). Se poate vorbi şi despre lunile anului, zilele săptămânii, literele în cuvânt, numele în listă, vagoanele în tren, staţiile căiilor ferate, etc.



a

b

Fig. 117

Degetele mâinii omului tot sunt aranjate într-o anumită ordine: mare, arătător, mijlociu, inelar, mezin. Şi liniuţele codului, care este pe scoarţa acestei cărţi, sunt duse într-o anumită ordine. Ce înseamnă ele? Pentru ce ele trebuie?

Acest paragraf ne va ajuta să ne îmbogățim cunoștințele despre șiruri în matematică și să facem cunoștință cu proprietățile lor.

Să ne imaginăm, că în rând sunt scrise toate numerele naturale pare:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ...

Acesta este *şirul* de numere naturale pare. Numărul 2 este primul termen al lui, 4 – al doilea, 6 – al treilea, 20 – al zecelea şi a.m.d.

Exemple de şiruri numerice:
1, 2, 3, 4, 5, ... – şirul numerelor naturale;
1, 3, 5, 7, 9, ... – şirul numerelor naturale impare;
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$ – şirul de numere inverse celor naturale.

Şirurile pot fi ***finite*** şi ***infinite***. De exemplu, este finit şirul numerelor naturale de o cifră:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Şirul tuturor numerelor naturale este infinit. Scriind şirul infinit, după câţiva termeni ai lui se pun trei puncte.

Primul, al doilea, al treilea termeni ai şirului de numere naturale pare sunt 2, 4, 6. Se scrie: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$. Dar cu ce este egal termenul al n-lea a_n? Deoarece fiecare termen al şirului numerelor naturale pare este de două ori mai mare decât numărul lui de ordin, termenul al n-lea este egal cu $2n$, adică

$$a_n = 2n.$$

Aceasta este formula termenului al n-lea al şirului numerelor naturale pare.

Formula termenului al n-lea al şirului numerelor naturale impare :

$$a_n = 2n - 1.$$

Această formulă este asemănătoare cu formula $y = 2x - 1$, care defineşte funcţia liniară. În ultima formulă x poate primi orice număr real, iar în formula $a_n = 2n - 1$ variabila n poate primi numai valori naturale. Fiecare termen al şirului corespunde unui număr natural – numărului de ordin al termenului şirului. De aceea **şirul numeric este o funcţie definită pe mulţimea numerelor naturale sau pe mulţimea primelor *n* numere naturale.** Dacă funcţia este definită pe mulţimea tuturor numerelor naturale, atunci avem un şir numeric infinit; dacă funcţia este definită pe mulţimea primelor n numere naturale, atunci ea este un şir finit care are n termeni.

Dacă este cunoscută formula termenului al n-lea al şirului, atunci este simplu de calculat orice termen al ei. Să scriem câţiva din primii termeni ai şirului, care are termenul al n-lea $a_n = n^2 + 2$. Înlocuind variabila n cu valorile 1, 2, 3, 4, 5, ... , obţinem primii termeni ai şirului:

$$3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, ...$$

Termenul al miilea al acestui şir:

$$a_{1000} = 1000^2 + 2 = 1\,000\,002.$$

Cu mult mai dificilă este problema inversă: pentru şirul dat de aflat termenul al n-a. De exemplu, formula termenului al n-lea al şirului de numere prime 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... până în prezent nu este cunoscută, deşi matematicienii o caută mai mult de 2 000 de ani.

Câţiva din primii termeni ai şirului nu îl definesc univoc. De exemplu, există multe şiruri care au primii termeni 2, 4, 6, 8.

primii termeni ai şirurilor care au termenul al n-lea

$$a_n = 2n \text{ şi } c_n = 2n + (n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4).$$

Din doi termeni vecini a_i şi a_{i+1} ai şirului termenul a_{i+1} se numeşte ***următorul*** lui a_i, iar a_i este ***precedentul*** lui a_{i+1}.

Şirul se numeşte *crescător,* dacă fiecare termen al lui, începând cu al doilea, este mai mare decât precedentul. Şirul se numeşte *descrescător,* dacă fiecare termen al lui, începând cu al doilea, este mai mic decât precedentul.

Remarcă. Uneori se examinează şi şiruri, care au ca termeni expresii, funcţii, figuri, etc.

În continuare vom studia numai *şirurile numerice*, deseori le vom numi scurt şiruri.

Şirurile numerice uneori se definesc cu ajutorul formulelor recurente (de la cuvântul latin *recurrentis* – acel, care se întoarce). Formula se numeşte recurentă, dacă ea indică cum se exprimă orice termen al şirului prin câţiva termeni precedenţi.

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

De exemplu, formula $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ este recurentă, deoarece ea afirmă că fiecare termen al şirului (începând cu al doilea) este egal cu suma a doi termeni care îl precedă. Formula aceasta şirul nu-l determină, fiindcă sunt necunoscuţi primii doi termeni ai lui. Dacă în afară de formulă sunt indicaţi şi primii doi termeni, atunci şirul se poate considera complet definit.

Definim prin formula recurentă şirul care are primul şi al doilea termeni 1, iar fiecare următor este egal cu suma a doi termeni precedenţi. Acest şir poate fi definit cu egalităţile:

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

Aplicând această formulă, se poate determina consecutiv al treilea, al patrulea şi ceilalţi termeni ai şirului:

$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2,$

$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3,$

$a_5 = a_3 + a_4 = 3 + 3 = 5, \dots$.

Avem şirul: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

El se numeşte *şirul Fibonacci,* deoarece primul a studiat şi a descris proprietăţile lui în tractatul „Cartea despre abac” (1202) Leonardo Pisano (Fibonacci).

Formula termenului al *n*-lea ca funcţie de *n* pentru acest şir a descoperit-o G. Binet abia în sec. XIX (vezi problema 617).

Verificaţi-vă

1. Daţi exmple de şiruri numerice.
2. Formulaţi definiţia şirului numeric.

3. Ce fel de şiruri numerice există?
4. Care şiruri se numesc finite?
5. Care şiruri se numesc crescătoare? Dar care descrescătoare?

Efectuăm împreună

1 Continuaţi şirul pătratelor numerelor naturale:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ldots.$$

- **Rezolvare.** Fiecare termen al şirului dat este egal cu pătratul numărului lui: primul – cu pătratul numărului 1, al doilea – cu pătratul numărului 2 şi a.m.d. De aceea termenul al şaselea este egal cu 6^2, al şaptelea – 7^2, al optelea – 8^2 şi a.m.d. Deci, avem şirul:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ \ldots.$$

2 Aflaţi termenul al patruzecelea al şirului definit prin formula::

a) $a_n = 3n - 2$; b) $a_n = (-1)^n$; c) $a_n = n - (-1)^{n-3}$.

- **Rezolvare.** a) $a_{40} = 3 \cdot 40 - 2 = 120 - 2 = 118$;
  b) $a_{40} = (-1)^{40} = 1$;
  c) $a_{40} = 40 - (-1)^{37} = 40 + 1 = 41$.

Răspuns. a) 118; b) 1; c) 41.

3 Determinaţi cu care număr toţi termenii şirului, definit prin formula $c_n = n^2 + n$, sunt mai mari decât 100.

- **Rezolvare.** Dacă $n^2 + n > 100$, atunci $n^2 + n - 100 > 0$.

Rezolvăm această inecuaţie de gradul al doilea.

$D = 1 + 400$. Deoarece se cer numai numerele naturale (deci, pozitive) ale lui n, iar soluţia pozitivă este $n = \dfrac{-1+\sqrt{401}}{2} \approx 9{,}5$, atunci numărul, care satisface condiţia, trebuie să fie mai mare decât 9.

Răspuns. Începând cu termenul al zecelea.

4 Stabiliţi, dacă este crescător sau descrescător şirul definit prin formula $a_n = 1 - 2n^2$.

- **Rezolvare.** Luăm orice doi termeni consecutivi ai şirului, aflăm diferenţa lor şi stabilim semnul ei:

$$a_p = 1 - 2p^2;\ a_{p+1} = 1 - 2(p+1)^2;$$
$$a_{p+1} - a_p = 1 - 2(p+1)^2 - (1 - 2p^2) =$$
$$= 1 - 2p^2 - 4p - 2 - 1 + 2p^2 = -(4p + 2).$$

Pentru valorile naturale ale lui p expresia $4p + 2$ primeşte numai valori pozitive. De aceea, $a_{p+1} - a_p < 0$ pentru toate valorile naturale ale lui p. Deci, pentru orice număr p se realizează condiţia $a_{p+1} < a_p$. Şirul dat este descrescător, deoarece în el fiecare termen următor este mai mic decât cel precedent.

Răspuns. Şirul este descrescător.

Efectuaţi oral

593. Numiţi primii 5 termeni ai şirului de numere inverse numerelor naturale.

594. Numiţi primii 5 termeni ai şirului de numere prime.

595. Continuaţi şirul numerelor naturale:
a) care se divid cu 3: 3, 6, 9, 12, ... ;
b) care se divid cu 5: 5, 10, 15, ... ;
c) care nu se divid cu 3: 1, 2, 4, 5, 7, ...;
d) în care fiecare este mai mare cu 3 decât precedentul: 1, 4, 7, ...

596. Examinaţi şirurile:
a) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, ... ;
b) 1, –1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, ... ;
c) 5, 55, 555, 5555, 55555, 555555, ...
Indicaţi pentru fiecare şir următorii termeni: 1) al doilea, al cincilea şi al şaptelea; 2) următorul după al treilea; 3) precedentul lui şapte; 4) care se conţin între al doilea şi al şaselea.

597. Care termen al şirului $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, ...$ este:
a) următorul după $x_3, x_7, x_{39}, x_{121}, x_{n+1}, x_{3n}$;
b) precedentul lui $x_5, x_{71}, x_{99}, x_{123}, x_{n+1}, x_{3n}$?

Nivelul A

598. . Finit sau infinit sunt şirurile:
a) numerelor naturale;
b) numerelor opuse celor naturale;
c) fracţiilor regulate cu numitorul 10;
d) fracţiilor neregulate cu numitorul 10;
e) fracţiilor regulate cu numărătorul 10;
f) fracţiilor neregulate cu numărătorul 10;
g) numerelor de două cifre;
h) cifrelor în înscrierea zecimală a numărului π?
Scrieţi primii cinci termeni ai fiecărui şir.

599. Scrieţi primii cinci termeni ai şirului, al cărui al n-lea termen se defineşte prin formula:
a) $a_n = 2(n - 1)$; c) $y_n = 3n + (-1)^n$; e) $c_n = 2n^2$;
b) $x_n = 12$; d) $b_n = 1 - n^2$; f) $z_n = 1 + (-1)^n$.

600. Şirul este definit prin formula $a_n = 2n + 3$. Aflaţi:
a) a_3; b) a_6; c) a_{15}; d) a_{100}.

601. Scrieţi primii şapte termeni ai şirului definit prin formula:
a) $a_n = 3n - 2$; b) $a_n = n^2 + 1$; c) $a_n = 2 - 5n$; d) $a_n = n^2 - n$.

602. Scrieţi primii câţiva termeni ai şirului pătratelor numerelor naturale. Care este termenul al n-lea?

603. Scrieţi primii câţiva termeni şi termenul al n-lea ai şirului cuburilor numerelor naturale.

604. Scrieţi primii câţiva termeni ai şirului numerelor naturale, care se divid cu 3. Calculaţi termenul al patruzecelea.

605. Scrieţi primii câţiva termeni ai şirului al cărui termen $a_n = n^2 - 1$. Aflaţi a_{10}, a_{20}, a_{100}.

606. Scrieţi şirul finit definit prin formulele:

a) $a_n = 4n - 3$, unde $1 \le x \le 8$; c) $c_n = n^2 + 2n$, unde $1 \le x \le 8$;

b) $b_n = \dfrac{n}{n+1}$, unde $1 \le n \le 10$; d) $y_n = 2^n + 1$, unde $1 \le x \le 8$.

607. Aflaţí al treizecelea termen al şirului definit prin formulele:

a) $a_n = 2n + 7$; c) $c_n = (-1)^n + 3$;

b) $b_n = 2n^2 - n$; d) $x_n = 0{,}5n(n + 1)$.

608. Este dat şirul al cărui termen $a_n = 5n + 8$. Cu cât termenul al douăzecelea este mai mare decât termenul al nouăsprezecelea?

609. Este dat şirul al cărui termen $a_n = n \cdot 3^n$. De câte ori termenul al douăzecelea este mai mare decât al optsprezecelea?

610. Aflaţi termenii al şaselea, al optulea şi al zecelea ai şirului cu termenul $b_n = 2^n$.

611. Oare este adevărat, că $a_n = 5n - 3$ este formula termenului al n-lea al şirului de numere naturale, care împărţite la 5 dau în rest 2?

612. Scrieţi formula termenului al n-lea al şirului numerelor naturale care, fiind împărţite la 7, dau în rest 3.

613. Primul termen al şirului este egal cu 7, iar fiecare următorul este cu 2 mai mare decât precedentul. Scrieţi primii câţiva termeni ai lui.

614. Primul termen al şirului este egal cu 5, iar fiecare următorul este cu 3 mai mic decât precedentul. Scrieţi primii câţiva termeni ai lui. Acest şir este crescător sau descrescător?

615. a) Şirul 1, 3, 6, 10, 15, ... se numeşte şirul *numerelor triunghiulare* (fig. 118).

Scrieţi şi reprezentaţi următorii 4 termeni ai acestui şir.

b) Problemă deschisă. Aflaţi care şir se numeşte şirul pătratelor numerelor. Alcătuiţi şi rezolvaţi o problemă despre acest şir.

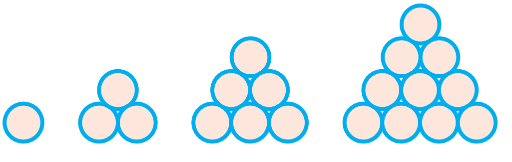


Fig. 118

Nivelul B

616. Scrieţi primii cinci termeni ai şirului, care se defineşte cu formula recurentă:
a) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = -2a_n$;
b) $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$;
c) $a_1 = 15$, $a_{n+1} = a_n - 5$;
d) $c_1 = -2$, $c_2 = 3$, $c_{n+2} = 2c_n + c_{n+1}$.

617. Şirul numerelor Fibonacci poate fi definit prin formula recurentă: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ sau prin formula termenului al n-lea:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Aflaţi primii cinci termeni ai şirului prin două procedee şi comparaţi-le. Mai detaliat despre creatorii acestor formule aflaţi independent din surse informaţionale.

618. Şirul a_1, a_2, a_3, a_4, ... este astfel, că $a_1 = -5$ şi $a_{i+1} - a_i = 3$ pentru fiecare număr natural i. Aflaţi a_2, a_5, a_{10}.

619. Începând cu care număr toţi termenii şirului:

a) $a_n = 3n + 1$ sunt mai mari decât 50; c) $x_n = 200 - 3n$ sunt mai mici decât 12;
b) $c_n = n^2 - 5$ sunt mai mari decât 220; d) $b_n = n^2 - n$ nu sunt mai mici decât 110..

620. Pentru care numere termenii şirurilor:
a) $a_n = 3n - 5$ sunt mai mari decât 40, dar mai mici decât 150;
b) $b_n = 200 - 2n$ sunt mai mari decât 50, dar mai mici decât 170;
c) $c_n = 2^n + 1$ sunt mai mari decât 8, dar mai mici decât 30;
d) $x_n = 4 - 7n$ sunt mai mari decât –40, dar mai mici decât –10;
e) $y_n = \sqrt{n+2}$ sunt mai mari decât $\sqrt{10}$, , dar mai mici decât 10?

621. Câţi termeni pozitivi conţine şirul definit prin formula: a) $a_n = -3n + 374$; b) $a_n = -n^2 + 70n + 800$?

622. Şirul este definit prin formula $a_n = n^2 - 15n$. Câţi termeni negativi are şirul?

623. Oare sunt printre termenii şirului $a_n = 7n - 2$ aşa termeni care:
a) se termină cu 0;
b) se divid cu 13;
c) se divid cu 2 şi nu se divid cu 3;
d) împărţiţi la 27 dau în rest 1?

624. Sunt date două şiruri: $a_n = 7n - 1$ şi $c_n = 8n + 3$. Aflaţi valorile cele mai mici ale lui k şi p, pentru care $a_k = c_p$.

625. Este dat şirul finit: 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9. Definiţi-l printr-o formulă.

Selectaţi (**626**, **627**) una din formulele posibile ale termenului al n-lea al şirurilor. Definiţi fiecare şir în formă de tabel şi grafic.

626. a) $2,\ 5,\ 8,\ \ldots;$
b) $2,\ 4,\ 8,\ \ldots;$
c) $1,\ -1,\ 1,\ \ldots;$
d) $1,\ 0,\ 1,\ \ldots;$
e) $0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \ldots;$
f) $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \ldots.$

627. a) $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48, \ldots;$
b) $1,\ 7,\ 31,\ 127,\ 511, \ldots;$
c) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6}, \ldots;$
d) $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5, \ldots;$
e) $0,\ -2,\ -4,\ -6, \ldots;$
f) $\frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{7}{6}, \ldots.$

628*. Scrieţi două formule diferite pentru termenul al n-lea al şirului care are primii termeni 1, 3, 5, 7.

629. Demonstraţi, că termenul al n-lea al şirului numerelor triunghiulare (vezi problema **615**) este egal cu suma primelor n numere naturale.

630. Şirul infinit 0, 2, 0, 2, 0, ... este astfel că suma a orice doi termeni vecini este egală cu 2. Oare este adevărat că termenul al n-lea este $a_n = 1 + (-1)^n$?

631. Şirul este definit prin formula $a_n = (-1)^n$. Aflaţi suma primilor termeni:
a) o sută; b) o mie; c) o mie unu.

632. Desenaţi în caiet figura 119 şi completaţi-o cu două pătrate astfel, ca laturile lor să fie egale cu următorii termeni ai şirului lui Fibonacci.

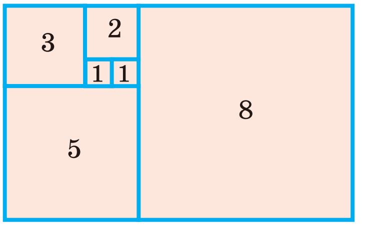


Fig. 119

633. Crescătoare sau descrescătoare sunt şirurile definite prin formulele:
a) $a_n = 9n - 10;$ c) $c_n = 5 - n^2;$ e) $z_n = n^2 + 2n - 3;$
b) $b_n = 10 - 9n;$ d) $x_n = \frac{1}{n^2+1};$ f) $y_n = \frac{3n+4}{n+2}$?

634. Demonstraţi că şirul $a_n = 8n - 7$ este crescător.

635. Demonstraţi că şirul $a_n = \frac{n+1}{n}$ este descrescător.

636. Aflaţi cel mai mare termen al şirului:
a) $a_n = 6n - n^2 - 5;$ b) $a_n = -n^2 + 2n + 3.$

637. Aflaţi cel mai mare termen negativ al şirului definit prin formula termenului al n-lea:
a) $a_n = n^2 - 35;$ b) $a_n = 0{,}25n^2 - 10{,}75.$

638. Care din numerele –20, –10, –5, 4, 9 sunt termeni ai şirului cu termenul al n-lea $a_n = 2n^2 - 7n$?

639. Al cărui şir numărul –12 este termen:

a) $a_n = 7n^2 - 11$; c) $a_n = 2n - n^2 + 3$; e) $a_n = n - n^2$;

b) $a_n = 3 - 5n$; d) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$; f) $a_n = \dfrac{5n^2+4}{1-2n}$?

Exerciţii pentru repetare

640. O întreprindere comercială a cumpărat de 2 500 grn. două obiecte şi după vânzarea lor a obţinut 40 % din venit. Cât a plătit întreprinderea pentru fiecare obiect, dacă primul a adus 25 % din venit, iar al doilea – 50 %?

641. Construiţi graficele funcţiilor:

a) $y = x^2 + 3$; c) $y = (x - 4)^2$;

b) $y = x^2 - 2$; d) $y = (x + 3)^2$.

642. Rezolvaţi sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + y^2 - 2x = 15; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x-4)^2 + y^2 = 9; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy + 12 = 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 + y^2 - 6x = 7. \end{cases}$

Comoara succeselor

- ✓ Ştiu cum se notează şirul şi termenii lui.
- ✓ Pot da exemple de şiruri:

cresătoare	descrescătoare
infinite	finite

- ✓ Ştiu cu care formule se defineşte şirul:

termenul al n-lea	recurente

- ✓ Ştiu a calcula termenii şirului
- ✓ Pot defini şirul după termenii lui daţi şi corelaţia dintre ei

Aplicăm cunştinţele obţinute

Pentru a înţelege şi a însuşi bine tema nouă, ne amintim:
– Ce este un şir.
– Ce este termenul precedent şi cel următor al şirului:

a_n şi a_{n+1}
a_n – precedentul, a_{n+1} – următorul

– Ce este formula termenului al n-lea şi formula recurentă
– Care şiruri se numecs crescătoare, iar care – descrescătoare.
– Cum se calculează termenii şirului

§ 16 PROGRESIE ARITMETICĂ

Fie dat şirul, al cărui primul termen este 5, iar fiecare termen următor este cu 3 mai mare decât precedentul:

5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, ...

Acest şir se numeşte progresie aritmetică cu primul termen 5 şi raţia 3.

Progresie aritmetică **se numeşte şirul, al cărui fiecare termen, începând cu al doilea, este egal cu termenul precedent adunat cu unul şi acelaşi număr. Acest număr constant pentru şirul dat se numeşte** ***raţia progresiei aritmetice.***

Cu alte cuvinte, progresie aritmetică este şirul care poate fi definit cu formulele recurente:

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d, \text{ unde } n \in N,\ a \text{ şi } d \text{ sunt numere date.}$$

Primul termen şi raţia progresiei aritmetice pot fi orice numere. Progresia aritmetică este crescătoare, dacă raţia ei este pozitivă, sau descrescătoare, dacă raţia ei este negativă. Exemplu de progresie aritmetică descrescătoare este:

11, 9, 7, 5, 3, 1, –1, –3, ...

Pentru a obţine orice termen al progresiei aritmetice, începând cu al doilea, trebuie de adunat la numărul precedent raţia *d*. Dacă primul termen şi raţia progresiei aritmetice sunt egale respectiv cu a_1 şi d, atunci primii termeni ale ei sunt:

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d,\ a_1 + 4d,\ \dots,$$

Atrageţi atenţia: coeficientul lui d este cu 1 mai mic decât numărul de ordin al termenului progresiei. La fel aflăm $a_6 = a_1 + 5d$, $a_7 = a_1 + 6d$ şi, în general,

$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)d}$.

Aceasta este formula termenului al n-lea al progresiei aritmetice.

Exemplul 1. Fie dată progresia aritmetică $a_1 = 4$, $d = 3$. Aflaţi a_{20}.

Rezolvare. $a_{20} = a_1 + 19d = 4 + 19 \cdot 3 = 61$.

Răspuns. 61.

Exemplul 2. Fie dată progresia aritmetică $a_{19} = 8$, $d = -1$. Aflaţi a_1.

Rezolvare. $a_{19} = a_1 + 18d$, $8 = a_1 - 18$. Deci, $a_1 = 26$.

Răspuns. 26.

Să examinăm câteva proprietăţi ale progresiei aritmetice.

Teorema 6. Orice termen al progresiei aritmetice, cu excepţia primului, este egal cu semisuma a doi termeni vecini cu el: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$**.**

Demonstraţie. Conform definiţiei $d = a_{n+1} - a_n$, $d = a_n - a_{n-1}$. Deci,

$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$, de aici $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Este adevărată şi afirmaţia inversă. Demonstraţi-o independent.

Teorema 7. Suma a doi termeni ai progresiei aritmetice finite, egal depărtaţi de extremităţile ei, este egală cu suma termenilor extremi:

$$a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n.$$

Fie daţi n termeni ai progresiei aritmetice finite:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_{n-3},\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n.$$

Adunăm primul şi ultimul termeni ale ei, apoi – al doilea şi penultimul, apoi – al treilea de la începutul ei şi al treilea de la sfârşitul ei, ş.a.m.d. Obţinem rezultate egale. Într-adevăr, dacă $a_1 + a_n = m$, atunci:

$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n = m$;
$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = m$;
$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = m$
і т. f. Отже, $a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$.

Teorema 8. Suma termenilor progresiei aritmetice finite este egală cu semisuma termenilor ei extremi înmulţită cu numărul termenilor:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Demonstraţie. Fie S_n suma a n termeni ai progresiei aritmetice:

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots , a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$.

Dacă $a_1 + a_n = m$, atunci $a_2 + a_{n-1} = m$; $a_3 + a_{n-2} = m$ şi a. m. d.

Luând în consideraţie aceasta, adunăm parte cu parte două egalităţi::

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ +\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \\ \hline 2S_n = m + m + m + \ldots + m + m + m \end{array}$$

$2S_n = mn$; $2S_n = (a_1 + a_n)n$, зсіfси

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

După această formulă se află suma primilor n termeni ai oricărei progresii aritmetice.

Exemplul 3. Aflaţi suma primilor douăzeci de termeni ai progresiei aritmetice 5, 7, 9, ...

Rezolvare. Aici $a_1 = 5$, $d = 2$. De aceea $a_{20} = 5 + 19 \cdot 2 = 43$.

$$S_{20} = \frac{5+43}{2} \cdot 20 = 480.$$

Răspuns. 480.

Suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice se poate afla şi după formula $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$. Demonstraţi-o independent.

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

Imaginaţi-vă funcţia liniară $y = 0{,}5x + 1$. Graficul ei este reprezentat pe figura 120. Dacă argumentul x primeşte numai valori naturale, adică 1, 2, 3, ... , atunci valorile funcţiei vor fi egale respectiv cu:

1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; ... .

Avem progresie aritmetică cu primul termen 1,5 şi raţia 0,5. Acestei progresii îi corespunde figura 121. În general, fiecare funcţie $y = ax + b$, definită pe mulţimea numerelor naturale, este o progresie aritmetică cu primul termen $a + b$ şi raţia a. De aceea se consideră că **progresia aritmetică este o funcţie liniară definită pe mulţimea numerelor naturale.**

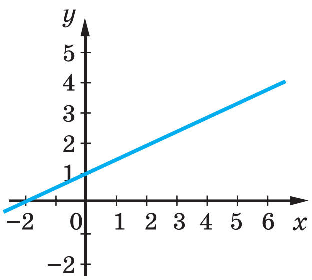


Fig. 120

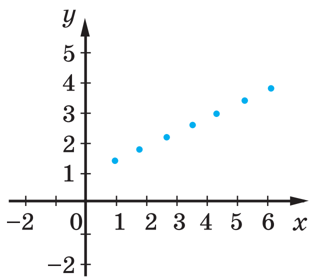


Fig. 121

Dacă o astfel de funcţie este definită pe mulţimea tuturor numerelor naturale, atunci avem o progresie aritmetică infinită. Dacă ea este definită pe mulţimea primelor n numere naturale, atunci avem o progresie aritmetică finită care conţine n termeni..

Verificaţi-vă

1. Formulaţi definiţia progresiei aritmetice.
2. Ce este raţia progresiei aritmetice?
3. Cum se exprimă termenul al n-lea al progresiei aritmetice prin primul termen şi raţie?
4. Cu ce este egală suma a doi termeni ai progresiei aritmetice, egal depărtaţi de extrimităţile ei?
5. Cu ce este egală suma a n termeni ai progresiei aritmetice?

Efectuăm împreună

1 Aflaţi suma tuturor numerelor naturale de două cifre.

- **Rezolvare.** Aflăm suma numerelor 10, 11, 12, ... , 99. Acest şir este o progresie aritmetică finită. Ea conţine 90 de termeni şi suma ei este egală cu:

$$S = \frac{1}{2}(10 + 99) \cdot 90 = 4905.$$

Răspuns. 4 905.

- **Rezolvare.** Dacă 1 000 este termenul al i-lea al progresiei date, atunci 1 000 = 5 + (i – 1) · 3; 3 · (i – 1) = 995, deci, i nu este un număr natural, deoarece 995 nu se divide cu 3.

Dacă 200 = 5 + (i – 1) · 3, atunci 3 · (i – 1) = 195, de aici i = 65.

Răspuns. 1 000 nu este termen al progresiei aritmetice date, iar 200 este termenul al 65-lea.

3 În progresia aritmetică se ştie $a_7 = 43$ şi $a_{15} = 3$. Aflaţi a_{10}.

- **Rezolvare.** Substituim datele problemei în formula $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Avem:

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + 6d, \\ a_{15} = a_1 + 14d; \end{cases} \text{ abo } \begin{cases} 43 = a_1 + 6d, \\ 3 = a_1 + 14d; \end{cases}$$

$$40 = -8d, \text{ звідки } d = -5,\ a_1 = 73.$$

Deoarece $a_{10} = a_1 + 9d$, atunci $a_{10} = 73 + 9 \cdot (-5) = 28$.

Răspuns. 28.

Efectuaţi oral

643. Aflaţi raţia progresiilor aritmetice:
a) 3, 5, 7, ... ; b) 12, 10, 8, ... ; c) −2, 1, 4, ... ; d) −7, −9, −11, ...

644. Raţia progresiei aritmetice este egală cu 2. Aflaţi primul termen al ei, dacă:
a) $a_2 = 5$; b) $a_2 = -3$; c) $a_2 = 0{,}3$; d) $\sqrt{2}$.

645. Oare este o progresie aritmetică şirurile:
a) 1, 3, 5, 8, 11, 14, ... ; b) 0, −1, −3, −5, −8, ... ?

646. Care şir poate fi progresie aritmetică? Indicaţi primul termen şi raţia acestor progresii.
a) 0, 3, 6, 9, 12, ... ;
b) −2, −4, −6, −8, −10, ... ;
c) 3, 3, 3, 3, 3, 3, ... ;
e) — $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$;
d) 5, 10, 20, 40, 80, ... ;
f) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6}, \ldots$.

Nivelul A

647. Scrieţi primii cinci termeni ai progresiilor aritmetice, dacă:
a) $a_1 = 7$, $d = 2$;
b) $a_1 = 0{,}5$, $d = -10$;
c) $a_1 = -\frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{4}$;
d) $a_1 = 9$, $d = 0$.

648. Scrieţi primii şapte termeni ai progresiilor aritmetice, dacă:
a) $a_1 = 2$, $d = 5$;
b) $a_1 = -3$, $d = 4$;
c) $a_1 = 0$, $d = 7$;
d) $a_1 = 4$, $d = -1$.

649. În progresiile aritmetice:
a) $a_1 = 5$, $d = -4$. Aflaţi a_7, a_{20}.
b) $a_1 = 9$, $d = 4$. Aflaţi a_{15}, a_{32}.

650. În progresia aritmetică $a_2 = 14$, $a_3 = 25$. Aflaţi d, a_{10}, a_{20}.

651. Aflaţi raţia şi termenul al zecelea al progresiilor aritmetice:
a) 2, 7, 12, ... ; b) 3, 1, −1, ... ; c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \ldots$.

652. Aflaţi raţia progresiilor aritmetice dacă:
a) $a_1 = 5$, $a_7 = 95$;
b) $a_1 = 2{,}3$, $a_5 = 1{,}5$;
c) $a_1 = -15$, $a_{10} = -24$;
d) $a_1 = -17$, $a_7 = 97$.

653. Aflaţi primul termen al progresiilor aritmetice, dacă:
a) $a_{11} = 25$, $d = 2$;
b) $a_{36} = 5$, $d = -1$;
c) $a_8 = 9$, $d = 0{,}3$;
d) $a_{21} = -50$, $d = 3$.

654. În progresia aritmetică $a_{17} = 53$, $d = 3$. Aflaţi a_1, a_5, a_{11}, a_{21}.

655. În progresia aritmetică $a_{10} = 5$, $a_{11} = -4$. Aflaţi a_1, d, a_5, a_{21}.

656. În progresia aritmetică $a_{25} = 5$, $a_{27} = 4$. Aflaţi a_7, a_{20}.

657. În progresia aritmetică $a_4 = 2$, $a_6 = 3$. Aflaţi a_{40}, a_{41}.

658. Aflaţi termenul al n-lea al progresiei aritmetice:
a) 2, 5, 8, ...;
b) 7, 6, 5, ...;
c) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, ...

659. Scrieţi formula termenului al n-lea al progresiilor aritmetice:
a) 7, 12, ...;
b) −25, −19, ...;
c) −2,5, 0,5, ...;
d) −4,5, −3,7, ...

660. Aflaţi suma primilor zece termeni ai progresiilor aritmetice:
a) $a_1 = -35$, $a_{10} = 10$;
b) $a_1 = 66$, $a_{10} = -6$;
c) $a_1 = -2{,}5$, $a_{10} = 2$;
d) $a_1 = 20$, $a_{10} = 21{,}8$.

661. Aflaţi primul termen şi raţia progresiilor aritmetice, dacă:
a) $a_{10} = 95$, $S_{10} = 500$;
b) $a_{15} = 47$, $S_{15} = 1500$.

662. Aflaţi suma primilor o sută de termeni ai progresiilor aritmetice:
a) 50, 49, 48, ...;
b) −50, −49, −48, ... ;
c) 2, 7, 12, 17, ...;
d) 16, 13, 10, 7, ...

663. Aflaţi suma primilor patruzeci de termeni ai progresiei aritmetice, dacă:
a) $a_1 = 2$, $d = 3$;
b) $a_1 = -18$, $d = 5$;
c) $a_1 = 3$, $d = -0{,}2$;
d) $a_1 = 7$, $a_{50} = 252$.

664. În progresia aritmetică sunt cunoscuţi primul termen a_1 şi raţia d. Aflaţi suma S_n a primilor n termeni ai ei, dacă:
a) $a_1 = 3$, $d = 2$, $n = 32$;
b) $a_1 = -4$, $d = 4$, $n = 25$;
c) $a_1 = 15$, $d = -2$, $n = 40$;
d) $a_1 = -5$, $d = -7$, $n = 12$;
e) $a_1 = 0$, $d = 7$, $n = 35$;
f) $a_1 = 8$, $d = 0$, $n = 50$.

665. ***Problemă arabă străveche.*** Aflaţi termenul al 20-lea şi suma a 20 de termeni ai progresiei aritmetice 3, 7, 11, 15, ...

666. ***Problemă evreiască străveche.*** Aflaţi suma primelor şaizeci de numere naturale.

667. Învăţătorul a propus elevilor să afle suma tuturor numerelor naturale de la 1 până la 40, considerând, că elevii mult timp vor aduna patruzeci de numere. Dar micuţul Carl Gauss (mai târziu a devenit vestit matematician neamţ) problema a rezolvat-o într-o minută. Cum el a meditat? Încercaţi să rezolvaţi oral problema.

668. Aflaţi suma primelor o sută de numere naturale.

669. Aflaţi suma primelor o sută de numere naturale impare.

670. Resortul constă din zece arcuri de oţel (fig. 122). Lungimea arcului de sus este de 105 cm, iar fiecare arc următor este cu 9 cm mai scurt decât cel precedent. Aflaţi suma lungimilor tuturora arcurilor ale resortului.

Fig. 122

671. ***Problemă străveche.*** Oamenilor care săpau o fântână li s-a promis că pentru primul metru 30 de ruble, iar pentru fiecare următorul – cu 20 de ruble mai mult decât pentru metrul precedent. Câţi bani vor primi ei pentru săparea unei fântâni cu adâncimea de 12 m?

Nivelul B

672. În progresia aritmetică $a_1 = 0{,}1$, $d = 2$. Aflaţi a_9, a_n, a_{3p}.

673. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — este o progresie aritmetică. Aflaţi a_{30}, dacă:

a) $a_3 = 3$, $a_4 = 4$;
b) $a_5 = 9$, $a_7 = 13$,
c) $a_1 = 8$, $a_5 - a_3 = 6$;
d) $a_2 = 5$, $a_5 - a_1 = 12$.

674. $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ — este o progresie aritmetică. Aflaţi a_1, d, a_{21}, a_{100}, dacă:

a) $a_4 = 10$, $a_7 = 19$;
b) $a_5 = 5{,}2$, $a_9 = 6{,}8$;
c) $a_5 = 8{,}2$, $a_{10} = 4{,}7$;
d) $a_8 = 11{,}2$, $a_{15} = 19{,}6$.

675. Oare numărul 253 este termen al progresiei aritmetice 15, 23, 31, ... ?

676. Oare numărul 212 este termen al progresiei aritmetice:

a) 3, 14, 25, 36, ...;
b) 275, 269, 263, 257, ...?

677. Care din numerele –23, –14, –3, 1, 3, 14, 23 sunt termeni ai progresiei aritmetice, care are termenul al n-lea:

a) $a_n = 5n - 19$; b) $b_n = 0{,}1n + 11$; c) $c_n = 97 - 2n$?

678. Câţi termeni negativi au progresiile aritmetice:

a) $-10{,}3$; $-8{,}6$; ...;
b) $-37{,}5$; $-35{,}7$; ...?

679. Câţi termeni pozitivi conţin progresiile aritmetice:я:

a) 2,5; 2,3; 2,1, ...;
b) 176; 151; 126; ...?

680. Câţi termeni negativi au progresiile aritmetice:

a) -32, -30, -28, ...;
b) $-8\frac{1}{2}$, -8, $-7\frac{1}{2}$, ...?

681. Câţi termeni ai progresiei aritmetice 10, 16, 22, ... se conţin între numerele 110 şi 345?

682. Aflaţi primul termen şi raţia progresiei aritmetice, definită prin formula termenului al n-lea:

a) $c_n = 5n - 3$; b) $a_n = 2n + 10$; c) $a_n = -3 - 0{,}5n$.

683. Oare este o progresie aritmetică şirul, definit prin formula termenului al n-lea:

a) $a_n = 3n + 1$;
b) $b_n = 5 - 4n$;
c) $c_n = 2^n + 1$?

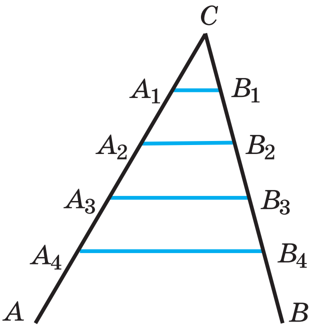


Fig. 123

684. Pe latura CA a unghiului ACB de la vârful lui sunt depuse segmente egale şi prin extremităţile lor sunt duse drepte paralele (fig. 123). Aflaţi lungimea segmentului A_3B_3, A_7B_7, A_nB_n, dacă $A_1B_1 = 2{,}5$ cm.

685. $a_1, a_2, a_3, ...$ este o progresie aritmetică, c un număr arbitrar. Demonstraţi că şirul $ca_1, ca_2, ca_3, ca_4, ...$ tot este o progresie aritmetică.

686. $a_1, a_2, a_3, ...$ şi $x_1, x_2, x_3, ...$ sunt progresii aritmetice. Demonstraţi, că progresie aritmetică este şi şirul

$$a_1 + x_1,\ a_2 + x_2,\ a_3 + x_3,\ ... .$$

687. Numerele a^2, b^2, c^2 nu sunt egale şi formează o progresie aritmetică. Demonstraţi, că progresie aritmetică formează şi numerele

$$\frac{1}{b+c},\ \frac{1}{c+a},\ \frac{1}{a+b}.$$

688. Este dată o progresie aritmetică cu termenul al n-lea a_n. Demonstraţi, că:

a) $a_2 + a_{23} = a_{13} + a_{12}$; b) $a_{20} - a_{16} = a_{10} - a_6$.

689. ***Problemă lui Feofan Procopovici.*** Un om are mulţi cai şi preţul lor este diferit. Calul cel mai slab costă 4 monede de aur, iar cel mai bun – 55 monede de aur, şi preţul creşte de la un cal la altul cu 3 monede de aur. Întrebăm: câţi cai erau în total?

690. Aflaţi suma primilor n termeni ai progresiilor aritmetice, dacă:

a) $a_1 = 1$, $a_5 = 3$, $n = 40$; c) $a_2 = 5$, $a_4 = 6$, $n = 100$;
b) $a_1 = -3$, $a_3 = 1$, $n = 50$; d) $a_1 = a_{100}$, $a_3 = 3$, $n = 100$.

691. Aflaţi suma tuturor numerelor naturale pare mai mici decât 200.

692. Aflaţi suma tuturor numerelor naturale impare mai mici decât 200.

693. Aflaţi suma numerelor naturale mai mici decât 1000, care se divid cu:

a) 3; b) 5; c) 12.

694. Aflaţi suma tuturor numerelor întregi care aparţin intervalului:

a) $[-30; 70]$; b) $[-70; -30]$; c) $(-70; 70)$.

695. În progresia aritmetică sunt zece termeni. Suma termenilor cu numere impare este egală cu 10, iar a celor cu numere pare – 25. Aflaţi al şaptelea termen.

696. a) Termenul al treisprezecelea al progresiei aritmetice este egal cu 3. Aflaţi suma primilor 25 de termeni ai ei.

b) ***Problemă deschisă.*** Aflaţi suma primilor ... termeni ai progresiei aritmetice, dacă termenul al ... este egal cu 100.

697. Suma primilor cincisprezece termeni ai progresiei aritmetice este egală cu 20, iar suma primilor douăzeci de termeni ai ei este cu 6 mai mică. Aflaţi suma primilor 27 de termeni.

698. Aflaţi suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice, definită prin formula termenului al n-lea:

a) $a_n = 2 + 5n$; b) $a_n = 2n - 1$; c) $a_n = -3 + n$.

699. Aflaţi termenul al cincilea al progresiei aritmetice, dacă suma primilor n termeni se poate afla după formula:

a) $S_n = n^2 - 6n$; b) $S_n = 3n^2 - n$; c) $S = 4n^2 - 2n$.

700. Suma termenilor al patrulea şi al şaselea ai progresiei aritmetice este egală cu 14. Aflaţi suma primilor nouă termeni ai progresiei.

701. ***Problema lui Franker.*** Câte bătăi va face un ceasornic în decurs de 12 h, dacă el bate la fiecare jumătate de oră?

702. Corpul fizic la căderea liberă în prima secundă parcurge 4,9 m, iar în fiecare următoarea – cu 9,8 m mai mult. Aflaţi: a) adâncimea minei, dacă o pietricică a ajuns la fund peste 8 s după începerea căderii; b) câte secunde va cădea piuliţa de la înălţimea de 490 m?

703. a) Mărimile unghiurilor pentagonului formează o progresie aritmetică. Demonstraţi, că mărimea unui unghi este egală cu 108°.

b) Compuneţi probleme asemănătoare pentru triunghi şi septagon.

704. Extremităţile segmentelor paralele cu bazele unui trapez sunt pe laturile laturale ale lui şi le împart, pe fiecare, în 8 părţi egale. Aflaţi lungimile acestor segmente şi suma lor, dacă bazele trapezului sunt egale cu a şi b (fig. 124).

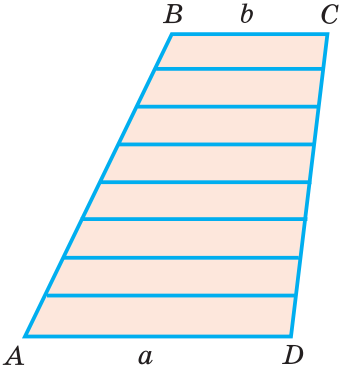


Fig. 124

Exerciţii pentru repetare

705. Simplificaţi fracţiile:

a) $\dfrac{3x-9}{2x^2-5x-3}$; b) $\dfrac{a^2-9}{2a^2+7a+3}$; c) $\dfrac{c^2-8c-20}{c^2-11c+10}$.

706. Rezolvaţi inecuaţiile:

a) $x^2 - 8x < 0$; c) $x^2 - 16 < 0$;
b) $x^2 + 7x < 0$; d) $x^2 - 3 \le 0$.

707. Pe figura 125 este reprezentat graficul funcţiei $y = f(x)$. Stabiliţi relaţiile dintre abscisele punctelor (1–4), care sunt argumentele funcţiei $y = f(x)$, şi intervalele (A–E), căror le aparţine valorile acestei funcţiei în punctele date.

1 $x = -1$
2 $x = 1$
3 $x = 3$
4 $x = 5$

A $(1,5; 2]$
B $(0; 1)$
C $[-1; 0,5)$
D $(2; 3]$
F $[-2; -1]$

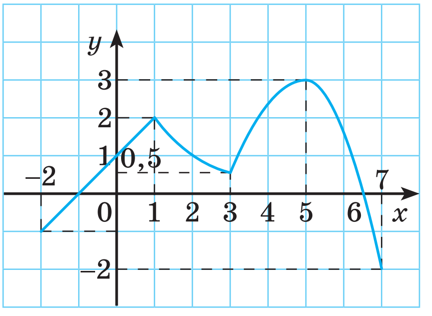


Fig. 125

Comoara succeselor

Înţeleg ce este progresia aritmetică.

✓ Pot formula definiţia progresiei aritmetice.
✓ Pot da exemple de progresii aritmetice şi stabili, dacă şirul dat este progresie aritmetică.
✓ Ştiu ce este raţia progresiei aritmetice $d = a_{n+1} - a_n$.
✓ Ştiu cu care formule se defineşte progresia aritmetică

recurentă	termenul al n-lea
$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d$	$a_n = a_1 + (n-1)d$

✓ √ Pot explica şi formula proprietăţile progresiei aritmetice:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \qquad a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$$

✓ Ştiu şi pot folosi formula sumei primilor n termeni ai progresiei aritmetice

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

✓ Pot defini progresia aritmetică după termenii ei daţi sau după corelaţiile dintre ei.
✓ Pot afla termenii necunoscuţi ai progresiei aritmetice.

Aplicăm cunoştinţele obţinute

Pentru a înţelege şi a însuşi bine tema nouă, ne amintim:
– Ce este progresie aritmetică.
– Care este termenul precedent şi termenul următor.
– Care-i formula termenului al n-lea şi formula recurentă.
– Prin care formule se poate defini progresia aritmetică:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \qquad a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d$$

– Care proprietăţi posedă progresia aritmetică:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \qquad a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$$

Cum se calculează suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

§ 17 Progresie geometrică

Să examinăm o problemă din **folclorul indian.**

Problemă din folclorul indian. Un împărat foarte mult a îndrăgit jocul de şah şi a promis inventatorului o răsplată mare. Inventatorul a solicitat pentru primul pătrăţel al tablei de şah un grăunte de grâu, pentru al doilea – două grăunţe, pentru al treilea – patru şi pentru fiecare pătrăţel următor de două ori mai multe grăunţe decât pentru cel precedent. Împăratul s-a mirat mult, că inventatorul aşa de puţin solicită. Dar promisiunea împăratul nu a putut s-o îndeplinească. De ce? Despre aceasta veţi afla după ce veţi studia proprietăţile progresiei geometrice

Progresie geometrică **se numeşte şirul al cărui fiecare termen, începând cu al doilea, este egal cu termenul precedent, înmulţit cu unul şi acelaşi număr. Acest număr q constant pentru şirul dat se numeşte *raţia progresiei geometrice*.**

Primul termen b_1 şi raţia q ai progresiei geometrice pot fi orice numere diferite de zero.

Cu alte cuvinte, progresia geometrică este şirul care poate fi definit cu formula recurentă:

$b_1 = b$, $b_{n+1} = b_n \cdot q$, unde $n \in N$, $b \neq 0$ şi $q \neq 0$ sunt numere date.

Exemple de progresii geometrice sunt:

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ \ldots\ (b_1 = 3,\ q = 2);$$
$$1,\ -3,\ 9,\ -27,\ 81,\ -243,\ \ldots\ (b_1 = 1,\ q = -3);$$
$$-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ -\frac{1}{16},\ \ldots\ \left(b_1 = -1, q = \frac{1}{2}\right);$$
$$7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ \ldots\ (b_1 = 7,\ q = 1).$$

Remarcă. Fiecare progresie aritmetică cu raţia 0 se poate considera şi progresie geometrică cu raţia 1.

Progresia geometrică cu primul termen b_1 şi raţia q are primii termeni:
$b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4, \ldots$.

Termenul al doilea este $b_2 = b_1q$, al treilea $b_3 = b_1q^2$, iar al n-lea
$\boldsymbol{b_n = b_1q^{n-1}}$.

Aceasta este formula termenului al n-lea al progresiei geometrice.

Exemplul 1. În progresia geometrică $b_1 = 5$, $q = 2$. Aflaţi b_{10}.

Rezolvare. $b_{10} = b_1q^{10-1}$, $b_{10} = 5 \cdot 2^9 = 2\ 560$.

Răspuns. 2 560.

Exemplul 2. Termenii primul şi al şaptelea ai progresiei geometrice sunt egali respectiv cu 81 şi 64;9. Aflaţi raţia q a ei.

Rezolvare. După formula termenului al n-lea al progresiei geometrice:

$$b_7 = b_1q^6,\ \frac{64}{9} = 81 \cdot q^6,\ \ q^6 = \frac{64}{9 \cdot 81},\ \ q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

Dar dacă $q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$, atunci $q = \frac{2}{3}$ sau $q = -\frac{2}{3}$.

Răspuns. $\frac{2}{3}$ sau $-\frac{2}{3}$.

Să examinăm proprietăţile progresiei geometrice.

Teorema 9. Pătratul fiecărui termen al progresiei geometrice, începând cu al doilea, este egal cu produsul a doi termeni vecini a lui: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Demonstraţie. După definiţie $b_{n-1} = \frac{b_n}{q}$, a $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

Deci, $b_{n+1} \cdot b_{n-1} = b_n \cdot q \cdot \frac{b_n}{q} = b_n^2$.

Este adevărată şi afirmaţia inversă. Demonstraţi-o independent.

Teorema 10. Suma primilor *n* termeni ai progresiei geometrice cu condiţia că $q \neq 1$ se exprimă prin formula: $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$.

Demonstraţie.

Fie $S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + ... + b_1q^{n-2} + b_1 q^{n-1}$. Înmulţim ambele părţi ale egalităţii cu q:

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + ... + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Din această egalitate scădem parte cu parte egalitatea precedentă, termenii asemenea $b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4, ... , b_1q^{n-1}$ se reduc. În rezultat obţinem:

$$S_nq - S_n = b_1q^n - b_1, \text{ abo } S_n(q-1) = b_1(q^n-1),$$

de aici

$$S_n = \frac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}.$$

Aceasta este formula sumei a primilor n termeni ai progresiei geometrice cu primul termen b_1 şi $q \neq 1$.

Dacă $q = 1$, această formulă nu se poate aplica (de împărţit la 0 nu se poate). În acest caz fiecare termen al progresiei geometrice este egal cu b_1 şi $S_n = nb_1$.

Exemplul 3. Aflaţi suma primilor douăzeci de termeni ai progresiei geometrice 2, 6, 18, 54, ...

Rezolvare. Aici $b_1 = 2$, $q = 3$, de aceea $S_{20} = \frac{2\left(3^{20}-1\right)}{3-1} = 3^{20}-1.$

Răspuns. $3^{20}-1$.

Suma primilor n termeni a progresiei geometrice se poate afla şi după formula $S_n = \frac{b_nq-b_1}{q-1}$.

Demonstraţi-o independent.

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

Suma a n termeni ai progresiei geometrice cu mărirea numărului n creşte foarte repede. Rezolvăm problema din folclorul indian, care a cercetat-o pe pagina 171.

Rezolvare. Tabla de şah are 64 de pătrăţele. De aceea împăratul trebuia să dea inventatorului $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{64}$ grăunţe de grâu. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{63} = \frac{2^{63}\cdot 2-1}{2-1} = 2^{64}-1$.

Încercaţi să calculaţi această sumă. Noi vom evalua numai ultimul termen::

$$2^5 = 32,\ 2^{10} = 32^2 = 1024 > 10^3.$$

$$2^{64} = 2^4 \cdot (2^{10})^6 > 16 \cdot (10^3)^6 = 16 \cdot 10^{18} = 16\,000\,000\,000\,000\,000\,000.$$

Dacă vom considera, că masa a 400 de grăunţe este de 1 kg, atunci masa a 2^{64} de grăunţe este mai mare decât

$$16 \cdot 10^{18} : (4 \cdot 10^3) = 4 \cdot 10^{15} \text{ (кd), abo } 4 \cdot 10^{12} \text{ т.}$$

Şi aceasta este valoarea aproximativă numai a ultimului termen. Aşa cantitate de grâne toate ţările lumii nu vor putea recolta de-a lungul veacurilor..

Progresia geometrică 2, 4, 8, 16, 32, ... – acestea-s valorile succesive ale funcţiei $y = 2^x$, definită pe mulţimea numerelor întregi.

Verificaţi-vă

1. Daţi exemplu de progresie geometrică.
2. Formulaţi definiţia progresiei geometrice.
3. Ce este raţia progresiei geometrice?
4. Cum se exprimă termenul al n-lea al progresiei geometrice prin primul termen şi raţia ei?
5. Formulaţi proprietăţile progresiei geometrice.
6. Cu ce este egală suma primilor n termeni ai progresiei geometrice.

Efectuăm împreună

1 În progresia geometrică $b_4 = 2$, $b_7 = -54$ sunt termenii progresiei geometrice. Aflaţi b_1 şi q.

- **Rezolvare.** După formula termenului al n-lea $b_4 = b_1 \cdot q^3$ şi $b_7 = b_1 \cdot q^6$. Substituim în aceste egalităţi valorile $b_4 = 2$, $b_7 = -54$ şi rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} 2 = b_1 \cdot q^3, \\ -54 = b_1 \cdot q^6. \end{cases}$$

Împărţim parial a doua ecuaţie la prima parte:

$\frac{-54}{2} = \frac{b_1 \cdot q^6}{b_1 \cdot q^3}$. Avem: $q^3 = -27$ i $q = -3$.

Din prima ecuaţie aflăm b_1:

$$2 = b_1 \cdot (-3)^3;\ b_1 = 2 : (-27) = -\frac{2}{27}.$$

Răspuns. $b_1 = -\frac{2}{27}$, $q = -3$.

2 Aflaţi suma a cinci termeni ai progresiei geometrice în care $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$.

- **Rezolvare.** *Primul procedeu.* Suma pimilor n termeni ai progresiei geometrice se poate afla după formula $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Dacă $n = 5$, atunci

$$S_5 = \frac{b_1 \cdot (q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{8 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{8 \cdot \left(\frac{1}{32} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{-8 \cdot \frac{31}{32}}{-\frac{1}{2}} = \frac{31}{2} = 15\frac{1}{2}.$$

Procedeul al doilea. Scriem 5 termeni ai progresiei date. 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$.

Aflăm suma lor, adunându-le: $15\frac{1}{2}$.

Atrageţi atenţia la acest procedeu!

Răspuns. $S_5 = 15\frac{1}{2}$.

Efectuaţi oral

708. Indicaţi următorii trei termeni ai progresiilor geometrice:
a) 3, 6, 12, ...;
b) 16, 8, 4, ...;
c) −1, −2, −4, ...;
d) −2, 4, −8, ...

709. Oare este o progresie geometrică şirurile:
a) 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001;
b) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$?
Dacă este progresie, indicaţi raţia ei.

710. Oare este o progresie geometrică şirurile:
a) 2, 4, 6, 8, ...;
b) 1, −3, 9, 27, −81, ...;
c) 3, 6, 12, 14, ...;
d) 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, ...?

711. Oare este o progresie geometrică şirul 7^n, 7^{n+1}, 7^{n+2}, 7^{n+3}, unde n este orice număr natural? Dar şirul 7^n, -7^{n+1}, 7^{n+2}, -7^{n+3}?

Nivelul A

712. Scrieţi primii şapte termeni ai progresiilor geometrice, în care:
a) $b_1 = 1$, $q = 3$;
b) $b_1 = 10$, $q = \frac{1}{2}$;
c) $b_1 = -5$, $q = 2$;
d) $b_1 = 1$, $q = -2$.

713. Scrieţi primii cinci termeni ai progresiilor geometrice, în care:
a) $b_1 = 18$, $q = -1$;
b) $b_1 = 5$, $q = 2$;
c) $b_1 = -8$, $q = \frac{1}{2}$;
d) $b_1 = \frac{5}{27}$, $q = 3$.

714. Aflaţi raţia şi termenul al cincilea ai progresiilor geometrice:
a) −1, 3, ...;
b) 0,1, 0,01, ...;
c) 625, 125, ...;
d) 4, −2, ...

715. În progresia geometrică $b_1 = -3$, $q = 2$. Aflaţi b_4, b_7, b_n..

716. Aflaţi primul termen al progresiilor geometrice, în care:
a) $b_8 = 384$, $q = 2$; b) $b_5 = 31{,}25$, $q = -2{,}5$.

717. b_1, b_2, b_3, b_4, ... este o progresie geometrică. Aflaţi b_{12}, dacă:
a) $b_1 = 1$, $b_2 = 6$; c) $b_3 = 1$, $b_4 = 0{,}5$;
b) $b_1 = 25$, $b_2 = -50$; d) $b_2 = 2$, $b_4 = 4$.

718. Aflaţi termenul al şaptelea al progresiei geometrice, dacă:
a) $b_3 = 3$, $b_4 = 6$; c) $b_5 = 80$, $b_6 = -160$;
b) $b_3 = -1{,}5$, $b_5 = -6$; d) $b_6 = 18$, $b_4 = 72$.

719. Scrieţi formula termenului al n-lea al progresiilor geometrice:
a) 2, 6, 18,...; c) $1, \sqrt{2}, 2,...$;
b) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1,...$; d) 64, −32, 16,....

720. Aflaţi numărul termenului n al progresiilor geometrice, în care:
a) $b_1 = 4$, $q = 3$, $b_n = 324$; b) $b_1 = -8$, $q = 2$, $b_n = -256$.

721. A_1C_1 este linia medie a ΔABC, A_2C_2 este linia medie a ΔA_1BC_1, A_3C_3 este linia medie a ΔA_2BC_2, şi a.m.d. (fig. 126). Oare este adevărat, că lungimile segmentelor AC, A_1C_1, A_2C_2, ... formează o progresie geometrică?

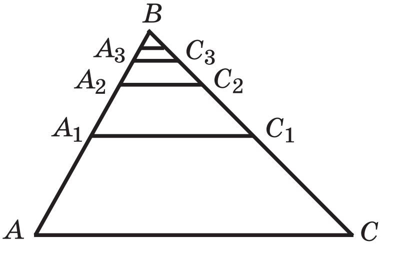


Fig. 126

722. În progresia geometrică primul termen este b_1 şi raţia q. Aflaţi suma primilor termeni, dacă:
a) $b_1 = -3$, $q = 3$, $n = 6$; c) $b_1 = 4$, $q = -2$, $n = 10$;
b) $b_1 = 2{,}5$, $q = 0{,}4$, $n = 4$; d) $b_1 = \frac{5}{27}$, $n = 6$.

723. Aflaţi suma primilor n termeni ai progresiilor geometrice, dacă:
a) $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 9$; c) $b_1 = -2$, $q = 2$, $n = 12$;
b) $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 10$; d) $b_1 = 81$, $q = \frac{1}{3}$, $n = 8$.

724. Aflaţi suma primilor şase termeni ai progresiilor geometrice:
a) −2, 10, ...; d) 3, 3, 3, 3, 3, 3, ...;
b) 5, 10, ...; e) 5, 10, 20, 40, 80, ...
c) 32, −16, ...;

725. Aflaţi suma primilor cincisprezece termeni ai progresiilor geometrice:
a) 1, 2, 4, 8, ...; c) 1, −2, 4, −8, ...;
b) 1024, 512, 256, ...; d) 1024, −512, 256, ...

726. ***Problemă din vechime.*** Odată un sărac înțelept l-a rugat pe un om bogat zgârcit să-i dea adăpost pe două săptămâni cu condiţiile următoare: «Pentru aceasta eu voi plăti în prima zi 1 rublă, a doua –2, a treia – 3 şi a.m.d., mărind plata zilnic cu câte 1 rublă. Însă tu vei da pomană: în prima zi 1 copeică, a doua – 2, a treia – 4 şi a.m.d., mărind pomana zilnic de două ori». Bogatul cu bucurie a acceptat condiţiile, considerându-le rentabile. Câţi bani a primit cel bogat?

727. ***Problema lui Euler.*** Un bărbat, vânzând un cal, i-a propus cumpărătorului să plătească numai pentru cuiele cu care erau bătute potcoavele pe copitele calului. Pentru primul cui – 1 pfenig, pentru al doilea – 2, pentru al treilea – 4, ş.a.m.d.: pentru fiecare de două ori mai mult decât pentru cel precedent. Cu cât el a vândut calul, dacă erau 32 de cuie?

Nivelul B

728. $b_1, b_2, b_3, \ldots$ — este o progresie geometrică. Aflaţi b_1 şi q, dacă:

a) $b_3 = 625,\ b_7 = 81$; c) $b_4 = \frac{9}{32},\ b_8 = \frac{1}{18}$;

b) $b_5 = 3,\ b_{10} = -27\sqrt{3}$; d) $b_4 = -6,\ b_8 = -1\frac{115}{128}$.

729. Scrieţi formula termenului al n-lea al progresiei geometrice:

a) $3, -6, \ldots$; b) $-0,1, -1, \ldots$; c) $12, 8, \ldots$; d) $\frac{2}{5}, 4, \ldots$.

730. Oare este numărul 384 termen al progresiei geometrice:

a) $3, 6, \ldots$; b) $\frac{4}{81}, \frac{8}{27}, \ldots$?

731. Care din numerele –27, –9, 18, 20, 27 este termen al şirului cu termenul al n-lea:

a) $b_n = 5 \cdot 2^n$; c) $y_n = -36 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$;

b) $x_n = (-3)^{n+1}$; d) $c_n = -12 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^n$?

732. Aflaţi primul termen şi raţia progresiilor geometrice în care:

a) $b_1 + b_3 = 10,\ b_2 + b_4 = 30$; b) $b_5 - b_1 = 15,\ b_4 - b_2 = 6$.

733. Oare este şirul definit prin formula $c_n = (-3)^{n+2}$ o progresie geometrică? Dacă este, atunci aflaţi primul termen şi raţia ei.

734. Demonstraţi, că şirul dat (x_n) este o progresie geometrică:

a) $x_n = 3 \cdot 7^n$; b) $x_n = 5 \cdot 2^{n+1}$; c) $x_n = 0,4^{1+n}$.

735. Demonstraţi: dacă a, b, c este o progresie geometrică, atunci:

$$(a^2 + b^2)c = (b^2 + c^2)a.$$

736. Este dată progresia geometrică $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$. Demonstraţi, că progresii geometrice sunt şi şirurile:

a) $b_1b_2, b_2b_3, b_3b_4, \ldots;$

b) $b_1 + b_2, b_2 + b_3, b_3 + b_4, \ldots;$

c) $b_1 - b_2, b_2 - b_3, b_3 - b_4, \ldots.$

737. Termenul al cincilea al progresiei geometrice este egal cu 1. Cu ce este egal produsul primilor nouă termeni ai ei?

738. Termenul al şaselea al progresiei geometrice este egal cu –2. Cu ce este egal produsul primilor unsprezece termeni ai ei?

739. Aflaţi trei numere care formează o progresie geometrică, ştiind că suma lor este egală cu 21, iar produsul – cu 216.

740. Termenii progresiei geometrice 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 de le plasat în nouă pătrăţele ale unui pătrat astfel, ca produsele lor în fiecare rând, în fiecare coloniţă şi după fiecare diagonală să fie egale.

741. După fiecare mişcare a pistonului pompei de rarefiere din vas se evacuează 5 % din aerul prezent în el. Determinaţi presiunea aerului în interiorul vasului după zece mişcări ale pistonului, dacă presiunea iniţială era 760 mm a coloanei de mercur.

742. Oare pot lungimile laturilor triunghiului dreptunghic forma o progresie geometrică?

743. Într-un unghi ascuţit sunt înscrise n circumferinţe, care sunt tangente una alteia (fig. 127). Demonstraţi, că lungimile razelor lor formează o progresie geometrică. De ce depinde raţia ei?

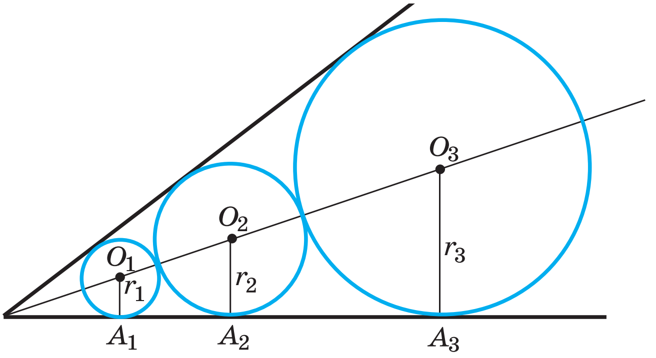


Fig. 127

744. Scrieţi primii câţiva termeni ai şirului cu următoarele proprietăţi: $b_1 = 1$, $b_n = 3b_{n-1}$. Scrieţi formula termenului al n-lea. Aflaţi b_5 şi S_{10}.

745. Între numerele $40\frac{1}{2}$ şi $5\frac{1}{3}$ intercalaţi aşa patru numere, care împreună cu numerele date, să formeze o progresie geometrică. Aflaţi suma ei prin două procedee.

746*. Aflaţi numărul termenilor ai progresiilor geometrice, în care:

a) $b_1 = 3,\ b_n = 96,\ S_n = 189;$

b) $b_1 = 1,\ b_n = -512,\ S_n = -341;$

c) $q = -\frac{1}{3},\ b_n = \frac{1}{3},\ S_n = 20\frac{1}{3};$

d) $q = \sqrt{3},\ b_n = 18\sqrt{3},\ S_n = 26\sqrt{3} + 24.$

747. Aflaţi patru numere, din care primele trei sunt termeni consecutivi ai progresiei geometrice, iar ultimele trei sunt termeni ai progresiei aritmetice, dacă suma numerelor extreme este egală cu 21, şi suma numerelor medii este egală cu 18.

748. Aflaţi astfel de numere $x, y, z, t,$ ca şirul $x, y, -2, z, -8, t$ să formeze o progresie geometrică.

749. Cu care număr al termenului progresiei geometrice:

a) 729, 243, ... toţi termenii ei vor fi mai mici decât 0,01;

b) $\frac{1}{3},\ \frac{1}{\sqrt{3}},$ ... toţi termenii ei vor fi mai mari decât 5?

750. Deduceţi formula pentru calculul produsului al primilor n termeni ai progresiei geometrice.

751. Aceasta s-a întâmplat aproape cu o sută de ani în urmă. Un ţăran vindea 20 de oi cu 200 de ruble. Când un cumpărător a început prea mult să se târguiască, ţăranul i-a propus: „Dă pentru prima oaie 1 copeică, pentru a doua – 2 c., pentru a treia – 4 c., şi pentru fiecare oaie următoare de 2 ori mai multe copeici decât pentru cea precedentă”. Cumpărătorul s-a învoit. Cât a plătit el pentru acele 20 de oi?

752. Bacteria, nimerind în organism, până la sfârşitul minutei a 20-a se divide în două, fiecare din ele până la sfârşitul minutei a 20-a tot se divide în două ş.a.m.d. Câte bacterii vor fi în organism în decursul a 24 de ore?

753. Să ne imaginăm, că la începutul erei noastre o femeie M a născut două fiice, fiecare din ele până la 30 de ani de asemenea a născut două fiice, ş.a.m.d. Oare este posibil aceasta? În aceste condiţii câţi, urmaşi a femeii M ar fi trăit în timpurile noastre?

Exerciţii pentru repetare

754. Aflaţi domeniul de definiţie al funcţiei $y = x^2$, definită pe intervalul:
a) $(0; 3)$; b) $(-5; -3)$; c) $[-2; 3)$; d) $[-4; 4)$.

755. Pe figura 128 sunt reprezentate câteva figuri alcătuite din chibrite (F_1, F_2, F_3). Imaginaţi-vă, că consecutivitatea acestor figuri este continuată. Câte chibrituri trebuie pentru a compune figura F_9?

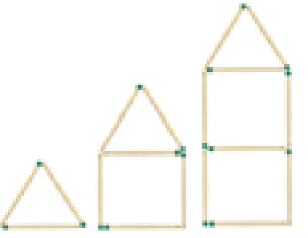


Fig. 128

756. Masa unei bucăţi dintr-un metal este de 440 g, iar a altei din alt metal – 429 g. Aflaţi densitatea fiecărui metal, dacă densitatea primului este cu 1 g/cm^3 mai mare, iar volumul cu 5 cm^3 mai mic decât al bucăţii a doua.

757. Rezolvaţi grafic sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} xy-6=0, \\ x-y=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy+6=0, \\ 2x+y=4. \end{cases}$

Comoara succeselor

✓ Înţeleg ce este progresie geometrică.
✓ Pot formula definiţia progresiei geometrice.
✓ Pot da exemple de progresii geometrice şi pot stabili, dacă şirul dat este progresie geometrică.
✓ Ştiu ce este raţia progresiei geometrice $q = b_{n+1} : b_n$
✓ Ştiu care formule definesc progresia geometrică

recurentă
$b_1 = b,\ b_{n+1} = b_n \cdot q$

termenul al n-lea
$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

✓ Pot explica şi formula proprietatea progresiei geometrice

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

✓Ştiu şi pot folosi formula sumei primilor n termeni ai progresiei geometrice

Dacă $q \neq 1$, atunci $S_n = \dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$

Dacă $q = 1$, atunci $S_n = n \cdot b_1$

✓ Pot defini progresia geometrică după termenii ei daţi sau după corelaţiile dintre ei şi pot afla termenii necunoscuţi ai progresiei geometrice

Aplicăm cunoştinţele obţinute

Pentru a înţelege şi a însuşi bine tema nouă, ne amintim:
– Ce este şirul infinit.
– Care şir se numeşte crescător, iar care – descrescător.
– Ce este progresie geometrică.
– Ce este termenul precedent şi următor al progresiei.
– Cu care formulă se defineşte progresia geometrică $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
– Cum se calculează suma primilor n termeni ai progresiei geometrice:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1},\ q \neq 1 \qquad S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1},\ q \neq 1$$

– Ce este fracţie zecimală periodică şi cum se scrie ea:

0,666666 = 0,(6)

– Ce este modulul numărului.

§ 18 Probleme de calcul al sumelor

Până aici nu s-au calculat sumele, care au un număr infinit de termeni, dar uneori are sens studierea acestor sume. Cu ce, de exemplu, este egală suma termenilor progresiei geometrice infinit descrescătoare $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots$?

Fie aria pătratului reprezentat pe figura 129 b_1 egală cu 1, iar ariile dreptunghiurilor b_2, b_3, b_4, ... – respectiv cu $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots$. Dacă numărul acestor dreptunghiuri se va mări până la infinit, atunci suma ariilor lor se va apropia oricât de mult de numărul 2. De aceea se consideră că $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$.

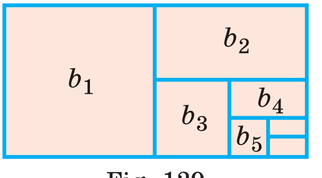


Fig. 129

Să generalizăm exemplul studiat. Fie dată progresia geometrică infinită $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, \ldots$, raţia căreia $|q| < 1$.

După formula cunoscută,

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1-q}, \text{ sau}$$

$$S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1 q^n}{1-q}.$$

Aici numărul $\dfrac{b_1}{1-q}$ este constant, iar n este o variabilă. Dacă $|q| < 1$, atunci la mărirea nemărginită a lui n puterea q^n tinde către 0 (se scrie: dacă $n \to \infty$, atunci $q^n \to 0$). În acest timp şi fracţia tinde spre 0.

Deci, dacă $n \to \infty$, atunci $S_n \to \dfrac{b_1}{1-q}$. De aceea s-a convenit, că suma progresiei geometrice infinite cu primul termen b_1 şi raţia $|q| < 1$ de considerat numărul $\dfrac{b_1}{1-q}$..

Cu alte cuvinte, dacă $|q| < 1$ şi $b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + ... = S$, atunci

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Exemlul 1. Aflaţi suma progresiei geometrice 4, $-\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{9}, -\dfrac{4}{27}, \ldots$.

Rezolvare. Aici $b_1 = 4$, $q = -\dfrac{1}{3}$, de aceea suma căutată $S = \dfrac{4}{1+\dfrac{1}{3}} = 3.$

Răspuns. $S = 3$.

Cu ajutorul formulei $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ *fracţiile zecimale infinite periodice* se pot scrie sub formă de fracţii ordinare.

Exemlul 2. Scrieţi în formă de fracţie ordinară fracţia zecimală infinită periodică:
a) 0,(2); b) 1,(6); c) 0,(23).

Rezolvare.

a) $0,(2) = 0,2222\ldots = \dfrac{2}{10} + \dfrac{2}{100} + \dfrac{2}{1000} + \ldots = \dfrac{0,2}{1-0,1} = \dfrac{2}{9};$

b) $0,(6) = 0,6666\ldots = \dfrac{6}{10} + \dfrac{6}{100} + \dfrac{6}{1000} + \ldots = \dfrac{0,6}{1-0,1} = \dfrac{2}{3}.$

Deci, $1,(6) = 1 + 0,(6) = 1\dfrac{2}{3};$

c) $0,(23) = 0,2323\ldots = \dfrac{23}{100} + \dfrac{23}{10\,000} + \ldots = \dfrac{0,23}{1-0,01} = \dfrac{23}{99}.$

Răspuns. a) $\dfrac{2}{9}$; b) $1\dfrac{2}{3}$; c) $\dfrac{23}{99}$.

Atrageţi atenţia! Fracţia zecimală infinită periodică, care are partea întreagă egală cu 0, iar perioada este imediat după virgulă, este egală cu fracţia ordinară, al cărei numărător este numărul ce constituie perioada, iar numitorul conţine atâtea cifre de nouă câte cifre sunt în perioadă.

Meditaţi cum se poate scrie în formă de fracţie ordinară, de exemplu, numărul 1,5(6).

Până acum am aflat suma termenilor celor mai simple şiruri: progresiilor aritmetice şi geometrice. Uneori apare necesitatea de a calcula suma termenilor altor şiruri. Examinăm exemple.

Exemlul 3. Aflaţi suma S a primilor o sută de termeni ai şirului

$$\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{2\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 4},\ \ldots,\ \frac{1}{n(n+1)},\ \ldots.$$

Rezolvare. Fiecare termen al şirului dat poate fi reprezentat în formă de diferenţă:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\ \ldots\ .$$

Deci,

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{100\cdot 101}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}.$$

Răspuns. $S=\frac{100}{101}.$

Exemlul 4. Aflaţi suma pătratelor primelor n numere naturale.

Rezolvare. După formula „cubul binomului”, avem:

$(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a +1$, de unde $3a^2 = (a + 1)^3 - a^3 - 3a - 1$.

Atribuind variabilei a consecutiv valorile 1, 2, 3, ... , n, obţinem n egalităţi numerice adevărate:

$$\begin{aligned}
3\cdot 1^2 &= 2^3 - 1^3 - 3\cdot 1 - 1,\\
3\cdot 2^2 &= 3^3 - 2^3 - 3\cdot 2 - 1,\\
3\cdot 3^2 &= 4^3 - 3^3 - 3\cdot 3 - 1,\\
3\cdot 4^2 &= 5^3 - 4^3 - 3\cdot 4 - 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
3\cdot n^2 &= (n+1)^3 - n^3 - 3\cdot n - 1.
\end{aligned}$$

Adunând parte cu parte toate aceste egalităţi (numerele 2^3, 3^3, 4^3, ... , n^3 se reduc reciproc), obţinem identitatea:

$$3\cdot(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = (n+1)^3 - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - n - 1,$$

de aici

$$3\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)=(n+1)^3-\frac{3}{2}n\cdot(n+1)-(n+1)=\frac{n}{2}\cdot(n+1)(2n+1).$$

Deci, $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n}{6}\cdot(n+1)(2n+1).$

Răspuns. $\frac{n}{6}\cdot(n+1)(2n+1).$

DORIŢI SĂ ŞTIŢI MAI MULT?

Atrageţi atenţia la expresia $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$. Aceasta este suma a primilor cinci termeni ai progresiei geometrice cu primul termen a^4 şi raţia $\frac{b}{a}$.

După formula sumei termenilor progresiei geometrice avem:

$$a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4=\frac{a^4\left(\frac{b^5}{a^5}-1\right)}{\frac{b}{a}-1}=\frac{a^5-b^5}{a-b}.$$

Deci, $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

Tot aşa se pot demonstra identităţile:
$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$.
$a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$.
Şi în genere: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.
Formulele „diferenţa pătratelor” şi „diferenţa cuburilor” sunt cazuri particulare ale acestei formule generale.

Verificaţi-vă

1. Cum de aflat suma primelor *n* numere naturale?
2. Cu ce este egală suma tuturor numerelor întregi de la –100 până la 100?
3. Oare există suma termenilor progresiei geometrice infinite, raţia căreia este mai mare decât 1?
4. Cu ce este egală suma termenilor progresiei geometrice infinite, modulul raţiei căreia este mai mic decât 1?
5. Cu ce este egală suma numărului infinit de termeni:

$$4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ ?$$

Efectuăm împreună

1 Aflaţi suma $3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$, termenii căreia sunt termeni ai progresiei geometrice.

- **Rezolvare.** Primul termen al progresiei este numărul 3, iar raţia $\frac{1}{3}$, , de aceea suma căutată $S=\frac{3}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3\cdot 3}{3-1}=4{,}5.$ **Răspuns.** 4,5.

2 Simplificaţi expresia: $\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$.

- **Rezolvare.** Înmulţim şi împărţim suma dată la 4. Obţinem:

$$\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 11}+\frac{4}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{4}{(4n-1)(4n+3)}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)}-\frac{1}{(4n+3)}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{(4n+3)}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4n+3-3}{3\cdot(4n+3)}=\frac{n}{3\cdot(4n+3)}.$$

Răspuns. $\frac{n}{3\cdot(4n+3)}$.

3 Reprezentaţi fracţia periodică 0,2(35) în formă de fracţie ordinară:

$$0,2(35)=\frac{2}{10}+\left(\frac{35}{1000}+\frac{35}{100\,000}+\ldots\right)=\frac{2}{10}+\frac{0,035}{1-0,01}=\frac{2}{10}+\frac{35}{990}=\frac{233}{990}.$$

Răspuns. $\frac{233}{990}$.

Efectuaţi oral

758. Aflaţi suma termenilor şirului:

$$-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

759. Aflaţi suma a o sută de termeni ai progresiei aritmetice în care $a_1 = 3$, $d = 0$.

760. Cu ce este egală suma: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$?

Nivelul A

761. Aflaţi suma progresiilor geometrice infinite:

a) $1,\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{8}{27},\ \ldots$;

b) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots$;

c) $9,\ -3,\ 1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \ldots$;

d) $-8,\ 4,\ -2,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \ldots$.

762. Aflaţi suma, termenii căreia sunt termeni consecutivi ai progresiilor geometrice:

a) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$;

b) $2-\frac{2}{5}+\frac{2}{25}-\frac{2}{125}+\ldots$;

c) $16-8+4-2+\ldots$;

d) $-1-\frac{3}{4}-\frac{9}{16}\ldots$.

763. ***Problema lui Arhimede.*** Aflaţi suma progresiei geometrice infinite:

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\dots.$$

764. Aflaţi suma progresiilor geometrice infinite:

a) $3+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ \dots;$ b) $6+\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\ \dots.$

765. Exprimaţi în formă de fracţie ordinară fracţia zecimală infinită periodică:
a) 0,3333...; b) 0,6666...; c) 0,111111....

766. Scrieţi în formă de fracţie ordinară fracţia zecimală infinită periodică:
a) 0,(4); b) 0,(5); c) 0,(12); d) 0,(25).

767. Se dă triunghiul echilateral cu latura de 1 cm. Mijlocurile laturilor lui sunt vârfurile triunghiului al doilea, mijlocurile laturilor lui sunt vârfurile triunghiului al treilea, etc (fig.130). Aflaţi suma perimetrelor tuturor acestor triunghiuri.

768. ***Problema deschisă.*** Formulaţi o problemă despre pătrate asemănătoare cu problema **767** şi rezovaţi-o.

769. ***Problema lui Oresme***. Demonstraţi că:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\dots=\frac{7}{4}.$$

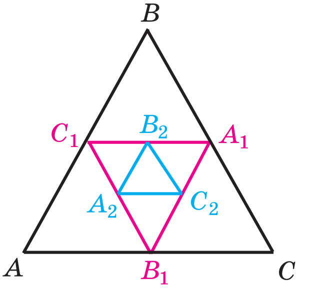


Fig. 130

Nivelul B

770. Aflaţi suma termenilor progresiilor geometrice infinite:

a) $1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ \dots;$ c) $1,\ \pi-3,\ (\pi-3)^2,\ \dots;$

b) $5,\ \sqrt{5},\ 1,\ \dots;$ d) $\frac{1}{2-\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}},\ \dots.$

771. Într-o circumferinţă cu raza *r* este înscris un triunghi regulat, în triunghi este înscrisă o altă circumferinţă, în care iarăşi este înscris un triunghi regulat, etc. Aflaţi suma perimetrelor tuturor triunghiurilor şi suma lungimilor tuturor circumferinţelor.

772. Scrieţi în formă de fracţie ordinară fracţiile zecimale infinite periodice: a) 10,(4); b) 3,0(6); c) 0,(24); d) 1,4(7).

773. Scrieţi în formă de fracţie ordinară numerele:
a) 3,(5); b) 21,(21); c) 1,1(6); d) 10,00(52).

774. În 1833 Gauss împreună cu un tânăr fizician talentat, au inventat în Germania primul telegraf electromagnetic şi au construit modelul lui, cu ajutorul căruia au unit cabinetul de fizică al universităţii din Gottingen cu observatorul. Stabiliţi corespondenţa dintre expresiile numerice (1–5) şi valorile lor (A–E) şi veţi afla numele acestui fizician renumit , veţi înţelege a cui statuie este alături cu Gauss lângă universitatea din Gottingen.

1 0,(6) + 0,(7)	**A** $1\frac{5}{9}$	*P*
2 0,(12) + 1,(5)	**B** $1\frac{67}{99}$	*E*
3 2,(36) − 1,(12)	**C** $1\frac{8}{11}$	*B*
4 2,1(6) − 0,(45)	**D** $1\frac{4}{9}$	*C*
5 0,(3) + 1,(2)	**F** $1\frac{47}{66}$	*E*

775. Se ştie că $|a| < 1$, $|x| < 1$. Aduceţi la o formă mai simplă sumele:
a) $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$; b) $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$.

776. Aflaţi suma unui număr infinit de termeni:
$$\left(8+4\sqrt{2}\right)+\left(4+2\sqrt{2}\right)+\left(2+\sqrt{2}\right)+\ldots,$$
în care fiecare este mai mic de două ori decât precedentul.

777. Scrieţi o progresie geometrică infinită descrescătoare, care are primul termen 3 şi suma termenilor egală cu 4.

778. Primul termen al progresiei geometrice infinite descrescătoare este cu 8 mai mare decât al doilea, iar suma termenilor este egală cu 18. Aflaţi trmenul al patrulea al acestei progresiei.

779. Suma termenilor progresiei geometrice infinite descrescătoare este egală cu 1,5, iar suma pătratelor lor este 1,125. Aflaţi primul termen şi raţia acestei progresiei.

780. Aflaţi sumele primilor o sută de termeni
a) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + n(-1)^{n+1} + \ldots$;
b) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + n^2(-1)^{n+1} + \ldots$.

781. Aflaţi sumele primilor patruzeci de termeni ai şirului:

a) $\frac{41}{1\cdot 2}, \frac{41}{2\cdot 3}, \frac{41}{3\cdot 4}, \frac{41}{4\cdot 5}, \ldots, \frac{41}{n(n+1)}, \ldots;$

b) $\frac{3}{1\cdot 4}, \frac{3}{4\cdot 7}, \frac{3}{7\cdot 10}, \frac{3}{10\cdot 13}, \ldots, \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}, \ldots.$

782. Demonstraţi identitatea:

$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n + (n - 1) + \ldots + 3 + 2 + 1 = n^2.$

Clarificaţi conţinutul ei geometric după figura 131.

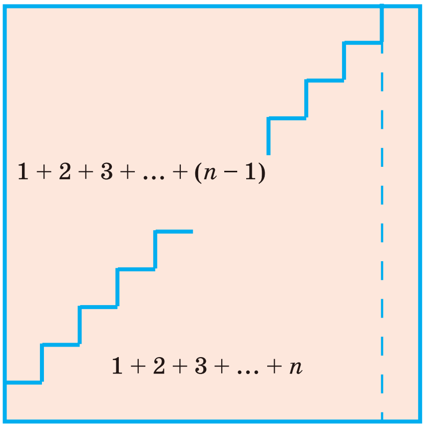


Fig. 131

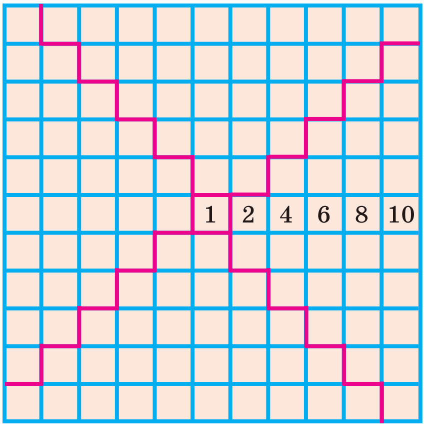


Fig. 132

783. Demonstraţi identitatea: $8 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) + 1 = (2n + 1)^2.$

Clarificaţi conţinutul ei geometric după figura 132.

Rezolvaţi ecuaţiile, care are în partea stângă suma termenilor progresiei geometrice (**784–785**).

784. $\frac{1}{x} + x + x^2 + \ldots + x^4 + \ldots = \frac{7}{2}$, dacă $|x| < 1$.

785. $1 + 2x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots = \frac{13}{6}$, dacă $|x| < 1$.

Demonstraţi identităţile (**786–787**)

786. a) $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3;$

b) $3(2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + \ldots + (2n - 2) \cdot 2n + 2n \cdot (2n + 2)) = 4n(n + 1)(n + 2).$

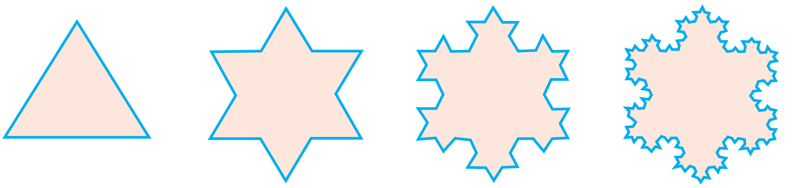
787. a) $4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) = n^2(n + 1)^2;$

b) $3(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots) + n(n + 1) = n(n + 1)(n + 2).$

788. Aduceţi la forma cea mai simplă expresiile:

a) $\frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$; b) $\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}.$

789. Perimetrul triunghiului echilateral este egal cu $3a$ (fig. 133, *a*). Împărţim latura lui în trei părţi egale şi înlocuim fiecare parte din mijloc cu o linie frântă compusă din astfel de segmente şi unghiul dintre ele egal cu 60°, aşa, cum este arătat pe figura 133, *b*. Fiecare latură a poligonului stelar format o împărţim în trei segmente egale şi din nou fiecare segment din mijloc înlocuim cu o frântă asemănătoare ş. a. m. d. Linia închisă, formată prin acest procedeu, se numeşte *fulgul lui Koch*. Considerând triunghiul echilateral ca primul termen al şirului fulgului lui Koch, scrieţi şirul: a) cantităţii laturilor fulgilor; b) lungimilor laturilor lor; c) perimetrelor lor. Care din aceste şiruri este progresie aritmetică sau geometrică?



a *b* *c* *d*

Fig. 133

790. Aflaţi lungimea laturii, perimetrul şi aria fulgului al treilea a lui Koch (fig. 133, *c*), format din triunghiul echilateral cu latura de 3 cm. Oare există fulgul lui Koch, perimetrul căruia este de două ori (de trei ori) mai mare decât perimetrul triunghiului echilateral, din care a fost format el?

Comoara succeselor

Pricep ce este progresie geometrică infinită.

✓ Pot da exemple de progresie geometrică infinită.

✓ Înţeleg ce este suma progresiei geometrice infinite ($|q| < 1$).

✓ Ştiu şi pot folosi formula sumei progresiei geometrice infinite: $S_n = \dfrac{b_1}{1-q}$, якщо $|q| < 1$

✓ Ştiu a scrie fracţia zecimală periodică în formă de fracţie ordinară: $0,(13) = \dfrac{0,13}{1-0,01} = \dfrac{13}{99}$

✓ Vreau să ştiu să aflu suma termenilor unor şiruri numerice.

PENTRU LUCRUL INDEPENDENT

Varianta I

1°. Şirul 3, 7, 11, 15, ... este o progresie aritmetică. Determinaţi termenul al *n*-lea, al 50-lea şi suma primilor cincizeci de termeni.

2°. Şirul 2, –6, 18, –54, ... este o progresie geometrică. Determinaţi termenul al *n*-lea şi suma primilor şapte termeni.

3•. Aflaţi raţia progresiei geometrice crescătoare, dacă primul, al doilea şi al patrulea termeni formează o progresie aritmetică.

Varianta II

1°. Şirul 2, 7, 12, 17, ... este o progresie aritmetică. Determinaţi termenul al *n*-lea, al 40-lea şi suma primilor patruzeci de termeni.

2°. Şirul 2, –4, 8, –16, ... este o progresie geometrică. Determinaţi termenul al *n*-lea şi suma primilor zece termeni.

3•. Aflaţi raţia progresiei geometrice crescătoare, dacă termenii al doilea, al treilea şi al cincilea formează o progresie aritmetică.

Varianta III

1°. Şirul 5, 9, 13, 17, ... este o progresie aritmetică. Determinaţi termenul al *n*-lea, al 50-lea şi suma primilor cincizeci de termeni.

2°. Şirul 3, –6, 12, –24, ... este o progresie geometrică. Determinaţi termenul al *n*-lea şi suma primilor zece termeni.

3•. Aflaţi raţia progresiei geometrice crescătoare, dacă termenii al treilea, al patrulea şi al şaselea formează o progresie aritmetică.

Varianta IV

1°. Şirul 4, 7, 10, 13, ... este o progresie aritmetică. Determinaţi termenul al *n*-lea, al 60-lea şi suma primilor şaizeci de termeni.

2°. Şirul 3, –9, 27, –81, ... este o progresie geometrică. Determinaţi termenul al *n*-lea şi suma primilor opt termeni.

3•. Aflaţi raţia progresiei geometrice crescătoare, dacă termenii al patrulea, al cincilea şi al şapelea formează o progresie aritmetică.

DATE ISTORICE

În papirusul egiptean al lui Ahmes (mileniul II p. e. n.) este următoarea problemă: „Fie că ţi s-a spus: împarte zece măsuri de orz la zece oameni astfel ca fiecare să obţină cu o $\frac{1}{8}$ de măsură mai mult decât vecinul”. Se vorbeşte despre aflarea a zece termeni ai progresiei aritmetice *a*, *a* + , *a* + , ... , *a* + suma cărora este egală cu 10 $a+\frac{1}{8},\ a+\frac{2}{8},\ldots,\ a+\frac{9}{8}$.

Babilonienii antici calculau, printre altele, suma termenilor progresiei geometrice $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9$.

Matematicenii din Grecia Antică ştiau încă în sec. V p. e. n. că

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1),$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = n^2.$$

Regulile de aflare a sumei progresiei geometrice sunt în „Bazele” lui Euclid.

Arhimede a dedus regulile de aflare a sumei pătratelor primelor *n* numere naturale, de asemenea ştia să calculeze suma termenilor progresiilor geometrice infinite descrescătoare. Corelaţia

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2,$$

care dă posibilitatea de a calcula suma cuburilor primelor *n* numere naturale a descoperit-o în sec. XI matematicianul din Bagdad Abu Becri.

Termenul progresia provine de la cuvântul latin *progredior* – „merg înainte”; *progression* – „progresare”, „succes”, „întărire treptată”.

În secolul XVII pentru notarea progresiei aritmetice şi geometrice au început să folosească respectiv semnele ∺ (a introdus V. Otred, 1631) şi ÷ (a răspândit T. Lanii, 1692).

Formula sumei progresiei geometrice infinite a dedus E. Torricelli, iar A. Take a publicat acest rezultat în lucrarea „Teoria şi practica aritmeticii, argumentată scrupulos” (1656).

O metodă originală de aflare a sumelor a *n* termeni a multor şiruri numerice, ce

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n + 1)(n + 2),$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{1}{2}n(n + 1),$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

a elaborat matematicianul ucrainean V. Ia. Buneakovski (vezi p. 68)

Esenţialul în capitol

Şir numeric este funcţia dată pe mulţimea tuturor sau a primelor n numere naturale.

Progresie aritmetică se numeşte şirul al cărui fiecare termen, începând cu al doilea, este egal cu precedentul, la care se adună unul şi acelaşi număr constant pentru această progresie. Acest număr se numeşte *raţia* progresiei aritmetice date şi se notează cu litera d.

Primii termeni consecutivi ai progresiei aritmetice se marchează prin literele a_1, a_2, a_3, ... , a_n, ...

Termenul al n-lea: $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Suma termenilor progresiei aritmetice finite este egală cu semisuma termenilor ei extremi, înmulţită cu numărul termenilor:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ sau } S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Progresie geometrică se numeşte şirul numeric al cărui fiecare termen, începând cu al doilea, este egal cu termenul precedent înmulţit cu unul şi acelaşi număr constant pentru progresia dată. Acest număr se numeşte *raţia* progresiei şi se notează cu litera q. Se consideră că $b_1 \neq 0$ şi $q \neq 0$.

Dacă primii termeni ai progresiei geometrice sunt b_1, b_2, b_3, ... , b_n, ... , atunci termenul al n-lea este $b_n = b_1q^{n-1}$.

Suma primilor n termeni ai progresiei geometrice cu condiţia că $q \neq 1$ se află după formulă:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ sau } S_n = \frac{b_nq - b_1}{q - 1},\ q \neq 1.$$

Dacă $q = 1$, atunci $S_n = nb_1$.

Dacă modulul raţiei progresiei geometrice infinite este mai mic decât 1, atunci suma tuturor termenilor se determină după formula:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Cu ajutorul ultimei formule fracţiile zecimale infinite periodice se pot scrie sub formă de fracţii ordinare:

$$0,(5) = 0,555\ldots = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \ldots = \frac{0,5}{1 - 0,1} = \frac{5}{9}.$$

CLARIFICĂM SUCCESELE

Sarcini în formă de test nr. 3

1 Aflaţi termenul al şaptelea al progresiei aritmetice, dacă $a_6 + a_8 = 20$.
a) 5; b) 20; c) 10; d) 15.

2 Calculaţi primul termen al progresiei geometrice, dacă $b_3 = 4$, a $b_4 = 2$.
a) 2; b) 4; c) 8; d) 16.

3 Aflaţi termenul al cincilea al şirului, definit prin formula $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$.
a) 162; b) 54; c) 18; d) 93.

4 Aflaţi suma progresiei geometrice infinite:
$2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, \dots$.
a) $\frac{3}{2}$; b) $1\frac{1}{2}$; c) $-\frac{3}{2}$; d) 1.

5 Aflaţi suma tuturor numerelor pare de două cifre.
a) 2408; b) 2450; c) 2440; d) 2430.

6 Aflaţí produsul termenilor progresiei geometrice $b_3 \cdot b_4 \cdot b_5$, dacă $b_4 = 2$.
a) 4; b) 14; c) 8; d) 60.

7 Scrieţi formula termenului al n-lea al progesiei aritmetice 2, 6, ...
a) $a_n = n^2 + n$; b) $a_n = 4n - 2$; c) $a_n = 4n + 2$; d) $a_n = n - n^2$.

8 Aflaţi suma primilor şase termeni ai progresiei geometrice, dacă $b_1 = 3$, $q = 2$.
a) 197; b) 90; c) 189; d) 93.

9 Care două numere trebuie intercalate între numerele 2 şi 31,25 ca ele împreună să formeze o progresie geometrică?
a) 1 şi 7; b) 3 şi 4,5; c) 2,5şi 8; d) 3,5 şi 4.

10 Sub care număr în progresia geometrică 3, 6, ... se conţine numărul 384?
a) 7; b) 9; c) 8; d) 10.

Sarcini-tip pentru lucrarea de control nr. 3

1° În progresia aritmetică $a_1 = 4$, $a_2 = 14$.
Aflaţi: a) d; b) a_5; c) S_{10}.

2° În progresia geometrică $b_1 = 16$, $b_2 = 8$.
Aflaţi. a) q; b) b_6; c) S_5.

3° Aflaţi termenul al optulea al progresiei aritmetice, dacă $a_2 + a_{14} = 20$.

4° Aflaţi suma progresiei geometrice infinite:
$16, -4, 1, -\frac{1}{4}, \ldots$.

5• Reprezentaţi în formă de fracţie ordinară:
a) 0,(2); b) 0,(25); c) 0,3(8).

6• Aflaţi numărul termenilor n al progresiei geometrice în care
$b_1 = \frac{3}{2}$, $b_n = 768$, $S_n = 1534{,}5$.

7• Începând cu care număr termenii progresiei aritmetice −3,6; −3,3; −3, ... vor fi pozitivi?

8• Aflaţi suma tuturor numerelor naturale mai mici decât 100 şi care se divid cu 6.

9•• O fetiţă într-o livadă a rupt o piersică, a doua – două, iar fiecare următoare – cu o piersică mai mult. Apoi toate fetiţele, care au rupt piersice, le-au împărţit egal între ele şi fiecare a primit câte şase piersice. Câţi copii au rupt piersice?

10•• Suma primilor n termeni ai progresiei geometrice se poate afla după formula $S_n = 2(5^n - 1)$.

Aflaţi: a) S_4; b) a_5.

Capitolul 4

Bazele combinatoriei, teoriei probabilităţilor şi statisticii

În practică oamenii permanent au de lucru cu diferite fenomene aleatorii sau cu speranța lor. De fiecare dată apare întrebarea, dacă se va realiza acel fenomen sau altul şi în ce condiții. În societatea infomațională contemporană e important de ştiut a obține repede informații din diferite surse şi corect de le analizat. În timpul rezolvării multor probleme practice apare problema selecției unei totalități de obiecte din cele date după anumite proprietăți ale lor, calcularea combinațiilor posibile, etc. Aceste şi alte întrebări se examinează în domenii separate ale matematicii – teoria probabilităților, statistică şi combinatorie.

Studiind acestt capitol, aveți posibilitatea să vă familiarizați cu noțiunile fundamentale ale combinatoriei, teoriei probabilităților şi statisticii.

În acest capitol veți studia aşa teme:

§ 19 Reguli principale ale combinatoriei
Basic Rules for Combinatorics

§ 20 Frecvență şi probabilitate ale evenimentului aleatoriu
The Frequency and Probability of a Random Event

§ 21 Cunoştințe despre statistică
Information on Statistics

Aplicăm competenţele obţinute

Pentru a înțelege şi a însuşi bine tema nouă, ne amintim:
– Ce este mulțime şi submulțime.
– Ce e cifră şi număr.
– Ce este suma numerelor a şi b. $a + b$
– Ce este produsul numerelor a şi b. $a \cdot b$

§ 19 Reguli principale ale combinatoriei

Combinatoria este un capitol al matematicii, consacrat rezolvării problemelor selectării şi amplasării elementelor mulțimii finite conform regulilor date.

Examinăm două reguli principale, cu ajutorul cărora se rezolvă multe probleme din combinatorie.

Exemplul 1. În oraşul N sunt 2 universități – politehnică şi economică. Un abiturient preferă trei facultăți la universitatea politehnică şi două la cea economică. Câte posibilități are abiturientul pentru a intra la universitate?

Rezolvare. Marcăm prin litera A mulțimea facultăților, pe care abiturientul le-a ales în universitatea politecnică, iar cu litera B – în cea economică. Atunci $A = \{m, n, k\}$, $B = \{p, s\}$. Deoarece aceste mulțimi nu au elemente comune, atunci abiturientul are în genere $3 + 2 = 5$ posibilități, pentru a intra la universitate.

Situația descrisă poate fi generalizată în formă de afirmație care se numeşte *regula sumei*.

Dacă elementul unei mulţimi oarecare A se poate alege prin m procedee, iar elementul mulţimii B – prin n procedee, atunci elementul din mulţimea A sau din mulţimea B poate fi ales prin $m + n$ procedee.

Regula sumei poate fi răspândită şi pe o cantitate mai mare de mulțimi.

Exemplul 2. O familie, planificând odihna de vară, a ales următoarele locuri: în Odesa – 1, în Scadovsk – 3, în Iaremcea – 2, în Zatoca – 2. Câte posibilități de alegere pentru odihna de vară are familia?

Rezolvare. Deoarece toate bazele de odihnă sunt diferite, atunci pentru a rezolva problema este suficient de aflat suma elementelor tuturor mulţimilor: 1 + 3 + 2 + 2 = = 8. Deci, familia poate alege o variantă de odihnă din cele 8 posibile.

Examinăm probleme, care se referă la altă regulă.

Exemplul 3. Din punctul *A* în punctul *B* duc trei cărări, iar din *B* în *C* – două. Pe câte trasee se poate trece din *A* în *C*?

Rezolvare. Pentru a trece din *A* la *B* trebuie aleasă una din trei cărări: 1, 2 sau 3 (fig. 134). După aceasta trebuie aleasă una din alte două cărări: 4 sau 5. În total, din *A* în *C* duc 6 trasee, deoarece 3 · 2 = 6. Toate traseele pot fi marcate cu ajutorul perechilor: (1; 4), (1; 5), (2; 4), (2;5), (3; 4), (3;5

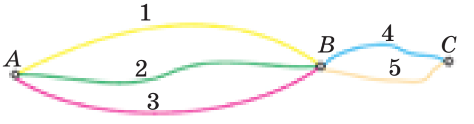


Fig. 134

Generalizăm situaţia descrisă.

Dacă prima componentă a perechei se poate alege prin *m* procedee, iar a doua prin *n* procedee, atunci o astfel de pereche se poate alege prin *mn* procedee.

Aceasta este *regula produsului*, care deseori este numită regula principală a combinatoriei. Atrageţi atenţia: se cercetează perechile ordonate compuse din diferite componente.

Regula produsului se respândeşte şi pe grupe ordonate din trei, patru şi orice alte mulţimi finite ordonate. Printre altele, *dacă prima componentă a unei grupe ordonate din trei elemente se poate alege prin m procedee, a doua – prin n procedee, iar a treia – prin k procedee, atunci o astfel de grupă ordonată de trei se poate alege prin m · n · k procedee.* De exemplu, dacă o ospătărie pentru prânz a pregătit două mâncări la felul întâi – borş (b) şi supă (sp), 3 la felul doi – chiftele (c), colţunaşi (co), sarmale (s) şi 2 deserturi – prăjituri (p) şi îngheţată (î), atunci în total mâncări din trei feluri ospătăria poate propune 12 diferite combinaţii, deoarece 2 · 3 · 2 = 12.

Situaţiei descrise îi corespunde diagrama reprezentată pe figura 135. Astfel de diagrame se numesc *diagrame-arbori*.

Exemplul 4. Câte trenuri diferite pot fi formate din 6 vagoane dacă fiecare vagon se poate plasa pe orice loc?

Rezolvare. Primul se poate plasa orica-

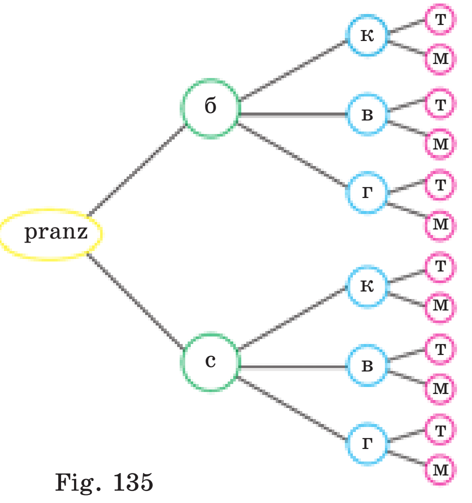


Fig. 135

re din 6 vagoane. Avem 6 alegeri. Al doilea vagon se poate alege din 5 vagoane rămase. De aceea, conform cu regula înmulțirii, primele două vagoane se pot alege prin $6 \cdot 5$ procedee. Al treilea vagon se poate alege din cele 4 care au rămas. De aceea primele trei vagoane se pot alege prin $6 \cdot 5 \cdot 4$ procedee. Continuând cugetările asemănătoare, obținem răspunsul: în total se pot forma $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ trenuri diferite.

DORIȚI SĂ ŞTIȚI MAI MULT?

Atrageți atenția la rezolvarea ultimei probleme. Ea s-a redus la calculul produsului tuturor numerelor naturale de la 1 până la 6. În combinatorie produse asemănătoare se calculează des.

Produsul tuturor numerelor naturale de la 1 până la *n* se numeşte *n-factorial* şi se notează ***n*!**

De exemplu,

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

S-a convenit că $1! = 1$ şi $0! = 1$.

Verificaţi-vă

1. Care probleme se numesc de combinatorie?
2. Ce este analiza combinatorie?
3. Formulați regula sumei.
4. Formulați regula principală a combinatoriei.
5. Dați exemple de diagrame-arbori.
6. Ce este factorialul unui număr? Cum se notează el?

Efectuăm împreună

1 La întrecerile de baschet pentru ocuparea locului întâi au participat echipe din 12 şcoli. Prin câte procedee pot fi distribuite primele două locuri?

- **Rezolvare.** Primul loc poate obține una din 12 echipe. După ce s-a determinat posesorul primului loc, locul doi îl poate obține una din 11 echipe. Deci, cantitatea totală a procedeelor prin care pot fi distribuite primele două locuri este egal cu $12 \cdot 11 = 132$.

2 Câte numere de patru cifre pot fi formate din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, dacă nici o cifră nu se repetă?

- **Rezolvare.** Prima cifră a numărului poate fi una din cinci cifre: 1, 2, 3, 4, 5. Dacă prima cifră este aleasă, atunci a doua se poate alege prin 5 moduri, a treia prin 4, a patra prin 3 moduri. Conform regulei produsului, cantitatea totală a modurilor este egală cu $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.

Răspuns: 300.

Efectuaţi oral

791. Sunt două cifre: 1 şi 9. Prin câte procedee din aceste cifre se pot compune:
a) un număr de o cifră; b) un număr de două cifre, dar cifrele în număr nu se repetă; c) un număr de două cifre, dar cifrele în număr pot să se repet.

792. Într-o clasă sunt 11 băieți şi 10 fete. În câte moduri se poate delega un elev în comitetul şcolar pentru autoadministrare?

793. Într-o clasă sunt 11 băieți şi 10 fete. În câte moduri se pot delega doi elevi în comitetul şcolar pentru autoadministrare?

794. Într-o clasă sunt 11 băieți şi 10 fete. În câte moduri se pot delega o fată şi un băiat în comitetul şcolar pentru autoadministrare?

Nivelul A

795. Într-un magazin sunt trei feluri de prăjituri şi zece feluri de bomboane. Vasile vrea să cumpere surioarei o prăjitură sau bomboane. În câte moduri el poate face aceasta?

796. Pentru terminarea completării expediției în Antarctida suplimentar s-au examinat cererile de la 10 pretendenți la funcția de medic, de la 5 pretendenți la funcția de bucătar şi de la 3 pretendenți la funcția de tehnician. Nici unul din ei n+a pretins la două sau mai multe posturi. Prin câte procedee se poate completa un loc liber în expediție?

797. În câte feluri se pot aşeza patru copii pe o bancă?

798. Spre culmea muntelui duc 4 cărări. Pe câte trasee un turist se poate urca pe munte şi coborî de pe el, dacă va alege diferite cărări pentru urcare şi coborâre?

799. Lenuța are 2 fustițe şi 3 bluze brodate. Câte seturi diferite de îmbrăcăminte ea poate selecta, pentru a cânta în cor?

800. O ospătărie a pregătit pentru micul dejun 3 feluri de mâncări (A, B, C) şi două de băuturi (M, K). Câte mâncări din două feluri diferite se pot alege la micul dejun? Alcătuiți diagrama-arbore respectivă.

801. În câte moduri 5 persoane pot forma rândul la casierie?

802. Câte propoziții diferite se pot scrie cu cuvintele «noi», «iubim», «să citim»? Dar cu cuvintele «noi», «mult», «iubim», «să citim»?

Nivelul B

803. În câte feluri o fetiță poate înșira pe ață 8 mărgele diferite?

804. Câte numere de trei cifre se pot forma din cifrele 1, 2, 3, 4, 5?

805. ***Problemă deschisă*.** Compuneți o problemă după figura 136 și rezolvați-o.

806. Opt prieteni au hotărât să petreacă un turnir de șah astfel, ca fiecare să joace cu fiecare o partidă. Câtre partide de șah vor juca?

807. O ospătărie a pregătit pentru prânz 3 mâncări la felul întâi (*A, B, C*), 3 la felul doi (*a, b, c*) și 3 la felul trei (*x, p, y*). Câte mâncări diferite din trei feluri se pot alege la prânz? Alcătuiți diagrama-arbore respectivă.

808. Se crează emblema școlii, elementul căreia trebuie să fie un poligon de o culoare. Câte astfel de embleme se pot compune, dacă vom examina trei figuri (triunghiul, pătratul, hexagonul) și 4 culori (albastru, verde, galbenă, roșie)?

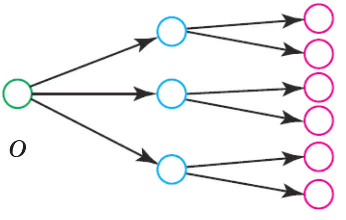


Fig. 136

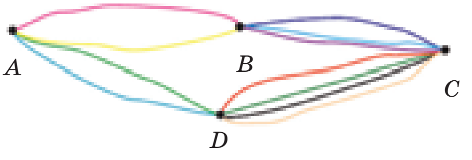


Fig. 137

809. Câte «cortegii» diferite poate alcătui un băiețel din patru jucării–automobile de culorile albă, galbenă, albastră și roșie? Alcătuiți diagrama-arbore respectivă.

810. *Problemă deschisă.* Compuneți o problemă după figura 137 și rezolvați-o.

811. Spre mare duc 7 drumuri. În câte moduri o persoană aflată la odihnă poate ajunge la mare și veni înapoi? Examinați cazurile, când mișcarea spre mare și de la mare se efectuează:

a) pe un drum; b) pe drumuri diferite;

c) pe unul din două moduri precedente?

812. La oficiul poștal sunt trei feluri de plicuri, două feluri de timbre și patru feluri de felicitări, care se pun în aceste plicuri. Câte procedee diferite există, pentru a alcătui o felicitare?

813. Miercuri după orar în clasa a 9-a sunt 6 lecții diferite, printre care algebra și geometria. În câte feluri se poate alcătui orarul astfel, ca algebra și geometria să fie alături?

814. Marți după orar în clasa a 11-B sunt 7 lecții diferite, printre care fizica şi astronomia. În câte feluri se poate alcătui orarul astfel, ca:

a) fizica şi astronomia să fie alături;

b) fizica şi astronomia să nu fie alături?

815. Câte:

a) numere pare de patru cifre se pot compune din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, dacă cifrele nu pot să se repete?

b) numere impare de patru cifre se poate compune din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, dacă cifrele nu pot să se repete?

816. Într-o pizzerie se pregăteşte pizza mare şi mică cu bază groasă şi subțire. Câte tipuri de pizza se poate comanda în această pizzerie, dacă pentru pizza subțire se folosesc trei feluri de umpluturi, iar pentru cea groasă – patru?

817. Calculați:

а) $10! : 5!$; б) $13! : 10!$; в) $20! : 25!$; г) $100! : 97!$.

818. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

а) $n! : (n - 1)$; б) $(n - 1)! : n!$; в) $(n + 1)! : (n - 1)!$.

Exerciţii pentru repetare

819. O librărie a incasat în primul cvartal 700,46 mii grn. Se ştie, că în ianuarie a incasat cu 49,8 mii grn. mai mult decât în februarie, iar în martie – cu 178,92 mii grn. mai puțin decât în februarie. Ce venit a avut librăria în martie?

820. Rezolvați ecuațiile:

а) $x^2 = 5$; б) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

821. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

1) $2a^3b\left(-\frac{1}{2}ab\right)a^2b$;

2) $3ak^2\left(-2kx^3\right)k^3$;

3) $\left(-\frac{2}{3}a^2b\right)b^2a\cdot\frac{9}{4}\left(a^2b^2\right)^3$;

4) $-2\frac{1}{3}a^3c^2\cdot\frac{1}{7}ac^2\cdot6abc$.

Comoara succeselor

✓Ştiu regulile principale ale combinatoriei.
✓ Deosebesc regula sumei şi regula produsului.
✓Ştiu a aplica regula sumei combinatoriei.
✓Ştiu a aplica regula produsului combinatoriei.

Aplicăm competenţele obţinute

Pentru a înțelege şi a însuşi bine tema nouă, ne amintim:

— ce este raportul numerelor m şi n $\boxed{m : n \text{ sau } \frac{m}{n}}$

— proprietățile fracției ordinare $\frac{m}{n}$, $m \in N$, $n \in N$:

$\boxed{\text{dacă } m < n, \text{ atunci } \frac{m}{n} < 1, \text{ dacă } m = n, \text{ atunci } \frac{m}{n}} = 1.$

§ 20 Frecvenţă şi probabilitate ale evenimentului aleatoriu

Teoria probabilităților este una din ramurile matematicii actuale. Noțiunile cele mai importante ale ei sunt experiența (proba, observația), *evenimentul* (rezultatul probelor) şi *probabilitatea evenimentului.* În tabel sunt date exemple de experiențe şi rezultate separate ale evenimentelor.

Experienţa	**Evenimentul**
Aruncarea monedei	Moneda a căzut cu stema în sus
Scrierea lucrării de control	Ați primit 12 puncte
Aşteptarea dimineții	Dimineața a început
Aruncarea zarului	Au apărut 7 puncte

Ultimul eveniment este imposibil, doarece pe fețele zarului nu sunt şapte puncte. Evenimentul 3 este cert (sigur, incontestabil), deoarece după noapte totdeauna urmează dimineața. Evenimentele 1 şi 2 sunt aleatorii.

În genere, evenimentul se numeşte *imposibil*, dacă el nu se poate realiza niciodată, iar eveniment *sigur* – acel care se realizează totdeauna. Dacă evenimentul se poate realiza sau nu se poate realiza el se numeşte *aleatoriu.*

Evenimentele se notează cu litere mari ale alfabetului latin *A, B, C,...,* sau cu o literă a alfabetului latin cu index: $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$. Conținutul evenimentului se dă în acolade. De exemplu, evenimentul al 3-a poate fi scris aşa:

$$A_3 = \{\text{dimineața a început}\}.$$

A spune la început că evenimentul aleatoriu va avea loc sau nu va avea loc, nu se poate. Dacă evenimentul dat are caracter de masă, se realizează de multe ori şi în aceleaşi condiții, atunci probabilitatea apariției lui poate fi caracterizată printr-un număr.

Să examinăm experiența care constă în aruncarea monedei omogene simetrice şi fixarea părții cu care a căzut moneda în sus. Ea poate fi petrecută în unele şi aceleaşi condiții de un număr arbitrar de ori. În tabel se arată rezultatele a opt serii de încercări de acestea:.

Numărul seriei	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Numărul aruncărilor, n	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000
Numărul stemelor, $n(r)$	501	986	1495	2036	2516	3004	3504	3997
Frecvența relativă a apariției stemei, $\frac{n(\text{г})}{n}$	0,501	0,493	0,498	0,509	0,503	0,501	0,501	0,500

Numărul din ultimul rând al tabelei pentru fiecare serie se determină ca raportul numărului de apariții al stemei la numărul total de aruncări ale monedei în această serie de probe. El denumeşte ***frecvența relativă a apariției evenimentului***. Dacă vom reprezenta datele tabelului grafic (fig. 138), atunci putem observa, că frecvența relativă a apariției stemei oscilează lângă numărul 0,5 şi puțin se deosebeşte de el.

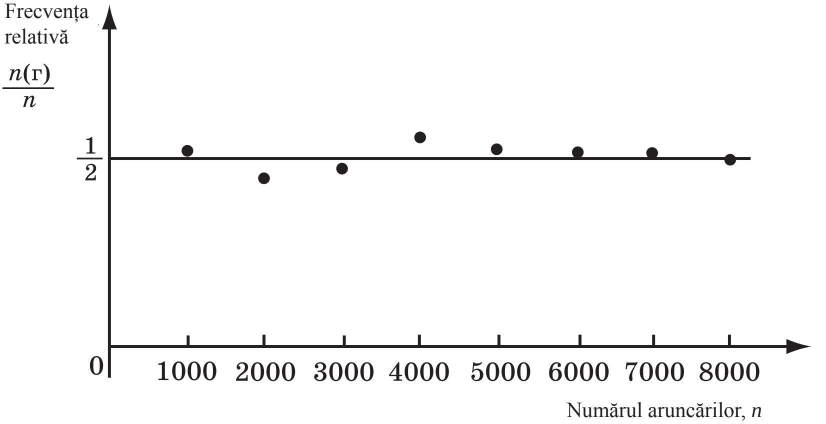


Fig. 138

Dacă în n probe evenimentul X se realizează de m ori, atunci fracția $\frac{m}{n}$ determină frecvența relativă a apariției evenimentului X. Numărul lângă care oscilează frecvența relativă a evenimentului exprimă *probabilitatea* acestui eveniment şi se notează prin litera P (de la cuvântul englez *probability* – probabilitate).

Acest termen l-a introdus B. Pascal. În scrisoarea adresată lui P. Fermat de la 28 octombrie a. 1654 el scria: «Majoritatea oamenilor consideră, că dacă ei nu au cunoştinţe depline despre ceva (dar noi niciodată nu avem cunoştinţe depline), atunci ei în genere despre aceasta nu ştiu nimic. Eu sunt convins, că aceste idei sunt profund greşite. Cunoştinţele parţiale sunt tot cunoştinţe şi convingerile incomplete tot au o valoare oarecare, mai ales când îmi este cunoscut gradul acestei convingeri. Cineva poate întreba: «Oare se poate măsura cu un număr măsura convigerii?». «Fireşte, – voi răspunde eu, – persoanele care joacă în cărţi justifiă încrederea lor anume aşa. Când jucătorul aruncă zarul, el nu ştie câte puncte vor apărea. Însă ceva el tot ştie. De exemplu, aceea, că toate şase numere – 1, 2, 3, 4, 5, 6 – au aceeaşi şansă la succes. Dacă ne vom înţelege să considerăm posibilitatea apariţiei evenimentului sigur drept unitate, atunci posibilitatea apariţiei lui şase, ca şi a fiecărui din celelalte cinci, se va exprima prin fracţia $\frac{1}{6}$» Deodată menţionez, că măsura posibilităţii (convingerii) evenimentului eu am numit-o probabilitate. M-am gândit mult la selectarea cuvântului respectiv şi, în sfârşit, consider că anume el este cel mai expresiv».

B. Pascal determina probabilitatea unor evenimente fără efectuarea probelor. Aceasta se poate face atunci, când rezultatele probelor formează o mulţime finită şi sunt egal posibile, adică în condiţiile probei petrecute nu erau motive de a considera posibilitatea apariţiei unei consecinţe mai mari sau mai mici în comparaţie cu altele.

Examinăm un **exemplu.** Se aruncă o dată zarul (cub omogen) (fig. 139) şi se fixează suma punctelor de pe faţa cu care a căzut în sus. Rezultatul probei pot fi 6 evenimente diferite:

E_1 = {va cădea un punct};
E_2 = {vor cădea două puncte};
E_3 = {vor cădea trei puncte};
E_4 = {vor cădea patru puncte};
E_5 = {vor cădea cinci puncte};
E_6 = {vor cădea şase puncte}.

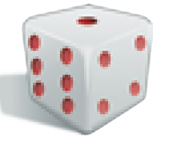


Fig. 139

Aceste şase evenimente cuprind şi epuizează toate rezultatele posibile ale experienţei. Ele sunt *reciproc incompatibile*, fiindcă de fiecare dată cade numai un număr de puncte. Toate şase evenimente sunt *egal posibile*, deoarece cubul se consideră omogen de o formă regulată şi sprinteneala jucătorului se exclude. În acest caz se spune, că pentru realizarea fiecărui eveniment există o şansă din şase.

Fiecare eveniment E_1–E_6 din probele descrise se numesc elementare, iar toată mulţimea lor – spaţiul evenimentelor elementare

.*Eveniment elementar* se numeşte fiecare consecinţă posibilă a experienţei probabilistice.

Mulţimea tuturor rezultatelor experienţei se numeşte *spaţiul evenimentelor elementare* şi se notează prin litera grecească Ω (omega).

Dacă spaţiul evenimentelor elementare pentru un experiment oarecare este compus din n evenimente reciproc incompatibile egal posibile, atunci probabilitatea fiecărui eveniment este egală cu $\frac{1}{n}$. .

De exemplu, probabilitatea, că pe faţa zarului aruncat vor fi 5 puncte, este egală cu $\frac{1}{6}$. Iar probabilitatea, că moneda aruncată va cădea cu stema în sus, este egală cu $\frac{1}{2}$.

Probabilitatea evenimentului A se notează cu simbolul $P(A)$. Dacă vom nota cu litera

A primul eveniment, iar al doilea cu B, atunci $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{2}$.

Există evenimente care nu sunt elementare. Examinăm, de exemplu, următorul eveniment: C = {apariţia piesei de domino cu 8 puncte}.

Deoarece sunt 28 de piese de domino, evenimentul legat cu selectarea unei piese se epuizează cu 28 de rezultate egal posibile şi independente. Deci, spaţiul evenimentelor elementare pentru probele date se compune din 28 de evenimente elementate E_i, unde i = 1, 2, ..., 28. Evenimentul C se poate realiza, dacă se realizează unul din trei evenimente elementare (fig. 140):

1) E_1 = {apariţia piesei };
2) E_2 = {apariţia piesei };
3) E_3 = {apariţia piesei }.

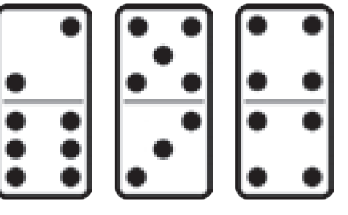


Fig. 140

Se spune că evenimentului C îi favorizează trei evenimente elementare (E_1, E_2, E_3) din 28 posibile, de aceea $P(C)=\frac{3}{28}$.

Examinăm cazul general. Fie că experienţa are un număr finit (n) de rezultate egal posibile şi incompatibile şi A – un eveniment aleatoriu oarecare legat cu experienţa dată. Vom numi evenimentul elementar E_n *favorizabil pentru evenimentul aleatoriu* ***A*,** dacă apariţia evenimentului E_n în rezultatul probelor aduce la apariţia evenimentului A. Dacă vom nota numărul evenimentelor elementare favorizabile evenimentului A cu $n(A)$, atunci probabilitatea evenimentului aleatoriu A se determină după formula:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n}.$$

Exemplu. Din 28 de piese de domino răsturnate se ia la întâmplare una. Care este probabilitatea evenimentului, că pe ea în total vor fi:

a) 2 puncte (evenimentul A); b) 4 puncte (evenimentul B); c) 11 puncte (evenimentul C)?

Rezolvare. Există 2 piese de domino cu două puncte $\left(\frac{0}{2}; \frac{1}{1}\right)$, 3 piese cu patru puncte $\left(\frac{0}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{2}\right)$, 1 piesă cu 11 puncte . În total sunt 28 de posibilități de a alege, doar se poate lua orice piesă din 28. Deci,

$$P(A) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}, \quad P(B) = \frac{3}{28}, \quad P(D) = \frac{1}{28}.$$

Să enumărăm cele mai importante proprietăți ale probabilității evenimentului aleatoriu:

1. Dacă C este un eveniment imposibil, atunci $P(C) = 0$.
2. Dacă B este un eveniment sigur, atunci $P(B) = 1$.
3. Dacă X este un eveniment aleatoriu, atunci $0 \le P(X) \le 1$.
4. Dacă $E_1, E_2, E_3, ..., E_n$ sunt evenimente elementare, care epuizează probele unei experiențe, atunci:

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + ... + P(E_n) = 1.$$

DORIȚI SĂ ȘTIȚI MAI MULT?

Teoria probabilităților, ca și geometria, se poate construi pe baza *sistemului de axiome*. Se introduc noțiunile fundamentale, relațiile dintre ele și se formulează axiomele. Toate celelalte noțiuni și afirmații se bazează pe sistemul de axiome, alcătuit fără a ține cont de intuiție și experiență. Sistemul de axiome ale teoriei probabilităților se poate construi prin diferite procedee. Aceasta în diferite timpuri au făcut-o G. Bolman (1908), S. N. Bernștein (1917), R. Mizes (1919, 1928), A. Lomnițki (1923). Cel mai bun sistem de axiome se consideră sistemul propus în

a. 1929 de A. M. Kolmogorov, cu care vă veți familiariza în clasele superioare și în instituțiile superioare de învățământ.

Procedeul axiomatic dă posibilitate de a aplica teoria probabilităților la rezolvarea diferitor probleme teoretice și practice, dar și a determina limita aplicării ei.

Verificați-vă

1. Care evenimente se numesc aleatorii?
2. Dați exemple de evenimente aleatorii.
3. Care evenimente se numesc imposibile, sigure?
4. Dați exemplu de spațiu al evenimentelor elementare.
5. Care evenimente se numesc elementare? Dați exemple.
6. Cu ce este egală probabilitatea evenimentului aleatoriu?
7. Cu ce este egală probabilitatea evenimentului sigur? Dar a celui imposibil?
8. Ce este frecvența relativă a evenimentului?

Efectuăm împreună!

1 Avem două cuburi, care au câte 2 fețe respectiv de culoare roşie, galbenă şi verde. Ele sunt aruncate împreună şi se fixează culorile fețelor, pe care cad ambele cuburi. Scrieți spațiul evenimentelor elementare pentru această experiență.

- **Rezolvare.** Dacă ambele cuburi au căzut pe fețele galbene, atunci acest eveniment îl vom marca cu simbolul *gg*. Dacă unul cade pe fața galbenă, dar al doilea – pe roşie, atunci evenimentul îl vom marca *gr*. Atunci spațiul evenimentelor elementare pentru experiența dată va fi W = {*gg, rr, vv, gr, gv, vr*}.

2 Formând un număr de telefon, un abonat a uitat ultima cifră şi a format-o la întâmplare. Care este probabilitatea faptului că el a format corect acest număr?

- **Rezolvare.** Numărul tuturor cazurilor posibile $n = 10$, iar numărul cazurilor favorabile $m = 1$. De aceea probabilitatea căutată este $P=\frac{1}{10}$.

3 Se aruncă două zaruri. Care este probabilitatea evenimentului, că pe ele vor cădea punctele, suma cărora va fi egală cu: a) 4; b) 5; c) 8?

- **Rezolvare.** Fiecărui eveniment examinat îi punem în corespondență un număr de două cifre, cifrele cărui corespund punctelor, care au apărut la căderea primului şi celui de al doilea zaruri. Sunt posibile următoarele cazuri:

11,	12,	13,	14,	15,	16,
21,	22,	23,	24,	25,	26,
31,	32,	33,	34,	35,	36,
...	...	...	...	...	...
61,	62,	63,	64,	65,	66.

Deci, pentru experiența dată spațiul evenimentelor elementare W conține 36 de elemente.

a) Suma punctelor egală cu 4 o dau trei numere: 13, 22 şi 31. Avem 3 evenimente elementare favorabile din 36. De aceea probabilitatea căutată:

$$P(4)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

b) Suma punctelor egală cu 5 dau patru perechi: 14, 23, 32 şi 41, deci:

$$P(5)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

c) Suma punctelor egală cu 8 dau 5 perechi: 26, 35, 44, 53, 62, deci:

$$P(8)=\frac{5}{36}.$$

Efectuaţi oral

822. Cum este din punctul de vedere al teoriei probabilităților evenimentul: a) la căderea zarului vor apărea cinci puncte; b) copilul s-a născut la 30 februarie; c) la permutarea literelor în cuvântul «cal» s-a obținut cuvântul «lac»; d) la extragerea aleatorie un număr de două cifre va fi mai mic decât 100; e) va ieşi la iveală, că graficul funcției impare construit este simetric față de originea de coordonate.

823. Care este probabilitatea evenimentului că la aruncarea zarului el va indica: a) două puncte; b) un număr par de puncte; c) un număr de puncte ce se divide cu 3?

824. Se ia la întâmplare o piesă de domino. Care este probabilitatea evenimentului că ea va fi: a) dublet; b) nu va fi dublet?

825. Descrieți spațiul evenimentelor elementare pentru experiența dată:

a) stabilirea zilei de naştere a unui elev selectat arbitrar; b) determinarea numărului soluțiilor ecuației pătrate; c) stabilirea numărului de puncte comune ale circumferinței şi hiperbolei construite într-un sistem de coordonate.

Nivelul A

826. Aflați probabilitatea evenimentului că prietenul s-a născut:

a) miercuri; b) primăvara; c) în septembrie; d) pe 1 ianuarie.

827. În clasa a 9–A învață 20 de elevi din care 25 % sunt eminenți. Este invitat un elev la întâmplare, pentru a demonstra teorema sinusurilor. Care este probabilitatea evenimentului că el va fi eminent?

828. Formând un număr de telefon, un abonat a uitat prima cifră şi a format-o la întâmplare. Care este probabilitatea faptului că el a format corect acest număr?

829. Un cub din lemn vopsit din toate părțile a fost tăiat în 125 de cuburi egale şi s-au amestecat într-o traistă. Care este probabilitatea evenimentului, că, luând din traistă un cub la întâmplare, veți lua cubul la care sunt vopsite: a) trei fețe; b) numai două fețe; c) numai o față (fig. 141)?

830. Din litere scrise pe fişe separate s-a alcătuit cuvântul IDENTITATE. Apoi aceste fişe s-au întors, s-au amestecat şi s-a luat la întâmplare una din ele. Care este probabilitatea evenimentului că pe ea s-a descoperi: a) litera T; b) litera I; c) litera A?

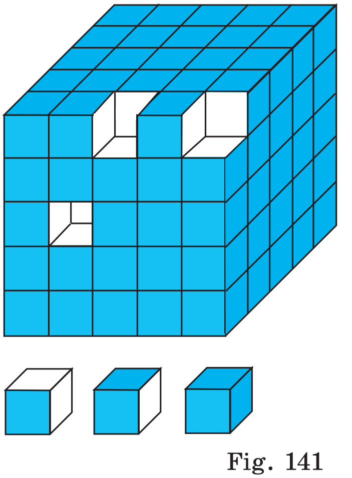


Fig. 141

831. Într-o traistă sunt 5 bile albe şi 7 negre. Care este probabilitatea evenimentului că, luând la întâmplare, se va scoate: a) o bilă albă; b) o bilă neagră?

823. . Într-un saculeț sunt 10 hârtiuțe înfăşurate. Pe două din ele este scris «da», iar pe restul – «nu». Care este probabilitatea evenimentului că pe hârtiuța luată la întâmplare va fi cuvântul «da»?

833. Într-o lădiță sunt 10 bile roşii şi 5 galbene. Din ea s-a luat o bilă roşie şi s-a pus într-o parte. După aceasta din lădiță se ia încă o bilă la întâmplare. Care este probabilitatea evenimentului că ea va fi galbenă?

834. La o competiție au participat 25 de elevi din prima şcoală, 15 – din şcoala a doua şi 10 – din a treia. Care este probabilitatea evenimentului, că primul se va încadra în competiții un elev din prima şcoală?

835. Un pasager aşteaptă tramvaiul nr. 1 sau nr. 3 la stația, prin care trec traseele a patru tramvaie: nr. 1, 3, 4 şi 9. Considerând, că tramvaiele de pe aceste trasee trec prin stația dată cu aceeşi frecvență, aflați probabilitatea evenimentului, că primul la stație va sosi tramvaiul pe care îl asteaptă pasagerul.

Nivelul B

836. La 1 000 de bilete de loterie revine 1 câstig de 1000 grn., 10 câştiguri de câte 200 grn., 50 – câte 100 grn., 100 – câte 50. Restul biletelor sunt fără câştig. Aflați probabilitatea câştigului nu mai mic decăt 100 grn. pe un bilet.

837. Într-un lot din 100 de piese 75 erau de prima categorie, 15 – de a doua, 8 – de a treia şi 2 piese defecte. Care este probabilitatea faptului că piesa luată la întâmplare va fi de prima categorie sau a doua?

838. Din 10 fişe numerotate de la 1 pânâ la 10 se extrage una. Care este probabilitatea faptului, că numărul fişei va fi mai mic decât 7 şi mai mare decât 3?

839. Într-o urnă sunt 30 de insigne cu numerele de la 1 până la 30. Care este probabilitatea faptului, că prima insignă luată din urnă la întâmplare nu va conține cifra 6?

840. Din 15 fişe numerotate de la 1 până la 15 se extrage una. Care este probabilitatea faptului că numărul fişei extrase: a) se va divide cu 3; b) se va divide cu 4?

841. Din 100 de savanți a unei instituții limba engleză o posedă 90, germana – 85, 80 de persoane posedă ambele limbi. Aflați probabilitatea faptului că savantul ales la întâmplare din această instituție: a) posedă engleza sau germană; b) nu ştie nici engleza, nici germana.

842. Se aruncă două zaruri. Care este probabilitatea apariției cel puțin a unei fețe cu 6 puncte?

843. Se ia la întâmplare o piesă de domino. Care este probabilitatea evenimentului că pe ea sunt: a) în total 9 puncte; b) mai multe decât 9 puncte; c) mai puține decât 9 puncte?

844. Un cub de lemn vopsit s-a tăiat în 1 000 de cuburi egale şi s-au amestecat într-o traistă. Care este probabilitatea evenimetului că luând la întâmplare din traistă un cub, va fi luat acel care are: a) cel puțin o față vopsită; b) numai două fețe vopsite?

845. Aflați probabilitatea faptului că numărul de două cifre selectat la întâmplare se divide cu 5.

846. În acelaşi timp se aruncă două monede identice. Aflați probabilitatea evenimentului: a) A = {a câzut o stemă şi un revers}; b) B = {a căzut nu mai puțin decât o stemă}.

847. S-au verificat 500 de piese selectate arbitrar şi s-a constat că 5 din ele sunt rebut. Câte piese rebut se poate de aşteptat într-un set de 3 500 de bucăți?

848*. Examinați repartizarea băieților şi fetelor în familiile, care au trei copii de vârstă diferită. Considerați că probabilitatea naşterii baiatului şi a fetiței sunt la fel?

Exerciţii pentru repetare

849. Funcția este definită prin formula $f(x) = -5x + 3$. Aflați $f(0{,}1)$; $f(-2{,}5)$; $f(-10)$; $f(0{,}3)$; $f(-1{,}2)$.

850. Rezolvați inecuațiile:

a) $(3x - 1)(x + 3) > x(1 + 5x)$; б) $x^2 + 8x + 8 < 3x^2$.

851. Construiți graficul funcțiilor:

a) $y = |x^2 - x|$; б) $y = x^2 - |x|$.

Comoara succeselor

✓ Pot da exemple de evenimente:
— imposibile;
— sigure;
— aleatorii.

✓ Pot explica ce este:
frecvența evenimentului aleatoriu;
probabilitatea evenimentului aleatoriu.

✓ Ştiu a rezolva probleme care prevăd:
— aflarea probabilității evenimentului aleatoriu;
— calcularea frecvenței evenimentului aleatoriu.

Aplicăm competenţele obţinute

Pentru a înțelege şi a însuşi tema nouă, ne amintim:

— Ce este media aritmetică

a două numere a şi b sau a n numere $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\boxed{\frac{a+b}{2}} \qquad \boxed{\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}}$$

— Cum se construiesc diagramele prin coloane şi sectoriale.

§ 21 Cunoştinţe despre statistică

Ştiinţa care studiază caracteristicele cantitative ale fenomenelor de masă se numeşte *statistică matematică* (de la cuvântul latin *status* – stare, situație).

Exemplul 1. Din 87 de elevi din clasa a 9-a ai unei şcoli 7 au note, care corespund nivelului 1 al succeselor la învățătură, 33 – nivelului II, 31 – nivelului III şi 16 – nivelului IV. Acestea sunt caracteristicele cantitative ale lucrării de control petrecute. Ele pot fi prezentate în formă de tabel.

Nivelul succeselor la învățătură	I	II	III	IV
Numărul elevilor	7	33	31	16

Ilustrativ aceste date pot fi reprezentate cu ajutorul diagramei cu bare (fig. 142). Diagramele cu bare în statistică se numesc *histograme* (de la cuvintele greceşti *histos* – stâlp, *gramma* – scriere).

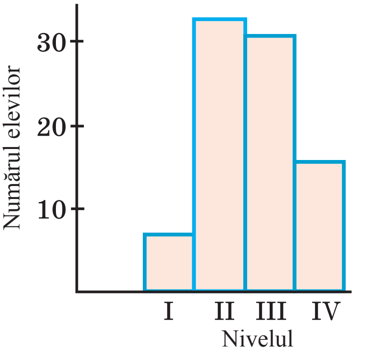


Fig. 142

În exemplul studiat se vorbeşte despre 87 de elevi. Problema se complică, dacă se studiază *fenomene de masă*, care cuprind mii sau şi milioane de obiecte ce se studiază. De exemplu, producătorii de încălțăminte trebuie să ştie câtă încălțăminte de o mărime sau alta trebuie să producă. Cum de clarificat aceasta? De-i întrebat pe toți, adică, zeci de milioane de barbați şi femei, este foarte scump şi durează mult timp. De aceea se formează *selecţia* – o mulțime finită de observări ale rezultatelor independente. În cazul dat, cercetării sunt supuse numai câteva zeci sau sute de oameni.

Exemplul 2. Presupunem, că întrebând 60 de femei, mărimea încălţămintei lor a fost scrisă în tabel:

23,5	24	23,5	23	24,5	23	22,5	24,5	22,5	23,5	23,5	23,5
25,5	21	24	25	23,5	22	23	24,5	23	24,5	23	24,5
25	24	21,5	23,5	24,5	22,5	22	23,5	26,5	25,5	25	26
24	23	24	24,5	22	24	23,5	21,5	23,5	25	24	22,5
25,5	21,5	24,5	26	25	23,5	22,5	24	23	22,5	24	25

Această selecţie este din 60 de valori (date). Pentru comoditate ele se grupează în clase (după mărimea încalţămintei) şi se determină câte valori ale selecţiei conţine fiecare clasă.

Mărimea încălţămintei	21	21,5	22	22,5	23	23,5	24	24,5	25	25,5	26	26,5
Numărul de femei	1	3	3	6	7	10	9	8	6	4	2	1

Astfel de tabele se numesc ale *frecvenţelor*. În ele numerele din rândul al doilea sunt *frecvenţe*, ele indică cât de frecvent se întâlnesc în selecţie unele sau altele valori ale ei. *Frecvenţă relativă* a valorilor selecţiei se numeşte raportul valorii frecvenţei către numărul tuturor valorilor ale selecţiei, exprimat în procente. În exemplul studiat frecvenţa mărimii 24 a încălţămintei este egală cu 9, iar frecvenţa relativă este 15 %, deoarece 9 : 60 = 0,15 = 15 %.

După tabelul frecvenţelor se poate construi histograma (fig. 143). Ea ilustrează intuitiv ce parte de încălţăminte de o mărime sau altă este de dorit de produs. Este clar, că concluziile obţinute printr-un astfel de procedeu sunt probabile, aproximative, dar pentru cerinţele practice aceasta este suficient.

Unele date statistice este convenabil de le prezentat cu ajutorul graficelor ca, de exemplu, pe p. 91.

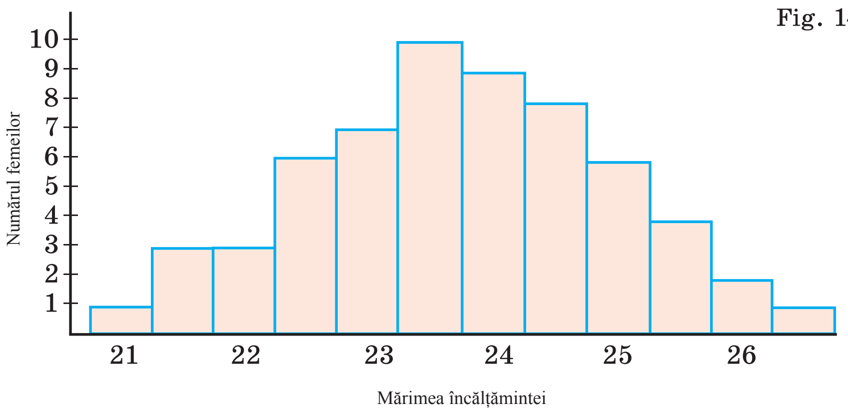


Fig. 143

Selecţiile se caracterizează prin *tendinţe centrale*: moda, mediana, valoarea medie.

Moda selecţiei sunt acele valori ale selecției care se întâlnesc cel mai frecvent.

Mediana selecţiei este numărul care «împarte» în jumătate mulțimea ordonată a tuturor valorilor selecției.

Valoarea medie a selecţiei se numeşte media aritmetică a tuturor valorilor ei.

Fie dată selecția: 1, 3, 2, 4, 5, 2, 3, 4, 1, 6, 4. (*)

S-o ordonăm:1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6.

Moda selecției date este egală cu 4, deoarece 4 se întâlneşte cel mai des (de trei ori).

Mediana selecției date este egală cu 3, fiindcă numărul 3 «împarte» selecția ordonată în jumătate: în fața ei şi după ea este acelaşi număr de termeni ai selecției ordonate.

Dacă selecția ordonată are un număr par de valori, mediana ei este egală cu semisuma a două valori din mijlocul ei. De exemplu, pentru selecția 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6 mediana este $m = \frac{3+4}{2} = 3,5.$

Valoarea medie a selecției (*) est $\frac{1+1+2+2+3+3+4+4+4+5+6}{11} = \frac{35}{11}.$

Există selecții fără modă, de exemplu: 4, 5, 6, 7, 8;

şi selecții cu două mode: 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8.

Verificaţi-vă

1. Ce studiază statistica matematică?
2. Ce este histograma?
3. Care fenomene se numesc de masă?
4. Ce este selecția? Frecvența selecției?
5. Numiți tendințele centrale ale selecției.
6. Ce este media valorilor selecției? Dar mediana, moda?

Efectuăm împreună!

1 Controlul calității a 20 bucăți de caşcaval din varietatea «Ucrainean» (după conținutul grăsimii) de către inspecție a dat următoarele rezultate:

Conținutul grăsimii, %	44	45	46	47	48
Numărul probelor	1	4	5	7	3

Aflați tendințele centrale ale selecției.

● **Rezolvare.** Moda selecției date este 47, deoarece această valoare se întâlneşte cel mai des (de 7 ori).

Selecția are un număr par de valori, de aceea mediana ei este egală cu semisuma a două valori ale ei din mijloc– sub numerele 10 şi 11, deoarece în selecție sunt 20 de termeni.

Pe aceste locuri în selecție (44; 45; 45; 45; 45; 46; 46; 46; 46; 46; 47; ...) sunt valorile 46 şi 47. Deci, (46 + 47) : 2 = 46,5 este mediana selecției.

Aflăm valorea medie a selecției:

$$\frac{44\cdot1+45\cdot4+46\cdot5+47\cdot7+48\cdot3}{20}=\frac{927}{20}=46{,}35.$$

Răspuns. Moda este 47; mediana este 46,5; valoarea medie – 46,35.

2 Cinci participanți la o olimpiadă pentru rezolvarea problemelor au obținut de la 0 până la 3 puncte, zece – de la 4 până la 6, treizeci – de la 7 până la 9, patruzeci şi patru – de la 10 până la 12, şaisprezece – de la 13 până la 15, zece – de la 16 până la 18, doi – de la 19 până la 21, trei – de la 22 până la 24 de pucte. Alcătuiți tabelul frecvențelor şi construiți histograma respectivă.

Rezolvare. Tabelul frecvențelor are următoarea formă:

Cantitatea punctelor	0–3	4–6	7–9	10–12	13–15	16–18	19–21	22–24
Numărul participanților	5	10	30	44	16	10	2	3

Histograma respectivă este reprezentată pe figura 144.

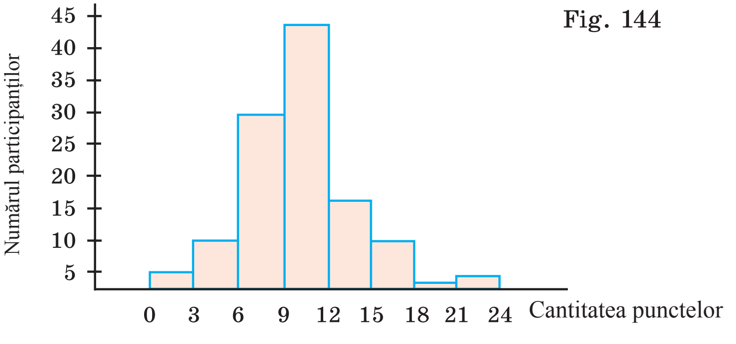
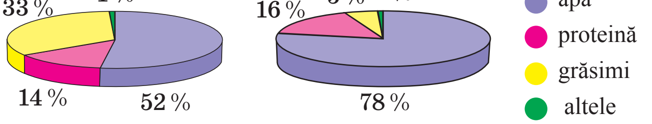


Fig. 144

Efectuați oral

852. Analizați diagrama, care demonstrează componența chimică a produselor alimentare (fig. 145). Faceți concluzii.



a — carnea de porc   *b* — carnea de crap

Fig. 145

853. Aflați moda, mediana şi valoarea medie ale selecțiilor:

а) 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 11;

б) 9, 10, 10, 11, 12, 12, 12, 13, 15, 15, 16, 17.

854. La concursul «Cangurul» la nivelul «Cadet» au participat 2 000 de persoane. Pe fig. 146 este reprezentată corespondenţa dintre numărul participanţilor (%) şi numărul punctelor, pe care ei l-au obţinut. Ce informaţie despre rezultatele concursului se poate obţine cu ajutorul histogramei date?

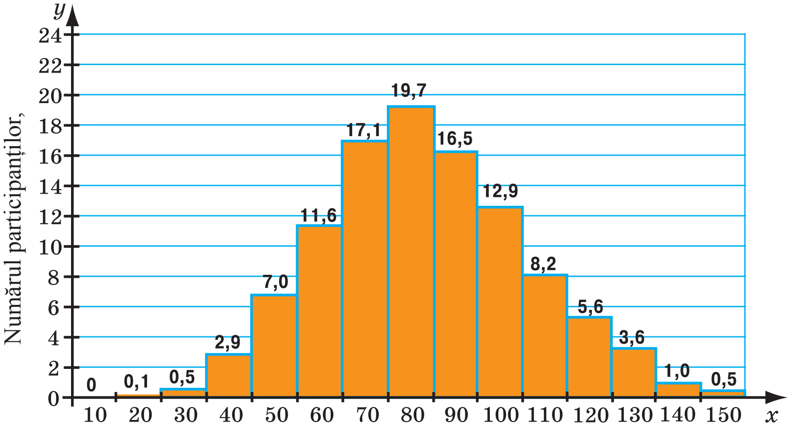


Fig. 146

Nivelul A

855. Indicaţi tendinţele centrale ale selecţiei şi frecvenţa relativă a fiecărei valori ale ei, dacă selecţia este dată în forma următorului tabel al frecvenţelor.

-30°	-20°	-10°	0°	10°	20°	30°
1	3	6	17	13	8	2

856. Sunt date 100 de numere; din ele numărul 2 se repetă de 15 ori, numărul 4 – de 40, numărul 8 – de 20, numărul 9 – de 20, numărul 10 – de 5 ori. Aflaţi media aritmetică a acestor numere.

857. După măsurarea staturii a 40 de elevi în centimetri s-a obţinut următorul tabel de frecvenţe.

Statura, cm	162	163	164	165	166	167	168	169	170
Numărul elevilor	3	5	4	2	6	10	6	3	1

Construiţi histograma respectivă. Determinaţi frecvenţa relativă a fiecăriei valori.

858. În tabelă sunt date procentele, care caracterizează numărul elevilor din clasele a 10-a din SUA care fumează zilnic. Cu ajutorul computerului construiţi histograma respectivă şi graficul. Ce concluzi se poate face după aceste date?

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
12,2	10,1	8,9	8,3	7,5	7,6	7,2	5,9	6,3	6,6	5,5	5,0	4,4	3,2

859. Pe figura 147 se dă rația medie a indexului mesei omului independent de vârstă, gen şi alte caracteristici individuale. Aflați, după care formulă se determină indexul mesei omului. Calculați-l pentru sine şi verificați după grafic, ce corespunde vârstei voastre, genului, etc.

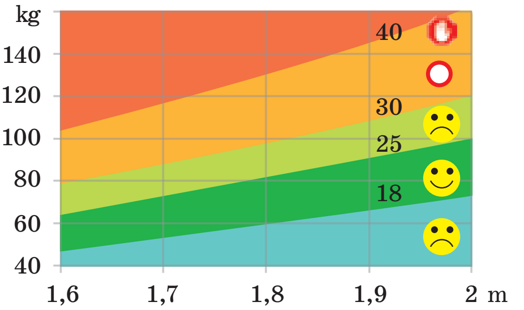


Fig. 147

860. Alcătuiți tabela despre consumul energiei electrice pe anul trecut în familia voastră. Calculați cât consumă familia în mediu energie electrică: a) într-o lună; b) în fiecare cvartal; c) în fiecare anotimp al anului.

861. Aflați moda, mediana şi valoarea medie ale selecției:
a) **2, 3, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7, 8;**
б) **12, 17, 11, 13, 14, 15, 15, 16, 13, 13.**

862. Elevii unei clase au scris o lucrare de control la algebră. 4 elevi au primit note corespunzătoare nivelului patru, 16 – nivelului trei, 12 – nivelului doi şi 3 – primului nivel. Introduceți aceste date în tabelă şi construiți după ea diagrama circulară şi cea cu bare.

863. Efectuați interogarea a 30 de băieți din şcoală despre mărimea încălțămintei lor. Rzultatele scrieți-le într-o tabelă identică cu cea din problema precedentă. Alcătuiți tabela frecvențelor şi construiți histograma respectivă.

864. Determinând mărimea îmbrăcămintei a 50 de femei, rezultatele au fost scrise în t

50	44	50	48	54	46	52	48	54	52
48	48	52	50	46	50	54	48	56	50
52	48	42	56	50	48	50	46	54	48
46	46	48	48	52	48	56	50	52	46
52	48	50	54	50	50	54	44	58	46

Alcătuiți tabelul frecvențelor şi construiți histograma respectivă.

Nivelul B

865. Pentru a clarifica câte şi ce fel de căciuli trebuie de cusut, s-a măsurat în centimetri conturul capului la 35 de cursanți. S-au obținut următoarele rezultate.

Mărimea	53	54	55	56	57	58	59
Numărul cursanților	1	7	10	12	3	1	1

Construiți histograma respectivă şi calculați tendințele centrale ale selecției. Aflați frecvența relativă a fiecărei valori din selecția dată.

866. Efectuaţi interogarea elevilor din clasa voastră şi clarificaţi, câte becuri economice se folosesc în locuinţa fiecărui coleg . După datele obţinute alcătuiţi tabela frecvenţelor şi construiţi histograma respectivă. Determinaţi frecvenţa relativă a fiecărei valori a selecţiei.

867. La lecţia de sport la sărituri în înălţime 11 fete din clasa a 9-a au arătat următoarele rezultate: 90 cm, 125 cm, 125 cm, 130 cm, 130 cm, 135 cm, 135 cm, 135 cm, 135 cm, 140 cm, 140 cm. Aflaţi moda, mediana şi valoarea medie a valorii selecţiei. Care rezultat caracterizează cel mai bine pregătirea sportivă a fetelor din această clasă?

868. Şase participanţi la o olimpiadă de matematică după rezolvarea problemelor au obţinut mai puţin de 3 puncte, zece – de la 3 până la 6, treizeci şi doi – de la 7 până la 9, patruzeci şi cinci – de la 10 până la 12, şaptesprezece – de la 13 până la 15, opt – de la 16 până la 18,cinci – mai mult de 18 puncte. Alcătuiţi după aceste rezultate tabela frecvenţelor şi construiţi histograma respectivă.

869. O brutărie coace colaci de 1 kg. În timpul controlului s-a constatat, că masa a trei colaci din o sută este mai mică decât 1 kg cu 31 – 40 g, a cincisprezece – cu 21 – 30 g, a douăzeci – cu 11 – 20 g, a treizeci – cu 1 – 10 g, masa a şaptesprezece colaci este mai mare decât 1 kg cu 1 – 9 g, iar a doi – cu 10 – 19 g. Construiţi diagrama de frecvenţe şi histograma respectivă.

870. Într-o zi mărimea încasării (în mii de grivne) în 30 de magazine selectate la întâmplare a fost următoarea:

42	24	49	76	45	27	39	21	58	40
28	78	44	66	20	62	70	81	7	68
99	76	63	87	65	104	46	20	72	93

Alcătuiţi tabelul frecvenţelor pe 5 intervale şi construiţi histograma respectivă.

Comoara succeselor

- ✓ Pot afla, selecta şi ordona infomaţia din diferite surse accesibile.
- ✓Ştiu procedeele prezentării datelor şi prelucrării lor.
- ✓ Pot prezenta datele statistice în formă de tabele, diagrame, grafice.
- ✓ Ştiu a rezolva probleme, care prevăd prezentarea datelor şi prelucrarea lor.

Date istorice

Unele proprietăți ale evenimentelor aleatorii le-au descoperit savanții italieni L. Pacioli (1445–1514) şi G. Cardano (1501–1576), studiind jocurile de noroc.

Începutul *teoriei probabilităţilor* ca ramură a matematicii l-au pus savanții francezi P. Fermat (1601 – 1665) şi B. Pascal (1623–1662).

Oamenii de mult timp au început a aduna şi a analiza datele statistice. În China recensământul populației s-a făcut cu mai bine de 4 mii de ani în urmă. În Rusia Kieveană recensământele se realizau din a.1245.

În dezvoltarea statisticii matematice o mare contribuție au făcut savanții U. Petty, A. Moivre, L. Euler, Ia. Bernoulli, P. Laplace, S. Poisson şi alții.

În imperiul Rus în sec. XIX problemele statisticii le-au studiat şi matematicienii ucraineni V. I. Buneakovski şi M. V.Ostrogradski.

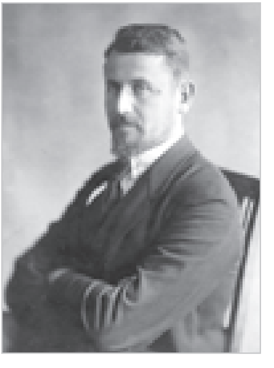
M. V. Ostrogradski s-a născut în satul Paşena din reg. Poltava, a învățat la gimnaziul din Poltava, la universitatea din Harkov şi în Paris; era membru al academiilor de ştiințe din Rusia, Turin, Roma, Americană, membru – corespondent al academiei din Paris.

M. V. Ostrogradski
(1801–1862)

M. V. Ostrogradski a obținut rezultate fundamentale în domeniul analizei matematice, mecanicii teoretice, teoriei probabilităților, fizicii matematice, balistică, teoria căldurii, a scris «Cursul mecanicii cereşti». Acorda multă atenție calculelor aproximative, procentelor. A elaborat metodele statistice de rebutare (brăcuire) a mărfii.

În or. Poltava este construit monumentul lui M. V. Ostrogradski.

În domeniul matematicii aplicative mult a lucrat şi matematicianul ucrainean **M. P. Kravciuk.**



M. P. Kravciuk
(1892–1942)

S-a născut în satul Ciovnâțea din Volânia, a terminat gimnaziul din Luțk, universitatea din Kiev. Din a. 1925 este profesor, iar din 1929 este academician al Academiei de ştiințe din Ucraina, secretarul ştiințific, a condus Comisia statisticii matematice. În a. 1938 a fost represat fiind nevinovat. A murit pe Kolâma.

În oraşul Kiev este construit monumentul lui M. P.Kravciuk.

Esențialul în capitol

Combinatoria este un capitol al matematicii, consacrat rezolvării problemelor selectării şi amplasării elementelor mulțimii finite conform regulilor date.

Examinăm două reguli principale, cu ajutorul cărora se rezolvă multe probleme din combinatorie.

Regula sumei combinatoriei:

Dacă elementul unei mulţimi oarecare A se poate alege prin m procedee, iar elementul mulţimii B – prin n procedee, atunci elementul din mulţimea A sau din mulţimea B poate fi ales prin m + n procedee.

Regula produsului combinatoriei:

Dacă prima componentă a perechii se poate alege prin m procedee, iar a doua prin n procedee, atunci o astfel de pereche se poate alege prin mn procedee.

Evenimente aleatorii sunt acelea care pot să se realizeze sau pot să nu se realizeze.

Dacă în n probe evenimentul X se realizează de m ori, atunci fracția $\frac{m}{n}$ determină frecvența relativă a apariției evenimentului X. Numărul lângă care oscilează frecvența relativă a evenimentului exprimă *probabilitatea* acestui eveniment, ea se notează cu litera P (de la cuvântul englez *probability* – probabilitate).

Proprietăţile ale probabilităţii evenimentului aleatoriu:

1. Dacă C este un eveniment imposibil, atunci $P(C) = 0$.
2. Dacă B este un eveniment sigur, atunci $P(B) = 1$.
3. Dacă X este un eveniment aleatoriu, atunci $0 \leq P(X) \leq 1$.
4. Dacă $E_1, E_2, E_3, ..., E_n$ sunt evenimente elementare care epuizează probele unei experiențe, atunci:

$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + ... + P(E_n) = 1$.

Statistica matematică este un compartiment al matematicii aplicative, în care se studiază caracteristicele cantitative ale fenomenelor de masă. Datele statistice se determină cel mai des cu ajutorul *selecţiei*, care este o mulțime finită a rezultatelor observărilor independente. Selecția se ordonează, se alcătuieşte tabelul frecvențelor, pe baza lui se construieşte diagrama sau histograma corespunzătoare.

Tendințele centrale ale selecției:

a) *valoarea medie a selecţiei* este media aritmetică a tuturor valorilor ei;

b) *moda selecţiei* sunt acele valori ale ei care se întâlnesc cel mai frecvent;

c) *mediana selecţiei* este valoarea din mijloc care «împarte» în jumătate totalitatea ordonată a tuturor valorilor selecției.

Pentru caracterizarea rezultatelor prelucrării statistice a datelor în masă, se aplică tabele, grafice, diagrame, histograme.

CLARIFICĂM SUCCESELE

Sarcini în formă de test nr. 4

1 Câte numere de două cifre se pot alcătui din cifrele 5 şi 6, dacă cifrele în număr pot să se repete?

a) unul; b) două; c) trei; d) patru.

2 Din numerele întregi de la 1 până la 20 se numeşte unul. Care este probabilitatea evenimentului, că el va fi divizor al numărului 20?

a) 0,3; b) 0,4; c) 0,5; d) 0,6.

3 Media aritmetică a tuturor numerelor întregi din intervalul $-10 < x < 40$ este egală cu:

a) 10; b)15; c) 20; d) 30.

4 Pe parcursul primelor zece zile ale lui octombrie temperatura la ora 7 dimineața era: 6°, 8°, 8°, 7°, 5°, 8°, 6°, 7°, 8°, 8°. Aflați moda selecției.

a) 7°; b) 6°; c) 8°; d) 5°

5 Aflați mediana selecției 1, 7, 5, 7, 3, 7, 1, 8, 3.

a) 1; b) 7; c) 5; d) 3.

6 Pe o farfurie sunt pateuri diferite după formă. Printre ele sunt 5 pateuri cu caşcaval şi 3 cu vişine. Câte posibilități are un copil să ia un pateu?

a) una; b) două; c) trei; d) patru.

7 În care caz evenimentul X se numeşte imposibil?

a) $P(X) = 1$; b) $P(X) = -1$; c) $P(X) < 1$; d) $P(X) = 0$.

8 Opt prieteni au hotărât să facă schimb cu cărți de vizită. Câte cărți de vizită în total vor fi împărțite:

a) 64; b) 72; c) 32; d) 56?

9 Din litere, scrise pe fişe pătrate separate, este compus cuvântul „MATEMATICA”. Apoi aceste fişe au fost întoarse, amestecate şi s-a luat la întâmplare una. Care este probabilitatea că pe ea va fi scrisă litera „A”:

a) 0,1; b)0,2; c)0,3; d) 0,4?

10 Andrei a pierdut o figură de şah. Care este probabilitatea faptului că ea este tura?

a) 0,5; b) 0,025; c) 0,0625; d) 0,125.

Sarcini-tip pentru lucrarea de control nr. 4

1° Într-o cutie sunt 20 de bomboane cu înveliş albastru şi 80 – cu înveliş roşu. Care este probabilitatea evenimentului, că bomboana luată la întâmplare va fi cu înveliş albastru?

2° Câte numere de trei cifre există care se divid cu 5?

3° Se ia la întâmplare o piesă de domino. Care este probabilitatea faptului că pe ea vor fi mai mult de 10 puncte?

4° În iunie, iulie şi august o familie a folosit respectiv 88, 70 şi 72 kvt·h de energie electrică. Care a fost consumul mediu de energie electrică al familiei într-o lună de vară?

5• Aflați moda, mediana şi media valorilor selecției: 7, 5, 3, 7, 6, 7, 4, 6, 8, 5.

6•. La 100 000 de bilete de loterie le revin 662 de câştiguri. Din ele: 2 câte 5 000 grn., 10 câte 1 000 grn., 50 câte 200 grn., 100 câte 50 grn., 500 câte 10 grn. Restul biletelor sunt fără câştig. Aflați probabilitatea câştigului mai mare decât 200 grn. pe un bilet.

7• Analizând numărul biletelor la avion vândute în aprilie, s-au obținut aşa date:

57	55	60	46	55	54	57	54	49	52
51	65	60	56	45	59	53	61	47	42
47	58	56	53	59	64	49	58	59	63

Alcătuiți tabelul frecvențelor şi construiți histograma respectivă. Calculați tendințele centrale ale selecției.

8• Fie că anul are 365 de zile. Care este probabilitatea, că pe foaia ruptă din calendar la întâmplare va fi numărul: a) divizibil prin 10; b) egal cu 29?

9•• Un elev are 4 manuale de literatură ucraineană şi 3 manuale de matematică. Prin câte procedee el poate aranja cărțile pe raft aşa, ca: a) manualele de la un obiect să fie alături; b) manualele de la un obiect să nu fie alături?

10•• Un arcaş face 5 serii de împuşcături în condiții neschimbate. În fiecare serie face câte 100 de împuşcături. Rezultatele tragerii sunt incluse în tabel. Aflați frecvența relativă a nimeririi în țintă: a) în fiecare serie; b) în primele 300 de împuşcături; c) în ultimele 300 de împuşcături; d) în toate 500 de împuşcături. Formulați ipoteza despre probabilitatea nimeririi în țintă.

Numărul seriei	1	2	3	4	5
Numărul de nimeriri în țintă	69	64	72	78	65

Inegalităţi în algebrăi

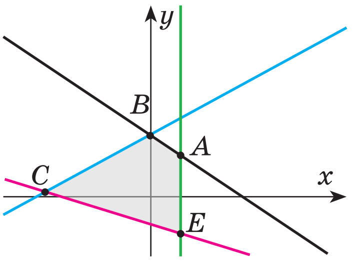
Inegalități cu două variabile

Proiectul de învăţământ nr. 1

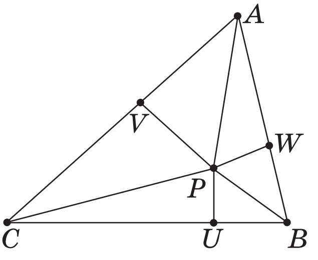
Inegalităţi în geometrie

Inegalitatea lui Barro

$PA + PB + PC \geq 2(PU + PV + PW)$



Inegalităţi interesantei



Clasa se împarte în trei grupe: „istorici”, „matematicieni”, „practicieni”. Fiecare elev poate participa în lucrul uneia sau a două grupe de proiect. Elevii formează grupe, lucrează individual sau în perechi la una din temele propuse mai jos.

Temele pentru activitatea de proiectare se anunță la sfârşitul primului semestru. Elevilor li se recomandă să se familiarizeze independent cu materialul teoretic, care se conține în § 7 din manual.

Rezultatele lucrului asupra proiectului trebuie de pregătit în formă de portfolio al grupei cu prezentarea la calculator. Susținerea proiectelor e rațional de petrecut în afară orelor de curs, invitând elevi din alte clase, învățători şi părinți.

Istoricii studiază apariția şi aplicarea inegalităților în diferite etape ale dezvoltării matematicii. La apărare pregătesc o relatare scurtă şi prezentarea cu exemple concrete.

Matematicienilor li se propune să-şi îmbogățească cunoştințele depsre inecuații, examinând inecuațiile în algebră şi geometrie.

Tematica cercetărilor individuale (sau cercetărilor în grupe mici) poate fi următoarea:

– rezolvarea inecuațiilor cu două variabile;
– rezolvarea inecuațiilor care conțin moduli;
– rezolvarea inecuațiilor care conțin parametri;
– metode diferite de demonstrație ale inegalităților;
– inegalități cu denumire;
– inegalități geometrice.

Examinăm detaliat inegalitatea care se referă la algebră, şi la geometrie. Această este *inegalitatea a trei pătrate*, care este justă pentru orice numere reale a, b şi c:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

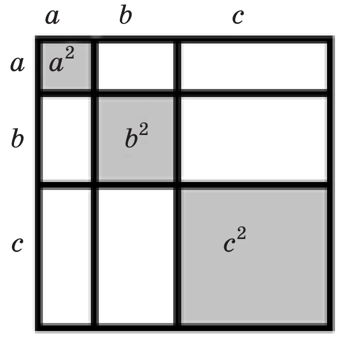
Să o demonstrăm. Aflăm diferență dintre partea stângă şi cea dreaptă a inecuației şi evidențiem pătratele depline. Avem

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0{,}5((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2) \geq 0, \text{ adică}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0, \text{ sau } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Ceea ce trebuia de demonstrat.

Modelul geometric al inegalității din trei pătrate este interesant. Încercați să demonstrați această afirmație geometric.



În matematică inegalitatea a trei pătrate se poate aplica pentru:

a) demonstrarea altor inegalități;

b) determinarea valorilor celor mai mari şi celor mai mici a multor expresii cu trei variabile;

c) rezolvarea ecuațiilor interesante, inecuațiilor şi ale sistemelor lor.

În mod analog se poate demonstra *inegalitatea a n pătrate*:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 \geq \frac{2}{n-1}\,(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n).$$

Practicienii clarifică, că cu ajutorul inegalităților şi proprietăților lor se modelează relația „mai mic” şi „mai mare” din mediul ambiant. Grupa de elevi examinează:

– probleme aplicative, care se reduc la rezolvarea inecuațiilor;

– inegalități şi calcule aproximative;

– folosirea TIC pentru rezolvarea inecuațiilor.

Examinăm mai detaliat întrebarea, care se referă la inegalități şi calcule aproximative.

Calcule aproximative. Oare se poate măsura lungimea unui leaț absolut exact? Nu. Chiar dacă veți auzi, că lungimea unui leaț este egală, de exemplu, cu 9,42783 m, nu credeți aceasta. Deoarece lungimea unui leaț nu se poate măsura cu exactitatea de sutimi de milimetru. Rezultatul fiecărei măsurări este valoarea aproximativă a mărimii.

• Clarificați, care din exemplele date pot fi repartizate la exacte, iar care – la aproximative:

a) în şcoală învață 900 de elevi;
b) masa Lunii – $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg;
c) aria bazinului – 600 m^2;
d) trenul de marfă este alcătuit din 60 de vagoane;
e) accelerația căderii libere este egală cu 9,8 m/s^2;
f) claviatura computerului conține 113 clape, iar claviatura pianului – 87;
g) urmaşii unui infuzor într-un an este $75 \cdot 10^{108}$ de indivizi;
h) antilopa africană impala poate sări în lungime la 7,5 m, iar cangurul – la 12 m;
i) rețeta budincii din legume are 9 componente.

Dacă la măsurarea lungimii x a unui leaț vom obține, că ea este mai mare decât 6,427 m şi mai mică decât 6,429 m, atunci se scrie:

$6{,}427 \text{ m} \leq x \leq 6{,}429$ m sau $x = 6{,}428 \pm 0{,}001$ m.

Se spune, că valoarea lungimii riglei e aflată cu precizia de până la 0,001 m (1 milimetru) sau eroarea absolută a valorii aproximative 6,428 nu depăşeşte 0,001.

***Eroare absolută* a valorii aproximative se numeşte modulul diferenţei dintre valoarea aproximativă şi cea exactă.**

Dacă valoarea exactă a mărimii este necunoscută, atunci necunoscută este şi eroarea absolută a valorii aproximative a ei. În acest caz se indică ***limita erorii absolute***, adică numărul, pe care nu-l depăşeşte eroarea absolută. În exemplul studiat limita erorii absolute a valorii aproximative 6,428 este egală cu 0,001. Aici cifrele 6, 4 şi 2 sunt exacte, iar 8 este dubioasă, de la cifra exactă ea se deosebeşte nu mai mult decât cu o unitate.

Dacă $x = 3,274 \pm 0,002$, adică $3,272 \leq x \leq 3,276$, atunci limita erorii absolute a valorii aproximative 3,274 este egală cu 0,002.2.

• Transformând fracția ordinară $\frac{2}{3}$ în zecimală, obținem 0,6667. Aflați eroarea absolută a acestei aproximații. Aflați valoarea aproximativă a numărului $\frac{2}{3}$ cu exactitate până la miimi şi eroarea absolută a ei.

• Ghepardul dezvoltă o viteză de 34,5 m/s. Exprimați această viteză în kilometri pe oră, rotunjiți până la întregi şi aflați eroarea absolută a aproximației.

• Viteza luminii în vid (în metri pe secundă) este 299 792 456 ± 2 m/s, iar viteza sunetului în aer – 331,6 ± 0,1 m/s. Numiți valoarea aproximativă a vitezei luminii şi a vitezei sunetului şi limitele erorilor absolute respective.

Valorile absolute se pot scrie şi fără limita erorilor. S-a căzut de acord a le scrie aşa, ca toate cifrele, cu excepția ultimei, să fie adevărate, iar ultimele (dubioase) să se deosebească de cele adevărate nu mai mult decât cu o unitate. De exemplu, dacă se scrie $x = 6,428$ m, atunci se înțelege că $6,427 \text{ m} \leq x \leq 6,429 \text{ m}$ sau $x = 6,428 \pm 0,001$ m.

Dacă $y = 3,247 \pm 0,002$ kg, nu este acceptat a scrie $y = 3,247$ kg. Este de dorit de rotunjit: $y = 3,25$ kg.

Imaginați-vă, că s-a măsurat (în centimetri) grosimea h a unei cărți şi lungimea l a geamului: $h = 1,6$ – cu precizia de 0,1, $l = 71,5$ – cu precizia de 0,1.

Limitele erorilor absolute ale ambelor mărimi sunt la fel: 0,1. Dar într-un caz această eroarea revine la un număr nu prea mare 1,6, iar în al doilea – la un număr cu mult mai mare 71,5. Pentru aprecierea calității măsurării se calculează erorile relative.

Eroare relativă a valorii aproximative se numeşte raportul erorii absolute către modulul valorii aproximative.

De exemplu, erorile relative ale aproximațiilor h şi l sunt egale respectiv cu:

$0,1 : 1,6 = 0,0625 \approx 6,3\ \%$; $0,1 : 71,5 = 0,0014 = 0,14\ \%$.

Valoarea l este mai calitativă, cu eroare relativă mai mică.

• Comparați exactitatea măsurărilor a grosimii d a părului omului şi diametrul D a Soarelui, dacă $d = 0,15 \pm 0,005$ mm, iar $D = 1\,392\,000 \pm 1000$ km.

• Masă Terrei este egală cu $(5,98 \pm 0,01) \cdot 10^{27}$ g, iar masa mingii pentru copii – $(2,5 \pm 0,1) \cdot 10^{2}$ g. Care măsurare este mai exactă?

Operațiile cu valori aproximative se pot efectua cu respectarea strictă a erorilor şi fără respectarea strictă a erorilor. Respectarea strictă a erorilor se poate efectua pe baza proprietăților inegalităților duble. Fie, de exemplu, masa unui şurub în grame de $x = 325 \pm 2$, iar masa piuliței – $y = 117 \pm 1$, adică $323 \leq x \leq 327$ şi $116 \leq y \leq 118$.

Adunând membru cu membru aceste inegalități duble, obținem:

$439 \leq x + y \leq 445$ sau $x + y = 442 \pm 3$.

Şi celelalte operații cu valorile aproximative se pot efectua în mod analog. Aşa se procedează în cele mai importante calcule.

• Oare se poate întroduce într-un circuit un aparat cu rezistența de 44 ± 0,5 Ohm la tensiunea de 215 ± 15 V, ca intensitatea curentului să nu fie mai mare de 6 A?

• Trebuie transportat 1000 ± 20 m^3 de beton. Câte curse trebuie să facă un autocamion basculant, pentru a efectua acest lucru, dacă caroseria conține 2,25 ± 0,02 m^3?

În cazurile mai puțin importante se aplică ***regulile de calcul ale cifrelor.***

Amintim, că ***semne zecimale*** **ale numărului se numesc toate cifrele lui, care sunt la dreapta de virgula zecimală.**

Cifre semnificative **ale numărului se numesc toate cifrele lui, cu excepţia zerourilor de la stânga de prima cifră diferită de zero şi a zerourilor de la dreapta ce stau pe locul cifrelor înlocuite la rotunjire.**

De exemplu, în valoarea aproximativă 0,03074 sunt cinci semne zecimale şi patru cifre semnificative: 3, 0, 7, 4. Dar în valoarea aproximativă a diametrului Terrei d = 12 700 km nu sunt semne zecimale, iar cifre semnificative sunt trei: 1, 2 şi 7.

Fie date valorile aproximative x = 3,24 şi y = 1,4. Notăm primele cifre omise la rotunjire prin semnul întrebării: x = 3,24?, y = 1,4?. Aflăm suma şi diferența acestor valori aproximative:

$$\begin{array}{r} 3{,}24? \\ +\ \underline{1{,}4?\ } \\ 4{,}6?? \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}24? \\ -\ \underline{1{,}4?\ } \\ 1{,}8?? \end{array}$$

În genere, **la adunarea şi scăderea valorilor aproximative la rezultat trebuie de păstrat atâtea semne zecimale, câte le are componenta operaţiei cu cel mai mic număr de semne zecimale.**

La înmulţirea valorilor aproximative la rezultat trebuie de păstrat atâtea cifre semnificative, câte le are factorul cu cel mai mic număr de cifre semnificative.

La împărțirea valorilor aproximative se aplică o regulă asemănătoare.

Regulile evidențiate cu caracter aldin se numesc ***reguli de calcul ale cifrelor.*** Ele nu asigură exactitate mare a calculelor aproximative, dar sunt suficiente pentru majoritatea problemelor aplicate.

• Ştiind, că diametrul tulpinei teiului este egal cu 57 cm, elevul a calculat aria secțiunii transversale a tulpinei: 2550,5 cm^2. Oare este adevărat acest răspuns? Dacă fals – corectați-l.

• Aflați aria trapezului, bazele căruia sunt $a \approx 1{,}7$, $b \approx 0{,}43$ şi înălțimea $h \approx 0{,}841$.

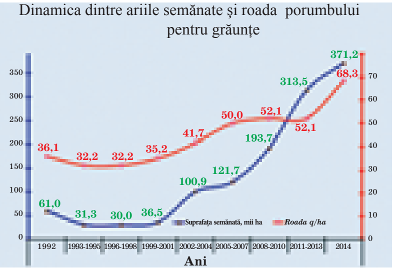
Oamenii au frică de aproximaţii, deşi în practică zilnic au de lucru exclusiv cu numere aproximative.

A. B. Empacher

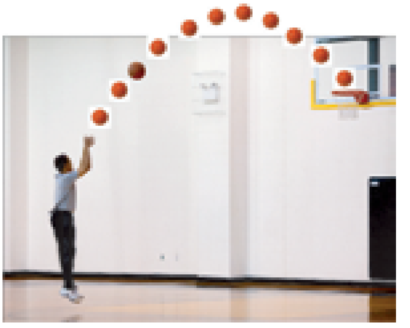
Calculele trebuie efectuate cu acelaşi ordin de exactitate care este necesar pentru practică, însă orice cifră greşită formează o greşală, iar fiecare cifră de prisos – jumătate de greşeală.

O. M. Krâlov

Proiectul de învăţământ Nr. 2



Funcţiile în jurul nostru



Acest proiect de învăţământ este compus din două părţi. *Prima parte* este consacrată examinării întrebărilor teoretice generale, care se referă la funcţii. Elevii selectează direcţia cercetării şi se împart pe grupe: „designeri”, „istorici”, „jurnalişti”, „IT-specialişti”, „matematicieni”, etc. Fiecare elev poate participa în lucrul uneia sau a două grupe de proiectare.

Designerii clarifică unde şi cum se aplică elementele graficelor funcţiilor în proiectarea cu măiestrie a obiectelor şi a complexelor lor în diferite domenii ale cunoştinţelor – în arhitectură, în înfrumuseţarea îmbrăcămintei, etc. Dau exemple de astfel de funcţii.

Istoricii studiază apariţia şi folosirea noţiunii „funcţia”. Pentru apărare pregătesc o relatare scurtă şi o prezentare cu definiţii concrete şi date despre autorii lor. De exemplu:

➢ În jumătatea a doua a sec. XIX (după crearea teoriei mulţimilor) în definiţia funcţiilor afară de ideea corespondenţei era înclusă încă şi ideea mulţimii: „Dacă fiecărui element x din mulţimea A îi este pus în corespondenţă un element anumit y din mulţimea B, atunci se spune că pe mulţimea A este dată funcţia $y = f(x)$ sau că mulţimea A se aplică pe mulţimea B”. Astfel de definiţie a funcţiei se poate aplica nu numai la mărimi şi numere, dar şi la alte obiecte matematice, de exemplu, la figurile geometrice.

Jurnaliştii caută opere artistice sau citate, în care se aminteşte despre funcţii şi proprietăţile lor. De exemplu:

> *Nu este nici un domeniu de cunoştinţe al omului, unde nu se va intercala noţiunea de funcţii şi reprezentarea lor grafică.*
>
> *K. F. Lebedinţev*

IT-specialiştii cercetează cum cu ajutorul tehnologiilor informaţionale se poate construi graficele funcţiilor compuse, se poate studia proprietăţile lor şi se poate rezolva ecuaţii, inecuaţii şi sistemele lor. De exemplu, construiesc graficele funcţiilor în programul MS Excel, GRAN sau GeoGebra.

Matematicienii studiază funcţiile, care nu se examinează în şcoala de bază. De exemplu, funcţiile părţii întregi şi fracţionare a numărului, exponenţiale, trigonometrice, etc.

Partea a doua a proiectului este consacrată modelării a diferitor procese în timpul rezolvării problemelor aplicative. Se prevede că funcțiile, figurile geometrice, expresiile, ecuațiile şi sistemele lor, diagramele, etc. Vor fi aplicate ca modele matematice. Elevii se vor familiariza cu materialul teoretic „modelarea matematică” expus mai jos şi vor rezolva problemele stabilite de învățător.

Se recomandă elevilor să prelucreze independent materialul teoretic expus mai jos.

Modelarea matematică

Metodele matematice rezolvă nu numai probleme abstracte despre numere, figuri, ecuații, funcții, etc, dar şi multe altele. ***Probleme aplicative*** se numesc acele, condițiile cărora conțin noțiuni care nu sunt matematice. La rezolvarea problemei aplicative cu metode matematice, la început se alcătuieşte modelul ei matematic.

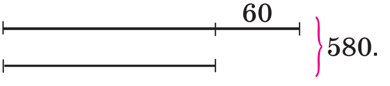
Problema 1. În două magazine sunt 580 kg de mere. Câte mere sunt în fiecare magazin, dacă în primul sunt cu 60 kg mai mult, decât în al doilea? Alcătuiți modele matematice diferite pentru această problemă.

Rezolvare. Fie în primul magazin x kg de mere, atunci în al doilea – $(x – 60)$ kg, iar împreună – $(x + x – 60)$ kg. Avem ecuația $x + x – 60 = 580$. De unde $2x = 640$, $x = 320$, $x – 60 = 320 – 60 = 260$.

Răspuns. 320 kg şi 260 kg.

Ecuația $x + x – 60 = 580$ este unul din modelele matematice ale problemei cercetate.

Se poate alcătui şi alte modele, printre altele în formă de:

- ecuație $y + y + 60 = 580$;
- sistem de ecuații $\begin{cases} x + y = 580, \\ x - y = 60; \end{cases}$
- schemă 

Model **se numeşte obiectul special creat, care redă proprietățile obiectului studiat** (de la cuvântul francez *modèle* – copie, exemplu). Modelul micşorat al avionului, automobilului, barajului sunt exemple de modele fizice.

Modelul matematic este sistemul corelațiilor matematice care aproximativ în formă abstractă descrie obiectul, procesul sau fenomenul studiat.

Modelele matematice se alcătuiesc din noțiuni matematice şi relațiile: figurilor geometrice, numerelor, expresiilor, etc. În majoritatea cazurilor ca modele matematice sunt funcțiile, ecuațiile, inecuațiile, sistemele lor.

Modelare matematică este procesul alcătuirii modelului matematic din noțiuni matematice şi aplicarea lui în continuare pentru rezolvarea problemelor concrete.

Rezolvarea prblemei aplicative cu metode matematice se realizează în trei etape:

1) alcătuirea modelului matematic al problemei date;
2) rezolvarea problemei matematice;
3) analiza răspunsului.

Problema 2. Oare este suficient un milion de litri de apă pentru petrecerea întrecerilor la înot într-un bazin cu fundul orizontal de formă dreptunghiulară cu lungimea 100 m şi lăţimea de 25 m?

Rezolvare. I. Alcătuirea modelului matematic al problemei. Apa în bazin cu fundul orizontal ia forma paralelepipedului dreptunghic, care pentru problema dată este modelul matematic al obiectului real. În acest paralelipiped o muchie corespunde înălţimii apei (a este valoarea căutată), alte muchii sunt lungimea (b) şi lăţimea (c) bazinului.

II. Rezolvarea problemei matematice. $V = a \cdot b \cdot c$ este volumul paralelepipedului dreptunghic cu dimensiunile a, b şi c. Conform condiţiei problemei:

$b = 100$ m, $c = 25$ m; $V = 1\,000\,000$ l $= 1\,000\,000$ dm^3 $= 1000$ m^3.

Avem: $1000 = a \cdot 100 \cdot 25$, de unde $a \; \frac{1000}{2500} = 0{,}4$ (m).

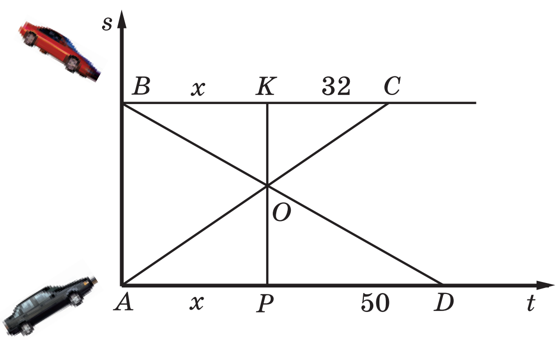
III. Analiza răspunsului. Pentru desfăşurarea întrecerilor la înot adâncimea de 0,4 m este foarte mică. Deci, un 1 000 000 l de apă în bazinul dat sunt insuficiente pentru petrecerea întrecerilor la înot.

Răspuns. Insuficient.

Pentru multe probleme de mişcare cel mai potrivit model matematic sunt graficele construite în sistemul de coordonate cartezian. Pe axa absciselor se notează timpul mişcării t, iar pe axa ordonatelor – distanţa parcursă s. Odată cu trecerea timpului distanţa dintre oraşe nu se schimbă şi acestui fapt îi corespund drepte paralele. Examinăm o problemă.

Problema 3. Din oraşele A şi B au plecat în acelaşi timp unul în întâmpinarea altuia două automobile. Primul a sosit în B peste 32 min după întâlnire, iar al doilea a sosit în A peste 50 min după întâlnire. Câte minute ei au fost în drum până la întâlnire?

Rezolvare. Fie AC şi BD graficele mişcării ale primului şi a celui de al doilea automobil. Dacă fiecare din ele s-a aflat în drum x min până la întâlnire, adică $AP = BK = x$, atunci $KC = 32$, $PD = 50$.



$\Delta AOP \sim \Delta COK$ şi $\Delta POD \sim \Delta KOB$, de aceea

$$\frac{AP}{KC} = \frac{OP}{OK} \quad \frac{PD}{BK}.$$

Deci, $\frac{x}{32} = \frac{50}{x}$, de unde $x = 40$.

Răspuns. 40 min.

Modelele matematice ale problemei sunt sistemul de grafice reprezentate pe figura 111 şi ecuaţia $x : 32 = 50 : x$. Încercaţi să alcătuiţi şi alte modele matematice.

De exemplu, atrageţi atenţia, că $AD \| BC$, iar tangentele unghiurilor de înclinaţie ale dreptelor AC şi BD faţă de aceste drepte sunt vitezele mişcării obiectelor respective.

1. Daţi exemple de relaţii dintre mărimile fizice care pot fi modelate prin egalitatea: $y = mx$, $y = \frac{m}{x}$.

2. Formulaţi problema aplicativă care are ca model matematic formulele

a) $l = 2\pi r$; b) $S = \pi r^2$; c) $S = \frac{a+b}{2}h$.

Efectuăm împreună!

1 Doi fermieri, lucrând pe combine, pot recolta împreună roada de grâu în 12 h. În câte ore poate recolta această roadă fiecare, lucrând singur, dacă productivitatea muncii a primului este de 1,5 ori mai înaltă decât a celui de al doilea?

Rezolvare. Fie că primul fermier poate recolta tot grâul în x h, al doilea în $1,5x$ h. În 1 h primul poate recolta $\frac{1}{x}$ parte din lan, iar al doilea $\frac{1}{1,5x}$ parte. Împreună ei pot recolta în 1 h a $\frac{1}{12}$ parte din lan. Deci,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1,5x} = \frac{1}{12}, \text{ de unde } \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{1,5}\right) = \frac{1}{12}, \quad x = \frac{2,5}{1,5} \cdot 12, \; x = 20; \; 1,5 \cdot 20 = 30.$$

Răspuns. 20 h; 30 h.

2 Pentru realizarea fiecărei trageri de loterie se cheltuieşte 55 000 grn. Un bilet de loterie costă 1 grn. A treia parte din incasarea de la vânzarea biletelor se livrează în fondul câştigurilor, a patra – pentru plătirea impozitelor şi restul este beneficiul organizatorilor loteriei. Care a fost beneficiul, dacă s-au vândut 180 000 de bilete? Câte bilete trebuie vândute pentru a obţine un beneficiu mai mare decât 30 000 grn.? În ce condiţii organizatorii nu vor obţine beneficiu?

Rezolvare

I. Fie S incasarea de la vânzarea biletelor, iar P – beneficiul. Atunci $S = \frac{S}{3} + \frac{S}{4} + P + 55\,000$, iar $P = \frac{5S}{12} - 55\,000$.

II. 1. Dacă $S = 180\,000$ grn. atunci $P = \frac{5 \cdot 180\,000}{12} - 55\,000 = 20\,000$ grn.

2. Dacă $P > 30\,000$, atunci $\frac{5S}{12} - 55\,000 > 30\,000$, iar $S > 204\,000$ grn.

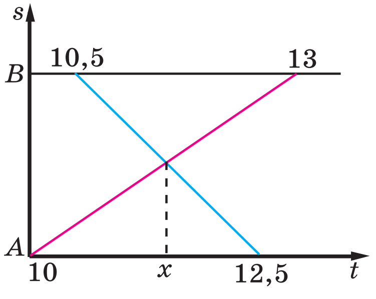
3. Dacă $P \le 0$, atunci $\frac{5S}{12} - 55\,000 \le 0$, iar $S \le 132\,000$.

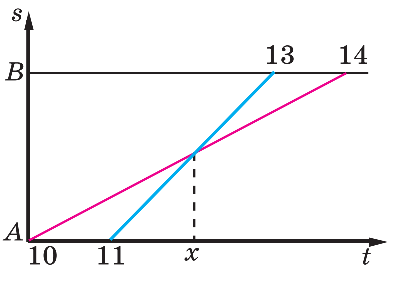
III. Deoarece preţul biletului de loterie este 1 grn., cantitatea biletelor vândute (K) este egală numeric cu incasaţia. Deci, dacă $K > 204\,000$ de bilete, atunci beneficiul va fi mai mare decât 30 000 grn., iar dacă $K \le 132\,000$ de bilete, organizatorii nu vor avea beneficiu.

Răspuns. 20 000 grn.; mai mult de 204 000 de bilete.

Problemele de mai jos rezolvați oral, examinând modelele grafice ale lor.

3 La ora 10 din orașul A spre orașul B a plecat un motociclist, iar peste 30 min din B în întâmpinarea lui a plecat un automobil. La ce oră ei s-au întâlnit, dacă automobilul în A a sosit la ora 12 și 30 min, iar motociclistul în B – la ora 13 (figura din stânga)?





4 La ora 10 din orașul A spre orașul B a plecat un motociclist, iar la ora 11 tot așa din A spre B a plecat un automobil. La ce oră automobilul îl va ajunge pe motociclist, dacă el a sosit în B la ora 13, dar motociclistul – la ora 14 (fgura din dreapta)?

Alcătuiți modelele matematice ale problemelor și rezolvați-le.

1. O vacă era legată într-o poiană de un țăpuș cu o funie cu lungimea de 8 m. Ce arie ea va paște?

2. Pentru a ridica căldarea din fântână trebuie de făcut 12 rotații cu coarba. Aflați adâncimea fântânii, dacă diametrul valului este de 24 cm.

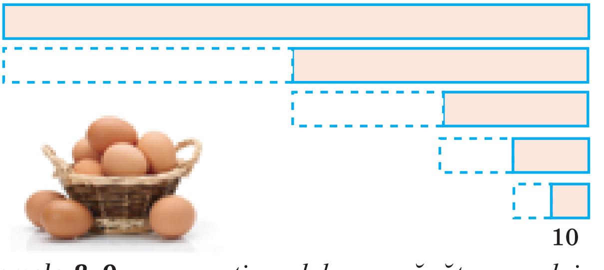
3. Tata este mai în vârstă decât fiul de 4 ori, dar peste 5 ani el va fi mai în vârstă decât fiul numai de trei ori. Câți ani are fiul acum?

4. ***Problema lui Bezout.*** Unui muncitor i s-a spus că va primi câte 24 su pentru fiecare zi de lucru, dar i se vor reține câte 6 su pentru fiecare absență. Peste 30 de zile s-a clarificat că el nu va primi nimic. Câte zile el a lucrat?

5. La un depozit era de 2 ori mai mult cărbune decât la al doilea. Dacă la primul depozit s-ar aduce încă 80 t, iar la al doilea – 145 t, la ambele depozite va fi aceeași cantitate de cărbune. Câte tone de cărbune sunt la fiecare depozit?

6. Într-un sac erau 60 kg de zahăr, în al doilea – 80 kg. Din sacul al doilea s-a luat zahăr de 3 ori mai mult decât din primul și atunci în primul sac a rămas de 2 ori mai mult zahăr decât în al doilea. Câte kilograme de zahăr s-au luat din fiecare sac?

7. Dintr-un coș s-a luat jumătate din toate ouăle, apoi – jumătate din rest, apoi – jumătate din noul rest, în fine – jumătate din noul rest. După asta în coș au rămas 10 ouă. Câte ouă erau la început în coș?



*Pentru problemele **8–9** compuneți modele asemănătoare celei aplicate în problema*

7. Daţi răspunsul la întrebări.

8. Oltea a copt pateuri şi două a mâncat singură. Cu jumătate din cele rămase ea a servit părinții, cu jumătate din rest – prietenele. Trei pateuri, ce rămăsese după aceasta, ea le-a dat fratelui mai mic. Câte pateuri a copt Oltea?

9. Luni elevii au luat jumătate din toate manualele noi, marți – jumătate din rest, miercuri – jumătate din noul rest. După asta în bibliotecă au rămas 25 de manuale noi. Câte manuale noi erau în bibliotecă?

Rezolvați problemele **10** şi **11**, comparați modelele matematice ale lor.

10. Doi fierari, lucrând împreună, execută un lucru în 8 zile. În câte zile ar executa acest lucru fierarul al doilea, dacă primul îl poate executa în 12 zile?

11. a) O brigadă poate executa un lucru în 3 h, alta în 5 h. În câte ore ar executa acest lucru ambele brigăzi lucrând împreună?

b) Un bazin se umple pintr-o țeavă în 3 h, prin alta în 5 h. În câte ore se va umple bazinul, dacă vor fi deschise ambele țevi?

c) De la stația A spre stația B şi din B spre A în acelaşi timp au plecat două automobile. Peste câte ore ele se vor întâlni, dacă se ştie că primul automobil parcurge distanța AB în 3 h, iar al doilea în 5 h?

12. Ce dimensiuni au lingourile de aur şi argint în formă de cub, dacă masa fiecăruia este de 3 kg? Densitatea aurului este de 19,3 g/cm^3, iar densitatea argintului este de 10,5 g/cm^3.

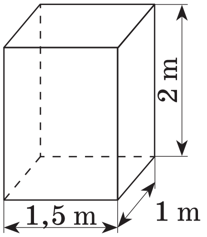
13. *Problema lui Maclaurin.* Câțiva oameni au luat prânzul împreună şi trebuiau să plătească 175 de şilingi. S-a clarificat, că doi nu aveau cu ei bani, de aceea ceilalți au plătit cu 10 şilingi mai mult decât se cuvenea. Câți oameni au luat prânzul?

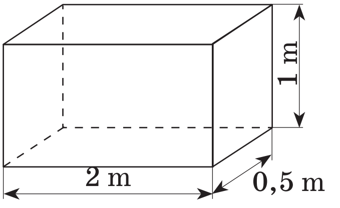
14. Pe figură sunt reprezentate două rezervoare, care au forma de paralelipipede dreptunghice şi sunt date dimensiunile lor. $\frac{3}{5}$ din volumul primului rezervor şi $\frac{3}{4}$ din volumul celui de al doilea sunt umpluți cu apă. Din primul rezervor zilnic se ia 112 litri de apă, iar din al doilea – 31 litri.

a) Scrieți fracția, care indică de câte ori peste x zile în primul rezervor va rămâne mai multă apă decât în al doilea.

b) Calculați de câte ori peste 9 zile în primul rezervor va rămâne mai multă apă, decât în cel de al doilea.

c) Ce înseamnă egalitatea $\frac{1800-112x}{750-31x}=3$? Rezolvați ecuația şi faceți concluzie.





15. *Problemă deschisă.* Compuneți o problemă asemănătoare cu cea precedentă.

16. O uzină a primit o comandă să producă 105 motoare. Uzina zilnic producea cu 6 motoare mai multe decât se prevedea, de aceea a executat comanda cu 2 zile mai devreme. Câte motoare producea uzina zilnic?

17. La competițiile de fotbal au avut loc 55 de meciuri, fiecare echipă a jucat cu fiecare celelalte câte un meci. Câte echipe au participat la competiții?

18. ***Problema lui Fibonacci.*** Două turnuri, unul cu înălțimea de 40 , iar al doilea – de 30 de picioare, sunt situate la o distanță de 50 de picioare unul de altul. Două păsări în acelaşi timp îşi iau zborul de pe ambele turnuri spre fântâna amplasată între ele. Dacă păsările zboară cu aceeaşi viteză, ele ajung la fântână în acelaşi timp. Aflați distanța de la fântână până la turnuri.

19. Două brigăzi de zugravi, lucrând împreună, pot executa un lucru în 4 zile. În câte zile ar executa acest lucru fiecare brigadă separat, dacă prima brigadă îl execută cu 6 zile mai devreme decât a doua?

20. Cu două excavatoare cu puteri diferite care lucrau împreună s-a săpat o groapă de fundație în 6 h. Dacă cu unul s-ar fi săpat jumătate din groapă, iar apoi cu al doilea restul, atunci tot lucrul ar fi fost terminat în 12,5 h. În câte ore cu fiecare excavator aparte se putea executa acest lucru?

21. Cu două pompe ce lucrau împreună s-a umplut cu petrol un vas petrolier în 5 h. Dacă puterea I pompe era de două ori mai mică, iar puterea pompei II de două ori mai mare decât cea inițială, atunci vasul petrolier ar fi fost umplut în 4 h. În câte ore cu fiecare pompă, care ar lucra separat cu puterea inițială, se poate umplea vasul cu petrol?

22. Sunt soluții de sare de 10% şi de 15%. Cât trebuie de luat din fiecare soluție pentru a obține 100 g de soluție de sare cu concentrația de 12 %?

23. Sunt două soluții de sare. Concentrația primei soluții este de 0,25, iar a soluției a doua – 0,4. Cu câte kilograme mai mult trebuie de luat dintr-o soluție decât din cealaltă pentru a obține o soluție cu masa de 100 kg şi concentrația de 0,37?

24. Prețul mobilei după două reduceri succesive cu p % s-a micşorat de la 12 500 grn. până la 8 000 grn. Cu câte procente s-a micşorat prețul de fiecare dată?

25. În cafeneaua pentru copii salata de fructe „Exotica”, care se compune din piersici, costă 24 grn. Care va fi prețul salatei, dacă înlocuim piersicele cu: a) prune care sunt de două ori mai ieftine decât piersicile; b) fructe care sunt de k ori mai scumpe decât piersicile? Luați în considerație, că prețul componentelor din salată alcătuieşte 50 % din prețul total.

26. Cererea şi propunerea unei mărfi se descriu cu ecuațiile:

$Q_D = 750 - 23p$, $Q_S = 150 + 97p$,

unde Q_D este volumul cererii (mil. bucăți pe an), Q_S este volumul propunerii (mln. bucăți pe an), p – prețul mărfii, grn. Aflați volumul şi prețul echilibrat al vânzării. Cum se vor schimba cererea şi propunerea, dacă prețul mărfii va fi 6 grn.?

27. Pentru fabricarea producției o firmă a cumpărat utilaj de 200 000 grn. Se prevede, că termenul de exploatare al utilajului este de 10 ani şi după terminarea termenului de exploatare el poate fi vândut numai ca deşeuri cu prețul de 19 700 grn. Stabiliți care va fi prețul curent al utilajului peste 2 şi peste 5 ani de exploatare, dacă decontările anuale pentru amortizare rămân constante.

28. Un fermier are 600 m de plasă metalică cu care doreşte să îngrădească un ocol pentru vite. Ce formă trebuie să aleagă pentru ocol, ca aria lui să fie cea mai mare?

Eficienţă energetică şi economisire energetică

Proiectul de învăţământ Nr. 33

Calcule financiare

Aplicarea matematicii

Scopul proiectului dat constă în aceea, ca elevii în procesul activității de învățământ independente să dezvăluie însemnătatea matematicii în viața de toate zilele, de asemenea aplicarea calculelor procentuale şi a cunoştințelor statistice. Se prevede, că activitatea de proiectare va fi însoțită de alcătuirea şi rezolvarea problemelor cu procente, precum şi analiza şi construirea diagramelor.

Elevii clasei formează grupe câte 2-3 persoane. După dorința elevilor se poate efectua activitatea individuală de proiectare. Fiecare grupă alege pentru activitatea proiectării una din temele propuse mai jos:

1) Matematica în profesia părinților mei.
2) Matematica în transport.
3) Matematica în gospodăria agrară.
4) Matematica în bucătărie.
5) Cum eu folosesc timpul liber.
6) Căror cărți eu dau prioritate.
7) Ce citesc în familia mea.
8) Sportul în familia mea.
9) Indexul de masă şi alimentarea balansată a familiei mele.
10) Rețele sociale.
11) Internetul în familia mea – aplicarea eficientă.
12) În care bancă de depozitat banii pentru păstrare.
13) Impozitele care plăteşte familia mea.
14) Cum de economisit energia electrică.
15) Cât se poate economisi la folosirea rațională a aparatelor telefonice.
16) Apa care noi o folosim fără rost.
17) Folosirea apei în diferite țări ale lumii.
18) Avantajele şi neajunsurile diferitor surse de lumină.
19) Avantajele şi neajunsurile diferitor surse de energie.
20) Efeciența energetică a locuinței noastre.
21) Efeciența energetică a şcolii noastre.
22) Folosirea efecientă a lotului de pământ de lângă casă.

Temele pentru activitatea de proiectare se anunţă elevilor la sfârşitul sfertului al treilea. După selectarea temei de cercetare fiecare elev trebuie să prelucreze materialul obligatoriu („Calcule procentuale”), care se conţine mai jos, şi să selecteze cunoştinţe suplimentare, care se referă la tema selectată.

Rezultatele lucrului asupra proiectului este de dorit de prezentat în formă de portfolio individual cu prezentarea proiectului la calculator în grupă. După rezultatele studierii se pot face placarde, ziare, culegeri de probleme (în formă electronică sau pe hârtie).

Apărarea proiectelor este util de petrecut la câteva ore tematice extraşcolare, invitând elevi din alte clase, învăţători şi părinţi.

Elevilor li se recomandă independent să repete şi se prelucreze materialul teoretic dat mai jos.

Calcule procentuale

Procentul este o sutime:

1 % = 0,01; 50 % = 0,5; 100 % = 1.

Cele mai simple probleme cu procente aţi studiat mai devreme. Să ne amintim aceste tipuri de probleme şi procedeele rezolvării lor.

Există trei tipuri de probleme cu procente:

1) aflarea procentelor dintr-un număr;

• p procente din numărul a: $a \cdot 0{,}01p$;

2) aflarea numărului după procentele lui: • numărul, ale cărui p procente sunt egale cu b: $b : (0{,}01p)$;

3) aflarea raportului procentual: • raportul procentual a lui a şi b: $(a : b) \cdot 100$ %.

Examinăm exemple de aceste probleme.

Exemplu 1. Trebuie arat un ogor, aria căruia este egală cu 300 ha. În prima zi tractoriştii au executat 40 % din sarcină. Câte hectare ei au arat în prima zi?

Exemplu 2. În prima zi tractoriştii au arat 120 ha, ce alcătuiesc 40 % din ogor. Aflaţi aria ogorului întreg.

Exemplu 3. Trebuie arat un ogor cu aria de 300 ha. În prima zi tractoriştii au arat 120 ha. Câte procente din tot ogorul au arat ei în prima zi?

Încercaţi să rezolvaţi fiecare problemă prin câteva procedee, înlocuind 40 % cu fracţia 0,4 sau $\frac{2}{5}$.

Astfel de probleme este comod de le rezolvat prin *procedeul proporţiei*. Rezolvarea problemelor poate fi prezentată aşa:

(1) 300 ha — 100 %, $\frac{300}{x} = \frac{100}{40}$, $x = \frac{300 \cdot 40}{100} = 120$ (ha).

x ha – 40 %.

(2) 120 ha — 40 %, $\frac{120}{x} = \frac{40}{100}$, $x = \frac{120 \cdot 100}{40} = 300$ (ha).

x ha – 100 %.

(3) 300 ha — 100 %, $\frac{300}{120} = \frac{100}{x}$, $x = \frac{120 \cdot 100}{300} = 40$ (%).

120 ha — x %.

În probleme mai compuse cu procente deseori se spune despre mărirea s-au micşorarea mărimii cu câteva procente. În aceste cazuri trebuie bine de priceput de la ce se iau procentele. De exemplu, când se spune că salariul s-a mărit cu 10 %, atunci se subînțelege că el s-a mărit cu 10 % de la salariul precedent. Dacă valoarea *x* este mai mare decât *y* cu *p* %, atunci valoarea *y* este mai mică decât *x*, dar nu cu *p* %. Măririi de 2 ori îi corespunde mărirea cu 100 %, iar micşorării de 2 ori – micşorarea cu 50 % (fig. 118). Prețul mărfii teoretic poate să se mărească cu un număr arbitrar de procente, dar să se micşoreze, de exemplu, cu 120 % nu poate.

Examinăm încă o problemă cu procente.

Exemplu 4. După ce s-au uscat 55 t de grâu cu umiditatea de 16 % s-au obținut 50 t. Aflați procentul umidității grâului uscat.

Rezolvare. Grâul conținea la început $0{,}16 \cdot 55 = 8{,}8$ (t) de apă.

Apa care s-a evaporat este de 5 t ($55 – 50 = 5$).

Apa care a rămas în grâu $8{,}8 – 5 = 3{,}8$ (t).

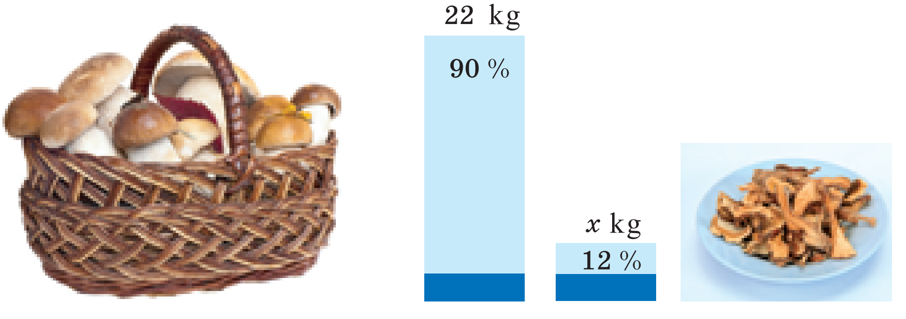
Deci, procentul umidității grâului uscat este $3{,}8 : 50 = 0{,}076 = 7{,}6$ %.

Răspuns. 7,6 %.

Problema poate fi rezolvată şi altfel, de exemplu, compunând ecuația:

$0{,}16 \cdot 55 – 0{,}01x \cdot 50 = 5$.

Exemplu 5. Ciupercile proaspete conțin 90 % de apă, iar cele uscate – 12 %. Câte ciuperci uscate se vor obține din 22 kg proaspete?



Rezolvare. Fie că vom obține *x* kg de ciuperci uscate.În ele 88 % din masă va fi fără apă, adică $0{,}88x$. În ciupercile proaspete 10 % din masă este fără apă, adică 2,2 kg. Masa fără apă a ciupercilor poaspete şi a celor uscate sunt egale, de unde obținem ecuația:

$0{,}88x = 2{,}2$; $x = 2{,}5$.

Răspuns. 2,5 kg.

Exemplu 6. Din două soluții de sare cu concentrația de 10 % şi de 15 % trebuie de alcătuit 40 g de soluție cu concentrația de 12 %. Câte grame din fiecare soluție trebuie de luat?

Rezolvare. Construim şi completăm tabelul, notând masa totală a primei soluții prin *x*, a soluției a doua – prin *y*.

Soluția	Masa totală,g	Conținutul sării, %	Masa sării, g
I	x	10	$0{,}10x$
II	y	15	$0{,}15y$

II	y	15	$0{,}15y$
III (alcătuită)	40	12	4,8

După valorile din coloniţele «Masa totală» şi «Masa sării» alcătuim sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x+y=40, \\ 0{,}10x+0{,}15y=4{,}8, \end{cases} \text{de unde } x = 24,\ y = 16.$$

Răspuns. Din prima soluţie trebuie de luat 24 g, din a doua – 10 g.

Contabilii, lucrătorii financiari foarte des trebuie să rezolve probleme cu procente. Examinăm exemple legate cu calculul banilor care le revin investitorilor (deponenţilor).

E vorba de **dobândă simplă** dacă calculul procentelor se face numai pentru *suma investită* iniţial.

De exemplu, la începutul anului deponentul depune pe contul bancar suma P sub r procente anuale. Într-un an el obţine suma P_1, care este egală cu depunerea P plus procentele calculate $\left(\frac{Pr}{100}\right)$, sau $P_1 = P + \frac{Pr}{100} = P\left(1+\frac{r}{100}\right)$.

Peste doi sau trei ani suma de pe cont va alcătui:

$$P_2 = P + \frac{Pr}{100} + \frac{Pr}{100} = P\left(1+2\frac{r}{100}\right) \text{ i } P_3 = P\left(1+3\frac{r}{100}\right).$$

În mod analog se reprezintă suma P_n pe care o va primi deponentul peste n ani:

$$P_n = P\left(1+\frac{r}{100}n\right), \qquad (1)$$

unde P este suma depozitului iniţial, P_n este suma depozitului peste n ani.

Calculul după schema procentelor simple se aplică, de regulă, în operaţiile financiare de scurtă durată, când după fiecare interval de calcul deponentului i se plăteşte procentele.

În contractele financiare şi credit de lungă durată mai des se aplică **dobândă compusă**. Ele se calculează nu numai pentru suma iniţială, dar şi pentru procentele calculate mai devreme. În acest caz se spune că are loc *capitalizarea procentelor*.

Presupunem că deponentul a depus în banca de economii 1 000 grn. sub 9 % anuale. Acesta este ***capitalul iniţial***. Peste 1 an banca va calcula în plus deponentului 90 grn. de ***bani din procente*** (9 % din 1 000 grn.). După aceasta pe contul deponentului vor fi 1 090 grn.; deoarece 1 000(1 + 0,09) = 1 090. În anul al doilea banii de la procente se vor calcula acum 9 % din 1 090 grn.; ***capitalul acumulat*** al deponentului după 2 ani va fi egal cu 1 000 $(1 + 0{,}09)^2$ grn. Este clar, că după n ani acest capital va alcătui 1 000 $(1 + 0{,}09)^n$ grn.

Deci, capitalul iniţial depus la banca de economii sub r % anuale peste n ani s-a transforma în capital acumulat:

$$P_n = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n.$$

Aceasta este ***formula dobânzii compuse***. Ea este una din formulele fundamentale ale calculului financiar.

Exemplu 7. Un deponent a depus în bancă 200 000 grn. sub 7 % anuale. Câţi bani de la procente va primi peste 5 ani?

Rezolvare. Să aplicăm formula procentelor compuse $P_n = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$. În cazul dat $r = 7$, $n = 5$.

Deci, $P_5 = P(1{,}07)^5$. Pentru $P = 200\ 000$ avem:

$P_5 = 200\ 000 \cdot (1{,}07)^5 = 280\ 510$.

În comparaţie cu capitalul iniţial:

280 510 – 200 000 = 80 510.

Răspuns. 80 510.

Factorul $\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$, care asigură creşterea sumei de bani se numeşte ***factor miltiplicativ.*** Valoarea lui se calculează pentru diferite valori r şi n care se introduc în tabele speciale.

Selectaţi problemele care se referă la tema de cercetare şi rezolvaţi-le. Compuneţi probleme proprii pe tema proiectului selectat.

1. Salariul unui funcţionar este de 4 000 grn. În anul nou îi promit să-l mărească cu 20 %. Care va fi salariul funcţionarului?

2. La pregătirea saramurei pentru conservarea castraveţilor trebuie 0,75 kg de sare la o căldare de apă (12 kg). Exprimaţi în procente concentraţia soluţiei.

3. Din 1050 boabe de grâu 1000 de boabe au răsărit. Ce procent de încolţire au seminţele?

4. O bancă deserveşte 50 000 de clienţi: 21 000 persoane juridice, iar restul fizice. Ce procent alcătuiesc: a) persoanele juridice; b) persoanele fizice?

5. Aria suprafeţei Terrei alcătuieşte 510,1 mln km^2, din ei 149,2 mln km^2 ocupă uscatul. Câte procente din aria Terrei este acoperită cu apă?

6. Un tractorist trebuia să are 25 ha, dar a arat 27 ha. Cu câte procente el a executat sarcina? Cu câte procente el a supraîmplinit sarcina?

7. Din lapte se obţin 10 % de caşcaval. Cât lapte trebuie pentru a pregăti 20 kg de caşcaval?

8. Din sfecla de zahăr se obţin 12 % de zahăr. Câtă sfeclă trebuie de prelucrat pentru a obţine 1 t de zahăr?

9. Într-o carte sunt cu 20 % mai puţine pagini decât în a doua. Cu câte procente sunt mai multe pagini în cartea a doua decât în prima?

10. Care era preţul mărfii până la reevaluare, dacă după mărirea ei cu 20 % această marfă costă 450 grn.?

11. Preţul unei mărfi s-a micşorat prima dată cu 10 %, iar apoi încă o dată cu 10 %. Cu câte procente s-a schimbat preţul după două reevaluări?

12. Preţul unui automobil la început s-a mărit cu 20 %, iar apoi s-a micşorat cu 20 %. Cum s-a schimbat preţul automobilului după aceste două reevaluări?

13. În două rezervoare se conţin 140 l de benzină. Dacă din primul rezervor 12,5 % din benzină de turnat în al doilea, atunci în ambele rezervoare va fi aceeaşi cantitate de benzină. Câţi litri de benzină sunt în fiecare rezervor?

14. O uzină a mărit producerea în primul an cu 20 %, iar în al doilea – cu 25 %. Cum s-a mărit producerea uzinei în aceşti doi ani?

15. Volumul lucrărilor la o construcţie s-a mărit cu 50 %, iar productivitatea muncii – cu 20 %. Cum s-a schimbat numărul muncitorilor?

16. În 18 kg de soluţie de acid cu concentraţia de 10 % s-au turnat 2 kg de apă. Determinaţi concentraţia în procente a soluţiei obţinute.

17. Câtă soluţie de sare cu concentraţia de 10 % şi de 20 % trebuie de amestecat pentru a obţine 1 kg de soluţie cu concentraţia de 12 %?

18. Câte kilograme de soluţie de 7 % trebuie de turnat în 5 kg de soluţie de 5 % ca ea să fie de 6 %?

19. Câtă apă dulce trebuie de turnat în 100 kg de apă de mare, care conţine 5 % de sare, ca concentraţia sării în ea să fie egală cu 1,5 %?

20. Alama este un aliaj din 60 % de cupru şi 40 % de zinc. Cât cupru şi zinc trebuie topit pentru a obţine 500 t de alamă?

21. Bronzul este un aliaj din cupru şi plumb. Câte procente de cupru sunt într-un lingou de bronz care conţine 17 kg de cupru şi 3 kg de plumb?

22. Câtă apă trebuie de turnat în 10 kg de soluţie de sare cu concentraţia de 5 % pentru a obţine o soluţie cu concentraţia de 3 %?

23. Câtă soluţie de sare cu concentraţia de 2 % trebuie de amestecat cu soluţie de sare cu concentraţia de 10 % pentru a obţine 800 g de soluţie cu concentraţia de 7 %?

24. Cât aur cu titlul 375 trebuie de topit împreună cu 30 g de aur cu titlul 750 pentru a obţine un aliaj de aur cu titlul 500?

25. Din lapte cu grăsimea de 5 % se produce caşcaval cu grăsimea de 15,5 %, iar zerul separat are grăsimea de 0,5 %. Cât caşcaval se obţine din 100 kg de lapte?

26. 65 % din aria primului lan sunt semănate cu secară. Pe lanul al doilea 45 % din arie s-au rezervat pentru secară. Se ştie că pe ambele lanuri cu secară sunt semănate 53 % din aria totală. Ce parte alcătuieşte primul lan din aria totală însemânţată?

27. Din lapte se obţin 20 % de smântână, iar din smântână – 25 % de unt. Cât lapte trebuie pentru a obţine 10 kg de unt?

28. Minereul conţine 60 % de fier. Din el s-a topit fontă care conţine 98 % de fier. Din câte tone de minereu se vor topi 1 000 t de fontă?

29. Ciupercile proaspete conţin 90 % de apă, iar cele uscate – 12 %. Câte ciuperci uscate se vor primi din 44 kg proaspete?

30. Umiditatea ciupercilor proaspete era egală cu 99 %. După puţină uscare umiditatea lor s-a micşorat până la 98 %. Cum s-a schimbat masa ciupercilor?

31. O firmă a luat în bancă un credit de 250 000 grn. pe 5 ani sub 3 % simple. Determinaţi: a) câte grivne va restitui firma peste 5 ani băncii; b) ce venit va obţine banca?

32. Un întreprinzător a depozitat într-o bancă 15 000 grn. sub 5 % compuse. Care va fi suma depozitului lui peste 5 ani?

33. Unei fabrici i s-a dat credit 50 000 grn. pe 6 luni sub 8 % anuale. Ce sumă fabrica trebuie să restitue băncii peste jumătate de an?

34. Pentru un depozit cu mărimea de 90 000 grn. pe un termen de 5 ani o bancă calculează 18 % dobândă. Care sumă va fi pe cont la sfârşitul termenului, dacă calculele dobânzii se vor efectua după schema procentelor compuse: a) în fiecare jumătate de an; b) în fiecare cvartal?

În problemele **35–36** examinaţi diferite condiţii de calcul ale procentelor.

35. Un deponent a depus în bancă 200 000 grn. sub 17 % anuale. Ce dobândă va avea peste doi ani?

36. În ce condiţie capitalul depus în bancă peste doi ani se va mări cu 44 %?

Probleme şi exerciţii pentru repetare

Numere şi operaţii cu ele

Efectuaţi operaţiile (**871, 872**).

871. a) 40 784 + 846 − (13 843 + 787);
b) (52 − 36 + 320 − 96) : 4.

872. a) 12,54 : (44,8 − 38,2) + 5,4 · 1,5;
b) 507,24 : 36 + 0,8(21,7 − 15,8).

Aflaţi valoarea expresiilor (**873, 874**)..

873. a) $\left(2\frac{3}{4}-2\frac{3}{8}-0{,}3\right):6$; b) $\left(5\frac{9}{25}-2{,}36\right):\left(3\frac{4}{5}+0{,}2\right)$.

874. a) $\frac{2}{3}(0{,}3-0{,}5:4):1{,}75-\frac{1}{6}$; b) $2\frac{1}{6}:13+\left(3{,}25+2\frac{1}{6}\right):2\frac{3}{5}$.

Calculaţi (**875, 876**).

875. a) $\frac{47^2-41^2}{28^2-16^2}$; b) $\frac{57^2-42^2}{29^2-26^2}$; c) $\frac{51^2-12^2}{90^2-9^2}$; d) $\frac{61^2-11^2}{36^2-24^2}$.

876. a) $6^{32}\cdot4^{32}-(24^{16}-5)(24^{16}+5)$;
b) $(56^{10}-7)(56^{10}+7)-7^{20}\cdot8^{20}$.

Calculaţi valorile expresiilor (**877 – 881**).

877. a) $\sqrt{64\cdot900}$; b) $\sqrt{25\cdot196}$; c) $\sqrt{49\cdot676}$.

878. a) $\sqrt{0{,}01\cdot121}$; b) $\sqrt{0{,}04\cdot169}$; c) $\sqrt{0{,}09\cdot441}$.

879. a) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$; b) $\sqrt{10\frac{6}{25}}$; c) $\sqrt{31\frac{93}{121}}$.

880. a) $\sqrt{6\cdot10\cdot15}$; b) $\sqrt{15\cdot21\cdot35}$; c) $\sqrt{20\cdot28\cdot35}$.

881. a) $\sqrt{\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{10}{49}}$; b) $\sqrt{\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{36}\cdot\frac{35}{27}}$; c) $\sqrt{1\frac{1}{5}\cdot2\frac{7}{10}}$.

Calculaţi produsele (**882, 883**).

882. a) $\sqrt{44{,}1}\cdot\sqrt{12{,}1}$; b) $\sqrt{28{,}9}\cdot\sqrt{32{,}4}$.

883. a) $\sqrt{\frac{12}{25}}\cdot\sqrt{\frac{80}{135}}$; b) $\sqrt{8\frac{1}{9}}\cdot\sqrt{1\frac{8}{73}}$.

Divizibilitatea numerelor. Raporturi şi proporţii

884. Scrieţi toate numere prime mai mari decât 15 şi mai mici decât 35.

885. Scrieţi toate numere x compuse, care satisfac condiţia $21 < x < 31$.

886. Adăugaţi la numărul 278 din stânga o cifră astfel, ca numărul de patru cifre să se dividă cu 9.

887. Descompuneţi în factori primi numerele: a) 240; b) 350.

888. Aflaţi cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun al numerelor: a) 18 şi 32; b) 42 şi 105; c) 60, 80 şi 140.

889. De câte ori CMMDC a numerelor 36 şi 48 este mai mic decât CMMMC al lor?

890. Descompunând în factori primi numerele 140, 175 şi 210, aflaţi:

a) CMMDC (140, 175), CMMDC (140, 210), CMMDC (140, 175, 210);
b) CMMMC (140, 175), CMMMC (175, 210), CMMMC (140, 175, 210);
c) suma tuturor divizorilor primi ai numărului 210;
d) suma tuturor divizorilor numărului 175.

891. Folosind cifrele 1, 2, 3 scrieţi toate numerele de trei cifre, în care fiecare cifră se întâlneşte numai o dată. Câte numere din ele sunt pare, impare, divizibile cu 3, 6, 9?

892. Aflaţi suma numerelor mai mici decât 20 şi reciproc prime cu numărul 20.

893. Care din numerele mai mici decât 40 sunt reciproc prime cu numărul 60?

894. Aflaţi cinci numere naturale pare divizibile cu 7.

895. Oare poate suma a patru numere naturale consecutive să fie număr prim?

896. Aduceţi la o formă mai simplă raporturile:

a) $20 : 60$; b) $0{,}4 : 1{,}2$; c) $1 : 0{,}125$; d) $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$; f) $1\frac{4}{5} : 2\frac{1}{2}$.

897. Scrieţi câteva proporţii, alcătuite din numerele 2, 4, 3 şi 1,5.

898. Aflaţi termenul necunoscut al proporţiilor

a) $x : 3 = 7 : 6$; c) $11 : 1001 = 0{,}3 : x$; e) $\frac{18}{x} = \frac{1{,}2}{5}$;

b) $1{,}2 : 5 = x : 15$; d) $\frac{x}{7} = \frac{2}{3{,}5}$; f) $9 = \frac{16{,}2}{x}$.

Expresii întregi

Exprimaţi expresiile în formă de polinom (**899, 900**).

899. a) $(0{,}4a^2 - 5ab)^2$; c) $(x^2y^2 - 1)^2$;
b) $(6{,}5xy + 8y^2)^2$; d) $(2 + a^6b^4)^2$.

900. a) $(-x + y^2)^2$; c) $(-2a^2 + 3y^3)^2$; e) $(-0{,}1xy + 5)^2$;
b) $\left(-\frac{1}{3} - 3x^5\right)^2$; d) $\left(-\frac{1}{2}m^3 - 0{,}2n\right)^2$; f) $(-6x^2y - 0{,}5y)^2$.

901. Aduceţi la forma cea mai simplă expresiile:

a) $(3x - 5y)^2 - 3x(3x - 10y)$;
b) $8a(b - 2a) + (4a + b)^2$;
c) $(4x + y)(3x + 4y) - (2y + 3x)^2$;
d) $(3a + 6b)^2 - (2a + 9b)(3a + 4b)$.

Descompuneţi în factori polinoamele **(902, 903).**

902. a) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy$;
b) $a^3c^2 - a^2c^2 + a^3 - a^2$;
c) $6a^2b - 18a^2 - 3ab + 9a$;
d) $xyz - 4xz - 5xy + 20x$.

903. a) $a^2 - b^2 - a + b$;
b) $x + y + x^2 - y^2$;
c) $4a^2 - 9 - 2a - 3$;
d) $5 - 3x + 25 - 9x^2$.

904. Reprezentaţi în formă de produs:

a) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$;
b) $a^2 + 2a + 1 - b^2$;
c) $x^2 - y^2 + 8y - 16$;
d) $a^2 - b^2 - 14b - 49$.

905. Reprezentaţi în formă de produs a trei factori:

a) $ab^2 - 4a - b^3 + 4b$;
b) $x^3 + x^2y - 9x - 9y$;
c) $x^2a + 3a^2 - a^3 - 3x^2$;
d) $x^3 - 5b^2 + 5x^2 - xb^2$.

Expresii raţionale

906. Ce valori ale variabilei sunt admisibile pentru fracţii?

a) $\dfrac{a+2}{a(3-a)}$; b) $\dfrac{x+1}{(x-2)(x+3)}$; c) $\dfrac{x+7}{(x^2-4)(x^2-9)}$.

Simplificaţi fracţiile:

907. a) $\dfrac{(a+x)^2}{(a+x)^3}$; b) $\dfrac{x^2y(2-x)^7}{(xy^2(2-x))^6}$; c) $\dfrac{(3+c)^5}{(c^2+6c+9)^4}$; d) $\dfrac{(a^2-1)^3}{(a-1)^5}$.

Aduceţi la forma cea mai simplă expresiile (**908 -- 911**)

908. $\dfrac{2x^2+7xy-9y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{9x^2-7xy-2y^2}{x^2-y^2}$.

909. $\dfrac{x+2y}{2x-y}+\dfrac{2x-2y}{2x-y}+\dfrac{6x-3y}{2x-y}+\dfrac{x-2y}{2x-y}$.

910. a) $\dfrac{1}{m}-\dfrac{5}{4m}$; b) $\dfrac{a}{2x}-\dfrac{4a}{x}$; c) $\dfrac{1}{0{,}5c}-\dfrac{2}{c}$.

911. a) $\dfrac{1}{3ax^2}+\dfrac{2}{5az^2}$; b) $\dfrac{4m}{3p^2x}-\dfrac{1}{5m^2x}$; c) $\dfrac{4}{a}-\dfrac{3}{2ac^2x}$.

Efectuaţi împărţirea şi înmulţirea fracţiilor (**912 --915**).

912. a) $\frac{2ax}{3c^2}:\frac{4ax^2}{9c^3}$; b) $\frac{a^3c^2}{5xy}:\frac{2a^2c^3}{3x^2y}$; c) $\frac{12mn^3}{5ac^2}:\frac{3mn^2}{10a^2}$.

913. a) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{3a+3b}{4a-4b}$; b) $\frac{5-5a}{(1+a)^2}:\frac{10-10a^2}{3+3a}$.

914. a) $\left(\frac{a}{4b}-\frac{b}{4a}\right)\cdot\left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}-1\right)$; b) $\left(\frac{a^2b^{-3}}{6c}\right)^{-3}:\left(\frac{a^3b^{-5}}{9c}\right)^{-2}$.

915. $\frac{m^3-mn^2}{m^2+n^2}\cdot\left(\frac{n}{m^3-m^2n+mn^2}+\frac{m-2n}{m^3+n^3}\right)$.

Expresii iraţionale

Aduceţi la forma cea mai simplă expresiile (**916 -- 922**).

916. a) $2\sqrt{20x}-\sqrt{5x}-\sqrt{45x}$; c) $\sqrt{27x}+2\sqrt{12x}-5\sqrt{3x}$;
b) $\sqrt{18p}-\sqrt{8p}+\sqrt{81}$; d) $\sqrt{18a}-\sqrt{50a}+\sqrt{8a}$.

917. a) $(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)$; c) $(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)$;
b) $(\sqrt{x}+2)(3+\sqrt{x})$; d) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$.

918. a) $\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)+2\sqrt{a}$; b) $(3-2\sqrt{x})\sqrt{x}-3\sqrt{x}$.

919. a) $\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{x})+\sqrt{ax}$; b) $\sqrt{xy}-\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

920. a) $\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$; b) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{x-z}$; c) $\frac{a+\sqrt{2}}{a^2-2}$.

921. a) $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+a}$; b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+x\sqrt{a}}$; c) $\frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1}$.

922. a) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{(b-a)^2}{\sqrt{ab}}$; b) $\left(\frac{1}{x+x\sqrt{y}}+\frac{1}{x-x\sqrt{y}}\right):\frac{2}{y-1}$.

Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii

Rezolvaţi ecuaţiile (**923 -- 929**).

923. a) $7x-39=2(x+3)+6-2x+5$;
b) $3(x-5)=5(x-3)-4(2-3x)$.

924. a) $5(x-3)+7(3x+6)=2(x-2)+103$;
b) $8(y-2)+5(3y-2)=3(y-5)+69$.

925. a) $7(6x-1)+3(2x+1)-5(12x-7)=23$;
b) $5(8z-1)+8(7-4z)-7(4z+1)=19$.

926. a) $x^2-3x+2=0$;
b) $x^2-8x-20=0$;
c) $3y^2-2y-8=0$;
d) $0{,}25x^2-2x+3=0$.

927. a) $\frac{x-1}{x+5}+\frac{x-1}{x-5}=2$;
b) $\frac{2x-1}{x+2}=\frac{1-2x}{x-2}+4$;
c) $\frac{x-1}{x+4}-2=\frac{1-x}{x-4}$;
d) $\frac{2x-1}{2x+4}=\frac{1-2x}{2x-4}+2$.

928. a) $x^4-5x^2+4=0$; b) $x^4-10x^2+9=0$.

929. a) $3x^4-2x^2-40=0$; b) $5y^4+7y^2-12=0$.

Rezolvaţi sistemele de ecuaţii (**930 -- 932**).

930. a) $\begin{cases}2x-3(x-y)=7,\\5y-2(x-2y)=23;\end{cases}$ b) $\begin{cases}4y-5(y-x)=8,\\2(3x-y)+7y=-14.\end{cases}$

931. a) $\begin{cases}\frac{4}{5}x-y=7,\\\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}y=11;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{3}{7}x-z=15,\\\frac{2}{5}x+\frac{3}{7}z=14.\end{cases}$

932. a) $\begin{cases}\frac{5+y}{3}-\frac{3x+4y}{4}=3x+1,\\\frac{7x+2}{3}+\frac{4x-3}{2}+\frac{11}{6}=1-3x;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{7+x}{5}-\frac{2x-y}{4}-3y=-5,\\\frac{5y-7}{2}-\frac{3-4x}{6}-18=-5x.\end{cases}$

933. Rezolvaţi sistemele de ecuaţii prin procedeul substituţiei:

a) $\begin{cases}x-y=3,\\x^2+y^2=9;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x-y=3,\\xy=4.\end{cases}$

934. Rezolvaţi sistemele de ecuaţii prin procedeul adunării algebrice:

a) $\begin{cases}x+y-xy=-23,\\x-y+xy=49;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^2+xy=15,\\y^2+xy=10.\end{cases}$

935. Rezolvaţi sistemele de ecuaţii prin procedeul înlocuirii variabilelor:

a) $\begin{cases}5(x+y)+2xy=-19,\\x+y+3xy=-35;\end{cases}$ b) $\begin{cases}xy+x+y=-11,\\x^2y+y^2x=30.\end{cases}$

Probleme pentru compunerea ecuaţiilor şi a sistemelor de ecuaţii

936. Pe două arii erau în total 990 t de grâu. Câte chintale de grâu erau pe fiecare din ele, dacă pe prima erau cu 20 % mai mult decât pe a doua?

937. Într-un magazin s-au adus 1800 kg de crupe de două calităţi. După ce s-a vândut 60 % crupe categoria 1 şi 70 % crupe categoria a 2-a, în magazin au rămas 640 kg de crupe. Câte kilograme de crupe de categoria 1 şi de a 2 separat s-au adus în magazin?

938. La examenul de admitere la matematică 15 % din candidaţi n-au rezolvat nici o problemă, 144 de candidaţi au rezolvat problemele cu greşeli, iar numărul celor care au rezolvat toate problemele corect se raportă la numărul celor care nu au rezolvat nici o problemă ca 5 : 3. Câţi candidaţi au dat examenul la matematică?

939. Un tren rapid distanţa de 400 km o parcurge cu o oră mai repede decât un marfar. Care este viteza fiecărui tren, dacă viteza marfarului este cu 20 km/h mai mică decât a trenului rapid?

940. Un turist după ce a parcurs 1200 km a calculat, că dacă era în drum cu 6 zile mai mult, atunci parcurgea zilnic cu 10 km mai puţin. Ce distanţă parcurgea turistul zilnic?

941. Două ţesătoare, lucrând înpreună, pot îndeplini o comandă în 12 zile. În câte zile ar executa comanda fiecare ţesătoare separat, dacă se ştie, că productivitatea muncii uneia din ele este de 1,5 de ori mai mare decât productivitatea celeilalte?

942. Un tren într-un timp anumit trebuia să parcurgă 250 km. Dar după 2 h de la începutul mişcării el a fost reţinut pentru 20 min şi, pentru a sosi la timp la locul de destinaţie, el a mărit viteza cu 25 km/h. Care era viteza trenului după orar?

943. În merele «Antonivka» zahărul constitie 10,7 % din masă. Cât zahăr conţin 50 kg de mere de acestea?

944. O bancă a deservit 45 de clienţi, ce alcătuieşte 15 % din toţi clienţii. Câţi clienţi are banca?

945. Preţul unei mărfi la început l-a micşorat cu 10 %, apoi încă cu 5 %, şi în rezultat el a devenit de 34,2 grn. Care era preţul iniţial al mărfii?

946. Cu câte procente s-a mărit aria dreptunghiului, dacă lungimea s-a mărit cu 20 %, iar lăţimea – cu 10 %?

947. Preţul unei mărfi a fost micşorat cu 20 %. Cu câte procente trebuie de mărit preţul, ca să obţinem preţul precedent?

948. Cheltuielile pentru producerea unei mărfi alcătuiesc 1250 grn., iar preţul ei – 1750 grn. Calculaţi majorarea preţului în procente.

Inecuaţii

Rezolvaţi inecuaţiile şi reprezentaţi mulţimea soluţiilor lor pe dreapta de coordonate (**949, 950**).

949. a) $3x - 5 < x + 7$; c) $0{,}3y + 1 > 3 - 0{,}2y$;
b) $x + 15 \geq 5x + 3$; d) $1{,}5z - 2 < z + 8$.

950. a) $5 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (3x - 2) > 3x - 4 \cdot (2x - 7)$;
b) $4 \cdot (3 - 2y) - 3 \cdot (4y + 5) < 5y + 3 \cdot (y - 4)$.

951. Rezolvaţi ecuaţiile

a) $\sqrt{5\quad 7}$; b) $\sqrt{1-2x}$; c) $\dfrac{1}{x}+\sqrt{3x-1}$?

952. Rezolvaţi ecuaţiile

a) $y=\sqrt{-2x}$; b) $y=\sqrt{3-7x}$; c) $y=\sqrt{x^2+3}$;
d) $y=\sqrt{-x^2-1}$; e) $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$; f) $y=\dfrac{2}{x}-\sqrt{1-x}$.

Rezolvaţi sistemele de inecuaţii (**953, 954**).

953. a) $\begin{cases}5x+1>6x-18,\\ 3x-7<5x-13;\end{cases}$ b) $\begin{cases}7y+3>8y-17,\\ 3y-2<6y-12.\end{cases}$

954. a) $\begin{cases}1+2x>\dfrac{9x-2}{4},\\ 7+2x>3x-1;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{2-6x}{5}\geq 3x+13,\\ 5x-8\leq\dfrac{3x+2}{4}.\end{cases}$

955. Rezolvaţi inecuaţiile duble.
a) $9 < 2x + 3 < 17$; c) $0 \leq 2 - x \leq 2$;
b) $-8 < 3x - 2 < 25$; d) $-8 \leq 3 - 11x < 58$.

Funcţii şi grafice

956. Aflaţi $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$, dacă funcţia este definită prin formula:
a) $f(x) = 2x^2 + 3$; b) $f(x) = 3x^3 - 2$; c) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

957. Funcţia este definită prin formula $y=\dfrac{6x}{1+x}$ pe mulţimea numerelor naturale ale primei zeci. Definiţi-o sub formă de tabel.

958. Funcţia este definită prin formula $y=2\sqrt{x+5}$ pe mulţimea de definiţie $D = \{-4; -2{,}75; -1; 1{,}25; 4; 11\}$. Definiţi-o sub formă de tabel şi grafic.

959. Construiţi graficul funcţiei $y = x^2 - 4$, dacă $D = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$. Aflaţi codomeniul ei.

960. Aflaţi domeniul de definiţie al funcţiilor:

a) $y = 5x - 1$; b) $y = \sqrt{x+1}$; c) $y = \sqrt{4-x}$.

961. Pentru care valori ale lui *x*, funcţiile date au cea mai mică valoare::
a) $y = x^2 - 6x + 9$; c) $y = 4x^2 - 12x - 3$;
b) $y = x^2 + 4x + 7$; d) $y = 4x^2 - 4x + 1$?

962. Aflaţi cea mai mare valoare a funcţiilor:
a) $y = 3 - (x - 2)^2$; c) $y = 6x - x^2 - 10$;
b) $y = -0{,}25(x + 5)^2$; d) $y = -5x^2 + 4x + 1$.

963. Aflaţi punctele de intersecţie ale graficului funcţiei cu axa
a) $y = x^2 + 10x - 11$; c) $y = -2x^2 + 7x - 3$;
b) $y = 2x^2 + 3x - 9$; d) $y = -2x(x + 3)$.

964. Construiţi parabola prin procedeul separării pătratului binomului:
a) $y = x^2 + 4x + 5$; c) $y = 1 + 4x - x^2$;
b) $y = x^2 - 6x + 5$; d) $y = 4x^2 - 4x + 5$.

Construiţi graficul funcţiei (**965, 966**).

965. a) $y = (x + 2)^2 - 3$; c) $y = 2(x + 1)^2 - 1$;
b) $y = (x - 1)^2 + 3$; d) $y = 0{,}5(x - 2)^2 - 2$.

966. a) $y = 3x^2 + 3x - 1$; c) $y = -x^2 + x - 3$;
b) $y = 2x^2 - 4x + 5$; d) $y = -2x^2 + 3x + 2$.

Rezolvaţi inecuaţiile de gradul al doilea (**967 – 973**).

967. a) $x^2 + 2x > 0$; b) $x^2 - x \geq 0$.

968. a) $x^2 - 3x + 2 > 0$; b) $x^2 + 5x + 6 < 0$.

969. a) $3x^2 - x - 4 \geq 0$; b) $5x^2 - 2x - 3 > 0$.

970. a) $-x^2 + 2x - 1 < 0$; b) $-x^2 - 2x - 5 > 0$.

971. a) $(x - 3)(x + 5) > 0$; b) $(x + 2)(x + 7) < 0$.

972. a) $(2x + 1)(x + 1) > 0$; b) $(3x - 2)(2x + 3) \geq 0$.

973. a) $(x - 1)(2 - x) > 0$; b) $(3 + x)(x + 7) < 0$.

974. Rezolvaţi inecuaţiile:
a) $\frac{x+3}{x-7} > 0$; b) $\frac{x}{x+2} > 0$; c) $\frac{2+x}{x+3} < 0$; d) $\frac{3-x}{x} < 0$.

Şiruri numerice

975. Scrieţi primii cinci termeni ai progresiilor aritmetice cu termenul al *n*-lea definit prin formula:
a) $a_n = 2(n + 1)$; c) $y_n = n^3 + 3_n - (-1)^n$; e) $c_n = 2n - n^2$;
b) $x_n = 6 : n$; d) $b_n = 1 + n^2$; f) $z_n = 1 + (-1)^n$.

976. Şirul este definit prin formula $a_n = 2n^2 + 3$. Aflaţi :
a) a_3; b) a_6; c) a_{15}; d) a_{100}.

977. Aflaţi termenii al şaptelea, al zecelea şi al douăzeci şi cincilea al şirului cu termenul al *n*-lea definit prin formula:

a) $c_n = (1 - n)^2$; b) $c_n = 350 + n$; c) $c_n = 2n - (-1)^n$.

978. Scrieţi primii cinci termeni ai progresiilor aritmetice în care:

a) $a_1 = 17,\ d = 2$; c) $a_1 = -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}$;

b) $a_1 = 0{,}5,\ d = 10$; d) $a_1 = 6,\ d = 0$.

979. Sunt daţi primul termen a_1 şi raţia q ai progresiei aritmetice. Aflaţi suma S_n a primilor n termeni, dacă:

a) $a_1 = 5,\ d = 3,\ n = 31$; c) $a_1 = -\frac{3}{2},\ d = \frac{1}{2},\ n = 35$;

b) $a_1 = 14{,}5,\ d = 0{,}7,\ n = 26$; d) $a_1 = 111,\ d = -\frac{2}{5},\ n = 56$.

980. Suma primilor patru termeni ai progresiei aritmetice este egală cu 56, iar suma ultimilor patru – cu 112. Aflaţi numărul termenilor progresiei, dacă primul termen este egal cu 11.

981. Suma primului termen şi cu al cincilea ai progresiei aritmetice crescătoare este egală cu 14, produsul termenului al doilea cu al patrulea este este egal cu 45. Câţi termeni ai progresiei trebuie luaţi, pentru a obţine în sumă 24?

982. Sunt date două progresii aritmetice. Primul şi al cincilea termeni ai primei progresii sunt egali respectiv cu 7 şi –5. Primul termen al progresiei a doua este egal cu 0, iar ultimul – cu 3,5. Aflaţi suma termenilor progresiei a doua, dacă se ştie că a treia parte din termenii ambelor progresii sunt egali între ei.

983. În progresia geometrica $b_7 = 80$, $b_8 = -160$. Aflaţi b_1, q şi b_5.

984. În progresia geometrica $b_4 = 72$, $b_6 = 18$. Aflaţi b_1, q.

985. Scrieţi progresia geometrică compusă din şase termeni, dacă suma primilor trei termeni este egală cu 168, iar suma ultimilor trei – cu 21.

986. În progresia geometrică crescătoare suma primului termen şi a ultimului este egală cu 66, produsul termenului al doilea cu penultimul – cu 128, iar suma tuturor termenilor este egală cu 126. Câţi termeni sunt în progresie?

987. ***Problema lui Dgemşit al-Caşi.*** Într-o livadă primul a rupt o rodie, al doilea – două, iar fiecare următorul – cu o rodie mai mult. Apoi toţi, cine au rupt rodii, le-au împărţit între ei egal şi fiecare a obţinut câte 6 rodii. Câţi oameni au rupt rodii?

988. ***Problemă indiană din vechime.*** Un drumeţ în prima zi parcurge două unităţi de drum, iar în fiecare din următoarele zile cu 3 unităţi mai mult decât în cea precedentă. Alt drumeţ parcurge în prima zi trei unităţi de drum, iar în fiecare următoarea – cu 2 unităţi mai mult. Când primul îl va ajunge pe al doilea, dacă ei au plecat în acelaşi timp dintr-un loc şi într-o direcţie?

989. Şirul b_1, b_2, b_3, b_4 este o progresie geometrică. Oare sunt progresii geometrice şirurile:

a) $5b_1,\ 5b_2,\ 5b_3,\ 5b_4, \ldots;$

b) $b_1 + 5,\ b_2 + 5,\ b_3 + 5,\ b_4 + 5, \ldots;$

c) $b_1^5,\ b_2^5,\ b_3^5,\ b_4^5, \ldots;$

d) $\frac{5}{b_1},\ \frac{5}{b_2},\ \frac{5}{b_3},\ \frac{5}{b_4}, \ldots?$

Probleme şi exerciţii de o complexitate sporită

990. Ce este mai mare $\sqrt{14}+\sqrt{6}$ sau $2\sqrt{3}+\sqrt{7}$?

991. Demonstraţi inegalitatea $4<\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}<5.$

992. Demonstraţi, că pentru orice valori *a*, *b*, *c*:

a) $2a^2 + b^2 + c^2 > 2a(b + c);$

b) $a^2 + b^2 + c^2 > 2\ (a + 2b + 3c - 7).$

993. Demonstraţi, că pentru orice valori *x*, *y*:

a) $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3;$

b) $2x^2 + 5y^2 - 4xy - 2x - 4xy + 5 > 0.$

994. Demonstraţi, că pentru orice valoare *a*:

a) $a^4 - 2a^3 - a^2 + 2a + 1 \geq 0;$

b) $a^4 - 3a^2 - 2a + 5 > 0.$

995. Demonstraţi, că pentru orice valori *a*, *b*, *c*, *d*::

a) $(a^2 + b^2)(c^2 + a^2) \geq 4abcd;$

b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a + b)(c + d).$

996. Demonstraţi:

a) $x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}$, dacă $x + y = 1;$

b) $x^2+y^2 \geq \frac{1}{5}$, dacă $x + 2y = 1.$

Rezolvaţi inecuaţiile (**997 -- 999**)

997. a) $\frac{x^2+4}{x-4}<x;$ b) $\frac{x^2+x+1}{3x^2+4x-4}<1.$

998. a) $\frac{4x}{3-x}<x-1;$ b) $\frac{x+4}{x+1}>2-x.$

999. a) $(x + 3)^3(x + 5)(x - 2) < 0;$ b) $(8 - x)^5(x + 8)^2(x + 4) \leq 0.$

1000. Demonstraţi că inecuaţiile $\sqrt{x-6}+\sqrt{x-1}>1$ i $\sqrt{x-6}+\sqrt{x-1}>2$ au aceleaşi mulţimi de soluţii.

Construiţi graficul funcţiilor (**1001–1002**).

1001. a) $y = 3 - |x|$; b) $y = \frac{1}{|x|}$; c) $y = x^2 + 2|x| - 3$.

1002. a) $y = \frac{x}{|x|}$; b) $y = x|x|$; c) $y = \frac{|x|}{|x| - 3}$.

1003. Construiţi graficul ecuaţiilor:
a) $x^2 + xy = 0$; c) $(xy - 6)(y - 3) = 0$;
b) $(x + 1)(y - 3) = 0$; d) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) = 0$.

1004. Scrieţi printr-o formulă mai simplă funcţia:
$$y = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2x} + 2} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}.$$

Construiţi graficul ei.

Construiţi graficul funcţiilor (**1005–1007**).

1005. a) $y = |2x - 3|$; b) $y = 2|x| - 3$.

1006. a) $y = 2|x^2 - 3|$; b) $y = |x^2 - 6x + 5|$.

1007. a) $y = |2x^2 - 6|x| + 5|$; b) $y = |x^2 - 6x| + 5$.

1008. Câte soluţii are ecuaţia $|x^2 - 6x + 5| = a$, dacă a este egal cu: –2; 0; 2; 4; 6?

1009. Rezolvaţi inecuaţiile:
a) $|x - 1| + |x - 5| \geq 0$; b) $|x - 1| + |x - 5| < 3$.

1010. ***Problemă grecească din vechime.*** Demonstraţi, că în progresia aritmetică cu un număr par de termeni suma termenilor unei jumătăţi este mai mare decât suma restului de termeni cu un număr multiplu pătratului jumătăţii de termeni.

1011. ***Problemă din vechime.*** Unui ostaş i s-a plătit o recompensă: pentru prima rană – 1 c., pentru a doua – 2c., pentru a treia – 4 c. ș.a.m.d., în total 655 rub. 35 c. Câte răni a avut acel ostaş?

1012. ***Problemă cahineză din vechime.*** Un cal de trap şi o mârţoagă aleargă din Cianiani spre cnezatul Ţi, care se află la 3000 li de la Cianiani. În prima zi calul de trap alergând parcurge 193 li, iar în fiecare zi următoare cu 13 li mai mult decât în cea precedentă. Mârţoaga în prima zi a parcurs alergând 97 li, iar în fiecare celelalte cu jumătate de li mai puţin decât în cea precedentă. Trăpaşul a ajuns până la Ţi şi s-a întors înapoi. Peste câte zile calul a întâlnit mârţoaga?

1013. Lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic sunt termeni succesivi ai progresiei aritmetice. Aflaţi raportul catetelor acestui triunghi.

1014. Aflaţi astfel de numere x, y, şi z ca şirul 2, x, y, z, 9 să fie o progresie aritmetică.

1015. Aflaţi suma numerelor naturale mai mici decât 1000, care:
a) se divid cu 7;
b) sunt reciproc simple cu numărul 7;
c) se divid cu 3 şi nu se divid cu 6.

1016. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sunt primii n termeni ai progresiei geometrice cu raţia q. Aflaţi suma:

$$a_1^n + a_2^n + a_3^n + \dots + a_n^n.$$

1017. $q, q^2, q^3, q^4, \dots$ formează o progresie geometrică infinită. Aflaţi suma $q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \dots$.

1018. Aflaţi progresia geometrică infinită, dacă suma termenilor ei este egală cu 4, iar suma cuburilor termenilor ei este 192.

1019. Termenii al doilea, primul şi al treilea ai progresiei aritmetice sunt termeni succesivi ai progresiei geometrice. Aflaţi raţia ei.

1020. a, b, c sunt termeni succesivi ai progresiei aritmetice. Demonstraţi, că numerele $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ tot sunt termeni succesivi ai progresiei aritmetice.

1021. Scrieţi formula termenului al n-lea pentru şirurile:
a) 1, 2, 1, 2, 1, 2, ... ; b) –1, 2, –3, 4, –5, ...

1022. Aflaţi sumele:
a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1)$;
b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \dots + n\{3n - 1)$.

1023. Aflaţi numărul natural, care este egal cu suma tuturor numerelor naturale precedente.

1024. În care progresie aritmetică suma primilor n termeni este egală cu $2n^2 + n$?

1025. ***Problema lui Newton.*** Un comerciant anual mărea capitalul cu a treia parte, micşorat cu 100 de lire sterline, care anual el le cheltuia pentru întreţinerea familiei. Peste trei ani capitalul lui s-a dublat. Câţi bani avea el la început?

1026. Între numerele 7 şi 35 plasaţi 6 astfel de numere, ca toate 8 numere să formeze o progresie aritmetică.

1027. Scrieţi termenul al n-lea al şirului 3, 6, 11, 18, ... , ale cărui diferenţe succesive dintre termenii vecini formează o progresie aritmetică.

1028. Rezolvaţi ecuaţia

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x+2}{x} + \dots + \frac{2}{x} + \frac{1}{x} = 3,$$

în care termenii din partea stângă formează o progresie aritmetică.

1029. Găsiţi termenii comuni ai progresiilor aritmetice

1, 4, 7,... şi 6, 11, 16....

Oare este adevărat, că şirul termenilor lor comuni este o progresie aritmetică?

1030. Demonstraţi, că pentru fiecare număr natural se realizează egalitatea:

a) $2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + (2n)^3 = 2n^2(n + 1)^2$;

b) $1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$.

1031. ***Problema lui Al-Caşi.*** Demonstraţi, că pentru orice valoare naturală a lui n are loc egalitatea:

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{1}{30}\left(6n^5+15^4+10^2-n\right).$$

1032. ***Problema lui Fermat.*** Demonstraţi, că

$$5\cdot\left(1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4\right)=(n+2)\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right).$$

1033. Aflaţi sumele:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}};$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}$$

1034. Din oraşul A spre satul B a plecat un pieton, în acelaşi timp din B spre A a plecat un motociclist. Întâlnind pietonul, motociclistul l-a luat şi s-a întors spre B, şi, aducând pietonul în sat, imediat a plecat spre oraş. În rezultat motociclistul s-a aflat în drum de 2,5 ori mai mult timp decât prevedea. De câte ori mai puţin timp a cheltuit pietonul în drum până în sat mulţumită ajutorului acordat de motociclist (fig. 148)?

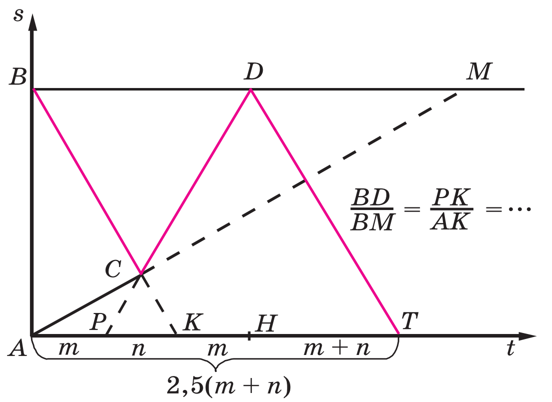


Fig. 148

Teste pentru antrenament

Varianta 1

Selectaţi UN răspuns, care după părerea voastră, este corect şi introduceţi litera respectivă în tabela răspunsurilor.

1. Care din numerele date nu este divizor al numărului 231?

A	B	C	D
11	7	13	3

2. Care fracţie este regulată?

A	B	C	D
$\frac{121}{112}$	$\frac{21}{12}$	$\frac{12}{12}$	$\frac{11}{12}$

3. Reprezentaţi în formă de polinom expresia $(2x + 1)(2x + 1)$.

A	B	C	D
$(2x+1)^2$	$4x^2+1$	$4x^2+4x+1$	$4x^2+2x+1$

4. Calculaţi $\left|\sqrt{25} - 2^5\right|$.

A	B	C	D
–5	5	27	–27

5. Graficul funcţiei $y = x^{-1} - 1$ intersectează axa absciselor în punctul ...

A	B	C	D
(0; 1)	(0; –1)	(1; 0)	(–1; 0)

6. Aflaţi termenul al cincilea al şirului, definit prin formula $a_n = 3n - 1$.

A	B	C	D
–14	12	14	–12

7. Cărui interval îi aparţine soluţia ecuaţiei $0{,}4x = 9$?

A	B	C	D
[–0,4; 0,4]	(4; 9]	(9; 40]	(40; 90)

8. Aflaţi termenul necunoscut al proporţiei $2{,}5 : 3 = x : 1{,}2$.

A	B	C	D
1	6	10	12,5

9. Aflaţi numărul, dacă 15% din el alcătuiesc 150.

A	B	C	D
100	225	1000	150

10. Calculaţi $\sqrt{(-4)^2} + \sqrt{0{,}16}$.

A	B	C	D
–3,6	4,4	–4,4	4,04

Rezolvaţi sarcinile şi daţi răspuns la fiecare.

11. Parcul dendrologic naţional „Sofiivca”, care este situat la periferia oraşului Umani, a fost fondat în a. 1796 de graful Potoţki. În a. 1802 construirea parcului a fost terminată definitiv şi graful l-a dăruit soţiei sale Sofia. Câţi ani a durat construţia parcului?

12. Aflaţi domeniul de definiţie al funcţiei $y = \dfrac{5x}{x^2 - 4}$.

13. Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x - 3y = 1, \\ 3x + y = 13. \end{cases}$

14. Construiţi graficul funcţiei $y = x^2 - 4x$.

Rezolvarea problemelor 15, 16 trebuie prezentată cu argumentarea deplină.

15. Aduceţi la forma cea mai simplă expresia $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x}\right) : \left(\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right)$.

16. Rezolvaţi inecuaţia $\dfrac{8-3x}{3x^2 - 2x - 16} \le 1$.

Varianta 2

Selectaţi UN răspuns, care după părerea voastră,este corect şi introduceţi litera respectivă în tabela răspunsurilor.

1. Calculaţi valoarea expresiei 5– 3 · 7.

A	14	B	16	C	–16	D	–14

2. Aflaţi 20% din numărul 144.

A	7,2	B	72	C	2,88	D	28,8

3. Rotunjiţi până la sutimi numărul 1234,9876.

A	12	B	1234,98	C	1234,987	D	1234,99

4. Suma soluţiilor ecuaţiei $2x^2 - 7x + 3 = 0$ este egală cu ...

A	–7	B	–3,5	C	3,5	D	7

5. Graficul funcţiei $y = -2x + 6$ intersectează axa absciselor în punctul ...

A	(0; 6)	**B**	(3; 0)	**C**	(–3; 0)	**D**	(6; 0)

6. Aflaţi cubul monomului $-2x^2y$.

A	$-8x^6y$	**B**	$-8x^6y^3$	**C**	$8x^6y$	**D**	$-8x^5y^3$

7. Câte soluţii întregi are inecuaţia $x^2 < 4$.

A	5	**B**	4	**C**	3	**D**	2

8. Numărul $\sqrt{3}$ aparţine intervalului ...

A	[2; 3]	**B**	$[3; \infty)$	**C**	$\left(-\infty; \sqrt{3}\right)$	**D**	$(-3; \infty)$

9. Descompuneţi în factori expresia $x^2 - 18x + 81$.

A	$(x - 18)x$	**C**	$(x - 9)(x - 9)$
B	$(x - 9)(x + 9)$	**D**	$(x + 9)^2$

10. Calculaţi cu exactitatea până la sutimi 25 : 15.

A	1,6	**B**	1,7	**C**	1,67	**D**	1,66

Rezolvaţi sarcinile şi daţi răspuns la fiecare.

11. Care din funcţiile $g(x) = x^4 + 1$ şi $f(x) = x^5 + 2$ este pară?

12. Descompuneţi în factori polinomul $x^3 + 2x^2 + x$.

13. Rezolvaţi ecuaţia $(x - 5)(2x + 1) - 2x(x - 7) = 1 - x^2$.

14. Construiţi graficul funcţiei $y = \sqrt{x-2}$.

Rezolvarea problemelor 15, 16 trebuie prezentată cu argumentarea deplină.

15. Aduceţi la forma cea mai simplă expresia $\dfrac{1}{2(1+\sqrt{a})} + \dfrac{1}{2(1-\sqrt{a})} - \dfrac{a^2+2}{1-a^3}$.

16. Rezolvaţi sistemul de inecuaţii $\begin{cases} 2x^2 - 9x + 10 \geq 0, \\ (3-x)(1-2x) \leq 3. \end{cases}$

Cunoştinţe din clasele precedente

Numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., care se folosesc la numărare, se numesc *naturale*. Cel mai mic număr natural este 1, cel mai mare număr natural nu există.

Cifrele 0, 2, 4, 6, 8 se numesc *pare*, iar toate celelalte – *impare*.

La 2 se divid acele şi numai acele numere, care se termină cu cifre pare. Numerele care se divid cu 2 se numesc *pare*, iar celelalte – *impare*.

Cu 5 se divid acele şi numai acele numere, care se termină cu cifra 5 sau 0.

Cu 10 se divid acele şi numai acele numere, care se termină cu cifra 0.

Cu 3 se divid acele şi numai acele numere, suma cifrelor cărora se divide cu 3.

Cu 9 se divid acele şi numai acele numere, suma cifrelor cărora se divide cu 9.

N o t ă. Spunând „suma cifrelor”, se are în vedere suma numerelor de o cifră, cu care este scris numărul dat.

Dacă numărul a se divide cu m, atunci numărul a se numeşte *multiplul numărului m*, iar m – *divizorul numărului a*. De exemplu, 5 – divizorul numărului 35, iar 35 – multiplul numărului 5.

Numărul 35 are patru divizori: 1, 5, 7 şi 35.

Numărul 5 are o mulţime de multipli: 5, 10, 15, 20, 25, ...

Numărul, care are numai doi divizori – unitatea şi el însuşi, se numeşte *prim.* Cel mai mic număr prim – 2, cel mai mare nu există. Şirul numerelor prime:

2, 3, 5, 7,11,13, 117, 19, 23, 29, 31, ... infinit.

Numărul natural, care are mai mulţi decât doi divizori, se numeşte *compus*. Numere compuse sunt o mulţime: 4, 6, 8, 9, 10, 12, ...Numărul 1

nu-i nici prim, nici compus.

Fiecare număr compus se poate descompune în factori primi. De exemplu:

$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Numerele 18 şi 81 au trei divizori comuni: 1, 3 şi 9. Numerele 81 şi 1001 au numai un divizor comun: 1.

Cel mai mare divizor comun (CMMDC) a câtorva numere este cel mai mare dintre divizorii comuni ai acestor numere. Pentru a afla CMMDC al câtorva numere, trebuie fiecare din ele să descompunem în factori primi şi de înmulţit factorii primi comuni, luaţi la puterea cea mai mică la care se găsesc.

Cel mai mic multiplu comun (CMMMC) al câtorva numere se numeşte cel mai mic număr care se divide cu fiecare din numerele date. Pentru a afla CMMMC al câtorva numere, trebuie să le descompunem în factori primi şi la descompunerea unui număr să scriem acei factori, care în ea lipsesc, factorii de luat la cel mai mare exponent la care se găsesc. Să aflăm, de exemplu, CMMDC şi CMMMC al numerelor 20, 60 şi 90.

20	2	60	2	90	2
10	2	30	2	45	3
5	5	15	3	15	3
1		5	5	5	5
		1		1	

CMMDC (20; 60; 90) = $2 \cdot 5 = 10$,
CMMMC (20; 60; 90) = $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 180$.

Dacă CMDC a două sau câteva numere este egal cu 1, atunci aceste numere se numesc *prime între ele*. De exemplu, numerele 8 şi 9 sau 4, 7 şi 25 sunt prime între ele.

NUMERE RAŢIONALE

Numerele, care se deosebesc numai cu semnul, se numesc *opuse*. De exemplu, numărul –7 este opus numărului 7 şi invers. Numerele opuse celor naturale, se numesc întregi negative. Numerele naturale, întregi negative şi zeroul formează împreună *numere întregi*. Numerele naturale se numesc de asemenea numere *întregi pozitive*.

Negative sunt nu numai numerele întregi, dar şi fracţionare, de exemplu:

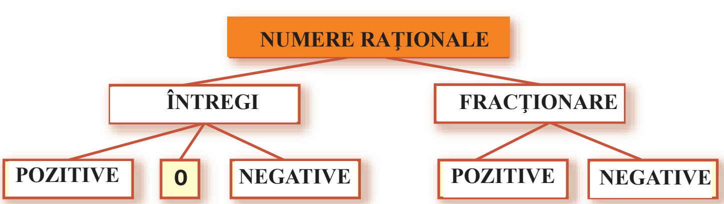
$$-2{,}5,\ -\frac{7}{8},\ -3\frac{2}{5}.$$

Câtul de la împărţirea numerelor naturale a şi b se poate scrie în formă de fracţie ordinară $\frac{a}{b}$ linia fracţionară înlocuieşte semnul împărţirii. *Numărătorul a* şi *numitorul b* se numesc *termenii fracţiei*.

Fracţia se numeşte regulată, dacă numărătorul ei este mai mic decât numitorul. Dacă numărătorul fracţiei este mai mare decât numitorul sau egal cu numitorul, atunci ea se numeşte *neregulată*. Valoarea fracţiei neregulate nu-i mai mică decât 1, iar a celei regulate – mai mică decât 1.

Proprietatea fundamentală a fracţiei. Valoarea fracţiei nu se schimbă, dacă numărătorul şi numitorul ei de înmulţit sau de împărţit la unul şi acelaşi număr natural.

Folosind această proprietate, fracţia se poate simplifica. Numerele întregi şi fracţionare (pozitive şi negative) împreună se numesc numere raţionale. Corelaţia dintre aceste tipuri de numere este indicată pe schemă.



Mulţimea numerelor naturale este o parte (submulţime) a mulţimii numerelor întregi, iar mulţimea numerelor întregi – o parte (submulţime) a mulţimii numerelor raţionale. Pe dreapta de coordonate fiecărui număr raţional îi corespunde un singur punct.

Numerele pozitive (întregi şi fracţionare) şi zeroul nu sunt numere negative.

Modulul numărului care nu e negativ este egal cu însuşi numărul; modulul numărului negativ este egal cu numărul opus lui. De exemplu:

$$|3{,}7| = 3{,}7; \quad |-12| = 12; \quad |0| = 0; \quad \left|-\frac{2}{15}\right| = \frac{2}{15}.$$

Din două numere raţionale *mai mic* se consideră acel, care pe dreapta de coordonate corespunde punctului situat mai la stânga. De aceea fiecare număr negativ este mai mic decât fiecare număr, care nu-i negativ. Din două numere negative mai mic se consideră acela, modulul căruia este mai mare. De exemplu:

$$-12 < 0; \qquad -12 < 7; \qquad -12 < -9.$$

RAPOARTE ŞI PROPORŢII

Câtul de la împărţirea a două numere se numeşte de asemenea raportul lor:
3 : 7, 0,5 : 0,3.

Proprietatea fundamentală a raportului. Valoarea raportului nu se schimbă, dacă ambii termeni ai lui îi vom înmulţi sau împărţi la unul şi acelaşi număr, diferit de zero. De aceea, de exemplu, valorile rapoartelor 300 : 200 şi 3 : 2 sunt egale.

Raportul numerelor fracţionare totdeauna poate fi înlocuit cu raportul numerelor întregi. Pentru aceasta este suficient de înmulţit ambii termeni ai raportului cu multiplul comun al numitorilor lor. De exemplu,

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2.$$

Fiecare fracţie ordinară este raportul numărătorului ei la numitor:

$$\frac{a}{b} = a : b.$$

Egalitatea a două rapoarte se numeşte *proporţie*. Exemple de proporţii:

$$45 : 15 = 21 : 7; \quad \frac{2}{3} = \frac{10}{15}; \quad x : 3 = 20 : 30.$$

Numerele care formează proporţia se numesc *termenii* ei (miezi (mijlocii) şi extremi).

termeni extremi

$a : b = c : d.$

termeni miezi

Proprietatea fundamentală a proporţiei. Dacă proporţia este justă, atunci produsul termenilor extremi ai ei este egal cu produsul miezilor. Deci, dacă

$a : b = c : d$, atunci $ad = bc$.

NUMERE REALE

Numerele întregi şi fracţionare, pozitive, negative şi zeroul formează împreună mulţimea *numerelor raţionale*. Fiecare număr raţional poate fi reprezentat sub formă de fracţie $\frac{m}{n}$, , unde *m* este număr întreg, iar *n* este natural.

Fiecare număr raţional poate fi reprezentat sub formă de fracţie zecimală infinită periodică. Şi fiecare fracţie zecimală infinită periodică reprezintă un oarecare număr raţional.

Exemple. $\frac{2}{3} = 0{,}6666\,...;\ -\frac{13}{11} = -1{,}181818\,....$.

Numerele, care reprezintă fracţiile zecimale infinite neperiodice, se numesc *iraţionale*.

Exemple de numere iraţionale: ; $\sqrt{2} = 1{,}4142136\,...,\ \pi = 3{,}1415926\,...$

Numerele iraţionale împreună cu cele raţionale formează mulţimea *numerelor reale*. Mulţimile numerelor naturale, întregi, raţionale şi reale se notează respectiv prin litere **N**, **Z**, **Q**, **R**.

Numerele reale se pot aduna, scădea, înmulţi, ridica la putere şi împărţi (la numere diferite de 0). La adunarea şi înmulţirea numerelor reale arbitrare sunt adevărate legile comutativă, asociativă şi distributivă:

$a + b = b + a,\ ab = ba,\ a + (b + c) = (a + b) + c,\ a \cdot (bc) = (ab) \cdot c,$

$(a + b)c = ac + bc.$

La rezolvarea problemelor aplicative numerele iraţionale de obicei se rotunjesc, înlăturând «cozile» lor infinite de semne zecimale. Pentru aceasta se aplică *regulile de rotunjire*. Dacă prima cifră din cele înlăturate este cifra 0, 1, 2, 3 sau 4, atunci ultima cifră care rămâne nu se schimbă. Dacă prima din cele înlăturate este cifra 5, 6, 7, 8 sau 9, atunci ultima cifră ce rămâne se măreşte cu 1.

EXPRESII

Numerele, variabilele, de asemenea diferite înscrieri compuse din numere sau variabile şi semnele operaţiilor se numesc *expresii*. Expresiile sunt *numerice* (de exemplu, 3 – 0,5 : 6) şi cu *variabile* (de exemplu, $3x$, $2ab$, $c^2 - 3$). Expresia, care conţine numai operaţiile adunarea, scăderea, înmulţirea, ridicarea la o putere cu exponent întreg şi împărţirea se numeşte *expresie raţională*. Expresia raţională, care nu conţine operaţia împărţirii la o expresie cu variabilă se numeşte *expresie întreagă*.

Exemple de expresii întregi: $32{,}5;\ a;\ \frac{2}{5}x + y;\ 0{,}3(x - z^2).$

Două expresii întregi, ale căror valori respective sunt egale pentru orice valori ale variabilelor, se numesc *identic egale* sau *identice*. Două expresii identic egale unite cu semnul egal formează o *identitate*.

Înlocuirea unei expresii cu alta identic egală se numeşte *transformare identică* a expresiei date.

Cele mai simple expresii: numerele, variabilele, puterile sau produsul lor se numesc *monoame.* Exemple de monoame: $4x,\ 2{,}5,\ -3x^2,\ -3\frac{1}{2}am^3,\ 2ax\cdot 3ax^2.$

Dacă monomul conţine numai un factor numeric, care stă pe primul loc şi dacă fiecare variabilă se conţine numai într-un factor, atunci acest monom se numeşte *monom de formă standard*. Factorul numeric al monomului, scris în formă standard, se numeşte *coeficientul* monomului.

Suma a câteva monoame se numeşte *polinom*. Pentru comoditate fiecare monom se cosideră tot polinom.

Termeni asemenea ai polinomului se numesc acei termeni care se deosebesc numai prin coeficienţi sau absolut nu se deosebesc unul de altul. Polinomul este scris în formă standard, dacă toţi termenii lui sunt monoame de forma standard şi printre ei nu sunt asemenea.

A descompune polinomul în factori înseamnă a-l înlocui cu produsul a câteva polinoame, identic egal cu polinomul dat. Cele mai simple procedee de descompunere a polinomului în factori sunt: scoaterea factorului comun în afara parantezelor, metoda grupării, aplicarea formulelor înmulţirii prescurtate.

Exemple.

$6a^3x - 9abx = 3ax(2a^2 - 3b)$;

$ax + bx - ay - by = x(a + b) - y(a + b) = (a + b)(x - y)$;

$9m^2 - 4 = (3m - 2)(3m + 2)$.

Câtul de la împărţirea expresiei A la expresia B poate fi scris în formă de *fracţie* $\frac{A}{B}$. Fracţia are sens numai atunci, când numitorul este diferit de zero. *Fracţie algebrică* se numeşte fracţia, numărătorul şi numitorul căreia sunt polinoame. Pentru orice valori a, b şi $c \neq 0$ $\frac{a}{b}$ $\frac{ac}{bc}$ (*proprietatea fundamentală a fracţiei*). Pe baza acestei proprietăţi fracţiile se pot simplifica sau aduce la numitorul comun. De exemplu,

$$\frac{3a-6x}{a^2-4x^2}=\frac{3(a-2x)}{(a-2x)(a+2x)}=\frac{3}{a+2x}.$$

Operaţiile cu orice fracţii se efectuează la fel ca fracţiile ordinare. Dacă numitorii nu sunt egali cu 0, atunci totdeauna

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},\quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c},\quad \frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd},\quad \frac{a}{c}:\frac{b}{d}=\frac{ad}{cb}.$$

expresia fracţionară $\frac{1}{a^n}$ se scrie şi sub forma a^{-n}.

Rădăcină pătrată din numărul a se numeşte numărul, pătratul căruia este egal cu a. De exemplu, numărul 16 are două rădăcini pătrate: 4 şi –4. Valoarea care nu este negativă a rădăcinii pătrate din numărul a se numeşte *valoarea aritmetică a rădăcinii* şi se notează cu simbolul $\sqrt{a}$.

ECUAŢII

Ecuaţia este o egalitate, care conţine numere necunoscute notate prin litere. Numerele care satisfac ecuaţia se numesc *soluţiile* ei (sau *rădăcini*). *A rezolva ecuaţia* înseamnă a afla toate soluţiile ei sau a demonstra că ele nu există.

Două ecuaţii se numesc *echivalente* dacă fiecare din ele are unele şi aceleaşi soluţii. Ecuaţiile care nu au soluţii se consideră tot echivalente între ele.

Ecuaţia de forma $ax = b$, unde a şi b sunt numere arbitrare, se numeşte *ecuaţie liniară* cu variabila x. Dacă $a \neq 0$ ecuaţia se numeşte *ecuaţie de gradul întâi* cu o variabilă. Fiecare ecuaţie de gradul întâi $ax = b$ are o singură soluţie x = b;a. Ecuaţia liniară poate avea o soluţie, o infinitate sau nici una.

De exemplu, ecuaţia $12x = 6$ are o soluţie; $0x = 0$ are o infinitate de soluţii; $x = \frac{b}{a}$.

nu are nici o soluţie.

Ecuaţie de gradul doi se numeşte ecuaţia de formă $ax^2 + bx + c = 0$, unde x este variabilă, a, b, c sunt numere date şi $a \neq 0$. Expresia $D = b^2 - 4ac$ este discriminantul ecuaţiei de gradul doi. Dacă $D > 0$, atunci ecuaţia dată are două soluţii:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Dacă $D = 0$, atunci aceste soluţii sunt egale. Pentru $D < 0$ ecuaţia nu are soluţii reale.

Teorema lui Viete. Dacă ecuaţia de gradul al doilea redusă $x^2 + px + q = 0$ are două soluţii, atunci suma lor este egală cu $-p$, iar produsul este egal cu q.

Teorema inversă teoremei lui Viete. Dacă suma şi produsul numerelor m şi n sunt egale respectiv cu $-p$ şi q, atunci m şi n sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 + px + q = 0$.

Ecuaţiile fracţionare se pot rezolva, folosind faptul că fracţia este egală 0, dacă numărătorul ei este egal cu 0, iar numitorul diferit de zero. Dar la început se pot înmulţit ambele părţi ale ecuaţiei cu numitorul comun al tuturor fracţiilor, de rezolvat ecuaţia obţinută şi de exclus acele soluţii care transformă numitorul în zero.

SISTEME DE ECUAŢII

Ecuaţia de formă $ax + by = c$, unde a, b, c sunt numere date se numeşte *ecuaţie liniară cu două variabile x şi y*. Dacă $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, ea se numeşte *ecuaţie de gradul întâi cu două variabile*.

Fiecare pereche de numere care satisface ecuaţia cu două variabile se numeşte *soluţie* a acestei ecuaţii. De exemplu, perechea de numere (3; –2) este soluţia ecuaţiei $5x + 3y = 9$. Fiecare ecuaţie de gradul întâi cu două

variabile are o infinitate de soluţii. În sistemul cartezian de coordonate fiecărei ecuaţii de gradul întâi cu două variabile îi corespunde o dreaptă care este graficul acestei ecuaţii. Pe firgura 149 este reprezentat graficul ecuaţiei $2x – y = 3$. Coordonatele fiecărui punct al acestui grafic satisfac ecuaţia dată. Coordonatele oricărui alt punct nu satisfac ecuaţia.

Dacă trebuie de aflat soluţiile a două sau mai multe ecuaţii, se spune că aceste ecuaţii formează *un sistem de ecuaţii*. *Soluţie a sistemului de ecuaţii* se numeşte soluţia comună a tuturor ecuaţiilor.

Fiecarui sistem de două ecuaţii de gradul întâi cu două necunoscute în sistemul cartezian de coordonate îi corespunde o pereche de drepte. Deoarece două drepte din plan se pot intersecta, coincide sau să fie paralele, atunci şi sistemul de ecuaţii corespunzător poate avea o soluţie, o infinitate de soluţii sau nici o soluţie.

De rezolvat sistemul de ecuaţii cu două variabile se poate prin procedeele: substituţiei, adunării sau grafic.

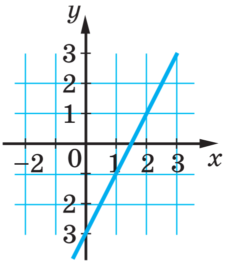
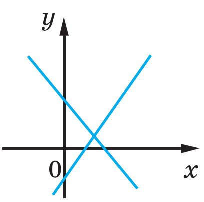


Fig. 149

Sistemul de ecuaţii liniare

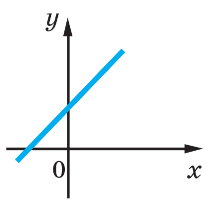
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$



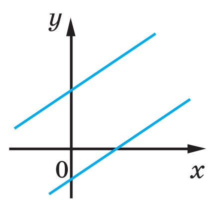
Are o soluţie

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



Are o infinitate de soluţii

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$



Nu are nici o soluţie

RĂSPUNSURI ŞI INDICAŢII LA PROBLEME ŞI EXERCIŢII

9. a) $m > n$. **10.** a) $y < x$. **17.** a) $2x + 3 > 3x – 2$. **19.** c) $y(-8) > y(0)$. **23.** a) Da; b) nu. **28.** a) $5m + 1 < 19 – 3m$. **30.** Prima; de 2019ori. **33.** $x = 1,5$. **34.** $x = 1,5$. **37.** 2. **39.** a) $b > a$. **40.** a) $x > y$. **44.** b) $a = b$. **45.** a) 186,5; c)

–0,5. **46.** a) 1; c) –2; e) 10. **47.** b) 5; d) 12. **48.** a) c^2; b) 1; f) 0. **49.** b) 0. **50.** a) $6\sqrt{2}$; c) 8; e) 2. **51.** a) –5 şi –3; b) –2 şi 9; f) –0,25. **52.** a) (–2; 5). **55.** 20% . **59.** a) Pozitiv. **65.** a) $a > b$. **69.** b) $1,5a > 1,5b$. **70.** b) Negativ. **71.** c) $5 + x < 6 + z$. **72.** a) $10 < 24$. **74.** b) $–0,1m > –0,1\ n$; d) $1 – m > 1– n$; e) $5m – –1 < 5n – 1$. **75.** b) $x^2 > xy$.**76.** c) $\sqrt{-x} > \sqrt{-y}$.. **78.** $\frac{1}{b}, \frac{1}{d}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a}$.. **81.** a) Da. **83.** 1– C, 2 – E, 3 – D, 4 – A.**86.** a) Nu. **89.** b) $(3x + 1)(2x – 1)$;d) $(c + 2\sqrt{2})(c – \sqrt{2})$. **94.** a) 0. **97.** a) $3 < x < 12$. **99.** a) $7 < n < 8$.

103.a)$6<x-y<8$. **104.** a) $15 < xy < 28$. **105.** a) $2 < \frac{x}{y} < 3$.**106.** a) $–3 < 2x + 3 < 13$; c) $–3 < 2 – x < 5$. **108**.c)$3,58 \cdot 10^6 < V < 3,66 \cdot 10^6$.**113.** e) 1.**122.** a) $–1 < x < 2$. **123.** La ora 12. **125.** a) (4; 2). **127.** b) $x < –3$; f) R. **128.** a) Nici una; f) o mulţime. **131.** a) $x > 3$; e) $y < 9$. **132.** a) $x > 5$; d) $x \le –5$. **133.** c) $x > 0$; e) $x < 1$. **134.** a) $x < 1$; c) $x > 0$; e) $z > 0,25$. **135.** b) Da; d) nu. **136.** a) $x > 3$; b) $y < 2$; c) $x \ge 5$; d) $x < –6$. **137.** a) $x \le – 13$; b) $x > 1$; c) $x > 3$; d) $x \le –2$. **138.** a) $x > 1$; b) $x < 5$; c) $x < 3$; d) $x > 0$; e) N-are soluţii. **140.** b) $x > 20$. **141.** a) $x \ge –5$; b) $x \ge –2,6$. **142.** a) $x > 1$. **143.** a) $x > 8$; b) $x < –2,5$. **144.** a) $x \le 4,2$. c) $x < 0$; d) $x > –7,5$; e) $x \ge –2$; $x > 8$. **145.** b) $x < 7$; c) $x < – 6$; d) $x \le 0$; g) $x > 24$. **146.** a) $x < 4$; b) $x \le 9$; c) $x > 0$. **147.** a) $x > 1,8$; c) $x > –2$. **149.** a) 4. **150.** b) –4. **153**. c) $x \ge 2$, f) $x \le 2$. **154**. a) $x > –2$; b) $x \le 11,5$. **155**. b) $x \ge 7$; c) $z \ge 0,65$. **157**. a) $x > 5$. **158**. a) $c > 2$; b) $z \ge 1$. **159.** a) $x < 1,2$; b) $x < 17,5$; f) $x \le 0$. **160.** c) R; d) Nu are soluţii. **161.** b) $x < 0$, $x > 1,5$. **162.** [0; 4). **163.** a) $x > 4$; b) [0; 1]; c) $x \ge 4$. **165.** Nu mai mult decât 252;3km. **166.** a) $x < –0,5$; b) $x \ge –1$; c) R; d) $x \le 5,8$. **167.** a) $–0,4 \le x \le 1$; b) $–1 < x < 1$; c) $1 < x \le 4$; d) $–0,05 < x < 0,7$; e) $–0,1 < x < 0,1$; f) $–1,6 \le x \le 4,2$; g) $2 < x < 3$. **168.** a) 3; b) 3; c) 1; d) –10. **169.** a) $–5 < x < 5$; b) $–4 \le x \le 10$; c) $1 < x < 2$. **170.** b) $–10 < x < –4$; c) $–0,2 \le x \le 0,6$. **171.** b) Dacă $a < 0$, atunci $x \ge 0$; dacă $a = 0$, atunci $x \in R$; dacă $a > 0$, atunci $x \le 0$; c) dacă $a < 0,5$, atunci $x > 2a – 1$; dacă $a = 0,5$, atunci soluţii nu are; dacă $a > 0,5$, atunci $x < 2a – 1$; d) dacă $a < 0$, atunci $x < 1$; dacă $a = 0$, atunci soluţii nu are; dacă $a > 0$, atunci $x > 1$; e) dacă $a = 0$, atunci $x \in R$; dacă $a \ne 0$, atunci $x \le 0$. **173.** a) $1,2 \cdot 10^6$; b) $–7,5 \cdot 10^{–7}$; c) $1,764 \cdot 10^{19}$; d) $8,88 \cdot 10^{13}$. **175.** Cu 50 %. **177.** a) (0; 2); b) (0; 1); c) (1; 5); d) (–∞; 3). **178.** a) (0; 1); b) (0,5; 1); c) {2}; d) Ø.

188. a) [2; 5] şi {3}; b) [–5; 0] şi [–3; 0]; c) [–7; 7] şi [–5; 5]; d) [–3; –1] şi (–2; –1); e) (–2; 2) şi Ø; f) (–∞; ∞) şi [–2; 2). **190.** a) $a > c$; b) a <c; c) $a > c$; d) $a < c$. **191.** a) $x > 3$; b) $x \geq 3$; c) $x > 0{,}8$; d) $x < 3$; e) $x > 1$; f) $x \geq 10$. **192.** a) $x \leq 0{,}2$; b) $x > -0{,}5$; c) $x > -0{,}5$; d) $x > 3$; e) $x \geq -0{,}6$; f) $x \geq -50$. **194.** a) $x \geq 0{,}2$; c) $x > 6{,}6$; d) $x < 2{,}25$. **195. a)** $x > 1$; b) $x < -1$.**196.** a) $m < a$, $b < n$. **197.** a) $x < a$, $y > c$; b) $x > a$, $y < c$; c) $x > a$, $y < c$; d) $x > a$, $y > c$. **198.** a) $x < a < y$; b) $a < x < y$; c) $x < a < y$.

200. a) $-4 < x < 5$; b) $-9 < x < 1$. **201.** a) $-1 \leq x \leq 1$; d) $-3 < x < -1$. **203.** a) (– ∞; ∞). **204.** b) $x \geq 4$. **206.** b) R; [-13; 1). **209.** f) (–∞;1) U (4; ∞). **210.** a) R. **219.** c) 2 şi 3. **221.** a) (-3; 1). **222.** a) Soluţii nu are. **224.** a) (6; 8). **226.** b) (10; ∞). **227.** c) –0,25. **228.** a) (2; 16]. **229.** a) {3, 4, 5, 6}. **230.** b) (–3; –1). **232.** a) (1,5; 2,5). **234.** b) (–∞; –0,4). **235.** a) [3;5]. **236.** a) $0{,}625 < x < 0{,}875$. **238.** a) (–2;7). **239.** c) (–5; ∞). **240.** a) (–∞; –3)⋃(7; ∞). **241**.d)(– ∞; –9)⋃(–2; ∞). **242.** (–1; 1). **244.** a) (4; 10). **247**. a) Da; b) da. **248.** a) (-1; 3). **249.** a) (-4; 1); b) [-2,5; 4,5]. **250.** a) (∞; 4,5)⋃(5,5; ∞). **251.** a) (2; 3). **256.** b) 19, 257. **257.** b) 200. **262.** c) $a^2 + 65 - 16a = (a - 8) + 1 > 0$. **263.** a) $(a + 1)^2 - 4a = (a - 1)^2 \geq 0$.**264.** a) Pentru fiecare număr negativ x numerele $x - 1$ şi $x - 2$ sunt negative, iar produsul lor pozitiv; b) pentru x negativ numărul $x^2 + 9$ pozitiv, iar $10x$ negativ. **267.** a) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0{,}5(2a^2 + + 2b^2 + 2c^2 - 2b - 2ac - 2bc) = 0{,}5((a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2) \geq 0$. **269.** b) Pătratul sumei a două numere negative este mai mare, decât suma pătratelor lor. **281.** a) –2 şi –1; b) –4 şi o. **282.** –3 şi 3.**283.** 1633,4 t. **284.** a) o,8. **285.** 1–B, 2 –D, 3–A, 4 – B. **288.** a) Dreaptă; d) hiperbolă. **291.** a) R; e) $x \geq 2$. **296.** $f(2) = 14$. **297.** $f(-3) = 22$. **298.** a) 8. **299.** a) 12.

301. a) R; d) $x \neq 3$ şi $x \neq 4$. **302.** b) b) $x \neq -1$ şi $x \neq 4$; c) $x \leq 4$. **305.** a) {7}; b) R. **306.** Punctul A aparţine. **307.** Prin punctul A trece. **308.** a) Aparţin punctele A şi C. **309.** a) (0; 0); b) (1,5; 0) şi (0; 3). **311.** Da. **312.** Da. **313.** a) $f(-2) = 11$, $f(-1) = 5$, $f(0) = 3$, $f(2) = 11$, $f(1) = 5$. **316.** (2; 2). **321.** a) (–6; 0) şi (0; 3); d) (–2; 0), (2; 0) şi (0;4). **325.** $m = 20$; da. **326.** 1 –A, 2 –D, 3 –G, 4 –B. **328.** a) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \infty)$; [0; ∞); d) [–5; 5]. **329.** a) $0 \leq x \leq 1$. **332.** $p = 5$ un. de bani; $Qs = Q_D = 4$ mln bucăţi pe an; s-a micşorat cu 8 %. **335.** b) $x > 1$. **338.** a) Nu. **345.** a) R; c) $x \geq -4$; e) R. **346.** a) R; e) (–∞; 0) ⋃ (0; ∞); f) R. **347.** a) R şi [–1; ∞); d) [0; ∞) şi (–∞; 1]; f) R şi [2; ∞). **349.** [–2; 5] şi [–5; 5,5]. **353.** a) Nu; b) da; –1 şi 0. **359**. a) Crescătoare; b) descrescătoare. **363.** a) R şi [4; ∞]. **365.** a) $x < 2{,}5$; b) $x > -4$. **366.** b) $0 \leq x \leq 16$; c) $-3 \leq x \leq 0$; e) $x \leq -2$. **369.** a) (–∞; 0]; b) (–∞; 3. **370.** a) R. **372.** Nu. **375.** d) Pară; e) impară. **388.** a) –3 şi 1,5. **389.** a) –5 şi 3. **390.** a) $7{,}8 \cdot 10^3$;f) $4{,}5 \cdot 10^{-4}$. **393.** a) Crescătoare. **398.** a) $(a; b)$. **399.** a) $(-\infty; -c)$.

410. b) De translat cu 3 unităţi în direcţia axei *x*. **414.** a) $y = (x - 2)^2 + 3$. **429**. a) 0,5. **431**. a) –6 şi 2,5.**432.** a) $(x - 3)^2 + 6$; d) $(x - 0{,}5)^2 - 1{,}25$. **436.** a) (3; 0); c) (5; 2). **440.** a) (0, 0) şi (2; 0). **442.** a) (0;4); c) (2; -4).

447. $m = -6, n = 14$. **450.** Nu. **452.** a)$x = 3$.**453.** a) $c = 0$;c) $c = 6$. **454. a)** –4 şi 4. **463.** a) $x = 3$; b) $x = -2$. **464**. a) $y = 3$; b) $y = -1$. **466.** b) (–1; 2) şi (1; 2).**467.** a) 7. **469**. $b = -6$. **471.** *Indicaţie*. Construiţi un pătrat cu latura *x* şi pe două laturi alăturate construiţi dreptunghiuri cu laturile *x* şi 3. **473.** b) $x \leq 4$. **474.** b) $-7 \leq x \leq -3$. **475**. a) Două. **481**. a)(0; 4); b) [–6; 0]. c) [–7; 1]; e) (–∞;–3,5] ⋃ [0; ∞). **482**. a) (–∞; 3) U (3; ∞); b) soluţii nu are; c) {–2}; d) {–0,5}; f) *R*. **483**. a) [1; 2]; b) Soluţii nu are; c) (–∞; 1] ⋃ [3; ∞). **484**. a) (–∞; 0,5] U [1; ∞); b) (2; ;4); d) (–2; 6); f) (–∞; 2] ⋃ [9; ∞). **485**. b) (–∞; 6) ⋃ (6; ∞); d) (–2,5; 1,5). **486**. a) (1; 2); b) (–∞; 2) ⋃ (2,5; ∞); c) Soluţii nu are; f) (–7; 2). **487**. a) (–∞; -7] U [1; ∞); b) [3; 5]; c) (–3; 2); f) (–∞; 2] ⋃ [2; ∞). **490**. a) (–∞;2] U [2; ∞). **491**.a) –5; –4; –3; –2; –1; 0; c) –1; 0; 1; 2; d) –2; –1; 0; 1; 2; f) {2}. **492**. a) [1; 4]; b) (–5; 6); c) (–1; 0); d) (–∞; 2] ⋃ [3; ∞). **493**. a) (1,5; 2); c) (–∞;–0,5) ⋃ (1; ∞); d) Soluţii nu are. **494.** a) (-2; 3); b) (–∞;–2) ⋃ (7; ∞); f) (0,25; 1,5). **495**. a) (-3; ∞); b) (1; 9); f) (–∞; 2) ⋃ (10; ∞) {6}. **496**. a) (–∞; -7] U [–5; ∞); b) (2; 3); c) (–∞; 0) ⋃ (1; ∞)d) (–8; 7). **497**. a) ⋃ (0,5; 3); b) [–4; 0,5]; d) (–; 5). **498**. a) [–7;1] U [2; ∞); b) (–5; –4) ⋃ (4; 5); c) (–3; 1). **499**. a) [–2; 3]; b) [–1; 1) ⋃ [2; 3]; c)(–∞;–3) ⋃ (–1; 4) ⋃ (5; ∞).

500. a) {-1} ⋃ [1; 2,5]; b)(–∞;–5) ⋃ (–2; 2) ⋃ (2, ∞),c)(–∞;–3) ⋃ (3; ∞). **501**. b) (–∞; 0,25) ⋃ [6; ∞). **502**. a) (–0,2;2) ⋃ (2;0,2); c) (1; ∞). **503.** a)(–1; 6). **504**. a)[–1; 8]; c)[–5;–3) ⋃ (–3;1] ⋃ [5; ∞); d) [–3; 0,5]. **505**. a) *b* ϵ [–1; 1]; b) *b*∈ [9; ∞]; c) *b* ∈ (–∞; 0]. **506**. a) *m* ϵ (–4; 4); b) *m* ϵ [9; ∞); c) *m* ϵ (–∞;–4);. **507**. a)[3; 4). **508**. a)(– ∞; –1) U (3; 4] U [7; ∞). **509**. a) (–1; 0) U (5; 6). **511**. Trei. **512**. 10. **513.** a) a) –,5 x^4y^2. **521.** a) (0; 1), (0; 1); b) (0;0), (4; 2); c) (–3; 2). **522.** a) (3;3), (–3; –3); b) (0; 1), (1; 0); c) (4; 4), (–4; –4), **523.** a) (0;0), (1; 1); b) Sistemul nu are soluţii; c) (2; 4).**524.** a) (0; –5), (3; 4), (–3; 4); b) (3; 3), (–3; –3); c) (0; 2), (–2; 0). **525**. a) (3; 0), (0; –3); b) (–1; –4), (4; 1); c) (0; –2), (4; 2). **526**. a) (6; 8), (8; –6); b) (–1; $\sqrt{3}$), (–1; $-\sqrt{3}$); c) (2; –1), (1; –2); d) (5; 3). **527**. b) (12; 16), (4; 0); c) (–3; –3), (2; 2); d) (2; 0), (0; 2). **528**. a) (13; 3); b) (3; 2), (–3;–2); c) (3; 1),(3; –1), (–3; 1) (–3; –1); d) ($\sqrt{15}$; $\sqrt{10}$),($\sqrt{15}$;$-\sqrt{10}$),($-\sqrt{15}$; $\sqrt{10}$),($-\sqrt{15}$; $-\sqrt{10}$). **529**. a)(–5; –4),(–4; –5), (5; 4), (4; 5); b) (5; 3), (3,5), (–5; –3); (–3; –5); c) (2; 1), (–2; –1);d) (0; 0). **530**. a) (2; 8), (8; 2); b9 (12; 8). **531**. a) (8; 6), (–5; –7), b) (–5; –7), (8; 6). **532**. a) (8; 2), (–15; 25); b) (8; 2), (–40; 50). **534**. a) (2; 1), (3; 2); b) (3; 2). **535**. a) (5; 1), (8; 2); b) (3; 4), (4, 3).

$(-3;\ -4)$, $(-4;\ -3)$. **536.** a) $(4;\ 4)$, $(-4;\ 4)$; b) $(-1;\ 1)$, $(0;\ 0)$, $(1;\ 1)$. **537.** a) $(1{,}2;\ -1{,}6)$, $(-0{,}7;\ 4{,}1)$; b) $\left(-\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; c) $(3;\ 4)$, $(3;\ -4)$; d) $\left(\sqrt{51};\ -1\right)$, $\left(-\sqrt{51};\ -1\right)$. **538.** a) $(4-\sqrt{10};\ 4+\sqrt{10})$, $(4+\sqrt{10};\ 4-\sqrt{10})$; b) $(3;\ 6)$; c) $(4;\ 2)$, $(4;\ -2)$; d) $(3;\ -1)$, $(3{,}5;\ 1)$. **539.** a) $(3;\ 5)$; c) $(5;\ 3)$, $(3;\ 5)$, $(-5;\ -3)$, $(-3;\ -5)$; d) $(5;\ 1)$, $(-5;\ -1)$. **540.** $(1;\ 1)$, $(1;\ -1)$; b) $(1;\ 2)$, $(-1;\ 2)$, $(1;\ -2)$, $(-1;\ -2)$; c) $(2;\ 2)$, $(-2;\ -2)$; d) $(3;\ 2)$, $(2;\ 3)$, $(-3;\ -2)$, $(-2;\ -3)$. **541.** a) $(0;\ 10)$, $(8;\ 2)$; b) $(4;\ 6)$, $(6;\ 4)$. **542.** a) $(-6;\ 18)$, $(9;\ 3)$; b) $(6;\ 4)$, $(4;\ 6)$. **543.** a) $(-5;\ -1)$, $(5;\ 1)$; b) $(3;\ 2)$, $(-3;\ -2)$, $(-2;\ 3)$, $(2;\ -3)$; c) $(0;\ -2)$, $(0;\ 2)$, $(2;\ 0)$; d) $(0;\ 1)$, $(0;\ -1)$, $(-\frac{1}{2};\ 0)$. **544.** a) $(1;\ 1)$, $(-2;\ -2)$; b) $(2;\ 1)$, $(2;-1)$; c) $(4;\ 1)$, $(1;\ 4)$; d) $(9;\ 4)$, $(4;\ 9)$. **545.** a) $(9;\ 3)$, $(-9;\ -3)$, $(0;\ 3\sqrt{10})$, $(0;\ -3\sqrt{10})$; b) $(-4\sqrt{2};\ 4\sqrt{2})$, $(4\sqrt{2};\ -4\sqrt{2})$, $(4\sqrt{2};\ 4\sqrt{2})$, $(-4\sqrt{2};\ -4\sqrt{2})$; c) $(4;\ 2)$, $(2;\ 4)$, $(3-3\sqrt{2};\ 3+3\sqrt{2})$, $(3+3\sqrt{2};\ 3-3\sqrt{2})$; d) $(7;\ 2)$, $(2;\ 7)$. **546.** a) $(4;\ -3)$, $(-3;\ 4)$; b) $(5;\ 1)$, $(1;\ 5)$, $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$; c) $(1;\ 3)$, $(3;\ 1)$; d) $(-1;\ 2)$, $(2;\ -1)$. **547.** a) $(6;\ 2)$, $(-6;\ -2)$; b) $(1;\ 4)$, $(4;\ 1)$; c) $(1;\ 2)$, $(2;\ 1)$; d) $(4;\ 12)$, $(12;\ 4)$. **548.** a) $(2;\ 4)$, $(4;\ 2)$; b) $(7;\ 5)$, $(-5;\ -7)$; c) $(1;\ 2)$, $(3;\ -6)$; d) $(3\sqrt{3};\ 3\sqrt{3})$, $(-3\sqrt{3};\ -3\sqrt{3})$. **549.** b) $a = 1$ şi $b = 0$ sau $a = –1;2$şi $b =–3;2$; c) $a = 3$ şi $b = 2$ sau $a = –3$ şi $b = –2$; f) $a = 3$ şi $b = 0$; $a = 1$ şi $b = –2$. **550.** a) 17;2 un. lin.; b) ;2 un. lin. **551.** 1 – C, 2 – A, 3 – B, 4 – E.

552. 1 a) $1{,}5\cdot10^6$ km; b) $10{,}8\cdot10^8$ km; 2) a) 1 km 715 m; b) 5 km 145 m. **553.** a) $\dfrac{x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-9\right)}$; $\dfrac{-8}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-9\right)}$. **554.** b) $\dfrac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$; c) $\dfrac{c+2\sqrt{5}}{c-2\sqrt{5}}$. **559.** –10 şi –0,9 sau 0,9 şi 0,2

561. a) 23 şi 21. **562.** a) 12 dm şi 5 dm. **563.** 6 m şi 8 m. **564.** 35 cm şi 12 cm. **565.** 8 cm şi 4;2 cm. **566.** 15 cm şi 10 cm. **567.** 3, 5 şi 8 cm. **568.** 84 h şi 60 h. **571.** 180 piese. **572.** 15 zile. **573.** 49 de strunguri. **574.** 32 m^3. **575.** 36 min şi 72 min. **576.** 39 m, 52 m şi 65 m. **577.** 300 km sau 360 km. **578.** 48 km/h. **579.** 12 km/h, 18 km/h, 24 km. **580.** 18 km/h, 2 km/h. **583.** 10 km/h. **584.** 72 km/h. **585.** 60 km/h sau 93 km/h. **598.** a) Infinită; b) Finită.

600. a) 9; b) 15. **606.** a) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29. **607.** a) 67; c) 4. **608.** Cu 5. **609.** De 10 ori. **610.** $b_6 = 64$; $b_8 = 256$; $b_{10} = 1024$. **611.** Nu. **612.** $a_n = 7n – 4$. **613.** 7, 9, 11, 13, 15, ... **616.** a) 2, –4, 8, –16, 32; c) 15, 10, 5, 0, –5. **618.** $a_2 = –2$; $a_5 = 7$; $a_{10} = 22$. **619.** a) $n = 17$; b) $n = 16$. **620.** a) $16 \le n \le 51$; c) $3 \le n \le 4$; e) $9 \le n \le 97$. **621.** a) 124; b) 79. **622.** 14. **624.** $k = 4$, $p = 3$. **625.** $a_n = (4 – n)^2$. **626.** a) $a_n = 3n – 1$; b) $2n$. **633.** a) Crescătoare; b) Descrescătoare. **636.** a) $a_3 = 4$. **637.** a) $a_5 = –10$. **640.** 1000 grn., 1500 grn. **642.** a) $(5;\ 0)$, $(1;\ 4)$; b) $(–3;\ 4)$, $(3;\ –4)$, $(–4;\ 3)$, $(4;\ –3)$. **647.** a) 7, 9, 11, 13, 15. **649.** a) $a_7 = –19$, $a_{20} = –71$; b) $a_{15} = 65$, $a_{33} = 133$. **650.** $d = 11$, $a_{10} = 102$, $a_{20} = 212$. **651.** $d = 5$, $a_{10} = 47$. **652.** $d = 15$; b) $d = –0{,}2$. **653.** a) $a_1 = 5$; b) $a_1 = 40$; d) 19. **654.** $a_1 = 5$, $a_5 = 17$, $a_{11} = 35$, $a_{21} = 65$. **655.** $d = –9$, $a_1 = 86$, $a_5 = 50$,

a_{21} = –94. **656.** a_7 = 14, a_{20} = 7,5. **657.** a_{40} = 20, a_{41} = 20,5. **658.** a) $a_n = 3n - 1$. **659.** a) $a_n = 5n + 2$; c) $a_n = 3n - 5{,}5$. **660.** a) –125; c) –2,5. **661.** a) $a_1 = 5$, $d = 10$; b) $d = -7$, $a_1 = 153$. **662.** a) 50; b) –50; d) 13 250. **663.** a) 2420; b) 3180; d) 4180. **664.** a) 1088; b) 1100; d) –522; f) 400. **665.** $a_{20} = 79$; $S_{20} = 820$. **666.** 1830. **668.** 5050. **669.** 10 000. **670.** 645 cm. **671.** 1680 grn. **672.** $a_9 = 16{,}1$; $a_n = 2n - 1{,}9$, $a_{3p} = 6p - 1{,}9$. **673.** c) 95. **674.** a) $a_1 = 1$, $d = 3$, $a_{21} = 61$, $a_{100} = 298$; d) $a_1 = 2{,}8$, $d = 1{,}2$, $a_{21} = 26{,}8$, $a_{100} = 121{,}6$. **678.** a) 7. **679.** a) 13. **680.** b) 16. **681.** 39. **682.** a) $c_1 = 2$, $d = 5$. **684.** $A_3B_3 = 7{,}5$ cm, $A_nB_n = 2{,}5n$ cm. **689.** 18 cai. **690.** a) 430; d) 300. **691.** 9900. **693.** a) 166 833. **694.** a) 2020. **695.** $a_7 = 8$. **696.** $S_{25} = 75$. **697.** $S_{27} = 54$. **698.** a) $S_{20} = 1090$. **699.** a) $a_5 = 3$.

700. $S_9 = 63$. **701.** De 90 ori. **702.** a) ≈ 314 m. **703.** Studiaţi progresie $a - 2d$, $a - d$, $a + d$, $a + 2d$, suma membrilor cărieia 180(5 – 2). **704.** $3{,}5(a + b)$. **705.** a) $\frac{3}{2x+1}$; c) $\frac{c+2}{c-1}$. . **706.** a) (0; 8). **707.** 1 – C, 2 – A, 3 – B, 4 – D. **714.** b) $q = 0{,}1$, $b_5 = 0{,}00001$. **715.** $b_4 = -24$, $b_7 = -192$, $bn = -3 \cdot 2n^{-1}$. **716.** a) $b_1 = 3$. **717.** d) $b_{12} = 64$. **718.** a) $b_7 = 48$; b) $b_7 = -24$. **719.** a) $b_n = 2 \cdot 3n^{-1}$. **720.** a) $n = 5$. **721.** Da. **722.** a) $S_6 = -1092$. **723.** a) 511. **724.** a) $S_6 = 5208$; c) $S_6 = 21$. **725.** a) $S_{15} = 32\,767$. **727.** 4 294 967 295 sau $(2^{32} - 1)$ pfenigi. **728.** $b_1 = 1736\frac{1}{9}$, $q = \pm\frac{3}{5}$. **731.** a) 20. **732.** a) $b_1 = 1$, $q = 3$. **737.** 1. **738.** –2048. **739.** 3, 6, 12. **741.** ≈ 455 mm col. de mercur. **742.** Da. **745.** 27, 18, 12, 8. **746.** a) $n = 6$; b) $n = 10$. **747.** 3, 6, 12, 18 sau 18,75, 11,25, 6,75, 4,05. **748.** –0,5, –1, –4, –16 sau –0,5, 1, 4, 16. **749.** a) b_{12}. **750.** $P_n = b_1^n q^{0,5n(n-1)}$. **752.** Peste 10 000 rub. **752.** ≈ 2^{72} bacterii. **753.** 2^{65}, această este cu mult mai mult, decât numărul oamenilor pe Pământ. **754.** a) (0; 9), **756.** 8,8 şi 7,8 g/cm^3. **761.** a) 3; d) $-\frac{16}{3}$. **762.** a) 1,5. **763.** $\frac{4}{3}$.. **764.**a) $\frac{4}{3}$.. **765.** b) $\frac{2}{3}$. **766.** a) $\frac{4}{9}$. **767.** 6 cm. **770.** a) $2+\sqrt{2}$; c) $\frac{1}{4-\pi}$. **771.** $6\sqrt{3}r$, $4\pi r$. **772.** c) $\frac{24}{99}$. **773.** c) $\frac{7}{6}$. **775.** b) $\frac{1}{1+x}$. **776.** $16+8\sqrt{2}$. **777.** 3, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{16}$,.... **778.** $b_4 = \frac{4}{9}$. **779.** 1 i $\frac{1}{3}$. **780.** a) –50; b) –5050. **781.** a) 40. **784.** a) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **789.** a) 3, 12, 48…. **871.** a) 27 000. **873.** a) $\frac{1}{80}$. **874.** a) $-\frac{1}{15}$. **875.** a) 1.

876. a) 25. **879.** a) $3\frac{1}{4}$. **881.** a) $\frac{2}{21}$. **883.** a) $\frac{8}{15}$. **884.** 17, 19, 23, 29, 31. **885.** 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30. **888.** CMMDC (18, 32) = 2; CMMMC (18, 32) = 288. **892.** 80. **893.** Astfel de numere sunt 10. **895.** Nu. **898.** b) 3,6; f) 1,8.

901. a) $25y^2$. **902.** a) $x(x + y)(x + 2)$. **904.** $(x - y - z)(x - y + z)$. **905.** a) $(a - b)(b - 2)(b + 2)$. **906.** a) $a \neq 0$ şi $a \neq 3$. **907.** b) $\frac{2-x}{x^4y^{11}}$; d) $\frac{(a+1)^3}{(a-1)^2}$. **908.** 11. **909.** 5. **911.** a)

$\frac{5z^2 \quad 6x^2}{15ax^2z^2}$ **912.** a) $\frac{3c}{2x}$. . **914.** $\frac{a+b}{a-b}$. . **917.** a) $a+\sqrt{a}-2$. **919.** a) a. **922.** a) $2(a-b)$. **923.** a) 8. **924.** a) 3. **927.** a) 25. **929.** a) –2 şi 2. **930.** a) (2; 3). **931.** a) (15; 5). **932.** a) (0; 1). **933.** a) (3; 0) şi (0; –3). **935.** a) (–3; 4) şi (4; –3). **937.** 1000 kg şi 800 kg. **938.** 240. **939.** 100 km/h, 80 km/h. **940.** 50 km. **941.** 30 şi 20 zile. **942.** 75 km/h. **944.** 300. **945.** 40 grn. **946.** 32 %. **947.** 25 %. **948.** 40 %. **950.** a) $x > 7{,}25$. **954.** a) $x < 6$. **955.** a) $3 < x < 7$. **960.** a) R; c) $x \le 4$. **961.** a) $x = 3$. **962.** a) $y = 3$; d) $y = 1{,}8$. **963.** a) (0; –11) şi (1; 0). **967.** a) $(-\infty; -2) \cup (0; \infty)$; b) $(-\infty; 0] \cup [1; \infty)$. **968.** a) $(-\infty; 1) \cup (2; \infty)$; b) $(-3; -2)$. **969.** a) $(-\infty; -1] \cup \left[1\frac{1}{3}; \infty\right)$. **970.** a) $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$; b) soluţii nu are. **971.** a) $(-\infty;-5) \cup (3; +\infty)$; b) $(-7; -2)$. **972.** a) $(-\infty; -1) \cup (-0{,}5; \infty)$; b) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; \infty\right)$.. **973.** a) (1; 2); b) (–7; –3). **974.** a) $(-\infty; -3) \cup (7; \infty)$. **980.** 11. **981.** 4. **982.** 14. **985.** 96, 48, 24, 12, 6, 3. **986.** 6. **989.** a) Da; b) Nu.

PROBLEME ŞI EXERCIŢII DE O COMPLEXITATE SPORITĂ

990. Ridicaţi expresiile date la pătrat. **991.** Demonstraţi, că $\sqrt{9\pm 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} \pm 2$. **992.** a) $2a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac = (a-b)^2 + (a-c)^2$. **993.** a) $x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 = (x-y)(x^3 - y^3)$, dar numerele $x - y$ şi $x^3 - y^3$ sunt de acelaşi semn; b) $(x-1)^2 + (x-2y)^2 + (y-2)^2 + 1 > 0$. **996.** $x^2 + (1-x)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x-1)^2$. **997.**) $\left(-\infty; 2\frac{1}{2}\right) \cup \left(-2; \frac{2}{3}\right) \cup (1; \infty)$. **999.** $(-\infty;-4) \cup (8; \infty)$. **1000.** Cea mai mică valoare a lui x, pentru care expresia $\sqrt{x-6}$ are valoare, este egală cu 6. Mulţimea soluţiilor fiecărei inecuaţii (6; ∞).**1004.** $y = |x+\sqrt{2}| + |x-\sqrt{2}|$. **1008.** 0, 2, 4, 3, 2; construiţi graficul funcţiei $y = |x^2 - 6x + 5|$.**1009.** a) (–∞; 0] U [6; ∞); b) Nu are soluţii. **1012.** ≈16 zile. **1013.** 3 : 4. **1014.** $x = 3\frac{3}{4}$; $y = 5\frac{1}{2}$; $z = 7\frac{1}{4}$.**1015.** a) 71071; b) 428429. **1016.** $a_1^{\,n}(q^{n2} - 1) : (q^n - 1)$. **1017.** $q : (1 - q)^2$. **1118.** 6, –3, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{4}$, ...**1119.** 1 sau –2. **1020.** Demonstraţi, că pentru $a + c = 2b$ diferenţa dintre trinoamele al treilea şi al doilea este egală cu diferenţa dintre al doilea şi primul. **1021.** a) $a^n = 1{,}5 + (-1)^n \cdot 0{,}5$; b) $a^n = (-1)^n n$.**1122**. a) $1;3n(n+1)(n+2)$; b) $n^2(n+1)$. **1024.** 3, 7, 11, ... **1025.** 1480 lire sterline. **1026.** 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35. **1027**. $a^n = n^2 + 2$. **1028.** $x = 7$. **1029.** Da, aceasta este progresie aritmetică 16, 31, 46, ..., $15n + 1$, ... **1034.** De 2 ori.

INDICE DE MATERIE

Aprecierea valorilor 25
Argumentul funcţiei 75
Bani din procente 236
Calculul sumelor 181
Cifre semnificative 225
Codomeniu funcţiei 75
Coeficient 259
Combinatorie 196
Demonstraţia inecuaţiilor 60
Discriminant 260
Domeniu de definiţie
al funcţiei 75
Ecuaţii 260
— de gradul al doilea 260
— echivalente 260
— liniare 260
Eroare absolută 223
— relativă 224
Evenimente 204
— de masă 211
— egal posibile 204
— elementare 204
— reciproc incompatibile 204
Expresii 258
— cu variabile 258
— identice 258
— întregi 258
— raţionale 258
Factorial 198
Formula procentelor
compuse 236
— soluţiilor ecuaţiei de
gradul al doilea 260
Frecvenţă 212
— evenimentului aleatoriu 202
— relativă 212
Funcţie 74
— crescătoare 86
— descrescătoare 87
— de gradul al doilea 109
— impară 87
— liniară 76
— pară 87
Graficul ecuaţiei 261
— funcţiei 75
Histograma 211
Identitate 259
Inecuaţii 8
— cu necunoscute 31
— cu variabile 9
— de gradul al doilea 118
— duble 24
— echivalente 31
— identice 31
— liniare 33
— nestricte 8
— stricte 8
Inegalităţi numerice 8
Interval 32
— cu semn constant 86
— de creştere al funcţiei 87
— de descreştere al funcţiei 87
— numeric 43
Intersecţie a mulţimilor 42
— intervalelor numerice 43
Medie aritmetică 61
— geometrică 61
Mediana selecţiei 213
Moda selecţiei 213
Model 227
Modelare matematică 227
Monom 359
Mulţime 41
— numerelor reale 258
— vidă 43

Numere iraţionale 258
— raţionale 256
— reale 258

Parabolă 111
Polinom 259
Probabilitate 202
— evenimentului 202
— — aleatoriu 202
— — imposibil 202
— — sigur 202
Probleme aplicative 227
Procente 234
— compuse 236
— simple 236
Progresie aritmetică 161
— geometrică 171
Proporţionalitate directă 75
— inversă 76
Proprietatea fundamentală
a fracţiei 256
— — a proporţiei 257
Proprietăţi ale:
— funcţiilor 85
— inecuaţiilor numerice 17
Raţia progresiei aritmetice 221
— — geometrice 171
Rădăcină pătrată 260
Rădăcinile ecuaţiei de gradul
al doilea 260
Regula combinatoriei
— a produsului 197
— a sumei 196
Reguli de rotunjire
ale numerelor 258
— numărării cifrelor 225
Reuniune a mulţimilor 42
— intervalelor numerice 43
Selecţie 211
Semne zecimale 225
— inegalităţii 9
— nestricte 8
— — stricte 8
Sistem de ecuaţii 126
— de inecuaţii 52
Soluţie a ecuaţiei 260
— inecuaţiei 31
— sistemului de ecuaţii 127
— sistemului de inecuaţii 52
Spaţiul evenimentelor elementare 205
Statistică 211
Suma progresiei geometrice
infinite 182
— termenilor progresiei
aritmetice 162
— — — geometrice 172
Şir 152
— crescărtor 154
— descrescător 154
— finit 153
— infinit 153
Tabel al frecvenţelor 212
Tendinţe centrale 212
Teorema lui Viete 260
Totalitate de inecuaţii 45
Transformarea expresiilor
— graficelor 98
Valoare medie a selecţiei 213
Valori aproximative 223
— calculul 223
Valori ale funcţiei 75, 85
— cea mai mare 87
— cea mai mică 87
Zerourile funcţiei 86

CUPRINS

Stimaţi elevi din clasa a 9-a!..3
Cum de lucrat cu manualul..4

Capitolul 1 INECUAŢÍI

§1. Cunoştinţe generale despre inegalităţi..8
§2. Proprietăţile inegalităţilor numerice...17
§3. Inegalităţi duble...24
§4. Rezolvarea inecuaţiilor cu o variabilă..31
§5. Reuniunea şi intersecţia mulţimilor. Intervale numerice..................41
§6. Sisteme de inecuaţii cu o variabilă..52
§7. Demonstrarea inegalităţilor..60
Sarcini pentru lucrul independent..62
Date istorice..63
Esenţialul în capitol...64
Clarificăm realizările
Sarcini în formă de test nr. 1...70
Sarcini-tip pentru lucrarea de control nr. 1.......................................67

Capitolul 2 FUNCŢIA DE GRADUL DOI
§8. Funcţii..74
§9. Proprietăţile funcţiei..85
§10. Transformarea graficelor funcţiilor..98
§11. Funcţia de gradul doi..109
§12 Inecuaţii de gradul doi..118
§13. Sisteme de ecuaţii de gradul doi..126
§14. Rezolvarea problemelor prin compunerea
sistemelor de ecuaţii...136
Sarcini pentru lucrul independent..144
Date istorice..145
Esenţialul în capitol...147
Clarificăm realizările
Sarcini în formă de test nr. 2...148
Sarcini-tip pentru lucrarea de control nr. 2.......................................149

Capitolul 3 ŞIRURI NUMERICE
§ 20. Şir...152
§ 21. Progresie aritmetică...161
§22. Progresie geometrică..171
§23. Probleme de calcul al sumelor..181

Sarcini pentru lucrul independent......190
Date istorice......191
Esenţialul în capitol......192
Clarificăm realizările
Sarcini în formă de test nr. 3......193
Sarcini-tip pentru lucrarea de control nr. 3......194

Capitolul 4 BAZELE COMBINATORIEI, TEORIEI PROBABILITĂŢILOR ŞI STATISTICII

§19. Reguli principale ale combinatoriei......196
§20. Frecvenţă şi probabilitate ale evenimentului aleatoriu......202
§21. Cunoştinţe despre statistică......211
Date istorice......218
Esenţialul în capitol......219
Clarificăm realizările
Sarcini în formă de test nr. 4......220
Sarcini-tip pentru lucrarea de control nr. 4......221

Anexe
Proiectul de învăţământ nr. 1. Inegalităţi interesante......222
Proiectul de învăţământ nr. 2. Funcţiile în jurul nostru......226
Proiectul de învăţământ nr. 3. Aplicarea matematicii......233

PROBLEME ŞI EXERCIŢII PENTRU RECAPITULARE
Numere şi operaţii cu ele......239
Divizibilitate a numerelor. Rapoarte şi proporţii......240
Expresii întregi......240
Expresii raţionale......241
Expresii iraţionale......242
Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii......242
Probleme pentru compunerea ecuaţiilor
şi a sistemelor de ecuaţii......244
Inecuaţii......245
Funcţii şi grafice......245
Şiruri numerice......246
Probleme şi exerciţii de o complexitate ridicată......248
Teste pentru antrenamant......252
Cunoştinţe din clasele precedente......255
Răspunsuri şi indicaţii la probleme şi exerciţii......262
Indice de materie......268

Informații despre starea manualului

№	Nume, prenume elev	An de învățământ	Starea manualului		Nota
			la început de an	la sfârșit de an	
1					
2					
3					
4					
5					

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
з навчанням румунською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української мови

Перекладачі *Лазарович Штефан Георгійович, Лазарович Георгій Штефанович*

Румунською мовою

Редактор *К.В. Даскалюк*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Коректор *М. Г. Кирчул*

Формат 70х100/16.
Ум. друк. арк. 22,032. Обл.-вид. арк. 21,37 + 0,55 форзац.
Тираж 1971 пр. Зам. № 59П

Державне підприємство „Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ"
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua, e-mail: office@svit.gov.ua,
svit_vydav@ukr.net
Друк ТДВ "Патент"
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4078 від 31.05.2011

Şirurile:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... — numerelor naturale;

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... — numerelor pare;

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ... — pătratelor numerelor naturale;

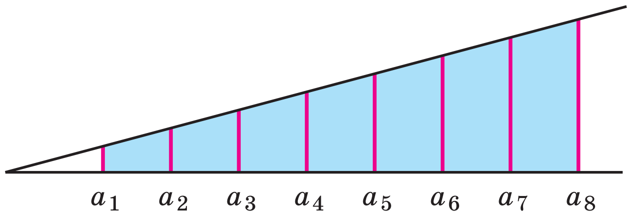
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... — numerelor prime

Progresia aritmetică: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$

$d = a_2 - a_1 = a_{n+1} - a_n$ — raţia;

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$ — formula termenului al n-lea;

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ — formula sumei primilor n termeni



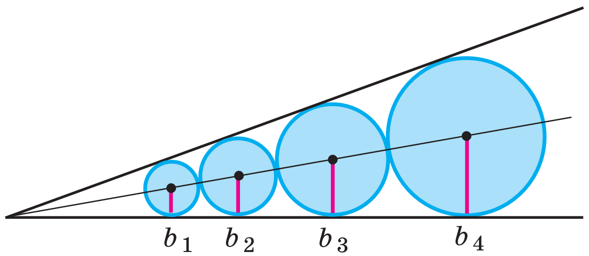
Progresia geometrică: $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots$

$q = b_2 : b_1 = v_{n+1} : b_n$ — raţia ($q \neq 0$, $b_1 \neq 0$);

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ — formula termenului al n-lea;

$S_n = \dfrac{b_1 - (q^n - 1)}{q - 1}$ — formula sumei primilor n termeni ($q \neq 1$););

$S_n = \dfrac{b_1}{1-q}$ — formula sumei termenilor pentru $|q| < 1$



Legile operaţiilor

$a + b = b + a,$

$(a + b) + c = a + (b + c),$

$ab = ba,$

$(ab)c = a(bc),$

$a(b + c) = ab + ac,$

Proprietăţile fracţiilor

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m},$$

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn},$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}$$

Formulele înmulţirii prescurtate

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$
2. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$
3. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2),$
4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Proprietăţile puterilor

$a^m a^n = a^{m+n},$

$(a^m)^n = a^{mn},$

$(ab)^n = a^n b^n,$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Proprietăţile rădăcinilor

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|,$

$(\sqrt{a})^2 = a,$

$\sqrt{a^2} = |a|$

Probleme cu procente

Aflarea:

1) a p procente din numărul a — $\boxed{a \cdot 0{,}01p;}$

2) numărului, din care p procente sunt egale cu b — $\boxed{b : (0{,}01p);}$

3) raportului procentual a şi b — $(a : b) \cdot \boxed{100\%.}$

Formula procentelor simple: $P_n = P_0\left(1 + \dfrac{r}{100} \cdot n\right)$

Formula procentelor compuse: $A_n = A_0\left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^n$