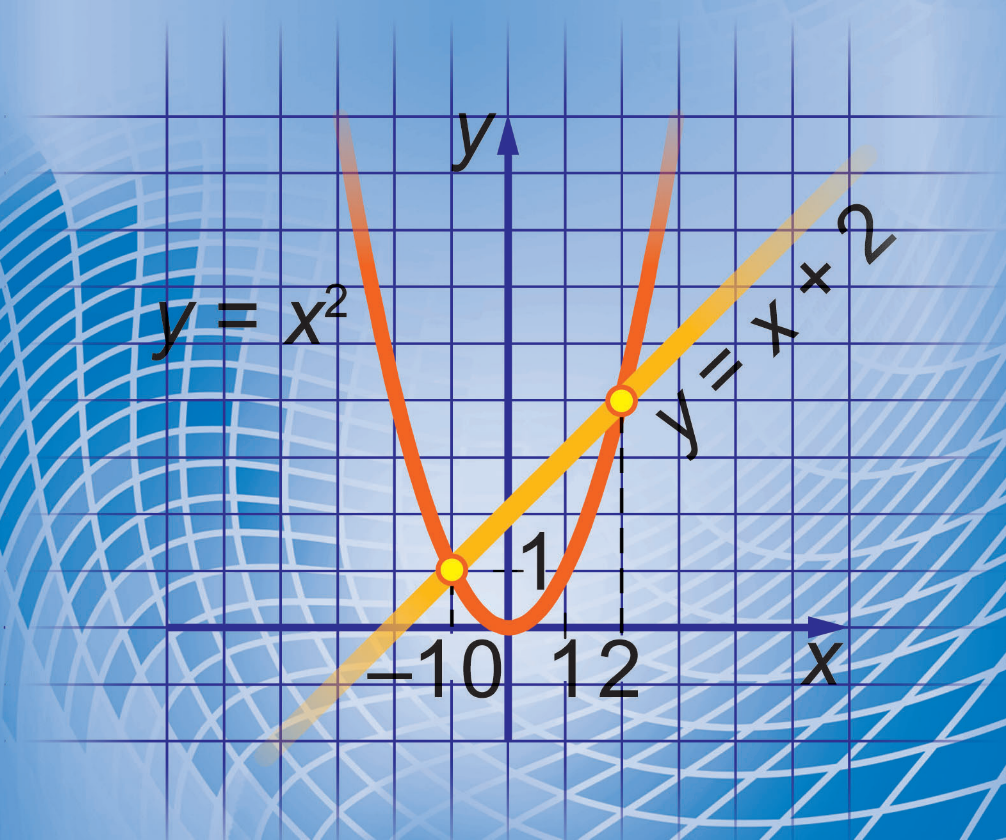
Аркадій Мерзляк
Віталій Полонський
Михайло Якір

8

АЛГЕБРА



ГІМНАЗІЯ

Частина 2

8
АЛГЕБРА
Аркадій Мерзляк, Віталій Полонський, Михайло Якір

«Моя любов — Україна і математика» — викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві Михайлу Пилиповичу Кравчуку (1892–1942).

Ми сподіваємося, що це патріотичне висловлювання видатного українського математика стане для вас надійним дороговказом на шляху до професіоналізму.

Квадрати й куби натуральних чисел від 1 до 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Степені чисел 2 і 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Властивості степеня із цілим показником

$a^m a^n = a^{m+n}$

$(ab)^n = a^n b^n$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ (b \neq 0)$

$a^m : a^n = a^{m-n}\ (a \neq 0)$

Властивості арифметичного квадратного кореня

Якщо $a \geqslant 0$, то $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Для будь-якого дійсного a $\sqrt{a^2} = |a|$

Якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Якщо $a \geqslant 0$ і $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Формула коренів квадратного рівняння

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Аркадій Мерзляк
Віталій Полонський
Михайло Якір

АЛГЕБРА

підручник для осіб
з особливими освітніми потребами
(Н 54.1 – Н 54.2)

8 клас

(у 2-х частинах)

ЧАСТИНА 2

Харків
«Гімназія»
2021

УДК 373.167.1:512
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 22.02.2021 № 243)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра : підруч. для осіб з особлив. освіт. потребами (Н 54.1 – Н 54.2) : 8 кл. (у 2-х ч.) : Ч. 2 / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2021. — 160 с. : іл.
ISBN 978-966-474-362-1 (Ч. 2).

УДК 373.167.1:512

ISBN 978-966-474-360-7
ISBN 978-966-474-362-1 (Ч. 2)

15. Властивості арифметичного квадратного кореня

Легко перевірити, що $\sqrt{5^2}=5$, $\sqrt{1{,}4^2}=1{,}4$, $\sqrt{0^2}=0$. Може здатися, що при будь-якому значенні a виконується рівність $\sqrt{a^2}=a$. Проте це не так. Наприклад, рівність $\sqrt{(-5)^2}=-5$ є неправильною, оскільки $-5<0$. Насправді $\sqrt{(-5)^2}=5$. Також можна переконатися, що, наприклад, $\sqrt{(-7)^2}=7$, $\sqrt{(-2{,}8)^2}=2{,}8$.

Узагалі, є справедливою така теорема.

Теорема 15.1. ***Для будь-якого дійсного числа a виконується рівність***

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Доведення. Для того щоб довести рівність $\sqrt{a}=b$, треба показати, що $b\geqslant 0$ і $b^2=a$.

Маємо: $|a|\geqslant 0$ при будь-якому a.

Також з означення модуля випливає, що $|a|^2=a^2$. ▲

Наступна теорема узагальнює доведений факт.

Теорема 15.2 (арифметичний квадратний корінь із степеня). ***Для будь-якого дійсного числа a та будь-якого натурального числа n виконується рівність***

$$\sqrt{a^{2n}}=|a^n|.$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 15.1. Проведіть це доведення самостійно.

Теорема 15.3 (арифметичний квадратний корінь з добутку). ***Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, виконується рівність***

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доведення. Маємо: $\sqrt{a} \geqslant 0$ і $\sqrt{b} \geqslant 0$.

Тоді $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$.

Крім того, $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$.

Отже, вираз $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ набуває тільки невід'ємних значень, і його квадрат дорівнює ab. ▲

Цю теорему можна узагальнити для добутку трьох і більше множників. Наприклад, якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ і $c \geqslant 0$, то

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)\,c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Теорема 15.4 (арифметичний квадратний корінь із дробу). ***Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a \geqslant 0$ і $b > 0$, виконується рівність***

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 15.3. Проведіть це доведення самостійно.

Зрозуміло, що з двох квадратів із площами S_1 і S_2 (рис. 27) більшу сторону має той, у якого площа більша, тобто якщо $S_1 > S_2$, то $\sqrt{S_1} > \sqrt{S_2}$. Це очевидне міркування ілюструє таку властивість арифметичного квадратного кореня: ***для будь-яких невід'ємних чисел a_1 і a_2 таких, що $a_1 > a_2$, виконується нерівність $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$.***

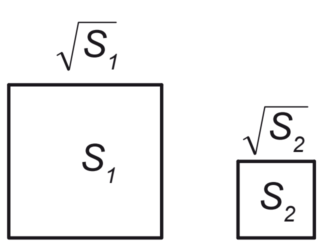


Рис. 27

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу: 1) $\sqrt{(-7{,}3)^2}$; 2) $\sqrt{1{,}2^4}$; 3) $\sqrt{0{,}81\cdot 225}$; 4) $\sqrt{\dfrac{16}{49}}$.

Розв'язання. 1) $\sqrt{(-7{,}3)^2} = |-7{,}3| = 7{,}3.$

2) $\sqrt{1{,}2^4} = 1{,}2^2 = 1{,}44.$

3) $\sqrt{0{,}81\cdot 225} = \sqrt{0{,}81}\cdot\sqrt{225} = 0{,}9\cdot 15 = 13{,}5.$

4) $\sqrt{\dfrac{16}{49}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \dfrac{4}{7}.$ ▲

ПРИКЛАД 2 Знайдіть значення виразу: 1) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}}$.

Розв'язання. 1) Замінивши добуток коренів коренем з добутку, отримаємо:

$$\sqrt{18}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{18\cdot 2} = \sqrt{36} = 6.$$

2) Замінивши частку коренів коренем із частки (дробу), матимемо:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{24}{150}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}.$$ ▲

ПРИКЛАД 3 Спростіть вираз: 1) $\sqrt{a^{14}}$; 2) $\sqrt{9a^6}$, якщо $a \leqslant 0$; 3) $\sqrt{m^2n^2}$, якщо $m \geqslant 0$, $n \leqslant 0$; 4) $\sqrt{a^{36}}$.

Розв'язання. 1) За теоремою про арифметичний квадратний корінь із степеня маємо:

$$\sqrt{a^{14}} = |a^7| = \begin{cases} a^7, & \text{якщо } a \geqslant 0, \\ -a^7, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

2) Маємо: $\sqrt{9a^6} = 3\cdot|a^3|$. Оскільки за умовою $a \leqslant 0$, то $a^3 \leqslant 0$. Тоді

$$\sqrt{9a^6} = 3\cdot|a^3| = -3a^3.$$

3) Маємо: $\sqrt{m^2n^2} = |m| \cdot |n|$. Оскільки за умовою $m \geqslant 0$, то $|m| = m$. Оскільки $n \leqslant 0$, то $|n| = -n$.

Отже, $|m| \cdot |n| = m \cdot (-n) = -mn$.

4) Маємо: $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}|$. Оскільки $a^{18} \geqslant 0$, то $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}| = a^{18}$. ▲

ПРИКЛАД 4 Знайдіть значення виразу: 1) $\sqrt{37^2 - 12^2}$; 2) $\sqrt{8 \cdot 648}$; 3) $\sqrt{16{,}9 \cdot 0{,}4}$.

Розв'язання. 1) Перетворивши підкореневий вираз за формулою різниці квадратів, отримуємо:

$$\sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{(37-12)(37+12)} = \sqrt{25 \cdot 49} = 5 \cdot 7 = 35.$$

2) Подавши підкореневий вираз у вигляді добутку квадратів раціональних чисел, отримуємо:

$$\sqrt{8 \cdot 648} = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 324} = \sqrt{16 \cdot 324} = 4 \cdot 18 = 72.$$

3) $\sqrt{16{,}9 \cdot 0{,}4} = \sqrt{169 \cdot 0{,}04} = 13 \cdot 0{,}2 = 2{,}6$. ▲

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x^2} + x$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt{x^2} = |x|$, то $y = |x| + x$.

Якщо $x \geqslant 0$, то $y = x + x = 2x$.

Якщо $x < 0$, то $y = -x + x = 0$.

Отже, $y = \begin{cases} 2x, \text{ якщо } x \geqslant 0, \\ 0, \quad \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

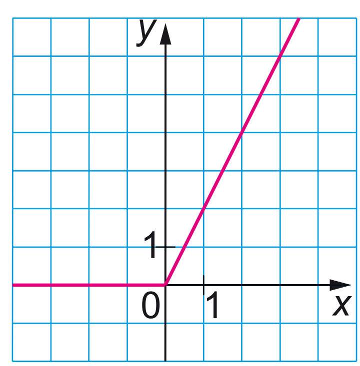


Рис. 28

Графік функції зображено на рисунку 28. ▲

?

1. Якому виразу тотожно дорівнює вираз $\sqrt{a^2}$?

2. Сформулюйте теорему про арифметичний квадратний корінь із степеня.

3. Сформулюйте теорему про арифметичний квадратний корінь з добутку.

4. Сформулюйте теорему про арифметичний квадратний корінь із дробу.

5. Відомо, що невід'ємні числа a_1 і a_2 такі, що $a_1 > a_2$. Порівняйте значення виразів $\sqrt{a_1}$ і $\sqrt{a_2}$.

ВПРАВИ

471.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt{0,4^2}$; 4) $3\sqrt{1,2^2}$; 7) $5\sqrt{(-10)^4}$;
2) $\sqrt{(-1,8)^2}$; 5) $\sqrt{6^4}$; 8) $-4\sqrt{(-1)^{14}}$;
3) $2\sqrt{(-15)^2}$; 6) $\sqrt{(-2)^{10}}$; 9) $-10\sqrt{3^6}$?

472.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{a^2}$, якщо $a = 4,6; -18,6$; 3) $0,1\sqrt{c^6}$, якщо $c = -2; 5$.
2) $\sqrt{b^4}$, якщо $b = -3; 1,2$;

473.° Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{9\cdot 25}$; 7) $\sqrt{6^2\cdot 3^4}$; 13) $\sqrt{3\frac{13}{36}}$;
2) $\sqrt{16\cdot 2500}$; 8) $\sqrt{7^2\cdot 2^8}$; 14) $\sqrt{3\frac{1}{16}\cdot 2\frac{14}{25}}$;
3) $\sqrt{0,64\cdot 36}$; 9) $\sqrt{25\cdot 64\cdot 0,36}$; 15) $\sqrt{\frac{169}{36\cdot 81}}$;
4) $\sqrt{400\cdot 1,44}$; 10) $\sqrt{0,01\cdot 0,81\cdot 2500}$; 16) $\sqrt{\frac{121\cdot 256}{25\cdot 100}}$.
5) $\sqrt{0,09\cdot 0,04}$; 11) $\sqrt{\frac{81}{100}}$;
6) $\sqrt{6,25\cdot 0,16}$; 12) $\sqrt{\frac{49}{256}}$;

474.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt{36\cdot 81}$; 5) $\sqrt{0{,}36\cdot 1{,}21}$; 9) $\sqrt{2{,}25\cdot 0{,}04\cdot 1600}$;

2) $\sqrt{900\cdot 49}$; 6) $\sqrt{5^2\cdot 3^6}$; 10) $\sqrt{13\frac{4}{9}}$;

3) $\sqrt{16\cdot 0{,}25}$; 7) $\sqrt{4^4\cdot 3^2}$; 11) $\sqrt{1\frac{7}{9}\cdot\frac{4}{25}}$;

4) $\sqrt{9\cdot 1{,}69}$; 8) $\sqrt{2^6\cdot 5^2}$; 12) $\sqrt{\frac{1}{16}\cdot\frac{9}{25}}$?

475.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{0{,}009}\cdot\sqrt{1000}$; 7) $\sqrt{2{,}4}\cdot\sqrt{1\frac{2}{3}}$;

2) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{200}\cdot\sqrt{0{,}18}$; 8) $\sqrt{\frac{2}{11}}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{\frac{1}{11}}$;

3) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}$; 6) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{26}$; 9) $\sqrt{2^3\cdot 3}\cdot\sqrt{2^5\cdot 3^3}$.

476.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{12{,}1}$; 5) $\sqrt{1\frac{3}{7}}\cdot\sqrt{2{,}8}$;

2) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{0{,}5}\cdot\sqrt{50}$; 6) $\sqrt{5\cdot 2^3}\cdot\sqrt{5^3\cdot 2^3}$.

477.° Знайдіть значення частки:

1) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$; 5) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}$; 7) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;

2) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{3{,}2}}{\sqrt{0{,}2}}$; 6) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{147}}$; 8) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}}$.

478.° Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$; 3) $\frac{\sqrt{6{,}3}}{\sqrt{0{,}7}}$; 4) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{242}}$; 5) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

479.• При яких значеннях *a* виконується рівність:

1) $\sqrt{a^2}=a$; 2) $\sqrt{a^2}=-a$?

480. При яких значеннях a і b виконується рівність:

1) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$; 2) $\sqrt{ab}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$; 3) $\sqrt{-ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-b}$?

481. Знайдіть значення виразу, подавши попередньо підкореневий вираз у вигляді добутку квадратів раціональних чисел:

1) $\sqrt{18\cdot 32}$; 4) $\sqrt{75\cdot 48}$; 7) $\sqrt{2{,}7\cdot 1{,}2}$;
2) $\sqrt{8\cdot 98}$; 5) $\sqrt{288\cdot 50}$; 8) $\sqrt{80\cdot 45}$;
3) $\sqrt{3{,}6\cdot 14{,}4}$; 6) $\sqrt{4{,}5\cdot 72}$; 9) $\sqrt{33\cdot 297}$.

482. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{18\cdot 200}$; 3) $\sqrt{14{,}4\cdot 0{,}9}$; 5) $\sqrt{12{,}5\cdot 32}$;
2) $\sqrt{3{,}6\cdot 0{,}4}$; 4) $\sqrt{13\cdot 52}$; 6) $\sqrt{108\cdot 27}$.

483. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{41^2-40^2}$; 3) $\sqrt{8{,}5^2-7{,}5^2}$; 5) $\sqrt{\dfrac{155^2-134^2}{84}}$;
2) $\sqrt{145^2-144^2}$; 4) $\sqrt{21{,}8^2-18{,}2^2}$; 6) $\sqrt{\dfrac{139^2-86^2}{98{,}5^2-45{,}5^2}}$.

484. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{6{,}8^2-3{,}2^2}$; 2) $\sqrt{98{,}5^2-97{,}5^2}$; 3) $\sqrt{\dfrac{98}{228^2-164^2}}$.

485. Замініть вираз тотожно рівним, який не містить знака кореня:

1) $\sqrt{b^2}$; 2) $-0{,}4\sqrt{c^2}$; 3) $\sqrt{a^6}$; 4) $\sqrt{m^8}$.

486. Замініть вираз тотожно рівним, який не містить знака кореня:

1) $1{,}2\sqrt{x^2}$; 2) $\sqrt{y^4}$; 3) $\sqrt{n^{10}}$.

487. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{m^2}$, якщо $m>0$; 3) $\sqrt{16p^2}$, якщо $p\geqslant 0$;
2) $\sqrt{n^2}$, якщо $n<0$; 4) $\sqrt{0{,}36k^2}$, якщо $k\leqslant 0$;

5) $\sqrt{c^{12}}$;

6) $\sqrt{0{,}25b^{14}}$, якщо $b \leqslant 0$;

7) $\sqrt{81x^4y^2}$, якщо $y \geqslant 0$;

8) $\sqrt{0{,}01a^6b^{10}}$, якщо $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$;

9) $-1{,}2x\sqrt{64x^{18}}$, якщо $x \leqslant 0$;

10) $\dfrac{\sqrt{a^{12}b^{22}c^{36}}}{a^4b^8c^{10}}$, якщо $b < 0$;

11) $\dfrac{3{,}3a^4}{b^3}\sqrt{\dfrac{b^{24}}{121a^{26}}}$, якщо $a < 0$;

12) $-0{,}5m^5\sqrt{1{,}96m^6n^8}$, якщо $m \leqslant 0$.

488.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{9a^{16}}$;

2) $\sqrt{0{,}81d^6}$, якщо $d \geqslant 0$;

3) $-5\sqrt{4x^2}$, якщо $x \leqslant 0$;

4) $-0{,}1\sqrt{100z^{10}}$, якщо $z \geqslant 0$;

5) $\sqrt{p^6q^8}$, якщо $p \geqslant 0$;

6) $\sqrt{25m^{34}n^{38}}$, якщо $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;

7) $ab^2\sqrt{a^4b^{18}c^{22}}$, якщо $b \geqslant 0$, $c \leqslant 0$;

8) $-\dfrac{8m^3p^4}{k^2}\sqrt{\dfrac{625k^{30}p^{40}}{144m^6}}$, якщо $m < 0$, $k > 0$.

489.•• Які з наведених рівностей виконуються при всіх дійсних значеннях a:

1) $\sqrt{a^2} = a$; 2) $\sqrt{a^4} = a^2$; 3) $\sqrt{a^6} = a^3$; 4) $\sqrt{a^8} = a^4$?

490.•• При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt{a^{10}} = a^5$; 2) $\sqrt{a^{10}} = -a^5$; 3) $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2$; 4) $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{-a}\right)^2$?

491.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x^2} - x$, якщо $x \leqslant 0$;

2) $y = 2x + \sqrt{x^2}$;

3) $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$;

4) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2}} + 3$.

492.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x^2} - 2x$, якщо $x \geqslant 0$;

2) $y = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}$.

493.* При якому значенні x виконується рівність:

1) $\sqrt{x^2} = x - 4$; 2) $\sqrt{x^2} = 6 - x$; 3) $2\sqrt{x^2} = x + 3$?

494.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2} = x + 8$; 2) $\sqrt{x^2} = 6x - 10$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

495. Знайдіть значення виразу

$$\left(\frac{a^2 - 5a}{a^2 - 10a + 25} + \frac{25}{a^2 - 25}\right) : \frac{125 - a^3}{5 + a}$$

при $a = 4{,}5$.

496. Тракторист мав засіяти поле за 8 днів. Проте через погану погоду він засівав щодня на 3 га менше від норми й тому виконав роботу за 10 днів. Яка площа поля?

497. Натуральне число a — парне, а число b — непарне. Значенням якого з даних виразів обов'язково є парне число:

1) $(a + b)\,b$; 2) $\frac{ab}{2}$; 3) $\frac{a^2b}{2}$; 4) $\frac{ab^2}{2}$?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

498. На дошці записано 102 послідовних натуральних числа. Чи можна розбити їх на дві групи так, щоб сума чисел у кожній групі була простим числом (у кожній групі має бути не менше ніж два числа)?

16. Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені

Користуючись теоремою про арифметичний квадратний корінь з добутку, перетворимо вираз $\sqrt{48}$. Маємо:

$$\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

Вираз $\sqrt{48}$ ми подали у вигляді добутку раціонального числа 4 та ірраціонального числа $\sqrt{3}$. Таке перетворення називають ***винесенням множника з-під знака кореня***. У даному випадку було винесено з-під знака кореня множник 4. Розглянемо виконане перетворення у зворотному порядку:

$$4\sqrt{3}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{48}.$$

Таке перетворення називають ***внесенням множника під знак кореня***. У даному випадку було внесено під знак кореня множник 4.

ПРИКЛАД 1 Винесіть множник з-під знака кореня:
1) $\sqrt{150}$; 2) $\sqrt{72a^8}$; 3) $\sqrt{b^{35}}$; 4) $\sqrt{-b^{35}}$; 5) $\sqrt{a^2b^3}$, якщо $a<0$.

Розв'язання. 1) Подамо число, яке стоїть під знаком кореня, у вигляді добутку двох чисел, одне з яких є квадратом раціонального числа:

$$\sqrt{150}=\sqrt{25\cdot 6}=5\sqrt{6}.$$

2) $\sqrt{72a^8}=\sqrt{36a^8\cdot 2}=6a^4\sqrt{2}.$

3) Оскільки підкореневий вираз має бути невід'ємним, то з умови випливає, що $b\geqslant 0$. Тоді

$$\sqrt{b^{35}}=\sqrt{b^{34}b}=|\,b^{17}\,|\sqrt{b}=b^{17}\sqrt{b}.$$

4) З умови випливає, що $b\leqslant 0$. Тоді

$$\sqrt{-b^{35}}=\sqrt{b^{34}\cdot(-b)}=|\,b^{17}\,|\sqrt{-b}=-b^{17}\sqrt{-b}.$$

5) З умови випливає, що $a^2 > 0$. Оскільки підкореневий вираз має бути невід'ємним, то отримуємо, що $b \geqslant 0$. Тоді

$$\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^2b^2b} = |\,a\,|\cdot|\,b\,|\sqrt{b} = -ab\sqrt{b}. \ \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 2 Внесіть множник під знак кореня: 1) $-2\sqrt{7}$; 2) $a\sqrt{7}$; 3) $3b\sqrt{-\frac{b}{3}}$; 4) $c\sqrt{c^7}$.

Розв'язання. 1) $-2\sqrt{7} = -\sqrt{4}\cdot\sqrt{7} = -\sqrt{28}$.

2) Якщо $a \geqslant 0$, то $a\sqrt{7} = \sqrt{a^2}\cdot\sqrt{7} = \sqrt{7a^2}$; якщо $a < 0$, то $a\sqrt{7} = -\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{7} = -\sqrt{7a^2}$.

3) З умови випливає, що $b \leqslant 0$. Тоді

$$3b\sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2}\cdot\sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2\cdot\left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt{3b^3}.$$

4) З умови випливає, що $c \geqslant 0$. Тоді

$$c\sqrt{c^7} = \sqrt{c^2}\cdot\sqrt{c^7} = \sqrt{c^9}. \ \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 3 Спростіть вираз: 1) $\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a}$; 2) $(3 + 2\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$; 3) $(7 - 3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10} + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{5})$.

Розв'язання. 1) Маємо:

$$\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a} = \sqrt{9\cdot 6a} + \sqrt{4\cdot 6a} - \sqrt{100\cdot 6a} =$$

$$= 3\sqrt{6a} + 2\sqrt{6a} - 10\sqrt{6a} = \sqrt{6a}\,(3 + 2 - 10) = \sqrt{6a}\cdot(-5) = -5\sqrt{6a}.$$

2) $(3 + 2\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 6 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2(\sqrt{3})^2 = 6 + \sqrt{3} - 6 = \sqrt{3}$.

3) Застосовуючи формули скороченого множення (квадрат двочлена й добуток різниці та суми двох виразів), отримаємо:

$$(7 - 3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10} + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{5}) = 7^2 - 2\cdot 7\cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 -$$

$$-\left((\sqrt{10})^2 - (\sqrt{5})^2\right) = 49 - 42\sqrt{2} + 18 - (10 - 5) = 62 - 42\sqrt{2}. \ \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 4 Розкладіть на множники вираз: 1) $a^2 - 2$; 2) $b - 4$, якщо $b \geqslant 0$; 3) $9c - 6\sqrt{5c} + 5$; 4) $a + \sqrt{a}$; 5) $\sqrt{3} + 6$; 6) $\sqrt{35} - \sqrt{15}$.

Розв'язання. 1) Подавши даний вираз у вигляді різниці квадратів, отримаємо:

$$a^2 - 2 = a^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(a - \sqrt{2}\right)\left(a + \sqrt{2}\right).$$

2) Оскільки за умовою $b \geqslant 0$, то

$$b - 4 = \left(\sqrt{b}\right)^2 - 4 = \left(\sqrt{b} - 2\right)\left(\sqrt{b} + 2\right).$$

3) Застосуємо формулу квадрата різниці:

$$9c - 6\sqrt{5c} + 5 = \left(3\sqrt{c}\right)^2 - 2 \cdot 3\sqrt{c} \cdot \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(3\sqrt{c} - \sqrt{5}\right)^2.$$

4) Маємо: $a + \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2 + \sqrt{a} = \sqrt{a}\left(\sqrt{a} + 1\right)$.

5) $\sqrt{3} + 6 = \sqrt{3} + 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{3}\left(1 + 2\sqrt{3}\right)$.

6) $\sqrt{35} - \sqrt{15} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5}\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)$. ▲

ПРИКЛАД 5 Скоротіть дріб: 1) $\dfrac{b-1}{\sqrt{b}+1}$; 2) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b}$, якщо $a > 0$, $b > 0$.

Розв'язання. 1) Розклавши чисельник даного дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{b-1}{\sqrt{b}+1} = \frac{\left(\sqrt{b}\right)^2 - 1}{\sqrt{b}+1} = \frac{\left(\sqrt{b}-1\right)\left(\sqrt{b}+1\right)}{\sqrt{b}+1} = \sqrt{b} - 1.$$

2) $$\frac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-3\right)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 3.$$

3) Оскільки за умовою $a > 0$ і $b > 0$, то чисельник і знаменник даного дробу можна розкласти на множники й отриманий дріб скоротити:

$$\frac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.\ \blacktriangle$$

Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу означає перетворити дріб так, щоб його знаменник не містив квадратного кореня.

ПРИКЛАД 6 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу: 1) $\frac{15}{2\sqrt{3}}$; 2) $\frac{14}{5\sqrt{2}-1}$.

Розв'язання. 1) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на $\sqrt{3}$, отримуємо:

$$\frac{15}{2\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2}=\frac{15\sqrt{3}}{2\cdot3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

2) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на вираз $5\sqrt{2}+1$, отримуємо:

$$\frac{14}{5\sqrt{2}-1}=\frac{14(5\sqrt{2}+1)}{(5\sqrt{2}-1)(5\sqrt{2}+1)}=\frac{14(5\sqrt{2}+1)}{(5\sqrt{2})^2-1}=\frac{14(5\sqrt{2}+1)}{50-1}=$$

$$=\frac{14(5\sqrt{2}+1)}{49}=\frac{2(5\sqrt{2}+1)}{7}=\frac{10\sqrt{2}+2}{7}.\ \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 7 Доведіть тотожність

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Розв'язання

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})+2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$$

$$= \frac{a - \sqrt{ab} + \sqrt{ab} + b + 2\sqrt{ab}}{a-b} \cdot \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) =$$

$$= \frac{\left(a + 2\sqrt{ab} + b\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)}{a-b} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}. \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 8 Спростіть вираз $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}}$.

Розв'язання. Подавши підкореневий вираз у вигляді квадрата суми, отримуємо:

$$\sqrt{12 + 6\sqrt{3}} = \sqrt{9 + 2 \cdot 3\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\left(3 + \sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \left|3 + \sqrt{3}\right| = 3 + \sqrt{3}. \blacktriangle$$

ВПРАВИ

499.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{8}$;
2) $\sqrt{12}$;
3) $\sqrt{32}$;
4) $\sqrt{54}$;
5) $\sqrt{490}$;
6) $\sqrt{500}$;
7) $\sqrt{275}$;
8) $\sqrt{108}$;
9) $\sqrt{0{,}72}$;
10) $\sqrt{0{,}48}$;
11) $\sqrt{450}$;
12) $\sqrt{36\,300}$.

500.° Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{128}$; 3) $\frac{1}{10}\sqrt{200}$; 4) $-0{,}05\sqrt{4400}$.

501.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{27}$;
2) $\sqrt{24}$;
3) $\sqrt{20}$;
4) $\sqrt{125}$;
5) $\frac{1}{8}\sqrt{96}$;
6) $0{,}4\sqrt{250}$;
7) $-2\sqrt{0{,}18}$;
8) $\frac{4}{9}\sqrt{63}$;
9) $0{,}8\sqrt{1250}$;
10) $\frac{3}{7}\sqrt{98}$;
11) $10\sqrt{0{,}03}$;
12) $0{,}7\sqrt{1000}$.

502.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $7\sqrt{2}$; 5) $5\sqrt{8}$; 9) $\frac{1}{8}\sqrt{128a}$;
2) $3\sqrt{13}$; 6) $6\sqrt{a}$; 10) $-0{,}3\sqrt{10b}$;
3) $-2\sqrt{17}$; 7) $\frac{1}{4}\sqrt{32}$; 11) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$;
4) $-10\sqrt{14}$; 8) $-\frac{2}{3}\sqrt{54}$; 12) $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{27}{28}}$.

503.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $2\sqrt{6}$; 3) $-11\sqrt{3}$; 5) $-7\sqrt{3c}$; 7) $8\sqrt{\frac{n}{8}}$;
2) $9\sqrt{2}$; 4) $12\sqrt{b}$; 6) $-10\sqrt{0{,}7m}$; 8) $-\frac{1}{3}\sqrt{18p}$.

504.° Спростіть вираз:

1) $4\sqrt{a}+3\sqrt{a}-5\sqrt{a}$; 3) $5\sqrt{c}+3\sqrt{d}-\sqrt{c}+3\sqrt{d}$;
2) $6\sqrt{b}+2\sqrt{b}-8\sqrt{b}$; 4) $\sqrt{5}+7\sqrt{5}-4\sqrt{5}$.

505.° Спростіть вираз:

1) $3\sqrt{a}-2\sqrt{a}$;
2) $\sqrt{c}+10\sqrt{c}-14\sqrt{c}$;
3) $9\sqrt{6}-2\sqrt{3}+8\sqrt{3}-3\sqrt{6}$.

506.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{9a}+\sqrt{25a}-\sqrt{49a}$;
2) $\sqrt{64b}-\frac{1}{6}\sqrt{36b}$;
3) $2\sqrt{0{,}04c}-0{,}3\sqrt{16c}+\frac{1}{3}\sqrt{0{,}81c}$;
4) $0{,}4\sqrt{100m}+15\sqrt{\frac{4}{9}m}-1{,}2\sqrt{2{,}25m}$.

507.° Спростіть вираз:

1) $2\sqrt{4x}+6\sqrt{16x}-\sqrt{625x}$;

2) $3\sqrt{0{,}09y}-0{,}6\sqrt{144y}+\frac{18}{11}\sqrt{\frac{121}{36}y}$.

508.° Спростіть вираз:

1) $8\sqrt{2}-\sqrt{32}$;
2) $6\sqrt{3}-\sqrt{27}$;
3) $\sqrt{96}-3\sqrt{6}$;
4) $2\sqrt{500}-8\sqrt{5}$;
5) $5\sqrt{7}-\sqrt{700}-0{,}5\sqrt{28}$;
6) $2\sqrt{20}-\frac{1}{3}\sqrt{45}-0{,}6\sqrt{125}$.

509.° Раціональним чи ірраціональним є значення виразу:

1) $\sqrt{48}-6-4\sqrt{3}$;
2) $\sqrt{162}-9\sqrt{2}+\sqrt{27}$?

510.° Спростіть вираз:

1) $4\sqrt{700}-27\sqrt{7}$;
2) $\sqrt{75}-6\sqrt{3}$;
3) $2\sqrt{50}-8\sqrt{2}$;
4) $5\sqrt{12}-7\sqrt{3}$;
5) $3\sqrt{72}-4\sqrt{2}+2\sqrt{98}$;
6) $\frac{1}{3}\sqrt{108}+\sqrt{363}-\frac{2}{9}\sqrt{243}$.

511.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2}\left(\sqrt{50}+\sqrt{8}\right)$;
2) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{12}\right)\cdot\sqrt{3}$;
3) $\left(3\sqrt{5}-4\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{5}$;
4) $2\sqrt{2}\left(3\sqrt{18}-\frac{1}{4}\sqrt{2}+\sqrt{32}\right)$.

512.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{7}\left(\sqrt{7}-\sqrt{28}\right)$;
2) $\left(\sqrt{18}+\sqrt{72}\right)\cdot\sqrt{2}$;
3) $\left(4\sqrt{3}-\sqrt{75}+4\right)\cdot 3\sqrt{3}$;
4) $\left(\sqrt{600}+\sqrt{6}-\sqrt{24}\right)\cdot\sqrt{6}$.

513.° Виконайте множення:

1) $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$;
2) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$;
3) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)$;
4) $\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$;
5) $\left(4+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)$;
6) $\left(y-\sqrt{7}\right)\left(y+\sqrt{7}\right)$;
7) $\left(4\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)$;
8) $\left(m+\sqrt{n}\right)^2$;
9) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$;
10) $\left(2-3\sqrt{3}\right)^2$.

514.° Виконайте множення:

1) $(\sqrt{7}+3)(3\sqrt{7}-1)$;

2) $(4\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}+5\sqrt{3})$;

3) $(\sqrt{p}-q)(\sqrt{p}+q)$;

4) $(6-\sqrt{13})(6+\sqrt{13})$;

5) $(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)$;

6) $(\sqrt{19}+\sqrt{17})(\sqrt{19}-\sqrt{17})$;

7) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$;

8) $(3-2\sqrt{15})^2$.

515.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $(2+\sqrt{7})^2-4\sqrt{7}$;
2) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+6\sqrt{2}$?

516.° Знайдіть значення виразу:

1) $(3+\sqrt{5})^2-6\sqrt{5}$;
2) $(\sqrt{12}-2\sqrt{2})^2+8\sqrt{6}$.

517.° Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{4}{\sqrt{2}}$;
3) $\frac{18}{\sqrt{5}}$;
5) $\frac{a}{b\sqrt{b}}$;
7) $\frac{7}{\sqrt{7}}$;
2) $\frac{12}{\sqrt{6}}$;
4) $\frac{m}{\sqrt{n}}$;
6) $\frac{5}{\sqrt{15}}$;
8) $\frac{24}{5\sqrt{3}}$.

518.° Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{a}{\sqrt{11}}$;
3) $\frac{5}{\sqrt{10}}$;
5) $\frac{30}{\sqrt{15}}$;
2) $\frac{18}{\sqrt{6}}$;
4) $\frac{13}{\sqrt{26}}$;
6) $\frac{2}{3\sqrt{x}}$.

519.• Розкладіть на множники вираз:

1) a^2-3;
4) $a-9$, якщо $a \geqslant 0$;
2) $4b^2-2$;
5) $m-n$, якщо $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$;
3) $5-6c^2$;
6) $16x-25y$, якщо $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

7) $a-2\sqrt{a}+1$;
8) $4m-28\sqrt{mn}+49n$, якщо $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$;
9) $b+6\sqrt{b}+9$;
10) $3+2\sqrt{3c}+c$;
11) $2+\sqrt{2}$;
12) $6\sqrt{7}-7$;
13) $a-\sqrt{a}$;
14) $\sqrt{b}+\sqrt{3b}$;
15) $\sqrt{15}-\sqrt{5}$.

520.° Розкладіть на множники вираз:

1) $15-x^2$;
2) $49x^2-2$;
3) $36p-64q$, якщо $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$;
4) $c-100$, якщо $c\geqslant 0$;
5) $a-8b\sqrt{a}+16b^2$;
6) $m+2\sqrt{mn}+n$, якщо $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$;
7) $a-4\sqrt{a}+4$;
8) $5+\sqrt{5}$;
9) $\sqrt{3p}-p$;
10) $\sqrt{12}+\sqrt{32}$.

521.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^2-7}{a+\sqrt{7}}$;
2) $\frac{\sqrt{3}-b}{3-b^2}$;
3) $\frac{c-9}{\sqrt{c}-3}$;
4) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;
5) $\frac{5\sqrt{a}-7\sqrt{b}}{25a-49b}$;
6) $\frac{100a^2-9b}{10a+3\sqrt{b}}$;
7) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$;
8) $\frac{\sqrt{35}+\sqrt{10}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$;
9) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{5-\sqrt{10}}$;
10) $\frac{13-\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$;
11) $\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;
12) $\frac{4b^2-4b\sqrt{c}+c}{2b-\sqrt{c}}$.

522.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$;
2) $\frac{\sqrt{a}+2}{a-4}$;
3) $\frac{a-3}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$;
4) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$;
5) $\frac{23-\sqrt{23}}{\sqrt{23}}$;
6) $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{28}}{\sqrt{54}-\sqrt{63}}$;
7) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-2\sqrt{ab}+b}$;
8) $\frac{b-8\sqrt{b}+16}{\sqrt{b}-4}$.

523.• Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{3a^2}$, якщо $a \geqslant 0$;
2) $\sqrt{5b^2}$, якщо $b \geqslant 0$;
3) $\sqrt{12a^4}$;
4) $\sqrt{c^5}$.

524.• Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{18x^{12}}$;
2) $\sqrt{y^9}$.

525.• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{98}-\sqrt{50}+\sqrt{32}$;
2) $3\sqrt{8}+\sqrt{128}-\frac{1}{3}\sqrt{162}$;
3) $0{,}7\sqrt{300}-7\sqrt{\frac{3}{49}}+\frac{2}{3}\sqrt{108}$;
4) $\sqrt{5a}-2\sqrt{20a}+3\sqrt{80a}$;
5) $\sqrt{a^3b}-\frac{2}{a}\sqrt{a^5b}$, якщо $a > 0$;
6) $\sqrt{c^5}+4c\sqrt{c^3}-5c^2\sqrt{c}$.

526.• Спростіть вираз:

1) $0{,}5\sqrt{12}-3\sqrt{27}+0{,}4\sqrt{75}$;
2) $2{,}5\sqrt{28b}+\frac{2}{3}\sqrt{63b}-10\sqrt{0{,}07b}$;
3) $\sqrt{81a^7}-5a^3\sqrt{a}+\frac{6}{a}\sqrt{a^9}$.

527.• Доведіть, що:

1) $\sqrt{11+4\sqrt{7}}=\sqrt{7}+2$;
2) $\sqrt{14+8\sqrt{3}}=\sqrt{8}+\sqrt{6}$.

528.• Спростіть вираз:

1) $(2\sqrt{3}-1)(\sqrt{27}+2)$;
2) $(\sqrt{5}-2)^2-(3+\sqrt{5})^2$;
3) $\sqrt{\sqrt{17}-4}\cdot\sqrt{\sqrt{17}+4}$;
4) $(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2$;
5) $\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2$.

529.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(3\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{8}-2\right)$;

2) $\left(3-2\sqrt{7}\right)^2+\left(3+2\sqrt{7}\right)^2$;

3) $\left(10-4\sqrt{6}\right)\left(2+\sqrt{6}\right)^2$;

4) $\left(\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}\right)^2$.

530.° Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{4a+4\sqrt{5}}{a^2-5}$;

2) $\dfrac{\sqrt{28}-2\sqrt{2a}}{6a-21}$;

3) $\dfrac{a+4\sqrt{ab}+4b}{a-4b}$, якщо $a>0$, $b>0$;

4) $\dfrac{x^2-6y}{x^2+6y-x\sqrt{24y}}$;

5) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}$;

6) $\dfrac{m\sqrt{m}-27}{\sqrt{m}-3}$.

531.° Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a-b}{\sqrt{11b}-\sqrt{11a}}$;

2) $\dfrac{2a+10\sqrt{2ab}+25b}{6a-75b}$, якщо $a>0$, $b>0$;

3) $\dfrac{a-2\sqrt{a}+4}{a\sqrt{a}+8}$.

532.° Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$;

2) $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$;

3) $\dfrac{15}{\sqrt{15}-\sqrt{12}}$;

4) $\dfrac{19}{2\sqrt{5}-1}$;

5) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

6) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

533.° Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$; 2) $\dfrac{8}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{9}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 4) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

534.• Доведіть рівність:

1) $\frac{1}{5-2\sqrt{6}}+\frac{1}{5+2\sqrt{6}}=10;$

2) $\frac{2}{3\sqrt{2}+4}-\frac{2}{3\sqrt{2}-4}=-8;$

3) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=4\sqrt{2}.$

535.• Доведіть, що значенням виразу є раціональне число:

1) $\frac{6}{3+2\sqrt{3}}+\frac{6}{3-2\sqrt{3}};$

2) $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{11}-\sqrt{6}}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}.$

536.• Спростіть вираз:

1) $\frac{a}{\sqrt{a}-2}-\frac{4\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-2};$

2) $\frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-2}-\frac{\sqrt{m}+3}{\sqrt{m}};$

3) $\frac{\sqrt{y}+4}{\sqrt{xy}+y}-\frac{\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{xy}};$

4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}-\frac{a}{a-16};$

5) $\frac{a}{\sqrt{ab}-b}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}};$

6) $\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{a}+2};$

7) $\frac{\sqrt{c}-5}{\sqrt{c}}:\frac{c-25}{3c};$

8) $\left(\sqrt{a}-\frac{a}{\sqrt{a}+1}\right):\frac{\sqrt{a}}{a-1};$

9) $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$

10) $\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}+\frac{12\sqrt{x}}{x-9}\right):\frac{\sqrt{x}+3}{x-3\sqrt{x}}.$

537.• Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}};$

2) $\frac{\sqrt{a}+1}{a-\sqrt{ab}}-\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{ab}-b};$

3) $\frac{\sqrt{x}}{y-2\sqrt{y}}:\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{y}-6};$

4) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}:\left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right)$;

5) $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{4\sqrt{x}}{x-1}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

6) $\frac{a-64}{\sqrt{a}+3}\cdot\frac{1}{a+8\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}+8}{a-3\sqrt{a}}$.

538.•• Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{-m^9}$;
2) $\sqrt{a^4b^{13}}$, якщо $a \neq 0$;
3) $\sqrt{4x^6y}$, якщо $x < 0$;
4) $\sqrt{m^7n^7}$, якщо $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;
5) $\sqrt{45x^3y^{14}}$, якщо $y < 0$;
6) $\sqrt{64a^2b^9}$, якщо $a > 0$;
7) $\sqrt{242m^{11}b^{18}}$, якщо $b < 0$;
8) $\sqrt{-m^2n^2p^{15}}$, якщо $m > 0$, $n < 0$.

539.•• Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{-m^{19}}$;
2) $\sqrt{a^{23}b^{24}}$, якщо $b \neq 0$;
3) $\sqrt{49a^2b}$, якщо $a < 0$;
4) $\sqrt{a^9b^9}$;
5) $\sqrt{27x^{15}y^{34}}$, якщо $y < 0$;
6) $\sqrt{-50m^6n^6p^7}$, якщо $m > 0$, $n > 0$.

540.•• Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt{3}$;
2) $b\sqrt{-b}$;
3) $c\sqrt{c^5}$;
4) $m\sqrt{n}$, якщо $m \geqslant 0$;
5) $xy^2\sqrt{xy}$, якщо $x \leqslant 0$;
6) $2p\sqrt{\frac{p}{2}}$;
7) $2p\sqrt{-\frac{p}{2}}$;
8) $ab^2\sqrt{\frac{a}{b}}$, якщо $a \geqslant 0$.

541.•• Внесіть множник під знак кореня:

1) $m\sqrt{7}$, якщо $m \geqslant 0$;
2) $3n\sqrt{6}$, якщо $n \leqslant 0$;

3) $p\sqrt{p^3}$; 5) $7a\sqrt{\dfrac{3}{a}}$;

4) $x^4y\sqrt{x^5y}$, якщо $y \leqslant 0$; 6) $5ab\sqrt{-\dfrac{a^7}{5b}}$, якщо $a \leqslant 0$, $b > 0$.

542.•• Доведіть тотожність:

1) $\left(\dfrac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a}+7}-\dfrac{15\sqrt{a}}{a+14\sqrt{a}+49}\right):\dfrac{8\sqrt{a}+41}{a-49}+\dfrac{7\sqrt{a}-49}{\sqrt{a}+7}=\sqrt{a}-7$;

2) $\dfrac{a\sqrt{a}+27}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}-3}{a-3\sqrt{a}+9}-\dfrac{\sqrt{ab}-9}{a\sqrt{a}+27}\right)=\sqrt{a}$.

543.•• Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}-\dfrac{1}{a-b}\cdot\dfrac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}$;

2) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)$.

544.* Спростіть вираз:

1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$.

545.* Спростіть вираз:

1) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$; 2) $\sqrt{15+6\sqrt{6}}$; 3) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$.

546.* Спростіть вираз:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

547.* Доведіть, що

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{91}+\sqrt{89}}=\frac{\sqrt{91}-1}{2}.$$

548.* Доведіть, що

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2.$$

549.* Спростіть вираз:

1) $\sqrt{10+8\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$; 2) $\sqrt{22+6\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

550. Робітник мав виготовляти щодня 12 деталей. Однак він виготовляв щодня 15 деталей, і вже за 5 днів до кінця строку роботи йому залишилося виготовити 30 деталей. Скільки деталей мав виготовити робітник?

551. Під час розпродажу ціну на товар знизили на 20 %. На скільки відсотків треба підвищити ціну на товар, щоб вона дорівнювала початковій?

552. Човен проплив 32 км за течією річки за 4 год, а ту саму відстань проти течії — за 8 год. Знайдіть власну швидкість човна та швидкість течії річки.

553. Федір і Олеся їхали в одному поїзді. Федір сів у дванадцятий вагон від голови поїзда, а Олеся — у шостий вагон із хвоста поїзда. Виявилося, що вони їдуть у тому самому вагоні. Скільки вагонів у поїзді?

554. Число a — додатне, а число b — від'ємне. Який з даних виразів набуває найбільшого значення:

1) a^2b; 2) $-a^2b^2$; 3) $-ab^2$; 4) ab; 5) $-a^2b$?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

555. Відомо, що в деякому класі на «добре» та «відмінно» вчаться не менш ніж 95,5 % і не більше ніж 96,5 % учнів та учениць. Яка найменша кількість учнів та учениць може навчатися в цьому класі?

17. Функція $y = \sqrt{x}$ та її графік

Якщо площа квадрата дорівнює x, то його сторону y можна знайти за формулою $y = \sqrt{x}$. Зміна площі x квадрата спричиняє зміну його сторони y.

Кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y. Отже, залежність змінної y від змінної x є функціональною, а формула $y = \sqrt{x}$ задає функцію.

Оскільки у виразі $\sqrt{x}$ допустимими значеннями змінної x є всі невід'ємні числа, то областю визначення функції $y = \sqrt{x}$ є множина невід'ємних чисел.

Вираз $\sqrt{x}$ не може набувати від'ємних значень, тобто жодне від'ємне число не може належати області значень розглядуваної функції. Покажемо, що функція $y = \sqrt{x}$ може набувати будь-яких невід'ємних значень, наприклад 7,2. Справді, існує таке значення аргументу x, що $\sqrt{x} = 7{,}2$. Це значення дорівнює $7{,}2^2$. На цьому прикладі ми бачимо, що для будь-якого невід'ємного числа b завжди знайдеться таке значення x, що $\sqrt{x} = b$. Таким значенням аргументу x є число b^2.

Отже, областю значень функції $y = \sqrt{x}$ є множина невід'ємних чисел.

Зазначимо, що коли $x = 0$, то $y = 0$.

Ураховуючи область визначення та область значень функції $y = \sqrt{x}$, можна зробити висновок, що її графік розташований тільки в першій координатній чверті.

У таблиці наведено деякі значення аргументу та відповідні їм значення функції $y = \sqrt{x}$.

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Позначимо на координатній площині точки, координати (x; y) яких наведено в таблиці (рис. 29).

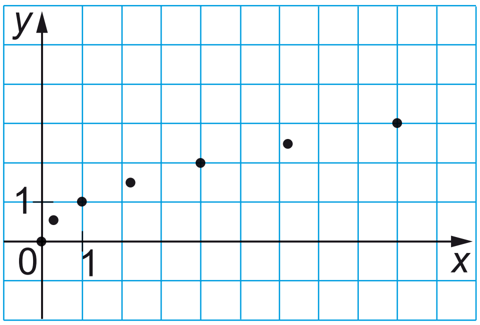


Рис. 29

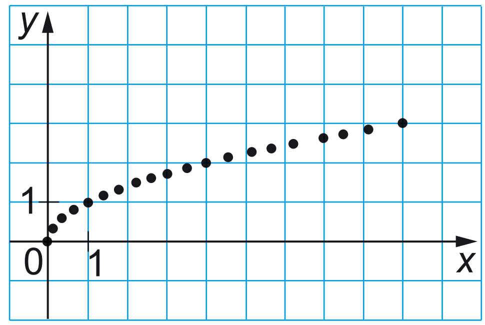


Рис. 30

Чим більше позначити точок, координати яких задовольняють рівняння $y = \sqrt{x}$, тим менше отримана фігура відрізнятиметься від графіка функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 30).

Якби вдалося позначити на координатній площині всі такі точки, то отримали б фігуру, яку зображено на рисунку 31. У старших класах буде доведено, що графіком функції $y = \sqrt{x}$ є фігура, яка дорівнює вітці параболи $y = x^2$.

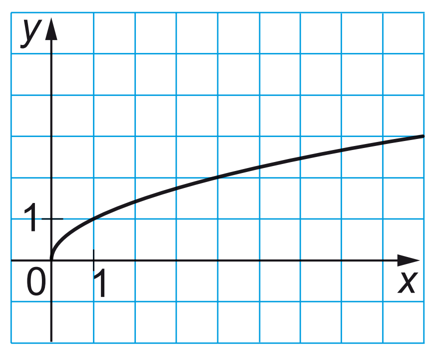


Рис. 31

Нехай x_1 і x_2 — два довільних значення аргументу функції $y = \sqrt{x}$ такі, що $x_1 < x_2$. Тоді з властивості арифметичного квадратного кореня випливає, що $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Це означає, що більшому значенню аргументу функції $y = \sqrt{x}$ відповідає більше значення функції. Правильним також є обернене твердження: більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, тобто коли $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, то $x_1 < x_2$ (рис. 32).

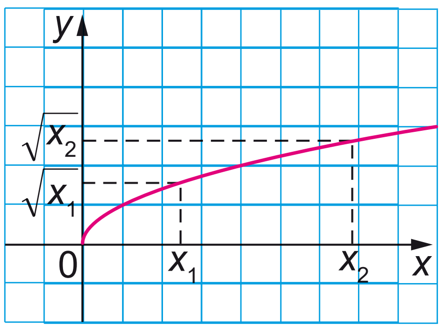


Рис. 32

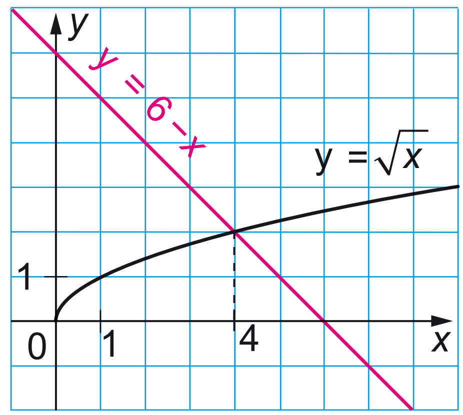


Рис. 33

У таблиці наведено властивості функції $y = \sqrt{x}$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	Множина невід'ємних чисел
Область значень	Множина невід'ємних чисел
Графік	Вітка параболи
Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0)	x = 0
Порівняння значень функції	Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x} = 6 - x$.

Розв'язання. В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = 6 - x$ (рис. 33). Ці графіки перетинаються в точці, абсциса якої дорівнює 4. Перевірка підтверджує, що число 4 є коренем даного рівняння. ▲

ПРИКЛАД 2 Порівняйте числа: 1) 6 і $\sqrt{31}$; 2) $3\sqrt{7}$ і $\sqrt{65}$.

Розв'язання. 1) Оскільки $6=\sqrt{36}$ і 36 > 31, то $\sqrt{36}>\sqrt{31}$, тобто $6>\sqrt{31}$.

2) Маємо: $3\sqrt{7}=\sqrt{63}$, 63 < 65, $\sqrt{63}<\sqrt{65}$. Отже, $3\sqrt{7}<\sqrt{65}$. ▲

ПРИКЛАД 3 При яких значеннях x виконується нерівність $\sqrt{x}<3$?

Розв'язання. Запишемо дану нерівність так: $\sqrt{x}<\sqrt{9}$. Оскільки більше значення функції $y=\sqrt{x}$ відповідає більшому значенню аргументу, то можна зробити висновок, що $x < 9$. Ураховуючи, що вираз $\sqrt{x}$ має зміст тільки при $x \geqslant 0$, отримуємо, що дана нерівність виконується при всіх x, які задовольняють нерівність $0 \leqslant x < 9$. ▲

ПРИКЛАД 4 Спростіть вираз $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt{5}>2$ і $\sqrt{5}<3$, то $\sqrt{5}-2>0$ і $\sqrt{5}-3<0$. Звідси отримуємо:

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}=|\sqrt{5}-2|+|\sqrt{5}-3|=$$

$$=\sqrt{5}-2+3-\sqrt{5}=1.$$

Відповідь: 1. ▲

?

1. Яка область визначення функції $y=\sqrt{x}$?
2. Яка область значень функції $y=\sqrt{x}$?
3. Чому дорівнює нуль функції $y=\sqrt{x}$?
4. У якій координатній чверті розташований графік функції $y=\sqrt{x}$?

5. Яка фігура є графіком функції $y = \sqrt{x}$?

6. Невід'ємні числа a і b такі, що $a > b$. Порівняйте $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$.

7. Відомо, що $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Порівняйте числа a і b.

ВПРАВИ

556.° Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$. Заповніть таблицю:

x	0,01	4				1600
y			9	11	1,5	

557.° Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$.

1) Чому дорівнює значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 0,16; 64; 1,44; 3600?
2) При якому значенні аргументу значення функції дорівнює: 0,2; 5; 120; –4?

558.° Не виконуючи побудови, визначте, через які з даних точок проходить графік функції $y = \sqrt{x}$:
A (36; 6), B (4; –2), C (0,81; 0,9), D (–1; 1), E (42,25; 6,5).

559.° Через яку з даних точок проходить графік функції $y = \sqrt{x}$:
1) A (16; 4); 2) B (49; –7); 3) C (3,6; 0,6); 4) D (–36; 6)?

560.° Порівняйте числа:

1) $\sqrt{86}$ і $\sqrt{78}$;
2) $\sqrt{1{,}4}$ і $\sqrt{1{,}6}$;
3) 5 і $\sqrt{26}$;
4) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ і 1;
5) –7 і $-\sqrt{48}$;
6) $3\sqrt{2}$ і $2\sqrt{3}$;
7) $\sqrt{41}$ і $2\sqrt{10}$;
8) $0{,}6\sqrt{3\frac{1}{3}}$ і $\sqrt{1{,}1}$;
9) $\sqrt{75}$ і $4\sqrt{3}$.

561.° Порівняйте числа:

1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ і $\sqrt{\frac{1}{5}}$; 3) $\sqrt{33}$ і 6; 5) $\sqrt{30}$ і $2\sqrt{7}$;

2) 9 і $\sqrt{82}$; 4) $3\sqrt{5}$ і $\sqrt{42}$; 6) $7\sqrt{\frac{1}{7}}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{20}$.

562.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіка функції $y = \sqrt{x}$ і прямої:

1) $y = 1$; 2) $y = 0,8$; 3) $y = -6$; 4) $y = 500$.

563.• Запишіть у порядку спадання числа: 8; $\sqrt{62}$; 7,9; $\sqrt{65}$; 8,2.

564.• Запишіть у порядку зростання числа: $\sqrt{38}$; 6,1; 6; $\sqrt{35}$; 5,9.

565.• Між якими двома послідовними цілими числами розташоване на координатній прямій число:

1) $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{7}$; 7) $\sqrt{59}$;

2) $\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{13}$; 8) $-\sqrt{115}$;

3) $\sqrt{5}$; 6) $\sqrt{0,98}$; 9) $-\sqrt{76,19}$?

566.• Між якими двома послідовними цілими числами розташоване на координатній прямій число:

1) $\sqrt{6}$; 3) $\sqrt{29}$; 5) $-\sqrt{86}$;

2) $\sqrt{19}$; 4) $\sqrt{160}$; 6) $-\sqrt{30,5}$?

567.• Укажіть усі цілі числа, які розташовані на координатній прямій між числами:

1) 3 і $\sqrt{68}$; 3) $-\sqrt{31}$ і $-2,3$;

2) $\sqrt{7}$ і $\sqrt{77}$; 4) $-\sqrt{42}$ і 2,8.

568.• Укажіть усі цілі числа, які розташовані на координатній прямій між числами:

1) $\sqrt{3}$ і $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{10}$ і $\sqrt{90}$; 3) $-\sqrt{145}$ і $-\sqrt{47}$.

569.$^{\bullet}$ При яких значеннях x виконується нерівність:

1) $\sqrt{x} \geqslant 2$; 2) $\sqrt{x} < 4$; 3) $6 \leqslant \sqrt{x} < 9$?

570.$^{\bullet}$ При яких значеннях x виконується нерівність:

1) $\sqrt{x} \leqslant 8$; 2) $\sqrt{x} > 7$; 3) $10 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 20$?

571.$^{\bullet}$ Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x} = x$;
2) $\sqrt{x} = x^2$;
3) $\sqrt{x} = x + 2$;
4) $\sqrt{x} = 0,5x + 0,5$;
5) $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$;
6) $\sqrt{x} = 1,5 - 0,5x$.

572.$^{\bullet}$ Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x} = -x - 1$; 2) $\sqrt{x} = 2 - x$; 3) $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$.

573.$^{\bullet}$ Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$;
2) $\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{7})^2}$;
3) $\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}$;
4) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$.

574.$^{\bullet}$ Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}$.

575.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x} = -x^2$.

576.$^{\bullet\bullet}$ Дано функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{якщо } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geqslant 0. \end{cases}$

1) Знайдіть: $f(-8)$, $f(0)$, $f(9)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

577.$^{\bullet\bullet}$ Дано функцію $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

1) Знайдіть: $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

578.•• Знайдіть область визначення, область значень і нулі функції $y=\sqrt{-x}$. Побудуйте графік даної функції.

579.•• Побудуйте графік функції $y=\frac{x}{\sqrt{x}}$.

580.* Спростіть вираз:

1) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$;
2) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;
3) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$;
4) $\sqrt{38-12\sqrt{2}}$.

581.* Спростіть вираз:

1) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$; 3) $\sqrt{37-20\sqrt{3}}$.

582.* Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x}=a-x$ залежно від значення a?

583.* Спростіть вираз

$$\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2-4\sqrt{a}}+\sqrt{(\sqrt{a}-2)^2+8\sqrt{a}}.$$

584.* Спростіть вираз

$$\sqrt{(\sqrt{a}-6)^2+24\sqrt{a}}-\sqrt{(\sqrt{a}+6)^2-24\sqrt{a}}.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

585. У першому контейнері було 90 кг яблук, а в другому — 75 кг. Після того як з першого контейнера взяли в 3 рази більше яблук, ніж із другого, у першому залишилось у 2 рази менше яблук, ніж у другому. Скільки кілограмів яблук узяли з першого контейнера?

586. Від пристані проти течії річки відплив моторний човен, власна швидкість якого дорівнює 12 км/год. Через 40 хв після відправлення човна зіпсувався мотор, і човен течією річки через 2 год принесло до пристані. Яка швидкість течії річки?

587. Доведіть тотожність:

1) $\left(\dfrac{a-2b}{a^2+2ab}-\dfrac{1}{a^2-4b^2}:\dfrac{a+2b}{(2b-a)^2}\right):\dfrac{a^2-2ab}{a^2+4ab+4b^2}=\dfrac{2b}{a^2}$;

2) $\left(\dfrac{2a}{a+3}-\dfrac{4a}{a^2+6a+9}\right)\cdot\dfrac{a^2-9}{a+1}-\dfrac{a^2-9a}{a+3}=a$.

588. Відстань між двома містами легковий автомобіль проїжджає за 2 год, а вантажний — за 3 год. Через який час після початку руху вони зустрінуться, якщо виїдуть одночасно назустріч один одному із цих міст?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

589. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 0$;
2) $x^2 - 1 = 0$;
3) $x^2 + 5x = 0$;
4) $-3x^2 + 12 = 0$;
5) $5x^2 - 6x = 0$;
6) $0{,}2x^2 + 2 = 0$;
7) $\dfrac{1}{6}x^2 - 5x = 0$;
8) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
9) $9x^2 + 30x + 25 = 0$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

590. Натуральні числа від 1 до 37 записано в рядок так, що сума будь-яких перших кількох чисел ділиться націло на наступне за ними число. Яке число записано на третьому місці, якщо на першому місці записано число 37, а на другому — 1?

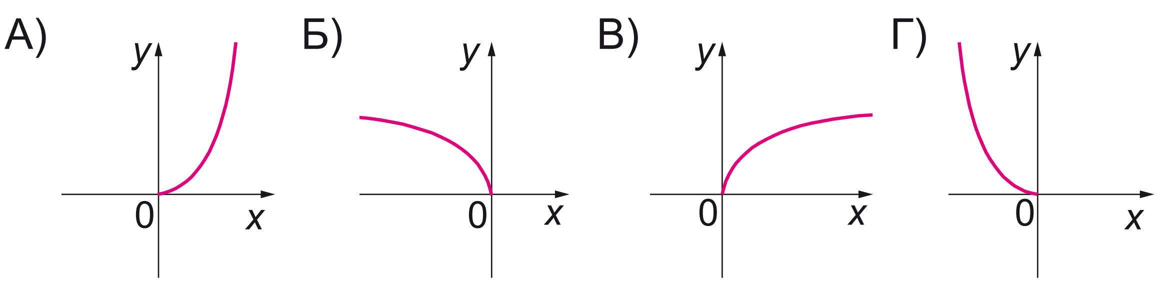
ЗАВДАННЯ № 4 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Яке з даних тверджень хибне?
А) –5 — ціле число;
Б) –5 — раціональне число;
В) –5 — ірраціональне число;
Г) –5 — дійсне число.

2. Яке із чисел є ірраціональним?
А) $\sqrt{4}$; Б) $\sqrt{0,4}$; В) $\sqrt{0,04}$; Г) $\sqrt{400}$.

3. Графіком якої з функцій є парабола?
А) $y = 2x$; Б) $y = x^2$; В) $y = \frac{2}{x}$; Г) $y = \frac{x}{2}$.

4. На якому з рисунків зображено графік функції $y = \sqrt{x}$?



5. Який із наведених виразів не має змісту?
А) $\sqrt{2}$; Б) $-\sqrt{2}$; В) $\sqrt{-2}$; Г) $\sqrt{(-2)^2}$.

6. Обчисліть значення виразу $\sqrt{7x-3}$ при $x = 4$.
А) 5; Б) –5; В) 25; Г) –25.

7. Чому дорівнює значення виразу $\sqrt{36 \cdot 0,81}$?
А) 6,9; Б) 54; В) 5,4; Г) 0,54.

8. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{1}{5}\sqrt{10}\right)^2$.
А) 2; Б) 4; В) 2,5; Г) 0,4.

9. Спростіть вираз $\sqrt{9a}-\sqrt{16a}+\sqrt{64a}$.

А) $15\sqrt{a}$; Б) 15a; В) $7\sqrt{a}$; Г) 7a.

10. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{12}{\sqrt{2}}$.

А) $\sqrt{2}$; Б) $4\sqrt{2}$; В) $6\sqrt{2}$; Г) $10\sqrt{2}$.

11. Скоротіть дріб $\frac{a-2}{a-2\sqrt{2a}+2}$.

А) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}$; Б) $\frac{a+2}{a-2}$; В) 1; Г) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$.

12. Спростіть вираз $(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})+(\sqrt{5}+1)^2-\sqrt{20}$.

А) 15; Б) 5; В) $10-\sqrt{5}$; Г) $10+5\sqrt{5}$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Властивості функції $y = x^2$

Область визначення: $\mathbb{R}$.

Область значень: множина невід'ємних чисел.

Графік: парабола.

Нуль функції: $x = 0$.

Властивість графіка: якщо точка A $(x_0; y_0)$ належить графіку функції, то точка B $(-x_0; y_0)$ також належить графіку.

Квадратний корінь

Квадратним коренем із числа a називають число, квадрат якого дорівнює a.

Арифметичний квадратний корінь

Арифметичним квадратним коренем із числа a називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a.

Рівні множини

Два множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B і, навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.

Підмножина

Множину B називають підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.

Позначення числових множин

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

$\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел;

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел.

Зв'язок між числовими множинами

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Властивості арифметичного квадратного кореня

Для будь-якого дійсного числа a виконується рівність $\sqrt{a^2} = |a|$.

Для будь-якого дійсного числа a і будь-якого натурального числа n виконується рівність $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$.

Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, виконується рівність $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a \geqslant 0$ і $b > 0$, виконується рівність $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Для будь-яких невід'ємних чисел a_1 і a_2 таких, що $a_1 > a_2$, виконується нерівність $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$.

Властивості функції $y = \sqrt{x}$

Область визначення: множина невід'ємних чисел.
Область значень: множина невід'ємних чисел.
Графік: вітка параболи.
Нуль функції: $x = 0$.
Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

§ 3 КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

- Опанувавши матеріал цього параграфа, ви навчитеся розв'язувати рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$.
- Ознайомитеся з теоремою Вієта для квадратного рівняння.
- Оволодієте прийомами розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних.

18. Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь

Ви вмієте розв'язувати лінійні рівняння, тобто рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають **рівнянням першого степеня**.

Наприклад, кожне з лінійних рівнянь $2x = 3$, $3x = 0$, $\frac{1}{3}x = -7$ є рівнянням першого степеня. А ось лінійні рівняння $0x = 0$, $0x = 2$ не є рівняннями першого степеня.

Числа a і b називають **коефіцієнтами рівняння першого степеня** $ax = b$.

Те, що множина рівнянь першого степеня є підмножиною множини лінійних рівнянь, ілюструє схема на рисунку 34.

Рис. 34

Ви також умієте розв'язувати деякі рівняння, які містять змінну в другому степені. Наприклад, готуючись до вивчення нової теми, ви розв'язали рівняння $x^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 + 5x = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$ (вправа 589). Кожне із цих рівнянь має вид $ax^2 + bx + c = 0$.

Означення. Квадратним рівнянням називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$.

Числа a, b і c називають **коефіцієнтами квадратного рівняння**. Число a називають **першим** або **старшим коефіцієнтом**, число b — **другим коефіцієнтом**, число c — **вільним членом**.

Наприклад, квадратне рівняння $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ має такі коефіцієнти: $a = -2$, $b = 5$, $c = 3$.

Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають **зведеним**.

Наприклад, $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 3x = 0$ — це зведені квадратні рівняння.

Оскільки у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ старший коефіцієнт не дорівнює нулю, то незведене квадратне рівняння завжди можна перетворити у зведене, рівносильне даному. Розділивши обидві частини рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ на число a, отримаємо зведене квадратне рівняння $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один із коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають **неповним квадратним рівнянням**.

Існує три види неповних квадратних рівнянь.

1. При $b = c = 0$ маємо: $ax^2 = 0$.
2. При $c = 0$ і $b \neq 0$ маємо: $ax^2 + bx = 0$.

3. При $b = 0$ і $c \neq 0$ маємо: $ax^2 + c = 0$.

Розв'яжемо неповні квадратні рівняння кожного виду.

1. Оскільки $a \neq 0$, то рівняння $ax^2 = 0$ має єдиний корінь $x = 0$.

2. Рівняння $ax^2 + bx = 0$ подамо у вигляді $x(ax + b) = 0$. Це рівняння має два корені x_1 і x_2, один з яких дорівнює нулю, а другий є коренем рівняння першого степеня $ax + b = 0$. Звідси $x_1 = 0$ і $x_2 = -\frac{b}{a}$.

3. Рівняння $ax^2 + c = 0$ подамо у вигляді $x^2 = -\frac{c}{a}$. Оскільки $c \neq 0$, то можливі два випадки: $-\frac{c}{a} < 0$ або $-\frac{c}{a} > 0$. Очевидно, що в першому випадку рівняння коренів не має. У другому випадку рівняння має два корені: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ і $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Узагальнимо отримані результати:

Коефіцієнти рівняння $ax^2 + bx + c = 0$	Неповне квадратне рівняння	Корені
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0,\ c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0,\ -\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Коренів немає
$b = 0,\ -\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

ПРИКЛАД Розв'яжіть рівняння $x^2 - \frac{4x}{|x|} = 0$.

Розв'язання. При $x > 0$ маємо: $x^2 - \frac{4x}{x} = 0$. Звідси $x^2 - 4 = 0$; $x = 2$ або $x = -2$. Але корінь $x = -2$ не задовольняє умову $x > 0$.

При $x < 0$ маємо: $x^2 + \frac{4x}{x} = 0$. Звідси $x^2 + 4 = 0$. Останнє рівняння не має коренів.

Відповідь: 2. ▲

?

1. Яке рівняння називають лінійним?
2. Яке рівняння називають рівнянням першого степеня?
3. Наведіть приклад лінійного рівняння, яке є рівнянням першого степеня, і приклад лінійного рівняння, яке не є рівнянням першого степеня.
4. Яке рівняння називають квадратним?
5. Як називають коефіцієнти квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$?
6. Яке квадратне рівняння називають зведеним?
7. Яке квадратне рівняння називають неповним?
8. Які існують види неповних квадратних рівнянь? Які корені має рівняння кожного з видів?

ВПРАВИ

591.° Укажіть серед даних рівнянь квадратні та назвіть, чому дорівнюють старший коефіцієнт, другий коефіцієнт і вільний член кожного з них:

1) $x = 0$;	6) $3x^3 - x^2 + 6 = 0$;
2) $x^2 = 0$;	7) $-2x^2 + 7x - 8 = 0$;
3) $x^2 + x = 0$;	8) $x^3 - x - 9 = 0$;
4) $x^2 + 1 = 0$;	9) $6 - x^2 + 4x = 0$;
5) $x^2 - 4x + 2 = 0$;	10) $-x^2 - 2x + 3 = 0$.

592.° Складіть квадратне рівняння, у якому:

1) старший коефіцієнт дорівнює 6, другий коефіцієнт дорівнює 7, а вільний член дорівнює 2;
2) старший коефіцієнт дорівнює 1, другий коефіцієнт дорівнює –8, а вільний член дорівнює $-\frac{1}{3}$;
3) старший коефіцієнт дорівнює –0,5, другий коефіцієнт дорівнює 0, а вільний член дорівнює $2\frac{3}{7}$;
4) старший коефіцієнт дорівнює 7,2, другий коефіцієнт дорівнює –2, а вільний член дорівнює 0.

593.° Складіть квадратне рівняння, у якому:

1) старший коефіцієнт дорівнює –1, другий коефіцієнт дорівнює –2, а вільний член дорівнює 1,6;
2) старший коефіцієнт і вільний член дорівнюють 2, а другий коефіцієнт дорівнює 0.

594.° Подайте дане рівняння у вигляді $ax^2 + bx + c = 0$, укажіть значення коефіцієнтів a, b і c:

1) $6x(3 - x) = 7 - 2x^2$;
2) $x(x + 1) = (x - 3)(7x + 2)$;
3) $(5x - 1)^2 = (x + 4)(x - 2)$;
4) $4x(x + 8) - (x - 6)(x + 6) = 0$.

595.° Подайте дане рівняння у вигляді $ax^2 + bx + c = 0$, укажіть значення коефіцієнтів a, b і c:

1) $x(x + 10) = 8x + 3$;
2) $(x + 2)^2 = 2x^2 + 4$.

596.° Укажіть, які з даних рівнянь є зведеними, і перетворіть незведені рівняння у зведені:

1) $x^2 - 5x + 34 = 0$;
2) $2x^2 + 6x + 8 = 0$;
3) $\frac{1}{3}x^2 + x - 5 = 0$;
4) $16 - 6x + x^2 = 0$;
5) $-x^2 + 8x - 7 = 0$;
6) $-0,2x^2 + 0,8x + 1 = 0$.

597.° Перетворіть дане квадратне рівняння у зведене:

1) $\frac{1}{6}x^2 - 2x - 3 = 0$;
2) $-4x^2 + 20x - 16 = 0$;
3) $3x^2 + x + 2 = 0$.

598.° Які із чисел 1; 0; –3; 2; –10 є коренями рівняння $x^2 + 9x - 10 = 0$?

599.° Доведіть, що:

1) число –1 не є коренем рівняння $x^2 - 2x + 3 = 0$;
2) числа $-\frac{1}{3}$ і –3 є коренями рівняння $3x^2 + 10x + 3 = 0$;
3) числа $-\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}$ є коренями рівняння $3x^2 - 6 = 0$.

600.° Доведіть, що:

1) число –5 є коренем рівняння $x^2 + 3x - 10 = 0$;
2) число 4 не є коренем рівняння $\frac{1}{4}x^2 - 4x = 0$.

601.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5x^2 - 45 = 0$;
2) $x^2 + 8x = 0$;
3) $2x^2 - 10 = 0$;
4) $2x^2 - 10x = 0$;
5) $64x^2 - 9 = 0$;
6) $x^2 + 16 = 0$.

602.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 7x = 0$;
2) $2x^2 - 11x = 0$;
3) $3x^2 - 6 = 0$;
4) $-8x^2 = 0$.

603.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 1)(x + 4) = -4$;
2) $(2x - 1)^2 - 6(6 - x) = 2x$;
3) $(x + 2)(x - 3) - (x - 5)(x + 5) = x^2 - x$.

604.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 2)(3x + 2) + (4x - 5)^2 = 10x + 21$;
2) $(2x - 1)(x + 8) - (x - 1)(x + 1) = 15x$.

605.° Знайдіть два послідовних натуральних числа, добуток яких на 36 більший за менше з них.

606.° Знайдіть два послідовних натуральних числа, добуток яких на 80 більший за більше з них.

607.• Доведіть, що числа $2-\sqrt{3}$ і $2+\sqrt{3}$ є коренями рівняння $x^2 - 4x + 1 = 0$.

608.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-8x}{6}=x$;   2) $\frac{x^2-3}{5}-\frac{x^2-1}{2}=2$.

609.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2+x}{7}-\frac{x}{3}=0$;   2) $\frac{x^2+1}{6}-\frac{x^2+2}{4}=-1$.

610.• При якому значенні m:

1) число 2 є коренем рівняння $x^2 + mx - 6 = 0$;
2) число –3 є коренем рівняння $2x^2 - 7x + m = 0$;
3) число $\frac{1}{7}$ є коренем рівняння $m^2x^2 + 14x - 3 = 0$?

611.• При якому значенні n:

1) число 6 є коренем рівняння $x^2 - nx + 3 = 0$;
2) число 0,5 є коренем рівняння $nx^2 - 8x + 10 = 0$?

612.• Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники способом групування:

1) $x^2 - 6x + 8 = 0$; 2) $x^2 + 12x + 20 = 0$; 3) $x^2 + 22x - 23 = 0$.

613.• Розв'яжіть рівняння, виділивши в його лівій частині квадрат двочлена:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$; 2) $x^2 + 6x - 7 = 0$; 3) $x^2 + 8x + 20 = 0$.

614.• Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

1) $x^2 - 10x + 9 = 0$;   3) $x^2 - x - 2 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 3 = 0$;   4) $x^2 + 6x + 5 = 0$.

615.• Сума квадратів двох послідовних цілих чисел на 17 більша за подвоєне число, більше з них. Знайдіть ці числа.

616.• Знайдіть два послідовних цілих числа, сума квадратів яких дорівнює 1.

617.• При якому значенні m не є квадратним рівняння:

1) $(m - 4)\, x^2 + mx + 7 = 0$;
2) $(m^2 + 8m)\, x^2 + (m + 8)\, x + 10 = 0$;
3) $(m^2 - 81)\, x^2 - 6x + m = 0$?

618.• Яким числом, додатним чи від’ємним, є відмінний від нуля корінь неповного квадратного рівняння $ax^2 + bx = 0$, якщо:

1) $a > 0,\ b > 0$;
2) $a < 0,\ b > 0$;
3) $a > 0,\ b < 0$;
4) $a < 0,\ b < 0$?

619.• Чи має корені неповне квадратне рівняння $ax^2 + c = 0$, якщо:

1) $a > 0,\ c > 0$;
2) $a < 0,\ c > 0$;
3) $a > 0,\ c < 0$;
4) $a < 0,\ c < 0$?

620.•• Яким многочленом можна замінити зірочку в рівнянні $3x^2 - 2x + 4 + * = 0$, щоб утворилося неповне квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) 0 і 4;
2) –1 і 1?

621.•• Яким многочленом можна замінити зірочку в рівнянні $x^2 + 5x - 1 + * = 0$, щоб утворилося неповне квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) 0; –7;
2) –4; 4?

622.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $x^2 - 3\,|x| = 0$;
2) $x^2 + |x| - 2x = 0$;
3) $x^2 - \dfrac{|x|}{x} = 0$;
4) $x^2 - \dfrac{2x^2}{|x|} = 0$.

623.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $x^2 - 7\,|x| = 0$;
2) $x^2 - 6\,|x| + x = 0$;
3) $2x^2 - \dfrac{3x^2}{|x|} = 0$.

624.•• При якому значенні a рівняння

$$(a-2)x^2+(2a-1)x+a^2-4=0 \text{ є:}$$

1) лінійним;
2) зведеним квадратним;
3) неповним незведеним квадратним;
4) неповним зведеним квадратним?

625.•• Визначте, при якому значенні a один із коренів квадратного рівняння дорівнює 0, і знайдіть другий корінь рівняння:

1) $x^2+ax+a-4=0$;
2) $4x^2+(a-8)x+a^2+a=0$;
3) $ax^2+(a+3)x+a^2-3a=0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

626. Виконайте дії:

1) $\dfrac{3-2a}{2a}-\dfrac{1-a^2}{a^2}$;
2) $\dfrac{a^2-6b^2}{3b}+2b$;
3) $\dfrac{4}{c^2-4c}-\dfrac{c+4}{c^2-16}$;
4) $\dfrac{56a^5}{b^4}\cdot\dfrac{b^2}{14b^5}$;
5) $\dfrac{72a^3b}{c}:(27a^2b)$;
6) $\dfrac{4a^2-1}{a^2-9}:\dfrac{10a+5}{a+3}$.

627. Спростіть вираз:

1) $10\sqrt{3}-5\sqrt{48}+2\sqrt{75}$;
2) $\left(3\sqrt{5}-\sqrt{20}\right)\sqrt{5}$;
3) $\left(5-\sqrt{2}\right)^2$;
4) $\left(\sqrt{18}-\sqrt{3}\right)\sqrt{2}+0{,}5\sqrt{24}$.

628. Який із графіків, поданих на рисунку 35, є графіком функції:

1) $y=x^2$; 2) $y=2x$; 3) $y=\dfrac{x}{2}$; 4) $y=\dfrac{2}{x}$?

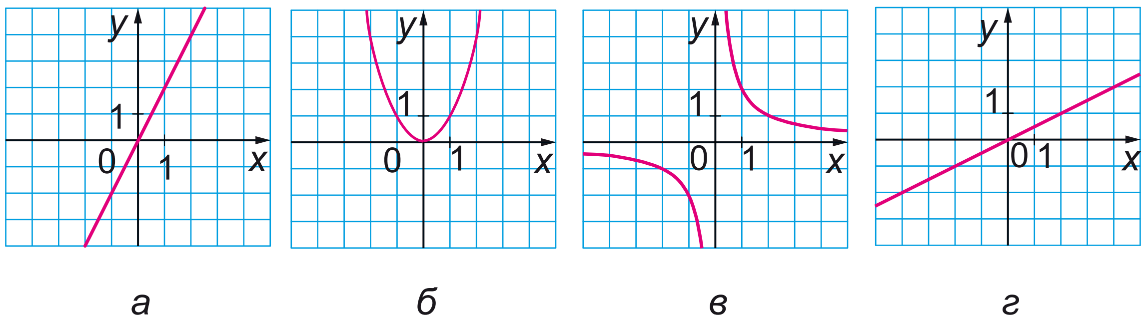


Рис. 35

629. Учениця задумала двоцифрове число. Якщо кожну цифру цього числа збільшити на 2, то отримане число буде на 13 менше від подвоєного задуманого числа. Яке число задумала учениця?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

630. Обчислювальний автомат отримує на вході картку із числами (a; b) і видає на виході картку із числами $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)$. Чи можна за допомогою цього автомата з картки із числами (0,25; 1000) отримати картку із числами (1,25; 250)?

19. Формула коренів квадратного рівняння

Знаючи коефіцієнти a і b рівняння першого степеня $ax = b$, можна знайти його корінь за формулою $x = \frac{b}{a}$.

Виведемо формулу, яка дає змогу за коефіцієнтами a, b і c квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ знаходити його корені.

Маємо:

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Оскільки $a \neq 0$, то, помноживши обидві частини цього рівняння на $4a$, отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Виділимо в лівій частині цього рівняння квадрат двочлена:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0;$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \qquad (2)$$

Існування коренів рівняння (2) та їхня кількість залежать від знака значення виразу $b^2 - 4ac$. Це значення називають **дискримінантом квадратного рівняння** $ax^2 + bx + c = 0$ і позначають буквою D, тобто $D = b^2 - 4ac$. Термін «дискримінант» походить від латинського слова *discriminare*, що означає «розрізняти», «розділяти».

Тепер рівняння (2) можна записати так:

$$(2ax + b)^2 = D. \qquad (3)$$

Можливі три випадки: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

1. Якщо $D < 0$, то рівняння (3), а отже, і рівняння (1) коренів не має. Справді, при будь-якому значенні x вираз $(2ax + b)^2$ набуває тільки невід'ємних значень.

Висновок: ***якщо D < 0, то квадратне рівняння коренів не має.***

2. Якщо $D = 0$, то рівняння (3) набуває вигляду

$$(2ax + b)^2 = 0.$$

Звідси $2ax + b = 0$; $x = -\frac{b}{2a}$.

Висновок: ***якщо D = 0, то квадратне рівняння має один корінь*** $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$.

3. Якщо $D > 0$, то рівняння (3) можна записати у вигляді

$$(2ax + b)^2 = \left(\sqrt{D}\right)^2.$$

Звідси $2ax + b = -\sqrt{D}$ або $2ax + b = \sqrt{D}$. Тоді $x = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ або $x = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Висновок: ***якщо D > 0, то квадратне рівняння має два корені*** $\boldsymbol{x_1}$ ***і*** $\boldsymbol{x_2}$**:**

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.}$$

Застосовують також коротку форму запису:

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}}$$

Цей запис називають **формулою коренів квадратного рівняння** $ax^2 + bx + c = 0$.

Отриману формулу можна застосовувати й у випадку, коли $D = 0$. Маємо:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

Під час розв’язування квадратних рівнянь зручно керуватися таким алгоритмом:

- знайти дискримінант D квадратного рівняння;
- якщо $D < 0$, то у відповіді записати, що коренів немає;
- якщо $D \geqslant 0$, то скористатися формулою коренів квадратного рівняння.

Якщо другий коефіцієнт квадратного рівняння подати у вигляді $2k$, то можна користуватися іншою формулою, яка в багатьох випадках полегшує обчислення.

Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + 2kx + c = 0$.

Знайдемо його дискримінант: $D = 4k^2 - 4ac = 4\,(k^2 - ac)$.

Позначимо вираз $k^2 - ac$ через D_1.

Якщо $D_1 \geqslant 0$, то за формулою коренів квадратного рівняння отримуємо:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{2\left(-k \pm \sqrt{D_1}\right)}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

тобто

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ де } D_1 = k^2 - ac.$$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2 - 2x - 16 = 0$;
2) $-0{,}5x^2 + 2x - 2 = 0$;
3) $x^2 + 5x - 3 = 0$;
4) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
5) $5x^2 - 16x + 3 = 0$.

Розв'язання. 1) Для даного рівняння $a = 3$, $b = -2$, $c = -16$.

Дискримінант рівняння

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 4 + 192 = 196.$$

Отже, $x_1 = \frac{2 - \sqrt{196}}{6} = \frac{2 - 14}{6} = -2$, $x_2 = \frac{2 + 14}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Відповідь: -2; $2\frac{2}{3}$.

2) Маємо:

$$D = 2^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-2) = 4 - 4 = 0.$$

Отже, дане рівняння має один корінь:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-1} = 2.$$

Зауважимо, що дане рівняння можна розв'язати іншим способом. Помноживши обидві частини рівняння на -2, отримуємо:

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Звідси

$$(x - 2)^2 = 0; \ x - 2 = 0; \ x = 2.$$

Відповідь: 2.

3) $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 25 + 12 = 37.$

Рівняння має два корені: $x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{37}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{37}}{2}$.

Відповідь можна записати одним із двох способів: $\dfrac{-5-\sqrt{37}}{2}$; $\dfrac{-5+\sqrt{37}}{2}$ або $\dfrac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$.

4) $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 36 - 44 = -8 < 0.$

Отже, рівняння не має коренів.

Відповідь: коренів немає.

5) Подамо дане рівняння у вигляді $5x^2 + 2 \cdot (-8)x + 3 = 0$ і застосуємо формулу коренів для рівняння виду $ax^2 + 2kx + c = 0$:

$$D_1 = (-8)^2 - 5 \cdot 3 = 49.$$

$$x_1 = \frac{8-7}{5} = \frac{1}{5},\ x_2 = \frac{8+7}{5} = 3.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{5}$; 3. ▲

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 6\sqrt{x^2} - 16 = 0$;

2) $x^2 - 10\left(\sqrt{x}\right)^2 - 24 = 0$;

3) $9x^2 - 8x + \dfrac{5}{x-1} = 1 + \dfrac{5}{x-1}$.

Розв'язання. 1) Маємо: $x^2 + 6|x| - 16 = 0.$

При $x \geqslant 0$ отримуємо рівняння $x^2 + 6x - 16 = 0$, яке має корені –8 і 2, але корінь –8 не задовольняє умову $x \geqslant 0$.

При $x < 0$ отримуємо рівняння $x^2 - 6x - 16 = 0$, яке має корені –2 і 8, але корінь 8 не задовольняє умову $x < 0$.

Відповідь: –2; 2.

2) Оскільки $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ при $x \geqslant 0$, то шукані корені мають задовольняти дві умови одночасно: $x^2 - 10x - 24 = 0$

і $x \geqslant 0$. У такому разі говорять, що дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^2 - 10x - 24 = 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

Рівняння $x^2 - 10x - 24$ має корені –2 і 12, але корінь –2 не задовольняє умову $x \geqslant 0$.

Відповідь: 12.

3) Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} 9x^2 - 8x = 1, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$

Звідси

$$\begin{cases} 9x^2 - 8x - 1 = 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \text{ або } x = -\frac{1}{9}, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad x = -\frac{1}{9}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{9}$. ▲

ПРИКЛАД 3 При якому значенні b має єдиний корінь рівняння:

1) $2x^2 - bx + 18 = 0$;

2)* $(b + 6)\, x^2 - (b - 2)\, x + 1 = 0$?

Розв'язання. 1) Дане рівняння є квадратним. Воно має єдиний корінь, якщо його дискримінант дорівнює нулю. Маємо: $D = b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = b^2 - 144$;

$$b^2 - 144 = 0; \quad b = -12 \text{ або } b = 12.$$

Відповідь: $b = -12$ або $b = 12$.

2) При $b = -6$ отримуємо лінійне рівняння $8x + 1 = 0$, яке має один корінь.

При $b \neq -6$ дане рівняння є квадратним. Воно має єдиний корінь, якщо його дискримінант дорівнює нулю:

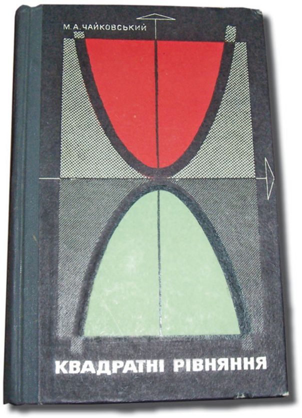
$$D = (b - 2)^2 - 4\,(b + 6) = b^2 - 4b + 4 - 4b - 24 =$$
$$= b^2 - 8b - 20.$$

Маємо: $b^2 - 8b - 20 = 0$, звідси $b = -2$ або $b = 10$.

Відповідь: $b = -2$, або $b = 10$, або $b = -6$. ▲

Кілька поколінь учителів і вчительок математики набували педагогічного досвіду, а їхні учні та учениці поглиблювали свої знання, користуючись чудовою книжкою «Квадратні рівняння» блискучого українського педагога й математика Миколи Андрійовича Чайковського. М. А. Чайковський залишив велику наукову й педагогічну спадщину. Його роботи відомі далеко за межами України.

М. А. Чайковський
(1887–1970)



1. Значення якого виразу називають дискримінантом квадратного рівняння?
2. Як залежить кількість коренів квадратного рівняння від знака дискримінанта?
3. Запишіть формулу коренів квадратного рівняння.
4. Яким алгоритмом зручно користуватися під час розв'язування квадратних рівнянь?

ВПРАВИ

631.° Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів рівняння:

1) $x^2 + 2x - 4 = 0$;
2) $x^2 - 3x + 5 = 0$;
3) $2x^2 - 6x - 3{,}5 = 0$;
4) $5x^2 - 2x + 0{,}2 = 0$.

632.° Яке з наведених рівнянь має два корені:

1) $x^2 + 4x + 8 = 0$;
2) $3x^2 - 4x - 1 = 0$;
3) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
4) $2x^2 - 9x + 15 = 0$?

633.° Яке з наведених рівнянь не має коренів:

1) $x^2 - 6x + 4 = 0$;
2) $5x^2 - 10x + 6 = 0$;
3) $3x^2 + 4x - 2 = 0$;
4) $0{,}04x^2 - 0{,}4x + 1 = 0$?

634.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 3 = 0$;
3) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
4) $x^2 - 4x - 21 = 0$;
5) $x^2 + x - 56 = 0$;
6) $x^2 - 6x - 7 = 0$;
7) $x^2 - 8x + 12 = 0$;
8) $x^2 + 7x + 6 = 0$;
9) $-x^2 + 6x + 55 = 0$;
10) $2x^2 - 3x - 2 = 0$;
11) $2x^2 - x - 6 = 0$;
12) $3x^2 - 4x - 20 = 0$;
13) $10x^2 - 7x - 3 = 0$;
14) $-5x^2 + 7x - 2 = 0$;
15) $-6x^2 - 7x - 1 = 0$;
16) $3x^2 - 10x + 3 = 0$;
17) $-3x^2 + 7x + 6 = 0$;
18) $x^2 - 4x + 1 = 0$;
19) $2x^2 - x - 4 = 0$;
20) $x^2 - 8x + 20 = 0$.

635.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$;
2) $x^2 + 12x - 13 = 0$;
3) $x^2 - 7x + 10 = 0$;
4) $x^2 - x - 72 = 0$;
5) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;
6) $2x^2 - 7x - 4 = 0$;
7) $4x^2 - 3x - 1 = 0$;
8) $-2x^2 + x + 15 = 0$;
9) $6x^2 + 7x - 5 = 0$;
10) $18x^2 - 9x - 5 = 0$;
11) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
12) $-x^2 - 8x + 12 = 0$.

636.° При яких значеннях змінної є рівними значення:

1) многочленів $6x^2 - 2$ і $5 - x$;
2) двочлена $y - 6$ і тричлена $y^2 - 9y + 3$;
3) тричленів $4m^2 + 4m + 2$ і $2m^2 + 10m + 8$?

637.° При яких значеннях змінної є рівними значення:

1) двочлена $4x + 4$ і тричлена $3x^2 + 5x - 10$;
2) тричленів $10p^2 + 10p + 8$ і $3p^2 - 10p + 11$?

638.° Знайдіть корені рівняння:

1) $(2x - 5)(x + 2) = 18$;
2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;
3) $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 16$;
4) $(x - 6)^2 - 2x(x + 3) = 30 - 12x$;
5) $(x + 7)(x - 8) - (4x + 1)(x - 2) = -21x$;
6) $(2x - 1)(2x + 1) - x(1 - x) = 2x(x + 1)$.

639.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 4)^2 = 4x - 11$;
2) $(x + 5)^2 + (x - 7)(x + 7) = 6x - 19$;
3) $(3x - 1)(x + 4) = (2x + 3)(x + 3) - 17$.

640.° Знайдіть натуральне число, квадрат якого на 42 більший за дане число.

641.° Знайдіть периметр прямокутника, площа якого дорівнює 70 см^2, а одна зі сторін на 9 см більша за другу.

642.° Добуток двох чисел дорівнює 84. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 8 менше від другого.

643.° Добуток двох послідовних натуральних чисел на 89 більший за їхню суму. Знайдіть ці числа.

644.° Сума квадратів двох послідовних натуральних чисел дорівнює 365. Знайдіть ці числа.

645.• Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 + x\sqrt{5} - 15 = 0$;
2) $x^2 - x\left(\sqrt{6} - 1\right) - \sqrt{6} = 0$;
3) $\dfrac{x^2 - 4}{8} - \dfrac{2x + 3}{3} = -1$;
4) $\dfrac{4x^2 + x}{3} - \dfrac{x^2 + 17}{9} = \dfrac{5x - 1}{6}$.

646.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 3x\sqrt{2} + 4 = 0$;
2) $x^2 - x\left(\sqrt{3} + 2\right) + 2\sqrt{3} = 0$;
3) $\dfrac{2x^2 + x}{3} - \dfrac{x + 3}{4} = x - 1$.

647.• При якому значенні *a* число $\frac{1}{4}$ є коренем рівняння $a^2x^2 + 4ax - 5 = 0$?

648.• При якому значенні *a* число 2 є коренем рівняння $x^2 - 0{,}5ax - 3a^2 = 0$?

649.• Від квадратного листа картону відрізали смужку у формі прямокутника завширшки 3 см і завдовжки зі сторону квадрата. Площа решти листа становить 40 см^2. Якою була довжина сторони квадратного листа картону?

650.• Від прямокутного аркуша паперу завдовжки 18 см відрізали квадрат, сторона якого дорівнює ширині аркуша. Площа решти аркуша становить 72 см^2. Якою була ширина аркуша паперу?

651.• Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо один із них на 14 см менший від другого, а гіпотенуза дорівнює 34 см.

652.• Знайдіть сторони прямокутника, якщо їхня різниця дорівнює 31 см, а діагональ прямокутника дорівнює 41 см.

653.• Знайдіть три послідовних непарних натуральних числа, якщо квадрат першого з них на 33 більший за подвоєну суму другого та третього.

654.• Знайдіть чотири послідовних парних натуральних числа, якщо сума першого та третього чисел у 5 разів менша від добутку другого та четвертого чисел.

655.• Доведіть, що коли старший коефіцієнт і вільний член квадратного рівняння мають різні знаки, то рівняння має два корені.

656.• (*Стародавня індійська задача*.)

На дві зграї розділившись,
Мавпи в гаї веселились.

Одна восьма їх в квадраті
У кущах потішно грали.
А дванадцять на ліанах
То висіли, то стрибали.
Разом скільки, ти дізнайся,
Мавп було у тому гаї?

657.•• У турнірі з футболу було зіграно 36 матчів. Скільки команд брало участь у турнірі, якщо кожна команда зіграла по одному разу з кожною з решти команд?

658.•• Скільки сторін має многокутник, якщо в ньому можна провести 90 діагоналей?

659.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2 + 7x - 4| = 4$;
2) $5x^2 - 8|x| + 3 = 0$;
3) $x|x| + 6x - 5 = 0$;
4) $x^2 + \frac{4x^2}{|x|} - 12 = 0$;
5) $x^2 - 8\sqrt{x^2} + 15 = 0$;
6) $x^2 + 4\sqrt{x^2} - 12 = 0$.

660.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2 + 10x - 4| = 20$;
2) $x|x| + 12x - 45 = 0$;
3) $\frac{x^3}{|x|} - 14x - 15 = 0$;
4) $x^2 - 8\sqrt{x^2} - 9 = 0$.

661.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 2x + \frac{3}{x-8} = \frac{3}{x-8} + 80$;
2) $x^2 + 8\left(\sqrt{x}\right)^2 - 33 = 0$.

662.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $6x^2 + 5x - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$;
2) $5x^2 - 14\left(\sqrt{x}\right)^2 - 3 = 0$.

663.•• При яких значеннях b має єдиний корінь рівняння:
1) $2x^2 + 4x - b = 0$;
2) $3x^2 - bx + 12 = 0$?

664.•• При яких значеннях b має єдиний корінь рівняння:
1) $6x^2 - 18x + b = 0$;
2) $8x^2 + bx + 2 = 0$?

665.•• Доведіть, що при будь-якому значенні p має два корені рівняння:

1) $4x^2 - px - 3 = 0$; 2) $x^2 + px + p - 2 = 0$.

666.•• Доведіть, що при будь-якому значенні m не має коренів рівняння:

1) $x^2 + mx + m^2 + 1 = 0$;

2) $x^2 - 2mx + 2m^2 + 9 = 0$.

667.•• Доведіть, що при будь-якому значенні b рівняння $x^2 + bx - 7 = 0$ має два корені.

668.* Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + (3a + 1)\,x + 2a^2 + a = 0$;

2) $x^2 - (2a + 4)\,x + 8a = 0$;

3) $a^2x^2 - 24ax - 25 = 0$;

4) $3\,(2a - 1)\,x^2 - 2\,(a + 1)\,x + 1 = 0$.

669.* Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - (2a - 5)\,x - 3a^2 + 5a = 0$;

2) $x^2 + (3a - 4)\,x - 12a = 0$;

3) $ax^2 - (a + 1)\,x + 1 = 0$.

670.* При яких значеннях b має єдиний корінь рівняння:

1) $bx^2 - 6x - 7 = 0$;

2) $(b + 5)\,x^2 - (b + 6)\,x + 3 = 0$;

3) $(b - 4)\,x^2 + (2b - 8)\,x + 15 = 0$?

671.* При яких значеннях b має єдиний корінь рівняння:

1) $bx^2 + x + b = 0$;

2) $(b + 3)\,x^2 + (b + 1)\,x - 2 = 0$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

672. Спростіть вираз

$$\left(\frac{a+b}{a} - \frac{4b}{a+b}\right) \cdot \frac{a+b}{a-b}.$$

673. Знайдіть значення виразу $\dfrac{(a^{-3})^3}{a^{-2} \cdot a^{-5}}$ при $a = \dfrac{1}{3}$.

674. Розташуйте в порядку зростання числа $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$ і 4.

675. Є брухт сплавів двох сортів, які містять 5 % і 45 % нікелю відповідно. Скільки тонн брухту кожного із цих сортів треба взяти, щоб одержати 120 т сплаву, який містить 30 % нікелю?

676. У книжці бракує кількох аркушів. Ліва сторінка розвороту має номер 24, а права — 53. Скільки аркушів бракує між цими сторінками?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

677. Розв’яжіть рівняння, знайдіть суму та добуток його коренів та порівняйте їх із другим коефіцієнтом і вільним членом рівняння:

1) $x^2 - 4x - 12 = 0$;   2) $x^2 + 9x + 14 = 0$.

678. Заповніть таблицю, де a, b і c — коефіцієнти квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, а x_1 і x_2 — його корені.

Рівняння	$-\dfrac{b}{a}$	$\dfrac{c}{a}$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	x_1x_2
$7x^2 - 8x + 1 = 0$						
$6x^2 + 13x - 15 = 0$						

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

679. Доведіть, що зі 101 кубика, пофарбованого в довільні кольори, можна вибрати або 11 кубиків одного кольору, або 11 кубиків різного кольору.

20. Теорема Вієта

Готуючись до вивчення цього пункту, ви розв'язали вправи 677, 678. Можливо, ці вправи підказали вам, як сума та добуток коренів квадратного рівняння пов'язані з його коефіцієнтами.

Теорема 20.1 (теорема Вієта). ***Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то***

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Доведення. Умовою теореми передбачено, що дане квадратне рівняння має корені. Тому його дискримінант D не може бути від'ємним.

Нехай $D > 0$. Застосувавши формулу коренів квадратного рівняння, запишемо:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Франсуа Вієт
(1540–1603)

Французький математик, за фахом юрист. У 1591 р. упровадив буквені позначення не лише для невідомих величин, але й для коефіцієнтів рівнянь, завдяки чому стало можливим виражати властивості рівнянь та їхні корені загальними формулами. Серед своїх відкриттів сам Вієт особливо високо цінив установлення залежності між коренями й коефіцієнтами рівнянь.

Маємо:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D} - b + \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Нехай $D = 0$. У цьому разі вважають, що $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Маємо:

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \blacktriangle$$

Наслідок. ***Якщо x_1 і x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$, то***

$$x_1 + x_2 = -b,$$
$$x_1 x_2 = c.$$

Іншими словами, *сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, узятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену*.

Теорема 20.2 (обернена до теореми Вієта). ***Якщо числа α і β такі, що $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ і $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то ці числа є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.***

Доведення. Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Перетворимо його у зведене:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Згідно з умовою теореми це рівняння можна записати так:

$$x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta = 0. \qquad (*)$$

Підставимо в ліву частину цього рівняння замість x спочатку число α, а потім число β. Отримуємо:

$$\alpha^2 - (\alpha + \beta)\, \alpha + \alpha\beta = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = 0;$$
$$\beta^2 - (\alpha + \beta)\, \beta + \alpha\beta = \beta^2 - \alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta = 0.$$

Таким чином, числа α і β є коренями рівняння (*), а отже, і коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. ▲

Наслідок. ***Якщо числа α і β такі, що $\alpha + \beta = -b$ і $\alpha\beta = c$, то ці числа є коренями зведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$.***

Цей наслідок дає змогу розв'язувати деякі квадратні рівняння усно, не використовуючи формулу коренів квадратного рівняння.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть суму та добуток коренів рівняння $3x^2 - 15x + 2 = 0$.

Розв'язання. З'ясуємо, чи має дане рівняння корені.

Маємо: $D = (-15)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 225 - 24 > 0$. Отже, рівняння має два корені x_1 і x_2.

Тоді за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{-15}{3} = 5$, $x_1 x_2 = \frac{2}{3}$. ▲

ПРИКЛАД 2 Знайдіть коефіцієнти b і c рівняння $x^2 + bx + c = 0$, якщо його коренями є числа –7 і 4.

Розв'язання. За теоремою Вієта $b = -(-7 + 4) = 3$, $c = -7 \cdot 4 \cdot 2 = -28$. ▲

ПРИКЛАД 3 Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:

1) 4 і $-\frac{5}{7}$; 2) $\frac{6 - \sqrt{7}}{2}$ і $\frac{6 + \sqrt{7}}{2}$.

Розв'язання. 1) Нехай $x_1 = 4$ і $x_2 = -\frac{5}{7}$.

Тоді $x_1 + x_2 = 4 - \frac{5}{7} = \frac{23}{7}$, $x_1 x_2 = 4 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{20}{7}$.

За теоремою, оберненою до теореми Вієта, числа x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2 - \frac{23}{7}x - \frac{20}{7} = 0$. Помноживши обидві частини цього рівняння на 7, отримуємо квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами:

$$7x^2 - 23x - 20 = 0.$$

2) Нехай $x_1 = \frac{6-\sqrt{7}}{2}$ і $x_2 = \frac{6+\sqrt{7}}{2}$.

Тоді $x_1 + x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} + \frac{6+\sqrt{7}}{2} = 6$,

$$x_1 x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{6+\sqrt{7}}{2} = \frac{36-7}{4} = \frac{29}{4}.$$

Отже, x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2 - 6x + \frac{29}{4} = 0$. Звідси шуканим є рівняння $4x^2 - 24x + 29 = 0$. ▲

ПРИКЛАД 4 Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $2x^2 - 3x - 9 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$.

Розв'язання. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 x_2 = -\frac{9}{2}$.

Тоді маємо: $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{2} : \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{3}$.

Відповідь: $-\frac{1}{3}$. ▲

ПРИКЛАД 5 Число 4 є коренем рівняння $3x^2 - 10x + n = 0$. Знайдіть другий корінь рівняння та значення n.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — корені даного рівняння, причому $x_1 = 4$. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = \frac{10}{3}$. Тоді $x_2 = \frac{10}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$. Маємо: $\frac{n}{3} = x_1 x_2 = -\frac{8}{3}$, $n = -8$.

Відповідь: $x_2 = -\frac{2}{3}$, $n = -8$. ▲

ПРИКЛАД 6 Складіть квадратне рівняння, корені якого на 4 більші за відповідні корені рівняння $x^2 + 6x - 14 = 0$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — корені даного рівняння, x_1' і x_2' — корені шуканого рівняння.

За умовою $x_1' = x_1 + 4$, $x_2' = x_2 + 4$.

За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -6$, $x_1 x_2 = -14$.

Тоді маємо:

$$x_1' + x_2' = x_1 + 4 + x_2 + 4 = (x_1 + x_2) + 8 = -6 + 8 = 2;$$

$$x_1' x_2' = (x_1 + 4)(x_2 + 4) = x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 =$$
$$= -14 + 4 \cdot (-6) + 16 = -22.$$

Отже, за теоремою, оберненою до теореми Вієта, шуканим є рівняння $x^2 - 2x - 22 = 0$.

Відповідь: $x^2 - 2x - 22 = 0$. ▲

?

1. Сформулюйте теорему Вієта.
2. Сформулюйте наслідок з теореми Вієта.
3. Сформулюйте теорему, обернену до теореми Вієта.
4. Сформулюйте наслідок з теореми, оберненої до теореми Вієта.

ВПРАВИ

680.° Чому дорівнює сума коренів рівняння $x^2 + 5x - 10 = 0$:
1) 5; 2) –5; 3) –10; 4) 10?

681.° Чому дорівнює добуток коренів рівняння $x^2 - 14x + 12 = 0$:

1) –14; 2) 14; 3) 12; 4) –12?

682.° Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму та добуток його коренів:

1) $x^2 + 6x - 32 = 0$;
2) $x^2 - 10x + 4 = 0$;
3) $2x^2 - 6x + 3 = 0$;
4) $10x^2 + 42x + 25 = 0$.

683.° Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму та добуток його коренів:

1) $x^2 - 12x - 18 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 9 = 0$;
3) $3x^2 + 7x + 2 = 0$;
4) $-4x^2 - 8x + 27 = 0$.

684.° Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, установіть, чи є коренями рівняння:

1) $x^2 - 8x + 12 = 0$ числа 2 і 6;
2) $x^2 + x - 56 = 0$ числа –7 і 8;
3) $x^2 - 13x + 42 = 0$ числа 5 і 8;
4) $x^2 - 20x - 99 = 0$ числа 9 і 11.

685.° Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, установіть, чи є коренями рівняння:

1) $x^2 + 2x - 3 = 0$ числа 1 і –2;
2) $x^2 + 5x + 6 = 0$ числа –2 і –3.

686.° Знайдіть коефіцієнти b і c рівняння $x^2 + bx + c = 0$, якщо його коренями є числа:

1) –8 і 6; 2) 4 і 5.

687.° Знайдіть коефіцієнти b і c рівняння $x^2 + bx + c = 0$, якщо його коренями є числа:

1) –2 і 0,5; 2) –10 і –20.

688.° Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:

1) 2 і 5;
2) $-\frac{1}{3}$ і 2;
3) –0,2 і –10;
4) $2-\sqrt{3}$ і $2+\sqrt{3}$;
5) 0 і 6;
6) $-\sqrt{7}$ і $\sqrt{7}$.

689.° Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:

1) –7 і –8; 2) 5 і –0,4; 3) $\frac{1}{2}$ і $\frac{2}{3}$; 4) $5-\sqrt{10}$ і $5+\sqrt{10}$.

690.• Число –2 є коренем рівняння $x^2 - 8x + q = 0$. Знайдіть значення q і другий корінь рівняння.

691.• Число 7 є коренем рівняння $x^2 + px - 42 = 0$. Знайдіть значення p і другий корінь рівняння.

692.• Число $\frac{1}{3}$ є коренем рівняння $6x^2 - bx + 4 = 0$. Знайдіть значення b і другий корінь рівняння.

693.• Число –0,2 є коренем рівняння $4x^2 - 5{,}6x + m = 0$. Знайдіть значення m і другий корінь рівняння.

694.• Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $2x^2 - 7x - 13 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2$.

695.• Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $5x^2 + 4x - 13 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $3x_1x_2 - x_1 - x_2$.

696.• При якому значенні b корені рівняння $x^2 + bx - 17 = 0$ є протилежними числами? Знайдіть ці корені.

697.• Застосовуючи теорему, обернену до теореми Вієта, розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
2) $x^2 + 5x + 4 = 0$;
3) $x^2 - 4x - 5 = 0$;
4) $x^2 + 4x - 5 = 0$;
5) $x^2 - 9x + 20 = 0$;
6) $x^2 - x - 2 = 0$;
7) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
8) $x^2 - 3x - 18 = 0$.

698.• Застосовуючи теорему, обернену до теореми Вієта, розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 10x + 24 = 0$;
2) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
3) $x^2 - 2x - 8 = 0$;
4) $x^2 + x - 12 = 0$.

699.• Які з даних рівнянь мають два додатних корені, які — два від'ємних, а які — корені різних знаків:

1) $x^2 - 12x + 14 = 0$;
2) $x^2 + 6x - 42 = 0$;
3) $x^2 - 7x - 30 = 0$;
4) $x^2 + 16x + 10 = 0$;
5) $x^2 - 24x + 0{,}1 = 0$;
6) $x^2 + 20x + 3 = 0$?

700.•• Один із коренів рівняння $x^2 - 10x + c = 0$ на 8 менший від другого. Знайдіть значення c і корені рівняння.

701.•• Корені рівняння $x^2 + 20x + a = 0$ відносяться як 7 : 3. Знайдіть значення a та корені рівняння.

702.•• Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - 7x + m = 0$ задовольняють умову $2x_1 - 5x_2 = 28$. Знайдіть корені рівняння та значення m.

703.•• Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 + 4x + n = 0$ задовольняють умову $3x_1 - x_2 = 8$. Знайдіть корені рівняння та значення n.

704.•• Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, знайдіть корені рівняння:

1) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;
2) $2x^2 + 5x + 3 = 0$;
3) $16x^2 - 23x + 7 = 0$;
4) $-8x^2 - 19x + 27 = 0$.

705.•• Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, знайдіть корені рівняння:

1) $7x^2 + 11x - 18 = 0$;
2) $9x^2 - 5x - 4 = 0$.

706.•• Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 - 9x + 6 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;
2) $x_1^2 + x_2^2$;
3) $(x_1 - x_2)^2$;
4) $x_1^3 + x_2^3$.

707.•• Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 + 5x - 16 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$;
2) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$;
3) $|x_2 - x_1|$.

708.•• Складіть квадратне рівняння, корені якого на 2 менші від відповідних коренів рівняння $x^2 + 8x - 3 = 0$.

709.•• Складіть квадратне рівняння, корені якого на 3 більші за відповідні корені рівняння $x^2 - 12x + 4 = 0$.

710.•• Складіть квадратне рівняння, корені якого в 3 рази менші від відповідних коренів рівняння $2x^2 - 14x + 9 = 0$.

711.•• Складіть квадратне рівняння, корені якого у 2 рази більші за відповідні корені рівняння $2x^2 - 15x + 4 = 0$.

712.* Сума квадратів коренів рівняння $3x^2 + ax - 7 = 0$ дорівнює $\frac{46}{9}$. Знайдіть значення a.

713.* Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - ax + 8 = 0$ задовольняють умову $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$. Знайдіть значення a.

714.* Чи є правильним твердження:

1) рівняння $7x^2 + 4x - a^2 - 1 = 0$ має корені різних знаків при будь-якому значенні a;

2) якщо рівняння $x^2 + 6x + a^2 + 4 = 0$ має корені, то незалежно від значення a вони обидва від'ємні?

715.* Знайдіть усі цілі значення b, при яких має цілі корені рівняння:

1) $x^2 + bx + 6 = 0$; 2) $x^2 + bx - 12 = 0$.

716.* Знайдіть усі цілі значення b, при яких має цілі корені рівняння:

1) $x^2 + bx + 8 = 0$; 2) $x^2 + bx - 18 = 0$.

717.* Корені рівняння $x^2 + bx + c = 0$ дорівнюють його коефіцієнтам b і c. Знайдіть b і c.

718.* При яких значеннях a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 4x + a = 0$ дорівнює:

1) 12; 2) 6?

719.* При яких значеннях a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (a - 1)x - 2a = 0$ дорівнює 9?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

720. Скоротіть дріб:

1) $\frac{4a-16}{a^2-16}$; 3) $\frac{c^2+10c+25}{5c+25}$; 5) $\frac{n^3-n^5}{n^3-n}$;

2) $\frac{12b^3-8b^2}{2-3b}$; 4) $\frac{4-m^2}{m^2-4m+4}$; 6) $\frac{2-2x^2}{4x^2-8x+4}$.

721. У саду посадили 48 дерев однаковими рядами з однаковою кількістю дерев у кожному ряду. Рядів виявилося на 8 менше, ніж дерев у кожному з них. Скільки було дерев у кожному ряду та скільки було рядів?

722. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = x^2$ і $y = x + 2$. Накресліть графіки даних функцій і позначте знайдені точки.

723. У саду 60 % дерев становлять вишні та сливи, із них 30 % — сливи. Який відсоток усіх дерев саду становлять сливи?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

724. Користуючись методом групування, розкладіть на множники многочлен:

1) $x^2 - 7x + 10$; 3) $a^2 + 8a + 12$;

2) $y^2 + 3y - 4$; 4) $x^2 - x - 6$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

725. Василь задумав три цифри x, y, z. Петро називає три числа a, b, c. Василь повідомляє Петру значення виразу $ax + by + cz$. Які числа має назвати Петро, щоб за отриманою від Василя інформацією визначити цифри, що той задумав?

ЗАВДАННЯ № 5 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Яке з даних рівнянь не є квадратним?

А) $x^2 = 0$; В) $x^3 + x = 0$;
Б) $x^2 + x = 0$; Г) $x^2 + x - 2 = 0$.

2. Розв’яжіть рівняння $9x - x^2 = 0$.

А) –3; 0; 3; Б) 0; 3; В) –3; 3; Г) 0; 9.

3. Розв’яжіть рівняння $\frac{x^2 - x}{6} - \frac{x - 2}{3} = \frac{3 - x}{2}$.

А) 0; 5; Б) 5; В) $\sqrt{5}$; Г) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$.

4. Яке з наведених рівнянь не має коренів?

А) $x^2 - 5x - 2 = 0$; В) $x^2 - 2x + 5 = 0$;
Б) $x^2 - 5x + 2 = 0$; Г) $x^2 + 2x - 5 = 0$.

5. Скільки коренів має рівняння $6x^2 + 13x + 5 = 0$?

А) два; В) жодного;
Б) безліч; Г) один.

6. Знайдіть корені рівняння $x^2 + 4x - 21 = 0$.

А) 7; –3; Б) –7; 3; В) –7; –3; Г) 3; 7.

7. Чому дорівнює сума коренів рівняння $x^2 - 10x - 12 = 0$?

А) 10; Б) –10; В) –12; Г) 12.

8. Чому дорівнює добуток коренів рівняння $3x^2 - 16x + 6 = 0$?

А) 6; Б) 2; В) –16; Г) $\frac{16}{3}$.

9. При яких значеннях змінної набувають рівних значень вирази $(3x - 1)(x + 2)$ і $(x - 12)(x - 4)$?

А) –12,5; 2; Б) 12,5; –2; В) –25; 4; Г) 25; –4.

10. Складіть квадратне рівняння, корені якого дорівнюють $3 - \sqrt{2}$ і $3 + \sqrt{2}$.

А) $x^2 + 6x - 7 = 0$; В) $x^2 + 6x + 7 = 0$;
Б) $x^2 - 6x - 7 = 0$; Г) $x^2 - 6x + 7 = 0$.

11. Розв'яжіть рівняння $x\,|\,x\,|-9x-10=0$.

А) -1; 10; $\frac{-9-\sqrt{41}}{2}$; $\frac{-9+\sqrt{41}}{2}$;

Б) 10; $\frac{-9-\sqrt{41}}{2}$; $\frac{-9+\sqrt{41}}{2}$;

В) -1; $\frac{-9-\sqrt{41}}{2}$;

Г) -1; 10.

12. Число -5 є коренем рівняння $2x^2+9x+c=0$. Знайдіть другий корінь рівняння та значення c.

А) $x_2=0{,}5$, $c=-5$;

Б) $x_2=-0{,}5$, $c=5$;

В) $x_2=9{,}5$, $c=22{,}5$;

Г) $x_2=9{,}5$, $c=-22{,}5$.

21. Квадратний тричлен

Означення. **Квадратним тричленом називають многочлен виду ax^2+bx+c, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a\neq 0$.**

Наведемо приклади многочленів, які є квадратними тричленами:

$$2x^2-3x+5;\quad x^2+7x;\quad x^2-5;\quad 3x^2.$$

Зазначимо, що ліва частина квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ є квадратним тричленом.

Означення. **Коренем квадратного тричлена називають значення змінної, при якому значення квадратного тричлена дорівнює нулю.**

Наприклад, число 2 є коренем квадратного тричлена x^2-6x+8.

Щоб знайти корені квадратного тричлена ax^2+bx+c, треба розв'язати відповідне квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$.

Значення виразу $D = b^2 - 4ac$ називають **дискримінантом квадратного тричлена** $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$.

Якщо $D < 0$, то квадратний тричлен коренів не має. Якщо $D = 0$, то квадратний тричлен має один корінь, якщо $D > 0$ — то два корені.

Розглянемо квадратний тричлен $x^2 - 3x + 2$. Розкладемо його на множники методом групування (подібну вправу, 724, ви виконували під час підготовки до вивчення цього пункту).

Маємо:

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 =$$
$$= x(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x-2).$$

Про таке тотожне перетворення говорять, що квадратний тричлен $x^2 - 3x + 2$ розклали на **лінійні множники** $x - 1$ і $x - 2$.

Зв'язок між коренями квадратного тричлена та лінійними множниками, на які він розкладається, установлює така теорема.

Теорема 21.1. ***Якщо дискримінант квадратного тричлена*** $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ ***додатний, то даний тричлен можна розкласти на лінійні множники:***

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),}$$

де $\boldsymbol{x_1}$ ***і*** $\boldsymbol{x_2}$ ***— корені квадратного тричлена.***

Доведення. Оскільки числа x_1 і x_2 є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Тоді

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) =$$
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c. \blacktriangle$$

Зауваження. Якщо дискримінант квадратного тричлена дорівнює нулю, то вважають, що квадратний тричлен має два рівних корені, тобто $x_1 = x_2$. У цьому випадку розклад квадратного тричлена на лінійні множники має такий вигляд:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Теорема 21.2. ***Якщо дискримінант квадратного тричлена від'ємний, то даний тричлен не можна розкласти на лінійні множники.***

Доведення. Припустимо, що квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ можна розкласти на лінійні множники. Тоді існують такі числа k, m і n, при яких виконується рівність $ax^2 + bx + c = k(x - m)(x - n)$. Звідси отримуємо, що m і n — корені даного квадратного тричлена. Отже, його дискримінант невід'ємний, що суперечить умові. ▲

ПРИКЛАД 1 Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 14x - 32$; 2) $-x^2 + 17x - 30$; 3) $3x^2 - 7x + 2$.

Розв'язання. 1) Знайдемо корені даного тричлена:

$$x^2 - 14x - 32 = 0;$$

$$x_1 = -2,\ x_2 = 16.$$

Отже, $x^2 - 14x - 32 = (x + 2)(x - 16)$.

2) Розв'яжемо рівняння $-x^2 + 17x - 30 = 0$. Маємо:

$$x^2 - 17x + 30 = 0;$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = 15.$$

Отже, $-x^2 + 17x - 30 = -(x - 2)(x - 15)$.

3) Розв'яжемо рівняння $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Маємо:

$$x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 2.$$

Тоді $3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2) = (3x - 1)(x - 2)$. ▲

ПРИКЛАД 2 Скоротіть дріб $\frac{6a^2-a-1}{9a^2-1}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники квадратний тричлен, який є чисельником даного дробу. Розв'язавши рівняння $6a^2 - a - 1 = 0$, отримуємо:

$$a_1 = -\frac{1}{3},\ a_2 = \frac{1}{2}.$$

Тепер можна записати:

$$6a^2 - a - 1 = 6\left(a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 3\left(a + \frac{1}{3}\right) \cdot 2\left(a - \frac{1}{2}\right) = (3a+1)(2a-1).$$

Тоді отримуємо:

$$\frac{6a^2-a-1}{9a^2-1} = \frac{(3a+1)(2a-1)}{(3a+1)(3a-1)} = \frac{2a-1}{3a-1}.$$

Відповідь: $\frac{2a-1}{3a-1}$. ▲

ПРИКЛАД 3 При якому значенні m розклад на множники тричлена $2x^2 + 9x + m$ містить множник $(x + 5)$?

Розв'язання. Оскільки розклад даного тричлена на множники має містити множник $(x + 5)$, то один із коренів цього тричлена дорівнює –5.

Тоді маємо:

$$2 \cdot (-5)^2 + 9 \cdot (-5) + m = 0;$$

$$m = -5.$$

Відповідь: $m = -5$. ▲

?

1. Який многочлен називають квадратним тричленом?
2. Що називають коренем квадратного тричлена?
3. Що називають дискримінантом квадратного тричлена?
4. У якому випадку квадратний тричлен не має коренів? має один корінь? має два корені?

5. У якому випадку квадратний тричлен можна розкласти на лінійні множники?

6. За якою формулою квадратний тричлен можна розкласти на лінійні множники?

7. У якому випадку квадратний тричлен не можна розкласти на лінійні множники?

ВПРАВИ

726.° Знайдіть корені квадратного тричлена:

1) $x^2 - x - 12$; 3) $3x^2 - 16x + 5$; 5) $4x^2 + 28x + 49$;
2) $x^2 + 2x - 35$; 4) $16x^2 - 24x + 3$; 6) $3x^2 + 21x - 90$.

727.° Чи можна розкласти на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 12x + 6$; 3) $2a^2 - 8a + 8$;
2) $3x^2 - 8x + 6$; 4) $-6b^2 + b + 12$?

728.° Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 7x + 12$; 5) $-x^2 + x + 2$; 9) $\frac{1}{6}b^2 - \frac{5}{6}b + 1$;
2) $x^2 + 8x + 15$; 6) $6x^2 - 5x - 1$; 10) $-2x^2 - 0{,}5x + 1{,}5$;
3) $x^2 - 3x - 10$; 7) $4x^2 + 3x - 22$; 11) $0{,}4x^2 - 2x + 2{,}5$;
4) $-x^2 - 5x - 6$; 8) $-3a^2 + 8a + 3$; 12) $-1{,}2m^2 + 2{,}6m - 1$.

729.° Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 3x - 18$; 4) $5x^2 + 8x - 4$; 7) $-\frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$;
2) $x^2 + 5x - 14$; 5) $2a^2 - 3a + 1$; 8) $0{,}3m^2 - 3m + 7{,}5$;
3) $-x^2 + 3x + 4$; 6) $4b^2 - 11b - 3$; 9) $x^2 - 2x - 2$.

730.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$; 3) $\frac{3x - 15}{x^2 - x - 20}$; 5) $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x}$;
2) $\frac{x - 4}{x^2 - 10x + 24}$; 4) $\frac{x^2 - 3x + 2}{6x - 6}$; 6) $\frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2x - 8}$.

731.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2-6x+5}{x-5}$; 2) $\frac{2x+12}{x^2+3x-18}$; 3) $\frac{x^2+9x+14}{x^2+7x}$.

732.• Скоротіть дріб:

1) $\frac{4a^2-9}{2a^2-9a-18}$; 3) $\frac{c^2-5c-6}{c^2-8c+12}$; 5) $\frac{x^2-16}{32-4x-x^2}$;

2) $\frac{2b^2-7b+3}{4b^2-4b+1}$; 4) $\frac{m^3-1}{m^2+9m-10}$; 6) $\frac{4n^2-9n+2}{2+9n-5n^2}$.

733.• Скоротіть дріб:

1) $\frac{4x^2+x-3}{x^2-1}$; 3) $\frac{a^2+5a+4}{a^2-a-20}$;

2) $\frac{2y^2+3y-5}{y^2-2y+1}$; 4) $\frac{3+20b-7b^2}{7b^2-6b-1}$.

734.•• При якому значенні b розклад на лінійні множники тричлена:

1) $2x^2-5x+b$ містить множник $(x-3)$;
2) $-4x^2+bx+2$ містить множник $(x+1)$;
3) $3x^2-4x+b$ містить множник $(3x-2)$?

735.•• При якому значенні a розклад на лінійні множники тричлена:

1) $2x^2-7x+a$ містить множник $(x-4)$;
2) $4x^2-ax+6$ містить множник $(2x+1)$?

736.•• Спростіть вираз:

1) $\frac{9a^2-4}{2a^2-5a+2}\cdot\frac{a-2}{3a+2}+\frac{a-1}{1-2a}$;

2) $\frac{b-4}{b^3-b}:\left(\frac{b-1}{2b^2+3b+1}-\frac{1}{b^2-1}\right)$;

3) $\left(\frac{c+2}{c^2-c-6}-\frac{2c}{c^2-6c+9}\right):\frac{c^2+3c}{(2c-6)^2}$;

4) $\left(\frac{3}{m-4}+\frac{2m}{m+1}+\frac{4m-6}{m^2-3m-4}\right)\cdot\frac{4m-16}{2m-3}$.

737.•• Доведіть, що при всіх допустимих значеннях *a* значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $\frac{25a^2-36}{10a^2-9a+2}:\frac{5a+6}{5a-2}+\frac{9a-8}{1-2a}$;

2) $\left(\frac{2a}{a+3}+\frac{1}{a-1}-\frac{4}{a^2+2a-3}\right):\frac{2a+1}{a+3}$.

738.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{x^2-6x+5}{x-1}$; 2) $y=\frac{3x^2-10x+3}{x-3}-\frac{x^2-4}{x+2}$.

739.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{x^2-2x-8}{x-4}$; 2) $y=\frac{x^2-x-2}{x+1}-\frac{x^2-x-30}{x+5}$.

740.* Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^2-6xy+5y^2$; 3) $3m^2-8mn-3n^2$;

2) $a^2+5ab-36b^2$; 4) $4x^2-5xy+y^2$.

741.* Розкладіть на множники многочлен:

1) $a^2-14ab+40b^2$; 2) $12b^2+bc-6c^2$.

742.* Для кожного значення *a* розв'яжіть рівняння:

1) $(a^2-a-6)x=a^2-9$;

2) $(a^2-8a+7)x=2a^2-13a-7$.

743.* Для кожного значення *a* розв'яжіть рівняння

$$(a^2+7a-8)x=a^2+16a+64.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

744. Скоротіть дріб:

1) $\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$; 3) $\frac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-3}$; 5) $\frac{9a-b^2}{9a+6b\sqrt{a}+b^2}$;

2) $\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{10}-5\sqrt{2}}$; 4) $\frac{4a-2}{2\sqrt{a}+\sqrt{2}}$; 6) $\frac{a\sqrt{a}-8}{a+2\sqrt{a}+4}$.

745. Який із графіків, поданих на рисунку 36, є графіком руху пішохода, котрий ішов зі сталою швидкістю? Визначте швидкість руху цього пішохода.

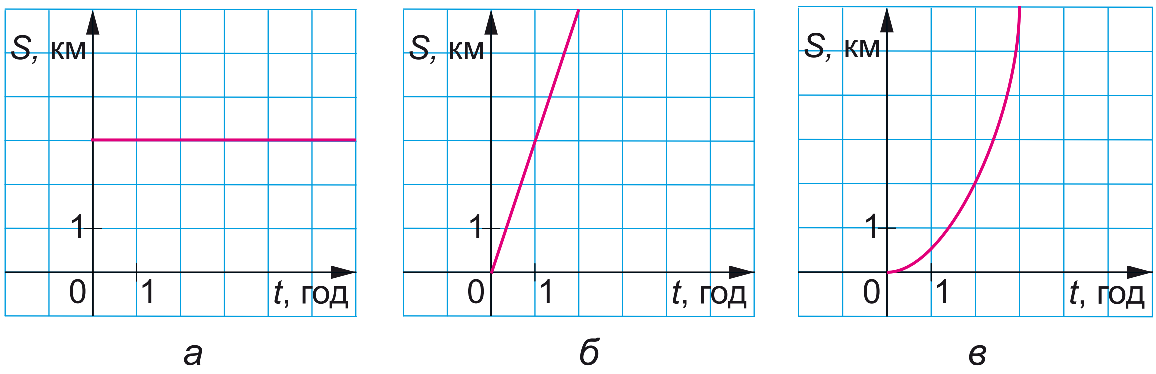


Рис. 36

746. Змішали 2 л молока жирністю 8 % і 3 л молока жирністю 6 %. Яка жирність утвореної суміші?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

747. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 9$;
2) $x^2 = -9$;
3) $(4x + 1)^2 = 9$;
4) $(x - 1)^2 = 5$;
5) $\sqrt{x} = 9$;
6) $\sqrt{x} = -9$.

748. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{4x-1}{x-2} = \dfrac{x+5}{x-2}$;
2) $\dfrac{2y^2-3y-20}{y-4} - y = 1$;
3) $\dfrac{5x-3}{x+1} - \dfrac{4x-2}{x+2} = 1$;
4) $\dfrac{1}{y-5} - \dfrac{1}{y+4} = \dfrac{9}{(y-5)(y+4)}$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

749. Розглядають усі прямокутники, довжини сторін яких — натуральні числа. Яких прямокутників більше: з периметром 1000 чи з периметром 1002?

22. Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних рівнянь

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Розв'язання. Нехай $x^2 = t$. Тоді $x^4 = t^2$. Підставивши в задане рівняння замість x^2 і x^4 відповідно t і t^2, отримаємо квадратне рівняння зі змінною t:

$$t^2 - 13t + 36 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо: $t_1 = 4$, $t_2 = 9$. Оскільки $t = x^2$, то розв'язування заданого рівняння зводиться до розв'язування двох рівнянь:

$$x^2 = 4 \text{ і } x^2 = 9.$$

Звідси $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Відповідь можна записати двома способами: –2; 2; –3; 3 або ±2; ±3. ▲

Означення. **Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають біквадратним рівнянням.**

Заміною $x^2 = t$ біквадратне рівняння зводиться до квадратного рівняння $at^2 + bt + c = 0$. Такий спосіб розв'язування рівнянь називають **методом заміни змінної**.

Метод заміни змінної можна використовувати для розв'язування не лише біквадратних рівнянь.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння

$$(2x - 1)^4 + (2x - 1)^2 - 2 = 0.$$

Розв'язання. Зробимо заміну: $(2x - 1)^2 = t$. Тоді дане рівняння зводиться до квадратного рівняння

$$t^2 + t - 2 = 0.$$

Звідси $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

Тепер треба розв'язати два таких рівняння:

$$(2x - 1)^2 = -2 \text{ і } (2x - 1)^2 = 1.$$

Перше з них коренів не має. Із другого рівняння отримуємо:

$$2x - 1 = -1 \text{ або } 2x - 1 = 1.$$

Звідси $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Відповідь: 0; 1. ▲

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $6x + 5\sqrt{x} + 1 = 0$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x} = t$. Тоді $x = t^2$. Отримуємо: $6t^2 + 5t + 1 = 0$.

Звідси $t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Отримуємо два рівняння:

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{3}, \ \sqrt{x} = -\frac{1}{2}.$$

Оскільки $\sqrt{x} \geqslant 0$, то ці рівняння коренів не мають, а отже, і задане рівняння коренів не має.

Відповідь: коренів немає. ▲

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2 + 2x}{x - 6} = \frac{5x + 18}{x - 6}$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 + 2x = 5x + 18, \\ x - 6 \neq 0. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 18 = 0, \\ x \neq 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \text{ або } x = 6, \\ x \neq 6; \end{cases}$$

$$x = -3.$$

Відповідь: –3. ▲

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння

$$\frac{5}{x^2-4x+4}-\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{5}{(x-2)^2}-\frac{4}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x+2}=0;$$

$$\frac{5(x+2)-4(x-2)-(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)}=0.$$

Отже, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}5(x+2)-4(x-2)-(x-2)^2=0,\\ x\neq 2,\\ x\neq -2.\end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases}5x+10-4x+8-x^2+4x-4=0,\\ x\neq 2,\\ x\neq -2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-5x-14=0,\\ x\neq 2,\\ x\neq -2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=7 \text{ або } x=-2,\\ x\neq 2,\\ x\neq -2;\end{cases}$$

$$x=7.$$

Відповідь: 7. ▲

? Яке рівняння називають біквадратним?

ВПРАВИ

750.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
2) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$;
3) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;
4) $x^4 + 14x^2 - 32 = 0$;
5) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$;
6) $3x^4 + 8x^2 - 3 = 0$.

751.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$;
2) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$;
3) $x^4 - 2x^2 - 24 = 0$;
4) $x^4 + 3x^2 - 70 = 0$;
5) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$;
6) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

752.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2+3x-4}{x+1} = 0$;
2) $\frac{x^2-6x-7}{x-7} = 0$;
3) $\frac{3x^2-x-2}{1-x} = 0$;
4) $\frac{x^2-8x}{x+10} = \frac{20}{x+10}$;
5) $\frac{x^2-14}{x+2} = \frac{5x}{x+2}$;
6) $\frac{x^2+10x}{x-8} = \frac{12x+48}{x-8}$;
7) $\frac{x^2+4x}{x-5} - \frac{9x+50}{x-5} = 0$;
8) $\frac{x^2-6x}{x-3} + \frac{15-2x}{x-3} = 0$;
9) $\frac{x^2-6x}{x-4} = 4$;
10) $\frac{5x+18}{x-2} = x$;
11) $x+1 = \frac{6}{x}$;
12) $5 - \frac{8}{x^2} = \frac{18}{x}$.

753.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-5x-6}{x-6} = 0$;
2) $\frac{4x^2-7x-2}{x-2} = 0$;
3) $\frac{2x^2+6}{x+8} = \frac{13x}{x+8}$;
4) $\frac{x^2+4x}{x+7} = \frac{5x+56}{x+7}$;
5) $\frac{x^2+12x}{x+4} - \frac{5x-12}{x+4} = 0$;
6) $\frac{x^2-3x}{x+6} = 6$;
7) $\frac{2-33y}{y-4} = 7y$;
8) $y - \frac{39}{y} = 10$.

754.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 3)^4 - 3(x + 3)^2 - 4 = 0$;
2) $(2x + 1)^4 - 10(2x + 1)^2 + 9 = 0$;
3) $(6x - 7)^4 + 4(6x - 7)^2 + 3 = 0$;
4) $(x - 4)^4 + 2(x - 4)^2 - 8 = 0$.

755.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 1)^4 - 20(3x - 1)^2 + 64 = 0$;
2) $(2x + 3)^4 - 24(2x + 3)^2 - 25 = 0$.

756.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$;
2) $x - \sqrt{x} - 12 = 0$;
3) $3x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$;
4) $8\sqrt{x} + x + 7 = 0$;
5) $6\sqrt{x} - 27 + x = 0$;
6) $8x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$.

757.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$;
2) $x - 5\sqrt{x} - 50 = 0$;
3) $2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0$.

758.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 9} = 0$;
2) $\frac{3x^2 - 14x - 5}{3x^2 + x} = 0$;
3) $\frac{x^2 - 12x + 35}{x^2 - 10x + 25} = 0$;
4) $\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 2x - 3} = 0$.

759.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - 9x - 10}{x^2 - 1} = 0$;
2) $\frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 6x + 8} = 0$.

760.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2y}{y - 3} = \frac{3y + 3}{y}$;
2) $\frac{3x + 4}{x - 3} = \frac{2x - 9}{x + 1}$;
3) $\frac{5x + 2}{x - 1} = \frac{4x + 13}{x + 7}$;
4) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} = 3x - 4$.

761.° Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{2x - 13}{x - 6} = \frac{x + 6}{x}$;
2) $\frac{3x^2 - 4x - 20}{x + 2} = 2x - 5$.

762.• Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{10}{x+2}+\frac{9}{x}=1;$

2) $\frac{48}{14-x}-\frac{48}{14+x}=1;$

3) $\frac{x-1}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{x^2-4};$

4) $\frac{x-1}{x+3}+\frac{x+1}{x-3}=\frac{2x+18}{x^2-9};$

5) $\frac{4x-10}{x-1}+\frac{x+6}{x+1}=4;$

6) $\frac{1}{x}-\frac{10}{x^2-5x}=\frac{3-x}{x-5};$

7) $\frac{4x}{x^2+4x+4}-\frac{x-2}{x^2+2x}=\frac{1}{x};$

8) $\frac{6}{x^2-36}-\frac{3}{x^2-6x}+\frac{x-12}{x^2+6x}=0;$

9) $\frac{x}{x+7}+\frac{x+7}{x-7}=\frac{63-5x}{x^2-49};$

10) $\frac{4}{x^2-10x+25}-\frac{1}{x+5}=\frac{10}{x^2-25}.$

763.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=\frac{1}{5};$

2) $\frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{16}{x^2-4};$

3) $\frac{9}{x+3}+\frac{14}{x-3}=\frac{24}{x};$

4) $\frac{2y+3}{2y+2}-\frac{y+1}{2y-2}+\frac{1}{y^2-1}=0;$

5) $\frac{3x}{x^2-10x+25}-\frac{x-3}{x^2-5x}=\frac{1}{x};$

6) $\frac{x-20}{x^2+10x}+\frac{10}{x^2-100}-\frac{5}{x^2-10x}=0.$

764.• При якому значенні змінної:

1) сума дробів $\frac{24}{x-2}$ і $\frac{16}{x+2}$ дорівнює 3;

2) значення дробу $\frac{42}{x}$ на $\frac{1}{4}$ більше за значення дробу $\frac{36}{x+20}$?

765.° При якому значенні змінної:

1) значення дробу $\frac{30}{x+3}$ на $\frac{1}{2}$ менше від значення дробу $\frac{30}{x}$;

2) значення дробу $\frac{20}{x}$ на 9 більше за значення дробу $\frac{20}{x+18}$?

766.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-10}{x^3+1}+\frac{4}{x+1}=\frac{5x-1}{x^2-x+1}$;

2) $\frac{6}{x^2-4x+3}+\frac{5-2x}{x-1}=\frac{3}{x-3}$;

3) $\frac{4x-6}{x+2}-\frac{x}{x+1}=\frac{14}{x^2+3x+2}$;

4) $\frac{x}{x^2-4}-\frac{3x-1}{x^2+x-6}=\frac{2}{x^2+5x+6}$.

767.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x+2}{x^2+2x+4}+\frac{x^2+39}{x^3-8}=\frac{5}{x-2}$;

2) $\frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{x+3}=\frac{8}{x^2+2x-3}$.

768.•• Розв'яжіть рівняння методом заміни змінної:

1) $(x^2-2)^2-8(x^2-2)+7=0$;

2) $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)-24=0$;

3) $(x^2-3x+1)(x^2-3x+3)=3$;

4) $(x^2+2x+2)(x^2+2x-4)=-5$.

769.•• Розв'яжіть рівняння методом заміни змінної:

1) $\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2-\frac{6(2x-1)}{x}+5=0$;

2) $\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{3x-1}=3\frac{1}{3}$.

770.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2-6x)^2+(x^2-6x)-56=0$;

2) $(x^2+8x+3)(x^2+8x+5)=63$;

3) $\frac{x^4}{(x-2)^2}-\frac{4x^2}{x-2}-5=0$;

4) $\frac{x+4}{x-3}-\frac{x-3}{x+4}=\frac{3}{2}$.

771.* Для кожного значення *a* розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-8x+7}{x-a}=0$;

2) $\frac{x-a}{x^2-8x+7}=0$;

3) $\frac{x^2-(3a+2)x+6a}{x-6}=0$;

4) $\frac{a(x-a)}{x+3}=0$.

772.* При яких значеннях *a* рівняння $\frac{x^2-ax+5}{x-1}=0$ має єдиний корінь?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

773. Чи є правильним твердження, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу

$$(a-1)^2\left(\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{a^2-2a+1}\right)+\frac{2}{a+1}$$

є додатним числом?

774. Яким числом, раціональним чи ірраціональним, є значення виразу $\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}-\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}$?

775. Побудуйте графік функції $y=\begin{cases}-\frac{8}{x}, \text{ якщо } x<-2,\\ x^2, \text{ якщо } x\geqslant -2.\end{cases}$

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

776. На екрані монітора комп'ютера записано число 1. Щосекунди комп'ютер додає до числа, що знаходиться на екрані, суму його цифр. Чи може через якийсь час на екрані з'явитися число 123 456 789?

Розв’язування рівнянь методом заміни змінної

У п. 22 ви ознайомилися з розв’язуванням рівнянь методом заміни змінної. Розглянемо ще кілька прикладів, які ілюструють ефективність цього методу.

ПРИКЛАД 1 Розв’яжіть рівняння

$$\frac{x^2-3x-6}{x}-\frac{8x}{x^2-3x-6}=-2.$$

Розв’язання. Нехай $\frac{x^2-3x-6}{x}=t$. Тоді $\frac{8x}{x^2-3x-6}=\frac{8}{t}$.

Отримуємо рівняння $t-\frac{8}{t}=-2$. Це рівняння рівносильне системі $\begin{cases} t^2+2t-8=0, \\ t\neq 0. \end{cases}$

Звідси $t_1=-4$, $t_2=2$.

Тепер розв’язування заданого рівняння зводиться до розв’язування двох рівнянь:

1) $\frac{x^2-3x-6}{x}=-4$;

2) $\frac{x^2-3x-6}{x}=2$.

Розв’яжіть ці рівняння самостійно.

Відповідь: –3; –1; 2; 6. ▲

ПРИКЛАД 2 Розв’яжіть рівняння

$$(2x^2+3x-1)^2-10x^2-15x+9=0.$$

Розв’язання. Перетворимо це рівняння:

$$(2x^2+3x-1)^2-10x^2-15x+5+4=0;$$

$$(2x^2+3x-1)^2-5(2x^2+3x-1)+4=0.$$

Нехай $2x^2+3x-1=t$. Тоді $t^2-5t+4=0$.

Звідси $t_1=1$, $t_2=4$.

Отже, $2x^2 + 3x - 1 = 1$ або $2x^2 + 3x - 1 = 4$.

Розв'язавши ці два квадратних рівняння, отримуємо відповідь.

Відповідь: -2; $\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{2}$; 1. ▲

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння

$$(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2.$$

Розв'язання. За допомогою перевірки легко переконатися, що число 0 не є коренем даного рівняння. Тоді, поділивши обидві частини даного рівняння на x^2, перейдемо до рівносильного рівняння

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \cdot \frac{2x^2 + 5x + 1}{x} = 9.$$

Звідси $\left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9.$

Зробимо заміну: $2x + \frac{1}{x} - 3 = t$. Тоді $2x + 5 + \frac{1}{x} = t + 8$. Отримуємо рівняння $t(t + 8) = 9$, звідки $t_1 = 1$, $t_2 = -9$.

З урахуванням заміни отримуємо два рівняння:

1) $2x + \frac{1}{x} - 3 = 1$;

2) $2x + \frac{1}{x} - 3 = -9$.

Розв'яжіть ці рівняння самостійно.

Відповідь: $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$; $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$. ▲

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння

$$7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9.$$

Розв'язання. Нехай $x + \frac{1}{x} = t$. Тоді $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$.

Звідси $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$; $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Така заміна дає змогу переписати початкове рівняння таким чином:

$$7t - 2(t^2 - 2) = 9;$$
$$2t^2 - 7t + 5 = 0.$$

Звідси $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{5}{2}$.

Отже, $x + \frac{1}{x} = 1$ або $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$.

Розв'яжіть ці рівняння самостійно.

Відповідь: $\frac{1}{2}$; 2. ▲

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння

$$(x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 - 2x + 2) = 10x^2.$$

Розв'язання. За допомогою перевірки можна переконатися, що число 0 не є коренем даного рівняння. Отже, можна розділити обидві частини рівняння на x^2. Отримаємо рівняння, рівносильне заданому:

$$\frac{(x^2 - 2x + 2)^2}{x^2} + \frac{3(x^2 - 2x + 2)}{x} = 10.$$

Заміна $\frac{x^2 - 2x + 2}{x} = t$ приводить до квадратного рівняння

$$t^2 + 3t - 10 = 0.$$

Завершіть розв'язування самостійно.

Відповідь: $2 - \sqrt{2}$; $2 + \sqrt{2}$; –1; –2. ▲

Може виникнути запитання: чому під час розв'язування прикладів 1–5 ми не пробували спростити рівняння за допомогою тотожних перетворень?

Річ у тім, що, виконавши тотожні перетворення, ми стикнулися б із необхідністю розв'язувати рівняння виду $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (ви можете переконатися в цьому самостійно). При $a \neq 0$ таке рівняння називають **рівнянням четвертого степеня**, при $a = 0$ і $b \neq 0$ — **рівнянням третього степеня**. Окремим видом рівняння четвертого степеня при $b = 0$ і $d = 0$ є біквадратне рівняння. Його ви розв'язувати вмієте.

У загальному випадку для розв'язування рівнянь третього й четвертого степенів необхідно знати формули знаходження їхніх коренів. З історією відкриття цих формул ви можете ознайомитися в наступному оповіданні.

ВПРАВИ

Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{3x^2 - 9x}{2} - \dfrac{12}{x^2 - 3x} = 3;$

2) $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{8}{(x-1)(x+4)} = 1;$

3) $x(x + 3)(x + 5)(x + 8) = 100;$

4) $(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2;$

5) $7\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 9;$

6) $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1);$

7) $(x - 6)^4 + (x - 4)^4 = 82.$

Таємна зброя Сципіона дель Ферро

Ви легко розв'яжете кожне з таких рівнянь третього степеня:

$$x^3 - 8 = 0, \quad x^3 + x^2 = 0, \quad x^3 - x = 0.$$

Усі вони є окремими видами рівняння виду $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, де x — змінна, a, b, c і d — деякі числа, причому $a \neq 0$. Вивести формулу його коренів — задача складна. Недарма появу цієї формули вважають видатним математичним відкриттям XVI століття.

Першим винайшов розв'язання рівняння виду $x^3 + px = q$, де p і q — додатні числа, італійський математик Сципіон дель Ферро (1465–1526). Знайдену формулу він зберігав у секреті. Це було зумовлено тим, що кар'єра вченого того часу багато в чому залежала від його виступів у публічних математичних турнірах. Тому було вигідно зберігати відкриття в таємниці, розраховуючи використати їх у математичних змаганнях як секретну зброю.

Після смерті дель Ферро його учень Фіоре, володіючи секретною формулою, викликав на математичний двобій талановитого математика-самоучку Нікколо Тарталья. За кілька днів до турніру Тарталья сам вивів формулу коренів рівняння третього степеня. Диспут, на якому Тарталья здобув переконливу перемогу, відбувся 20 лютого 1535 року.

Уперше секретну формулу було опубліковано в книзі відомого італійського вченого Джероламо Кардано «Велике мистецтво». У цій роботі також описано метод розв'язування рівняння четвертого степеня, відкритий Людовіко Феррарі (1522–1565).

Нікколо Тарталья
(1499–1557)

Джероламо Кардано
(1501–1576)

Нільс Хенрік Абель
(1802–1829)

У XVII–XVIII ст. зусилля багатьох провідних математиків зосередилися на пошуку формули для розв'язання рівнянь п'ятого степеня. Отриманню результату сприяли роботи італійського математика Паоло Руффіні (1765–1822) та норвезького математика Нільса Хенріка Абеля. Сам результат виявився цілком несподіваним: було доведено, що не існує формули, за допомогою якої можна виразити корені будь-якого рівняння п'ятого й вищого степенів через коефіцієнти рівняння, використовуючи лише чотири арифметичні дії та дію добування кореня.

23. Раціональні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій

У п. 7 ви вже ознайомилися із задачами, у яких раціональні рівняння слугували математичними моделями реальних ситуацій. Тепер, коли ви навчилися розв'язувати квадратні рівняння, можна істотно розширити коло задач, які розглядаються.

ПРИКЛАД 1 Із пункту *A* виїхав велосипедист, а через 45 хв після цього в тому самому напрямку виїхала вантажівка, яка наздогнала велосипедиста на відстані 15 км від пункту *A*. Знайдіть швидкість велосипедиста та швидкість вантажівки, якщо швидкість вантажівки на 18 км/год більша за швидкість велосипедиста.

Розв'язання. Нехай швидкість велосипедиста дорівнює x км/год, тоді швидкість вантажівки становить $(x + 18)$ км/год. Велосипедист проїжджає 15 км за $\frac{15}{x}$ год, а вантажівка — за $\frac{15}{x+18}$ год. Різниця $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18}$ показує, на скільки годин вантажівка проїжджає 15 км швидше, ніж велосипедист. Оскільки вантажівка проїхала 15 км на 45 хв, тобто на $\frac{3}{4}$ год, швидше, ніж велосипедист, то отримуємо рівняння $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4}$.

Розв'яжемо це рівняння:

$$\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4};$$

$$\frac{5}{x} - \frac{5}{x+18} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{20x + 360 - 20x - x^2 - 18x}{4x(x+18)} = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 + 18x - 360 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -18. \end{cases}$$

Розв'язавши квадратне рівняння системи, отримаємо $x = 12$ або $x = -30$.

Корінь –30 не задовольняє умову задачі.

Отже, швидкість велосипедиста дорівнює 12 км/год, а швидкість вантажівки становить: 12 + 18 = 30 (км/год).

Відповідь: 12 км/год, 30 км/год. ▲

ПРИКЛАД 2 Одна бригада працювала на ремонті дороги 7 год, після чого до неї приєдналася друга бригада. Через 2 год їхньої спільної роботи ремонт було закінчено. За скільки годин може відремонтувати дорогу кожна бригада, працюючи самостійно, якщо першій для цього потрібно на 4 год більше, ніж другій?

Розв'язання. Нехай перша бригада може самостійно відремонтувати дорогу за x год, тоді другій для цього потрібно $(x - 4)$ год. За 1 год перша бригада ремонтує

$\frac{1}{x}$ частину дороги, а друга — $\frac{1}{x-4}$ частину дороги. Перша бригада працювала 9 год і відремонтувала $\frac{9}{x}$ дороги, а друга бригада працювала 2 год і відремонтувала відповідно $\frac{2}{x-4}$ дороги. Оскільки в результаті було відремонтовано всю дорогу, то можна скласти рівняння $\frac{9}{x}+\frac{2}{x-4}=1.$

Отримане рівняння має два корені $x_1 = 12$ і $x_2 = 3$ (переконайтеся в цьому самостійно). Другий корінь не задовольняє умову задачі, оскільки тоді друга бригада мала б відремонтувати дорогу за $3 - 4 = -1$ (год), що не має змісту.

Отже, перша бригада може відремонтувати дорогу за 12 год, а друга — за 8 год.

Відповідь: 12 год, 8 год. ▲

ПРИКЛАД 3 Водний розчин солі містив 120 г води. Після того як до розчину додали 10 г солі, її концентрація збільшилася на 5 %. Скільки грамів солі містив розчин спочатку?

Розв'язання. Нехай початковий розчин містив x г солі. Тоді його маса дорівнювала $(x + 120)$ г, а концентрація солі становила $\frac{x}{x+120}$. Після того як до розчину додали 10 г солі, її маса в розчині склала $(x + 10)$ г, а маса розчину — $(x + 130)$ г. Тепер концентрація солі становить $\frac{x+10}{x+130}$, що на 5 %, тобто на $\frac{1}{20}$, більше, ніж $\frac{x}{x+120}$. Звідси можна записати: $\frac{x+10}{x+130}-\frac{x}{x+120}=\frac{1}{20}.$

Отримане рівняння має два корені: $x_1 = 30$ і $x_2 = -280$ (переконайтеся в цьому самостійно), з яких другий корінь не задовольняє умову задачі.

Отже, розчин містив спочатку 30 г солі.

Відповідь: 30 г. ▲

ВПРАВИ

777.° Перші 150 км дороги з міста *A* до міста *B* автомобіль проїхав з певною швидкістю, а решту 240 км — зі швидкістю на 5 км/год більшою. Знайдіть початкову швидкість автомобіля, якщо на весь шлях із міста *A* до міста *B* він витратив 5 год.

778.° Перший мотоцикліст проїжджає 90 км на 18 хв швидше за другого, оскільки його швидкість на 10 км/год більша за швидкість другого мотоцикліста. Знайдіть швидкість кожного мотоцикліста.

779.° З одного міста в друге, відстань між якими дорівнює 240 км, виїхали одночасно автобус і автомобіль. Автобус рухався зі швидкістю на 20 км/год меншою, ніж автомобіль, і прибув до пункту призначення на 1 год пізніше за автомобіль. Знайдіть швидкість автомобіля та швидкість автобуса.

780.° Поїзд запізнювався на 10 хв. Щоби прибути на станцію призначення вчасно, він за 80 км від цієї станції збільшив швидкість на 16 км/год. Знайдіть початкову швидкість поїзда.

781.° Із села Вишневе в село Яблуневе, відстань між якими дорівнює 15 км, вершник проскакав з певною швидкістю. Повертався він зі швидкістю на 3 км/год більшою і витратив на зворотний шлях на 15 хв менше, ніж на шлях із Вишневого до Яблуневого. Знайдіть початкову швидкість вершника.

782.$^\bullet$ Операторка комп'ютерного набору мала за деякий час набрати 180 сторінок тексту. Проте вона виконала цю роботу на 5 год раніше строку, оскільки набирала щогодини на 3 сторінки більше, ніж планувала. Скільки сторінок вона набирала щогодини?

783.$^\bullet$ Перший насос перекачує 90 м^3 води на 1 год швидше, ніж другий перекачує 100 м^3. Скільки кубічних метрів води щогодини перекачує кожен насос, якщо перший перекачує за годину на 5 м^3 води більше, ніж другий?

784.$^\bullet$ Робітник мав за певний час виготовити 72 деталі. Проте щодня він виготовляв на 4 деталі більше, ніж планував, і закінчив роботу на 3 дні раніше строку. За скільки днів він виконав роботу?

785.$^\bullet$ Катер пройшов 16 км за течією річки та 30 км проти течії, витративши на весь шлях 1 год 30 хв. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 1 км/год.

786.$^\bullet$ Човен проплив 15 км за течією річки й повернувся назад, витративши на зворотний шлях на 1 год більше. Знайдіть швидкість човна за течією річки, якщо швидкість течії становить 2 км/год.

787.$^\bullet$ За течією річки від пристані відплив пліт. Через 4 год від цієї пристані в тому самому напрямку відчалив човен, який наздогнав пліт на відстані 15 км від пристані. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість човна становить 12 км/год.

788.$^\bullet$ Катер пройшов 45 км за течією річки та 28 км проти течії, витративши на весь шлях 4 год. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість катера становить 18 км/год.

789.• Туристка пропливла $\frac{5}{8}$ усього шляху на катері, а решту проїхала на автомобілі. Швидкість автомобіля на 20 км/год більша за швидкість катера. Автомобілем вона їхала на 1 год 30 хв менше, ніж пливла катером. Знайдіть швидкість автомобіля та швидкість катера, якщо всього туристка подолала 160 км.

790.• Міжміський автобус мав проїхати 72 км. Після того як він проїхав 24 км, його затримали біля залізничного переїзду на 12 хв. Потім він збільшив швидкість на 12 км/год і прибув у пункт призначення із запізненням на 4 хв. Знайдіть початкову швидкість автобуса.

791.• Група школярів і школярок виїхала на екскурсію з міста *A* до міста *B* автобусом, а повернулася до міста *A* залізницею, витративши на зворотний шлях на 30 хв більше, ніж на шлях до міста *B*. Знайдіть швидкість поїзда, якщо вона на 20 км/год менша, ніж швидкість автобуса, довжина шосе між містами *A* і *B* становить 160 км, а довжина залізничної колії — 150 км.

792.• Турист проплив на байдарці 4 км по озеру і 5 км за течією річки за той самий час, за який він проплив би 6 км проти течії. З якою швидкістю турист плив по озеру, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год?

793.• Теплохід пройшов 16 км по озеру, а потім 18 км по річці, яка бере початок із цього озера, за 1 год. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії річки становить 4 км/год.

794.• Знаменник звичайного дробу на 3 більший за його чисельник. Якщо чисельник цього дробу збільшити на 4, а знаменник — на 8, то отриманий дріб буде на $\frac{1}{6}$ більший за даний. Знайдіть даний дріб.

795.° Чисельник звичайного дробу на 5 менший від його знаменника. Якщо чисельник цього дробу зменшити на 3, а знаменник збільшити на 4, то отриманий дріб буде на $\frac{1}{3}$ менший від даного. Знайдіть даний дріб.

796.° Дві робітниці, працюючи разом, можуть виконати виробниче завдання за 20 днів. За скільки днів може виконати це завдання кожна із них, працюючи самостійно, якщо одній із них для цього потрібно на 9 днів більше, ніж другій?

797.° Одному маляру потрібно на 5 год більше, ніж другому, щоби пофарбувати фасад будинку. Коли перший маляр пропрацював 3 год, а потім його змінив другий, який пропрацював 2 год, то виявилося, що пофарбовано 40 % площі фасаду. За який час може пофарбувати фасад кожний маляр, працюючи самостійно?

798.° Першого дня трактористка орала поле 6 год. Другого дня до неї приєдналася друга трактористка, і через 8 год спільної роботи вони закінчили оранку. За скільки годин може зорати це поле кожна трактористка, працюючи самостійно, якщо першій для цього потрібно на 3 год менше, ніж другій?

799.° До розчину, який містив 20 г солі, додали 100 г води, після чого концентрація солі зменшилася на 10 %. Скільки грамів води містив розчин спочатку?

800.° Зливок сплаву міді та цинку, який містив 10 кг цинку, сплавили з 10 кг міді. Відсотковий вміст міді в одержаному сплаві виявився на 5 % більшим, ніж у початковому. Скільки кілограмів міді містив початковий зливок сплаву?

801.•• Через 2 год 40 хв після відправлення плота від пристані *A* за течією річки назустріч йому від пристані *B* відійшов катер. Знайдіть швидкість течії річки, якщо пліт і катер зустрілися на відстані 14 км від пристані *A*, швидкість катера в стоячій воді дорівнює 12 км/год, а відстань між пристанями *A* і *B* становить 32 км.

802.•• До басейну підведено дві труби. Через одну трубу воду наливають у басейн, а через другу зливають, причому для зливу води потрібно на 1 год більше, ніж для наповнення басейну. Якщо ж відкрити обидві труби одночасно, то басейн наповниться водою за 30 год. За скільки годин можна наповнити порожній басейн водою через першу трубу?

803.•• Для наповнення басейну через першу трубу потрібно стільки ж часу, як і для наповнення через другу й третю труби одночасно. Через першу трубу басейн наповнюється на 2 год швидше, ніж через другу, і на 8 год швидше, ніж через третю. Скільки часу потрібно для наповнення басейну через кожну трубу?

804.•• Автобус мав проїхати відстань між двома містами, яка дорівнює 400 км, з деякою швидкістю. Проїхавши 2 год із запланованою швидкістю, він зупинився на 20 хв і, щоби прибути в пункт призначення вчасно, збільшив швидкість руху на 10 км/год. З якою швидкістю автобус мав проїхати відстань між містами?

805.•• Робітник за певний час мав виготовити 360 деталей. Перші 5 днів він щоденно виготовляв заплановану кількість деталей, а потім щодня виготовляв на 4 деталі більше, і вже за день до строку виготовив 372 деталі. Скільки деталей щодня мав виготовляти робітник за планом?

806.•• Щоб виконати певне виробниче завдання, першому робітникові потрібно на 12 год менше, ніж другому, і на 4 год більше, ніж обом робітникам для спільного виконання завдання. За скільки годин може виконати це завдання перший робітник?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

807. Обчисліть:

1) $(27 \cdot 3^{-4})^2$; 2) $\frac{7^{-4} \cdot 7^{-9}}{7^{-12}}$; 3) $(10^9)^2 \cdot 1000^{-6}$.

808. Знайдіть значення виразу $a^2 - 2a\sqrt{5} + 2$ при $a = \sqrt{5} - 3$.

809. Побудуйте графік функції $y = -2x + 4$.

1) Чому дорівнює нуль даної функції?
2) Укажіть значення x, при яких $y > 0$.
3) Чи проходить графік функції через точку M (–36; 68)?

810. При якому значенні k графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку $A\left(-\sqrt{12}; \sqrt{3}\right)$? Побудуйте цей графік.

811. Яка з рівностей є правильною: $\sqrt{\left(\sqrt{3} - 2\right)^2} = \sqrt{3} - 2$ або $\sqrt{\left(\sqrt{3} - 2\right)^2} = 2 - \sqrt{3}$? Відповідь обґрунтуйте.

812. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{1}{4}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}$; 2) $\left(\frac{a^4}{b^{-5}}\right)^{-3}$; 3) $(0,2a^{-1}b^2)^2 \cdot 4a^5b^{-4}$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

813. На тарілці лежать 9 шматочків сиру різної маси. Доведіть, що можна один зі шматочків сиру розрізати на дві частини так, що одержані 10 шматочків можна буде розкласти на дві тарілки й при цьому маса сиру на кожній із них буде однаковою.

Перша ЕОМ в Європі

Бурхливий розвиток обчислювальної техніки за останні десятиліття породив цілу низку нових математичних дисциплін і запропонував новий метод наукових і прикладних досліджень — моделювання процесів на електронних обчислювальних машинах (з деякими математичними моделями ви ознайомилися в пп. 7, 23).

Сьогодні важко уявити своє життя без комп’ютерів. І тим складніше повірити, що їхня історія налічує менше ніж сто років.

Перша у світі електронна обчислювальна машина ЕНІАК була створена в США наприкінці 40-х рр. XX ст. і використовувалася для розрахунків траєкторії польоту снарядів берегової артилерії.

А перша в континентальній Європі електронна обчислювальна машина була створена в Києві.

Наприкінці 1947 р. лабораторія спецмоделювання і електронної техніки Інституту електротехніки Академії наук України під керівництвом академіка Сергія Олексійовича Лебедєва розпочала роботу над створенням так

Будинок у передмісті Києва — Феофанії, де було створено МЕСМ

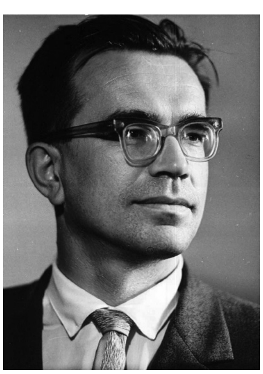
С. О. Лебедєв
(1902–1974)

званої «модели электронной счетной машины» — МЭСМ. І в грудні 1951 р. МЕСМ уже розв'язувала практичні задачі, які для неї програмували співробітники Інституту математики АН України. Більше року МЕСМ була не тільки першою, а й єдиною ЕОМ у континентальній Європі.

У 1957 р. було створено Обчислювальний центр Академії наук України, який у 1962 р. був перетворений в Інститут кібернетики. Засновник інституту, академік Віктор Михайлович Глушков до 1982 р. був його директором.

Перші задачі, для розв'язування яких були застосовані ЕОМ, задовольняли потреби атомної та ракетної техніки. За допомогою ЕОМ проводили розрахунки траєкторій пілотних і безпілотних систем у реальному масштабі часу, вибір оптимальних конструкцій серед множини можливих варіантів. Такі задачі є характерними для швидкодіючих комп'ютерів і в наш час.

Інститут кібернетики був колискою вітчизняних наукових кадрів у галузі кібернетики, інформатики, обчислювальної техніки. Наукові здобутки його співробітників відомі в усьому світі. І сьогодні засади побудови елементної бази



В. М. Глушков
(1923–1982)

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

обчислювальної техніки, математичного моделювання, теорії автоматів, автоматизованих систем керування, інших комп'ютерних дисциплін багато в чому ґрунтуються на працях українських науковців. Учені інституту заснували всесвітньо відомі наукові школи з математичної кібернетики та теорії обчислювальних машин і систем, теорії оптимізації та системного аналізу, математичного моделювання, математичної теорії надійності, теорії програмування тощо.

У 1992–1997 рр. на базі автономних підрозділів Інституту кібернетики створено Інститут програмних систем Національної академії наук (НАН) України, Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, Інститут космічних досліджень НАН України та Національної космічної агенції (НКА) України, Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» Міністерства освіти і науки (МОН) України та НАН України, Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій і систем НАН України та МОН України, які ввійшли до складу створеного в 1992 р. Кібернетичного центру НАН України.

ЗАВДАННЯ № 6 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Знайдіть корені квадратного тричлена $5x^2 - x - 6$.

А) 2; –0,6; Б) –2; 0,6; В) 1; –1,2; Г) –1; 1,2.

2. Розкладіть на множники квадратний тричлен $-x^2 - 4x + 5$.

А) $(x - 1)(x + 5)$; В) $-(x - 1)(x + 5)$;
Б) $(x + 1)(x - 5)$; Г) $-(x + 1)(x - 5)$.

3. Скоротіть дріб $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+x-6}$.

А) $\dfrac{x+4}{x-2}$; Б) $\dfrac{x-4}{x-2}$; В) $\dfrac{x+4}{x+2}$; Г) $\dfrac{x-4}{x+2}$.

4. Розв'яжіть рівняння $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$.

А) –3; 3; В) –3; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 3;
Б) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; Г) $\sqrt{2}$; 3.

5. Знайдіть корені рівняння $(x^2 - 4x)^2 - 2(x^2 - 4x) - 15 = 0$.

А) –1; 1; 3; 5; В) 1; 3;
Б) –1; 5; Г) 1; 3; 5.

6. Розв'яжіть рівняння $x - \sqrt{x} - 12 = 0$.

А) –3; 4; Б) –2; 2; В) 16; Г) 9; 16.

7. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{x^2-6}{x-3} = \dfrac{x}{x-3}$.

А) –2; Б) 3; В) –2; 3; Г) –3; 2.

8. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{3x-1}{x} - \dfrac{4}{x-2} = \dfrac{10-9x}{x^2-2x}$.

А) $-\dfrac{4}{3}$; 2; В) $-\dfrac{4}{3}$;
Б) $\dfrac{4}{3}$; –2; Г) 2.

9. З одного міста в інше, відстань між якими дорівнює 350 км, виїхали одночасно вантажний і легковий автомобілі. Швидкість вантажівки на 20 км/год менша від швидкості легкового автомобіля, через що вона прибула до пункту призначення на 2 год пізніше за легковий автомобіль.

Нехай швидкість вантажного автомобіля дорівнює x км/год. Яке з рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові задачі?

А) $\frac{350}{x} - \frac{350}{x+20} = 2;$ В) $\frac{350}{x+20} - \frac{350}{x} = 2;$

Б) $\frac{350}{x} + \frac{350}{x+20} = 2;$ Г) $\frac{350}{x} - \frac{350}{x-20} = 2.$

10. Катер проплив 30 км за течією річки та повернувся назад, витративши на весь шлях 3 год 10 хв. Швидкість течії річки дорівнює 1 км/год.

Нехай власна швидкість катера становить x км/год. Яке з рівнянь відповідає умові задачі?

А) $\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x-1} = 3{,}1;$ В) $\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x} = 3\frac{1}{6};$

Б) $\frac{30}{x+1} - \frac{30}{x-1} = 3{,}1;$ Г) $\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x-1} = 3\frac{1}{6}.$

11. Робітник мав за деякий час виготовити 96 деталей. Щодня він виготовляв на 2 деталі більше, ніж планував, і закінчив роботу на 3 дні раніше строку.

Нехай робітник виготовляв щодня x деталей. Яке з рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові задачі?

А) $\frac{96}{x} - \frac{96}{x-2} = 3;$ В) $\frac{96}{x} - \frac{96}{x-3} = 2;$

Б) $\frac{96}{x-2} - \frac{96}{x} = 3;$ Г) $\frac{96}{x-3} - \frac{96}{x} = 2.$

12. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати деяке виробниче завдання за 10 год, причому перший із них може виконати це завдання самостійно на 15 год швидше за другого.

Нехай перший робітник може самостійно виконати завдання за *x* год. Яке з рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові задачі?

А) $\frac{15}{x} + \frac{15}{10 - x} = 1$;

Б) $\frac{15}{x} + \frac{15}{x - 10} = 1$;

В) $\frac{10}{x} + \frac{10}{x + 15} = 1$;

Г) $\frac{10}{x} + \frac{10}{x - 15} = 1$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Рівняння першого степеня

Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають рівнянням першого степеня.

Квадратне рівняння

Рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратним рівнянням.

Зведене квадратне рівняння

Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають зведеним.

Неповне квадратне рівняння

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один із коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають неповним квадратним рівнянням.

Розв'язування неповного квадратного рівняння

Коефіцієнти рівняння $ax^2 + bx + c = 0$	Неповне квадратне рівняння	Корені
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0,\ c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0,\ -\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Коренів немає
$b = 0,\ -\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Дискримінант квадратного рівняння

Для рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де $a \neq 0$, його дискримінант D — це значення виразу $b^2 - 4ac$.

Розв'язування квадратного рівняння

Якщо $D < 0$, то квадратне рівняння коренів не має.

Якщо $D = 0$, то квадратне рівняння має один корінь $x = -\frac{b}{2a}$.

Якщо $D > 0$, то квадратне рівняння має два корені x_1 і x_2: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

Теорема Вієта

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорема, обернена до теореми Вієта

Якщо числа α і β такі, що $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ і $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то ці числа є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Квадратний тричлен

Многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають квадратним тричленом.

Розклад квадратного тричлена на множники

Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ додатний, то даний тричлен можна розкласти на лінійні множники: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена.

Біквадратне рівняння

Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають біквадратним рівнянням.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ КУРСУ АЛГЕБРИ 8 КЛАСУ

814. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{3m-n}{m+2n}$, якщо $m=-4$, $n=3$; 2) $\frac{a^2-2a}{4a+2}$, якщо $a=-0{,}8$.

815. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $7b-11$;
2) $\frac{9}{x}$;
3) $\frac{5}{2-y}$;
4) $\frac{m-3}{7}$;
5) $\frac{3+t}{4-t}$;
6) $\frac{2x}{x-1}-\frac{3}{x-6}$;
7) $\frac{5}{x^8+3}$;
8) $\frac{x-2}{|x|+7}$;
9) $\frac{4}{x^2-25}$;
10) $\frac{3}{|x|-5}$;
11) $\frac{x}{8+\frac{4}{x}}$;
12) $\frac{5}{6-\frac{2}{x}}$;
13) $\frac{1}{(x-3)(x-4)}$;
14) $\frac{x+8}{(x+8)(x-3)}$?

816. Скоротіть дріб:

1) $\frac{8a^2c^3}{4a^3c^2}$; 2) $\frac{25mn^2}{75m^8n}$; 3) $\frac{60a^3bc^2d^5}{18a^4b^2c^6d}$; 4) $\frac{42x^8y^9}{14x^6y^3}$.

817. Подайте частку у вигляді дробу та скоротіть отриманий дріб:

1) $4mn^2p : (28m^2np^6)$;
2) $-30x^5y^3 : (36x^4y^8)$;
3) $-63xy^9 : (-72xy^7)$.

818. Скоротіть дріб:

1) $\frac{3x-6y}{3x}$;
2) $\frac{3a+9b}{4a+12b}$;
3) $\frac{a^2-49}{3a+21}$;
4) $\frac{12x^2-4x}{2-6x}$;
5) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$;
6) $\frac{b^7+b^4}{b^2+b^5}$;

7) $\frac{a^3+64}{3a+12}$;

8) $\frac{xb-5y+5b-xy}{x^2-25}$;

9) $\frac{7m^2-7m+7}{14m^3+14}$;

10) $\frac{a^2+bc-b^2+ac}{ab+c^2+ac-b^2}$;

11) $\frac{20mn^2-20m^2n+5m^3}{10mn-5m^2}$;

12) $\frac{x^2-yz+xz-y^2}{x^2+yz-xz-y^2}$.

819. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{x^5y^7-x^3y^9}{x^3y^7}$, якщо $x=-0{,}2$, $y=0{,}5$;

2) $\frac{4a^2-36}{5a^2-30a+45}$, якщо $a=2$;

3) $\frac{(3a+3b)^2}{3a^2-3b^2}$, якщо $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{6}$;

4) $\frac{20x^2-140xy+245y^2}{4x-14y}$, якщо $2x-7y=-0{,}5$.

820. Скоротіть дріб (n — натуральне число):

1) $\frac{100^n}{2^{2n+3}\cdot5^{2n+1}}$;

2) $\frac{2^{2n+1}\cdot7^{n+1}}{6\cdot28^n}$;

3) $\frac{5^{n+1}-5^n}{2\cdot5^n}$;

4) $\frac{18^n}{3^{2n+2}\cdot2^{n+3}}$;

5) $\frac{41\cdot9^n}{9^{n+2}+9^n}$.

821. Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $(a+2)x=7$;

2) $(a+6)x=a+6$;

3) $(a+3)x=a^2+6a+9$;

4) $(a^2-4)x=a-2$.

822. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{7a}{22}+\frac{4a}{22}$;

2) $\frac{8x}{3y}-\frac{5x}{3y}$;

3) $\frac{7x-2y}{15p}+\frac{3x+7y}{15p}$;

4) $\frac{x+y}{9p}-\frac{x}{9p}$;

5) $\frac{a}{8}-\frac{a-b}{8}$;

6) $\frac{7p-17}{5k}+\frac{7-2p}{5k}$;

7) $\frac{6a^2-4a}{15a}-\frac{a^2+a}{15a}$; 9) $\frac{10x-6}{x}-\frac{4x+11}{x}$.

8) $\frac{x-y}{8}+\frac{x+y}{8}$;

823. Спростіть вираз:

1) $\frac{7y}{y^2-4}-\frac{14}{y^2-4}$; 5) $\frac{(3a-1)^2}{4a-4}+\frac{(a-3)^2}{4-4a}$;

2) $\frac{y^2-3y}{25-y^2}-\frac{7y-25}{25-y^2}$; 6) $\frac{x^2-3x}{(2-x)^2}-\frac{x-4}{(x-2)^2}$;

3) $\frac{9p+5}{3p+6}-\frac{10p-12}{3p+6}+\frac{9p-1}{3p+6}$; 7) $\frac{7}{a-2}-\frac{b}{2-a}$;

4) $\frac{7x+5}{3-x}+\frac{5x+11}{x-3}$; 8) $\frac{6a}{5-a}-\frac{4a}{a-5}$.

824. Виконайте дії:

1) $\frac{8}{x}-\frac{5}{y}$; 3) $\frac{5}{24xy}-\frac{7}{18xy}$;

2) $\frac{7}{ab}+\frac{5}{b}$; 4) $\frac{5b^2-8b+1}{a^2b^2}-\frac{2b-1}{a^2b}$.

825. Виконайте дії:

1) $\frac{2a-1}{a-4}-\frac{3a+2}{2(a-4)}$;

2) $\frac{x+2}{3x+9}-\frac{4-x}{5x+15}$;

3) $\frac{m+1}{m-3}-\frac{m+2}{m+3}$;

4) $\frac{x}{x+y}-\frac{2y^2}{y^2-x^2}-\frac{y}{x-y}$;

5) $\frac{m}{3m-2n}-\frac{3m^2-3mn}{9m^2-12m+4n^2}$;

6) $\frac{a+3}{a^2-2a}-\frac{a-2}{5a-10}+\frac{a+2}{5a}$;

7) $\frac{3}{3a-3}-\frac{a-1}{2a^2-4a+2}$;

8) $2-\frac{14}{m-2}-m$;

9) $\frac{2x+1}{x^2-6x+9}-\frac{8}{x^2-9}-\frac{2x-1}{x^2+6x+9}$.

826. Доведіть тотожність

$$\frac{1}{(b-c)(c-a)}-\frac{1}{(a-b)(c-b)}+\frac{1}{(a-c)(b-a)}=0.$$

827. Запишіть дріб у вигляді суми цілого виразу та дробу:

1) $\frac{a-7}{a}$; 2) $\frac{a^2+2a-2}{a+2}$; 3) $\frac{x^2+3x-2}{x-3}$.

828. Відомо, що $\frac{x}{y}=4$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{x+y}{x}$; 2) $\frac{3x+4y}{x}$.

829. Знайдіть усі натуральні значення n, при яких є натуральним числом значення виразу:

1) $\frac{12n^2-5n+33}{n}$; 3) $\frac{10-4n}{n}$;

2) $\frac{n^3-6n^2+54}{n^2}$; 4) $\frac{12-3n}{n}$.

830. Виразіть змінну x через інші змінні, якщо:

1) $x+\frac{a}{b}=1$; 2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=b$; 3) $\frac{a}{b}+\frac{x}{4}=\frac{b}{a}$.

831. Доведіть тотожність:

1) $\frac{1}{a^2+12a+36}+\frac{2}{36-a^2}+\frac{1}{a^2-12a+36}=\frac{144}{(a^2-36)^2}$;

2) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$.

832.* Спростіть вираз

$$\frac{1}{a(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+6)}+\frac{1}{(a+6)(a+9)}+\frac{1}{(a+9)(a+12)}.$$

833.* Доведіть, що коли $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{a-b+c}{a-b-c}$, то $b=0$ або $c=0$.

834. Виконайте множення:

1) $\frac{9x}{y}\cdot\frac{y}{24x}$;

2) $\frac{m^2n^3}{25t}\cdot\left(\frac{-5t}{mn^2}\right)$;

3) $\frac{16a^4}{21b^5}\cdot\frac{9b^2}{10a^3}$;

4) $26m^2\cdot\frac{3n^2}{13m^4}$;

5) $\frac{24t^7}{16u^3}\cdot 34u^5$;

6) $\frac{4x^5y^2}{7a^3b}\cdot\frac{21xb^2}{10y^3a^2}\cdot\frac{25a^5y}{3x^4b}$.

835. Виконайте множення:

1) $\frac{2xy-y^2}{9}\cdot\frac{36}{y^4}$;

2) $\frac{a^2-7ab}{a^2+2ab}\cdot\frac{a^2b+2ab^2}{a^3-7a^2b}$;

3) $\frac{m^2-64}{m^3-9m^2}\cdot\frac{m^2-81}{m^2+8m}$;

4) $\frac{2x^2-16x+32}{3x^2-6x+12}\cdot\frac{x^3+8}{4x^2-64}$.

836. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\left(\frac{a^5}{x^4}\right)^2$;

2) $\left(-\frac{4y}{3m^2}\right)^4$;

3) $\left(-\frac{10x^2y^5}{3a^4b^3}\right)^3$;

4) $\left(-\frac{2a^4b^4}{25x^5}\right)^2\cdot\left(-\frac{5x^2}{4a^2b^3}\right)^3$.

837. Виконайте ділення:

1) $\frac{x^2-10x+25}{x^2-100}:\frac{x-5}{x-10}$;

2) $\frac{a^2-1}{a-8}:\frac{a^2+2a+1}{a-8}$;

3) $\frac{ab+b^2}{8b}:\frac{ab+a^2}{2a}$;

4) $\dfrac{2c-3}{c-1}:(2c-3);$

5) $\dfrac{x^2-16y^2}{25x^2-4y^2}:\dfrac{x^2+8xy+16y^2}{25x^2+20xy+4y^2};$

6) $\dfrac{n^2-3n}{49n^2-1}:\dfrac{n^4-27n}{49n^2-14n+1};$

7) $\dfrac{m^{12}-n^{15}}{2m^{10}-8n^{14}}:\dfrac{5m^8+5m^4n^5+5n^{10}}{3m^5+6n^7};$

8) $\dfrac{5a^2-20ab}{3a^2+b^2}:\dfrac{30\,(a-4b)^2}{9a^4-b^4}.$

838. Вважаючи дані дроби нескоротними, замініть x і y такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $\dfrac{x}{7a^2b^3}\cdot\dfrac{y}{4c}=\dfrac{6a^3c^2}{b};$ 2) $\dfrac{36m^2n^4}{x}:\dfrac{y}{35p^6}=\dfrac{21n}{5mp^3}.$

839. Дано: $3x-\dfrac{1}{x}=8.$ Знайдіть значення виразу $9x^2+\dfrac{1}{x^2}.$

840. Дано: $4x^2+\dfrac{1}{x^2}=6.$ Знайдіть значення виразу $2x-\dfrac{1}{x}.$

841. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{x^{3k}}{y^{2n}}:\dfrac{x^{6k}}{y^{5n}},$ де k і n — цілі числа;

2) $\dfrac{a^{k+5}\cdot b^{k+3}}{c^{3k+2}}:\dfrac{a^{k+3}\cdot b^{k+2}}{c^{2k+1}},$ де k — ціле число;

3) $\dfrac{(x^n+3y^n)^2-12x^ny^n}{x^{3n}+27y^{3n}}:\dfrac{x^{2n}-9y^{2n}}{(x^n-3y^n)^2+12x^ny^n},$ де n — ціле число.

842. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{a+4}{a-4}-\dfrac{a-4}{a+4}\right)\cdot\dfrac{16-a^2}{32a^3};$

2) $\left(7x-\dfrac{4x}{x-3}\right):\dfrac{14x-50}{3x-9};$

3) $\dfrac{2a}{a-2}+\dfrac{a+7}{8-4a}\cdot\dfrac{32}{7a+a^2}$;

4) $\left(\dfrac{9c}{c-8}+\dfrac{7c}{c^2-16c+64}\right):\dfrac{9c-65}{c^2-64}-\dfrac{8c+64}{c-8}$;

5) $\left(\dfrac{a^2}{a+b}-\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}\right):\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)$;

6) $\left(\dfrac{b}{b+6}+\dfrac{36+b^2}{36-b^2}-\dfrac{b}{b-6}\right):\dfrac{6b+b^2}{(6-b)^2}$;

7) $\left(\dfrac{2x}{x^3+1}:\dfrac{1-x}{x^2-x+1}+\dfrac{2}{x-1}\right)\cdot\dfrac{x^2-2x+1}{4}:\dfrac{x-1}{x+1}$.

843. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях a значення виразу

$$\left(\frac{1}{(a-3)^2}-\frac{6}{9-a^2}+\frac{9}{(a+3)^2}\right):\frac{4\,(2a-3)^2}{(a^2-9)\,(a^2-27)}-\frac{2a^2}{9-a^2}$$

не залежить від значення a.

844. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a+\dfrac{25}{a+10}}{\dfrac{25}{a}-a}$;

2) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{a}{1-\dfrac{1}{a+1}}}$.

845. Розв’яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2x+6}{x+3}=2$;

2) $\dfrac{x^2-16}{x+4}=-8$;

3) $\dfrac{2x-9}{2x+5}+\dfrac{3x}{3x-2}=2$;

4) $\dfrac{5x^2+8}{x^2-16}=\dfrac{2x-1}{x+4}-\dfrac{3x-1}{4-x}$.

846. Для кожного значення a розв’яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x+2}{x+a}=0$;

2) $\dfrac{x-a}{x-1}=0$.

847. Знайдіть значення виразу:

1) $2^{-3}+4^{-2}$;

2) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}+(-1{,}8)^0-5^{-1}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2}$;

4) $2^{-3} - 6^{-1} + 3^{-2}$.

848. Перетворіть вираз так, щоб він не містив степенів з від'ємними та нульовими показниками:

1) $\frac{3x^{-8}y^{5}z^{-12}}{7a^{0}b^{-3}c^{4}}$;

2) $\frac{1{,}001^{0}m^{-15}n^{-7}p^{-4}}{2^{-3}a^{-11}b^{16}c^{-22}}$.

849. Подайте вираз у вигляді степеня з основою a або добутку степенів з різними основами:

1) $a^{-7} \cdot a^{10}$;

2) $a^{-9} \cdot a^{5}$;

3) $a^{17} \cdot a^{-4} \cdot a^{-11}$;

4) $a^{-2} : a^{3}$;

5) $a^{12} : a^{-4}$;

6) $a^{-7} : a^{-11}$;

7) $a^{-12} : a^{-10} \cdot a^{4}$;

8) $(a^{3})^{-5}$;

9) $(a^{-12})^{-2}$;

10) $(a^{-3})^{4} : (a^{-2})^{5} : (a^{-1})^{-7}$;

11) $(m^{-3}n^{4}p^{7})^{-4}$;

12) $(a^{-1}b^{-2})^{-3}$;

13) $(x^{3}y^{-4})^{5} \cdot (x^{-2}y^{-3})^{3}$;

14) $\left(\frac{a^{11}b^{-7}}{c^{-3}d^{4}}\right)^{-3}$;

15) $\left(\frac{a^{-7}}{b^{5}}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a^{4}}{b^{-7}}\right)^{-5}$.

850. Знайдіть значення виразу:

1) $11^{-23} \cdot 11^{25}$;

2) $3^{17} \cdot 3^{-14}$;

3) $4^{-16} : 4^{-12}$;

4) $10^{-15} : 10^{-14} \cdot 10^{-2}$;

5) $(14^{-10})^{5} \cdot (14^{-6})^{-8}$;

6) $\frac{3^{-12} \cdot (3^{-6})^{-3}}{(3^{-3})^{-4} \cdot (3^{-4})^{2}}$.

851. Знайдіть значення виразу:

1) $25^{-3} \cdot 5^{8}$;

2) $64^{-3} : 32^{-3}$;

3) $10^{-10} : 1000^{-3} \cdot (0{,}001)^{-5}$;

4) $\frac{(-27)^{-12} \cdot 9^{5}}{81^{-4} \cdot 3^{-7}}$;

5) $\dfrac{15^4 \cdot 5^{-6}}{45^{-3} \cdot 3^9}$; 6) $\dfrac{(0{,}125)^{-8} \cdot 16^{-7}}{32^{-2}}$.

852. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{3}{5}x^{-3}y^5 \cdot \dfrac{5}{9}x^4y^{-7}$;

2) $0{,}2a^{12}b^{-9} \cdot 50a^{-10}b^{10}$;

3) $-0{,}3a^{10}b^7 \cdot 5a^{-8}b^{-6}$;

4) $0{,}36a^{-5}b^6c^3 \cdot \left(-2\dfrac{2}{9}\right)a^4b^{-4}c^{-5}$;

5) $2x^7 \cdot (-3x^{-2}y^3)^3$;

6) $(a^2b^9)^{-3} \cdot (-2a^4b^{10})$;

7) $(-5a^{-3}b^2c^{-2})^{-2} \cdot (0{,}1a^2b^{-3}c)^{-3}$;

8) $0{,}1m^{-5}n^4 \cdot (0{,}01m^{-3}n)^{-2}$;

9) $-6\dfrac{1}{4}a^{-7}b^4 \cdot \left(\dfrac{5}{2}a^{-2}b^2\right)^{-3}$;

10) $-(4a^{-4}b^3)^{-2} \cdot \left(-\dfrac{1}{8}a^3b^{-3}\right)^{-3}$;

11) $\dfrac{19a^{-15}}{33b^{-14}} \cdot \dfrac{11b^{-11}}{76a^{-17}}$;

12) $\left(\dfrac{9x^{-3}}{5y^{-2}}\right)^{-2} \cdot (27x^{-2}y^4)^2$.

853. Спростіть вираз:

1) $(a^{-5}-1)(a^{-5}+1)-(a^{-5}-2)^2$;

2) $\dfrac{y^{-2}-x^{-2}}{x+y}$;

3) $\dfrac{a^{-3}-3b^{-6}}{a^{-6}-2a^{-3}b^{-6}+b^{-12}} - \dfrac{a^{-3}+3b^{-6}}{a^{-6}-b^{-12}}$;

4) $\dfrac{m^{-4}+n^{-4}}{n^{-10}} : \dfrac{m^{-4}n^{-6}+n^{-10}}{n^{-2}}$;

5) $\frac{x^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}:\left(\frac{x^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}-\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-2}}\right)$;

6) $\frac{x^{-10}-4}{x^{-5}}\cdot\frac{1}{x^{-5}+2}-\frac{x^{-5}+2}{x^{-5}}$;

7) $\left(\frac{4c^{-6}}{c^{-6}+1}-\frac{c^{-6}}{c^{-12}+2c^{-6}+1}\right):\frac{4c^{-6}+3}{c^{-12}-1}+\frac{2c^{-6}}{c^{-6}+1}$.

854. Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді:

1) $1{,}3\cdot 10^{4}+1{,}8\cdot 10^{5}$;
2) $1{,}5\cdot 10^{2}-2{,}8\cdot 10^{-2}$;
3) $5{,}6\cdot 10^{3}-3{,}2\cdot 10^{2}$;
4) $4{,}8\cdot 10^{-3}+6\cdot 10^{-4}$.

855. Скоротіть дріб (n — ціле число):

1) $\frac{9^{n-1}}{3^{2n-3}}$;
2) $\frac{7^{n+1}\cdot 2^{n-1}}{14^{n}}$;
3) $\frac{2^{2n-1}\cdot 3^{n+1}}{12^{n}}$;
4) $\frac{a^{6}+a^{11}}{a^{-4}+a}$;
5) $\frac{a^{-3}+a^{-2}+a^{-1}}{a^{3}+a^{2}+a}$;
6) $\frac{6^{n+2}-6^{n}}{35}$;
7) $\frac{5^{n+2}-5^{n-2}}{5^{n}}$;
8) $\frac{2^{-n}+1}{2^{n}+1}$.

856. Функцію задано формулою $y=-\frac{24}{x}$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: –4; 8; 1,2;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 24; –18; 60.

857. Побудуйте графік функції $y=\frac{6}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 2; –1,5; 4;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: –2; 3; –4,5;

3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

858. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{5}{|x|}$.

859. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y=\dfrac{4}{x}$ і $y = x - 3$ та вкажіть координати точок їхнього перетину.

860. Знайдіть значення p, якщо відомо, що графік функції $y=\dfrac{p}{x}$ проходить через точку: 1) $A\ (-3;\ 2)$; 2) $B\left(-\dfrac{1}{7};3\right)$; 3) $C\ (-0{,}4;\ 1{,}6)$.

861. Побудуйте графік функції:

1) $y=\begin{cases}-\dfrac{12}{x}, \text{ якщо } x\leqslant -3,\\ 1-x, \text{ якщо } x>-3;\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}3x-1, \text{ якщо } x<2,\\ \dfrac{10}{x}, \quad \text{ якщо } 2\leqslant x<5,\\ x-3, \text{ якщо } x\geqslant 5.\end{cases}$

862. Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{4x+12}{x^2+3x}$;
2) $y=\dfrac{32-2x^2}{x^3-16x}$.

863. Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}4\sqrt{625}-\dfrac{1}{4}\sqrt{144}$;
2) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{0{,}25}+\sqrt{2^4+9}$;
3) $3\sqrt{0{,}25}-\sqrt{7^2+24^2}$;
4) $\sqrt{1\dfrac{11}{25}}+\sqrt{3\dfrac{6}{25}}-0{,}04\sqrt{10\,000}$;
5) $\dfrac{1}{5}\sqrt{625}-\dfrac{3}{17}\sqrt{289}$.

864. Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{1{,}69}$;

2) $\left(3\sqrt{15}\right)^2-\left(15\sqrt{3}\right)^2$;

3) $50\cdot\left(-\frac{1}{5}\sqrt{7}\right)^2-\frac{1}{4}\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^2$;

4) $\sqrt{1089}-\left(\frac{1}{6}\sqrt{216}\right)^2$;

5) $\frac{4}{9}\sqrt{39{,}69}-\frac{5}{49}\sqrt{59{,}29}+\left(-\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2$;

6) $\frac{1}{2}\sqrt{17^2-15^2}+\left(2\sqrt{5\frac{1}{2}}\right)^2-0{,}3\sqrt{900}$.

865. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}=2$;
2) $\sqrt{x}=\frac{1}{4}$;
3) $\sqrt{x}-3=0$;
4) $2\sqrt{x}-7=0$;
5) $\sqrt{x}+5=0$;
6) $\frac{1}{4}\sqrt{x}+5=0$;
7) $\sqrt{7x}-4=0$;
8) $\sqrt{7x-4}=0$;
9) $\sqrt{7x-4}=2$;
10) $\frac{28}{\sqrt{x}}=7$;
11) $\frac{15}{\sqrt{x+4}}=3$;
12) $\sqrt{4+\sqrt{3+x}}=5$.

866. Знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt{9\cdot100}$;
2) $\sqrt{0{,}49\cdot16}$;
3) $\sqrt{676\cdot0{,}04}$;
4) $\sqrt{0{,}64\cdot0{,}25\cdot121}$;
5) $\sqrt{\frac{25}{196}}$;
6) $\sqrt{18\frac{1}{16}}$;
7) $\sqrt{\frac{9}{64}\cdot\frac{1024}{1089}}$;
8) $\sqrt{3\frac{13}{36}\cdot4\frac{29}{49}}$.

867. Знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt{75\cdot234}$;
2) $\sqrt{2\cdot800}$;
3) $\sqrt{1{,}6\cdot12{,}1}$;
4) $\sqrt{2890\cdot2{,}5}$.

868. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{108}\cdot\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{160}\cdot\sqrt{250}$; 5) $\dfrac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}}$;

2) $\sqrt{52}\cdot\sqrt{13}$; 4) $\sqrt{0,4}\cdot\sqrt{4,9}$; 6) $\dfrac{\sqrt{90}}{\sqrt{0,225}}$.

869. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{(17,1)^2}$; 4) $-2,4\sqrt{(-4)^2}$; 7) $\sqrt{2^6\cdot 7^4}$;

2) $\sqrt{(-1,17)^2}$; 5) $\sqrt{11^4}$; 8) $\sqrt{(-3)^4\cdot 2^6\cdot(-0,1)^2}$.

3) $\dfrac{1}{2}\sqrt{(62)^2}$; 6) $\sqrt{(-23)^4}$;

870. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{q^2}$, якщо $q>0$;

2) $\sqrt{t^2}$, якщо $t\leqslant 0$;

3) $\sqrt{49m^2n^8}$, якщо $m\geqslant 0$;

4) $\sqrt{0,81a^6b^{10}}$, якщо $a\geqslant 0$, $b\leqslant 0$;

5) $\dfrac{1}{5}x\sqrt{100x^{26}}$, якщо $x\leqslant 0$;

6) $\dfrac{\sqrt{a^6b^{20}c^{34}}}{ab^8c^{12}}$, якщо $a>0$, $c<0$;

7) $\dfrac{1,2x^3}{y^5}\sqrt{\dfrac{y^{14}}{x^{10}}}$, якщо $y>0$, $x<0$;

8) $-0,1x^2\sqrt{1,96x^{18}y^{16}}$, якщо $x\leqslant 0$.

871. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\left(10-\sqrt{11}\right)^2}$; 4) $\sqrt{\left(3-\sqrt{6}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{6}\right)^2}$;

2) $\sqrt{\left(\sqrt{10}-11\right)^2}$; 5) $\sqrt{\left(\sqrt{24}-5\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{24}-4\right)^2}$.

3) $\sqrt{\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}\right)^2}$;

872. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{18+8\sqrt{2}}$;

2) $\sqrt{38-12\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{16+6\sqrt{7}}+\sqrt{23-8\sqrt{7}}$;

4) $\sqrt{26-6\sqrt{17}}-\sqrt{66-14\sqrt{17}}$;

5) $\sqrt{46+10\sqrt{21}}+\sqrt{46-10\sqrt{21}}$.

873. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{24}$; 3) $\sqrt{700}$; 5) $\frac{1}{7}\sqrt{196}$; 7) $-1{,}6\sqrt{50}$;

2) $\sqrt{63}$; 4) $\sqrt{0{,}32}$; 6) $-2{,}4\sqrt{600}$; 8) $\frac{5}{8}\sqrt{3\frac{21}{25}}$.

874. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{10a^2}$, якщо $a \geqslant 0$; 4) $\sqrt{36m^2n}$, якщо $m < 0$;

2) $\sqrt{15b^2}$, якщо $b \leqslant 0$; 5) $\sqrt{4x^6y^5}$, якщо $x > 0$;

3) $\sqrt{x^{11}y^{12}}$, якщо $y \neq 0$; 6) $\sqrt{700a^5b^{22}}$, якщо $b < 0$.

875. Внесіть множник під знак кореня:

1) $3\sqrt{10}$; 3) $0{,}3\sqrt{3}$; 5) $\frac{2}{7}\sqrt{98}$; 7) $-0{,}5\sqrt{30}$;

2) $2\sqrt{13}$; 4) $\frac{1}{5}\sqrt{175}$; 6) $-5\sqrt{7}$; 8) $4\sqrt{a}$.

876. Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt{5}$; 2) $b\sqrt{-b}$; 3) $x\sqrt{x^7}$; 4) $n\sqrt{m}$, якщо $n \leqslant 0$.

877. Порівняйте числа:

1) $5\sqrt{6}$ і $6\sqrt{5}$; 3) $0{,}3\sqrt{3\frac{1}{2}}$ і $\sqrt{0{,}3}$;

2) $\sqrt{55}$ і $3\sqrt{6}$; 4) $\frac{3}{7}\sqrt{16\frac{1}{3}}$ і $\frac{3}{4}\sqrt{5\frac{1}{3}}$.

878. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{64a}+\sqrt{4a}-\sqrt{121a}$; 3) $6\sqrt{125a}-2\sqrt{80a}+3\sqrt{180a}$.

2) $\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{320}$;

879. Виконайте множення:

1) $(\sqrt{80}-\sqrt{45})\sqrt{5}$;

2) $(2\sqrt{6}+\sqrt{54}-\sqrt{96})\sqrt{6}$;

3) $(12-\sqrt{10})(3+\sqrt{10})$;

4) $(2\sqrt{5}+\sqrt{7})(2\sqrt{7}-\sqrt{5})$;

5) $(\sqrt{19}-\sqrt{13})(\sqrt{19}+\sqrt{13})$;

6) $(4\sqrt{m}+9\sqrt{n})(4\sqrt{m}-9\sqrt{n})$;

7) $(\sqrt{5x}+\sqrt{11y})^2$;

8) $(3\sqrt{11}-2\sqrt{10})^2$.

880. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{x^2-19}{x+\sqrt{19}}$; 4) $\dfrac{29-\sqrt{29}}{\sqrt{29}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{x}-6}{x-36}$; 5) $\dfrac{a-6\sqrt{ab}+9b}{a-9b}$, якщо $a>0$, $b>0$;

3) $\dfrac{m+8\sqrt{m}}{m-64}$; 6) $\dfrac{11-\sqrt{33}}{\sqrt{33}-3}$.

881. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{a^3}{\sqrt{b}}$; 3) $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$; 5) $\dfrac{n+9}{\sqrt{n+9}}$; 7) $\dfrac{6}{\sqrt{21}+\sqrt{15}}$;

2) $\dfrac{7}{a\sqrt{a}}$; 4) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$; 6) $\dfrac{3}{\sqrt{13}-2}$; 8) $\dfrac{18}{\sqrt{47}-\sqrt{29}}$.

882.* Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}+1}$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

883. Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{5}{4-3\sqrt{2}}-\dfrac{5}{4+3\sqrt{2}}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}-1}$;

3) $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2$.

884. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{x}{x-9}$;   2) $\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\right):\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

885.* Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(\sqrt{x}+5)^2-20\sqrt{x}}+\sqrt{(\sqrt{x}-4)^2+16\sqrt{x}}$;

2) $\sqrt{a+2\sqrt{a+3}+4}+\sqrt{a-2\sqrt{a+3}+4}$.

886.* Спростіть вираз

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{8}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{47}}.$$

887.* Доведіть, що

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1.$$

888. Розташуйте в порядку зростання числа: 13; $\sqrt{165}$; 12,7; $\sqrt{171}$; 13,4.

889. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=x-6$ та визначте координати точки їхнього перетину.

890. Між якими двома послідовними цілими числами знаходиться число: 1) $\sqrt{17}$; 2) $\sqrt{67}$; 3) $\sqrt{103}$; 4) $-\sqrt{51{,}25}$?

891. Які цілі числа містяться на координатній прямій між числами:

1) 6 і $\sqrt{67}$; 2) $\sqrt{14}$ і $\sqrt{52}$; 3) $-\sqrt{53}$ і $-4{,}9$; 4) $-\sqrt{31}$ і 2,7?

892. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x}, \text{ якщо } x < 0, \\ 3, \quad \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x > 4. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-0{,}5)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(9)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

893. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 4x - 32 = 0$;
2) $x^2 - 10x + 21 = 0$;
3) $6x^2 - 5x + 1 = 0$;
4) $8x^2 + 2x - 3 = 0$;
5) $x^2 + 6x - 15 = 0$;
6) $3x^2 - x - 5 = 0$;
7) $4x^2 + 28x + 49 = 0$;
8) $x^2 - 16x + 71 = 0$.

894. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 4)(x + 2) - 2(3x + 1)(x - 3) = x(x + 27)$;
2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;
3) $(x + 4)(x^2 + x - 13) - (x + 7)(x^2 + 2x - 5) = x + 1$;
4) $\dfrac{2(x^2-9)}{5} - \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{x-41}{4}$;
5) $\dfrac{x^2+5x}{3} - \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{2x^2-2}{8}$.

895. Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + (5a - 1)x + 4a^2 - a = 0$;
2) $x^2 - (2a + 3)x + 6a = 0$;
3) $a^2x^2 - 10ax + 16 = 0$.

896. Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2 - 2x - 6| = 6$;
2) $x^2 - 6|x| - 16 = 0$;
3) $x|x| + 2x - 15 = 0$;
4) $||x^2 - 6x - 4| - 3| = 1$.

897. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 6x + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{2}{x-2} - 8$;
2) $(\sqrt{x} - 5)(15x^2 - 7x - 2) = 0$;

3) $(x^2+6x)\left(\sqrt{x}-4\right)(x^2-8x-48)=0.$

898. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2+3x-4}+\sqrt{x^2+6x+8}=0;$

2) $x^2-4x+4+|x^2-3x+2|=0;$

3) $\sqrt{25-x^2}+\left|x^2+8x-20\right|=0.$

899. Не обчислюючи дискримінанта, знайдіть, при якому значенні a рівняння:

1) $x^2+22x+a=0;$ 2) $x^2-ax+81=0$

має єдиний корінь. Знайдіть цей корінь.

900. При якому значенні b коренями рівняння $x^2+bx-23=0$ є протилежні числа? Знайдіть ці корені.

901. Число $-\frac{1}{3}$ є коренем рівняння $12x^2-bx+5=0$. Знайдіть значення b і другий корінь рівняння.

902. Число 0,2 є коренем рівняння $8x^2-3{,}2x+k=0$. Знайдіть значення k і другий корінь рівняння.

903. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2-bx+20=0$ задовольняють умову $x_1=5x_2$. Знайдіть значення b і корені рівняння.

904. Складіть квадратне рівняння, корені якого менші від відповідних коренів рівняння $x^2-3x-5=0$ на 1.

905. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-7x}{x+1}=\frac{8}{x+1};$

2) $\frac{3x^2+4x}{x^2-9}=\frac{3-4x}{x^2-9};$

3) $\frac{4-x}{4x-3}=\frac{2x-2}{7-x};$

4) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-6}=\frac{7}{12};$

5) $\frac{63}{x^2+3x}-\frac{2}{x^2-3x}=\frac{7}{x}$;

6) $\frac{2x}{x-2}+\frac{3}{x+4}=\frac{4x-2}{(x+4)(x-2)}$;

7) $\frac{1}{x^2+2x}-\frac{2}{x^2-4}=\frac{x+4}{5x(2-x)}$;

8) $\frac{2}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x^3-1}=\frac{3}{x^2+x+1}$.

906. Розв’яжіть рівняння:

1) $\frac{x-1}{x+5}+\frac{x+5}{x-1}=\frac{10}{3}$;

2) $\frac{x^2-3x+6}{x}+\frac{2x}{x^2-3x+6}=3$;

3) $\frac{x^2}{(3x-1)^2}-\frac{4x}{3x-1}-5=0$;

4) $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$.

907.* При яких значеннях a рівняння $\frac{x^2-2ax+3}{x-2}=0$ має єдиний корінь?

908. Чи є правильним твердження (відповідь обґрунтуйте):

1) якщо число m є коренем квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, то число $-m$ є коренем рівняння $ax^2-bx+c=0$;

2) якщо число m є коренем квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, де $c\neq 0$, то число $\frac{1}{m}$ є коренем рівняння $cx^2+bx+a=0$?

909.* Знайдіть усі цілі значення b, при яких має цілі корені рівняння:

1) $x^2+bx-6=0$;

2) $x^2+bx+21=0$.

910.* Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 - (2a - 5)x + a^2 - 7 = 0$. При якому значенні a виконується рівність $2x_1 + 2x_2 = x_1x_2$?

911.* При якому значенні a добуток коренів рівняння

$$x^2 + (a + 9)x + a^2 + 2a = 0$$

дорівнює 15?

912. Автобус мав проїхати 255 км. Проїхавши $\frac{7}{17}$ шляху, він зупинився на 1 год, а потім продовжив рух зі швидкістю на 5 км/год меншою від початкової. Знайдіть початкову швидкість автобуса, якщо в пункт призначення він прибув через 9 год після виїзду.

913. У зливку сплаву міді та цинку міститься 20 кг цинку. До цього зливку додали 3 кг міді та 4 кг цинку. Відсотковий вміст міді в одержаному сплаві на 5 % більший, ніж у початковому. Скільки кілограмів міді містив початковий сплав?

ДРУЖИМО З КОМП'ЮТЕРОМ

До п. 15 «Властивості арифметичного квадратного кореня»

483 (6), 495. Виконайте обчислення за допомогою калькулятора, не спрощуючи попередньо вираз. Який спосіб розв'язування виявився простішим — на папері або за допомогою калькулятора?

До п. 16 «Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені»

Обчисліть значення кількох виразів, наведених у задачах 515, 516, 529, за допомогою калькулятора без попереднього спрощення виразів. Чи буде отримано точний результат?

До п. 17 «Функція $y = \sqrt{x}$ та її графік»

За допомогою табличного редактора побудуйте таблицю, яка містить набір значень аргументів і відповідних їм значень функції $y = \sqrt{x}$. Побудуйте графік за цією таблицею.

До п. 18 «Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь»

* Запишіть алгоритм для розв'язування неповних квадратних рівнянь залежно від їхнього виду.

* **629.** Запишіть алгоритм для розв'язування цієї задачі методом перебору.

До п. 19 «Формула коренів квадратного рівняння»

* Запишіть алгоритм, який за коефіцієнтами a, b і c рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ знаходить його корені. Які окремі випадки потрібно розглянути?

* **643, 644.** Запишіть алгоритми для розв’язування цих задач методом перебору. Яка інформація в умовах цих задач дозволяє зробити висновки, що тут, на відміну від задач 653 і 654, можна застосувати метод перебору?

До п. 20 «Теорема Вієта»

Придумайте два числа, десятковий запис кожного з яких містить кілька цифр до та після коми. Використовуючи наслідок з теореми, оберненої до теореми Вієта, складіть квадратне рівняння, для якого дані числа є коренями. Для обчислень використайте калькулятор.

До п. 21 «Квадратний тричлен»

* Запишіть алгоритм для розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

* **746.** Створіть математичну модель для розв’язування цієї задачі в загальному вигляді.

* **749.** Запишіть алгоритм для розв’язування цієї задачі методом перебору.

До п. 22 «Розв’язування рівнянь, які зводяться до квадратних рівнянь»

* Запишіть алгоритм для розв’язування біквадратних рівнянь. Можна використати як підпрограму алгоритм, який ви уклали для розв’язування квадратних рівнянь (див. завдання до п. 19).

* **776.** Запишіть алгоритм для розв’язування цієї задачі методом перебору.

Протягом навчального року в рубриці «Дружимо з комп’ютером» вам було запропоновано багато завдань для розв’язування методом перебору. Проаналізуйте ці завдання та зробіть висновок, чому англійською мовою метод перебору носить назву «brute force».

До п. 23 «Раціональні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій»

* Чи можна для різних задач цього пункту створити одну й ту саму математичну модель? Спробуйте знайти такі задачі та скласти спільний алгоритм для їхнього розв’язування.

ПРОЄКТНА РОБОТА

Ця рубрика адресована передусім тим, хто бажає навчитися самостійно набувати знань, творчо мислити, формувати, висловлювати та відстоювати свою точку зору, висувати гіпотези, знаходити найбільш раціональні та нестандартні рішення.

Першим кроком, який може допомогти в досягненні цих цілей, є участь у проєктній роботі.

Проєкт — це самостійне дослідження за вибраною темою, яке можна виконувати як індивідуально, так і в групі.

Дамо кілька порад щодо організації роботи над проєктом та оформлення результатів дослідження.

1. Під час вибору теми потрібно враховувати її актуальність, наявність джерел інформації в літературі та інтернет-ресурсів. При цьому дуже важливе ваше бажання проявити себе дослідником у роботі саме над вибраною темою.
2. Роботу починають зі складання попереднього плану, у якому викладають задум та етапи реалізації задуманого. Після ознайомлення з основними джерелами інформації складають остаточний план за допомогою керівника проєкту.
3. Важливо чітко сформулювати цілі дослідження. Їх можна записати, наприклад, у такий спосіб: вивчити, описати, проаналізувати, довести, порівняти тощо.
4. Роботу завершують підбиттям підсумків дослідження, роблять висновки, накреслюють перспективи подальшого вивчення теми.

5. Приблизний обсяг роботи — 10–15 сторінок. Додатково можна додати ілюстративний матеріал.
6. Робота може бути оформлена у вигляді реферату, доповіді, комп'ютерної презентації.

Нижче наведено рекомендований список тем, які можна вибрати для проєктної роботи.

1. Леонард Ейлер — видатний математик

2. Математичні терміни та символи. Історія виникнення і розвитку

3. Алгоритм Евкліда та лінійні діофантові рівняння

4. Парадокси теорії множин

5. Мала теорема Ферма

6. Пошук інваріанта

7. Принцип крайнього

ВІДОМОСТІ З КУРСУ АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

ЦІЛІ ВИРАЗИ

1. Вирази зі змінними. Цілі раціональні вирази. Числове значення виразу

- ✓ Вираз, складений зі змінних, чисел, знаків арифметичних дій і дужок, називають виразом зі змінними (або зі змінною, якщо вона одна).
- ✓ Якщо замість змінних (змінної) підставити у вираз їхні значення, то отримаємо числовий вираз, значення якого називають значенням виразу зі змінними при даних значеннях змінних.
- ✓ Числові вирази та вирази зі змінними називають алгебраїчними виразами.
- ✓ Вирази зі змінними, які не містять ділення на вирази зі змінними, називають цілими виразами.

2. Тотожно рівні вирази. Тотожності

- ✓ Вирази, відповідні значення яких є рівними при будь-яких значеннях змінних, називають тотожно рівними.
- ✓ Рівність, правильну при будь-яких значеннях змінних, що входять до неї, називають тотожністю.
- ✓ Заміну одного виразу іншим, який тотожно дорівнює йому, називають тотожним перетворенням.
- ✓ Довести тотожність — це означає довести, що дана рівність є тотожністю.
- ✓ Для доведення тотожностей використовують такі прийоми (методи):
  - тотожно перетворюють одну із частин даної рівності, отримуючи іншу частину;

- тотожно перетворюють кожну із частин даної рівності, отримуючи один і той самий вираз;
- показують, що різниця лівої й правої частин даної рівності тотожно дорівнює нулю.

✓ Щоб довести, що рівність не є тотожністю, досить навести контрприклад: указати такі значення змінних (змінної), при яких дана рівність не справджується.

3. Степінь з натуральним показником

✓ Степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a.

✓ Степенем числа a з показником 1 називають саме це число.

✓ Степінь з основою a та показником n позначають a^n і читають: «a в n-му степені». Степені з показниками 2 і 3 можна прочитати інакше: запис a^2 читають: «a у квадраті», запис a^3 — «a в кубі».

✓ При піднесенні невід'ємного числа до степеня отримуємо невід'ємне число.

✓ При піднесенні від'ємного числа до степеня з парним показником отримуємо додатне число, а при піднесенні від'ємного числа до степеня з непарним показником отримуємо від'ємне число.

4. Властивості степеня з натуральним показником

✓ Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n справджується рівність

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

тобто при множенні степенів з однаковими основами показники додають, а основу залишають тією самою.

- Для будь-якого числа a, відмінного від нуля, і будь-яких натуральних чисел m і n таких, що $m > n$, справджується рівність
$$a^m : a^n = a^{m-n},$$
тобто при діленні степенів з однаковими основами від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника, а основу залишають тією самою.
- Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n справджується рівність
$$(a^m)^n = a^{mn},$$
тобто при піднесенні степеня до степеня показники перемножують, а основу залишають тією самою.
- Для будь-яких чисел a і b та будь-якого натурального числа n справджується рівність
$$(ab)^n = a^n b^n,$$
тобто при піднесенні добутку до степеня кожний множник підносять до степеня й отримані результати перемножують.

5. Одночлени

- Вирази, які є добутками чисел, змінних та їхніх степенів, називають одночленами.
- Одночлен, який містить тільки один відмінний від нуля числовий множник, що стоїть на першому місці, та у якого всі інші множники — степені з різними основами, називають стандартним виглядом одночлена. До одночленів стандартного вигляду також відносять числа, відмінні від нуля, змінні та їхні степені.
- Число 0, а також одночлени, які тотожно дорівнюють нулю, називають нуль-одночленами. Їх не відносять до одночленів стандартного вигляду.
- Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають коефіцієнтом одночлена.

- ✓ Одночлени, які мають однакові буквені частини, називають подібними.
- ✓ Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, що входять до нього. Степінь одночлена, який є числом, відмінним від нуля, вважають рівним нулю.
- ✓ Вважають, що нуль-одночлен степеня не має.
- ✓ Добутком двох одночленів є одночлен. При піднесенні одночлена до степеня також отримують одночлен.

6. Многочлени

- ✓ Вираз, який є сумою кількох одночленів, називають многочленом.
- ✓ Одночлени, з яких складено многочлен, називають членами многочлена.
- ✓ Многочлен, який складається з двох членів, називають двочленом, а той, який складається з трьох членів, — тричленом. Одночлен є окремим випадком многочлена. Вважають, що такий многочлен складається з одного члена.
- ✓ Якщо серед одночленів, з яких складається многочлен, є подібні, то їх називають подібними членами многочлена.
- ✓ Многочлен, який складається з одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних, називають многочленом стандартного вигляду.
- ✓ Степенем многочлена стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, з яких цей многочлен складений.
- ✓ Щоб додати два многочлени, треба кожний із них узяти в дужки й поставити між ними знак «+», потім розкрити дужки та звести подібні доданки (якщо такі є).

- ✓ Щоб від одного многочлена відняти другий, треба кожний із них узяти в дужки, поставити перед від'ємником знак «–», потім розкрити дужки та звести подібні доданки (якщо такі є).
- ✓ Подання многочлена у вигляді добутку кількох многочленів називають розкладанням многочлена на множники.

7. Множення одночлена на многочлен

- ✓ Щоб помножити одночлен на многочлен, треба помножити цей одночлен на кожний член многочлена й отримані добутки додати.

8. Множення многочлена на многочлен

- ✓ Щоб помножити многочлен на многочлен, можна кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого й отримані добутки додати.
- ✓ При множенні многочлена на многочлен завжди отримуємо многочлен.

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

9. Добуток різниці та суми двох виразів

- ✓ Добуток різниці двох виразів та їхньої суми дорівнює різниці квадратів цих виразів:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

10. Різниця квадратів двох виразів

- ✓ Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів та їхньої суми.

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

11. Квадрат суми та квадрат різниці двох виразів

- ✓ Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток першого й другого виразів плюс квадрат другого виразу:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

- ✓ Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого й другого виразів плюс квадрат другого виразу:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

12. Перетворення многочлена у квадрат суми або різниці двох виразів

- ✓ Формули

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

даують змогу «згорнути» тричлен у квадрат двочлена.

- ✓ Тричлен, який можна подати у вигляді квадрата двочлена, називають повним квадратом.

13. Сума й різниця кубів двох виразів

- ✓ Многочлен $a^2 - ab + b^2$ називають неповним квадратом різниці.
- ✓ Сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їхньої різниці:

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right).$$

- ✓ Многочлен $a^2 + ab + b^2$ називають неповним квадратом суми.
- ✓ Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їхньої суми:

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

РІВНЯННЯ

14. Корінь рівняння

- ✓ Коренем рівняння називають значення змінної, при якому рівняння перетворюється на правильну числову рівність.
- ✓ Розв’язати рівняння — це означає знайти всі його корені або переконатися, що їх узагалі немає.
- ✓ Під час розв’язування задач на складання рівнянь зручно використовувати таку схему:
  1) за умовою задачі скласти рівняння (сконструювати математичну модель задачі);
  2) розв’язати отримане рівняння;
  3) з’ясувати, чи відповідає знайдений корінь змісту задачі, і дати відповідь.

15. Властивості рівнянь

- ✓ Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, яке має ті самі корені, що й дане.
- ✓ Якщо дане рівняння не має коренів, то, додавши до обох його частин одне й те саме число, отримаємо рівняння, яке теж не має коренів.
- ✓ Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, яке має ті самі корені, що й дане.
- ✓ Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, яке має ті самі корені, що й дане.

16. Лінійне рівняння з однією змінною

✓ Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Значення a і b	$a \neq 0$	$a = 0,\ b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
Корені рівняння $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	x — будь-яке число	Коренів немає

ФУНКЦІЇ

17. Функція. Область визначення і область значень функції

✓ Правило, за допомогою якого для кожного значення незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної, називають функцією, а відповідну залежність однієї змінної від другої — функціональною.

✓ Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, залежну — буквою y, функцію (правило) — буквою f. Якщо змінна y функціонально залежить від змінної x, то цей факт позначають так: $y = f(x)$ (читають: «ігрек дорівнює еф від ікс»).

✓ Незалежну змінну ще називають аргументом функції.

✓ Значення залежної змінної називають значенням функції. Значення функції f, яке відповідає значенню x_0 аргументу x, позначають $f(x_0)$.

✓ Усі значення, яких набуває аргумент, утворюють область визначення функції. Усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють область значень функції.

18. Способи задання функції

✓ Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення та правило, за допомогою якого можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної.

- ✓ Способи задання функції: за допомогою опису, за допомогою формули, табличний, графічний.
- ✓ Якщо функцію задано формулою, права частина якої — цілий вираз, і при цьому не вказано область її визначення, то вважають, що областю визначення такої функції є всі числа.

19. Графік функції

- ✓ Графіком функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f.
- ✓ Коли якась фігура є графіком функції f, то виконуються дві умови:

  1) якщо x_0 — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $\left(x_0;\ f(x_0)\right)$ обов'язково належить графіку;

  2) якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f, тобто $y_0 = f(x_0)$.
- ✓ Фігура, зображена на координатній площині, може бути графіком деякої функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має із цією фігурою не більше ніж одну спільну точку.

20. Лінійна функція, її графік і властивості

- ✓ Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа, x — незалежна змінна, називають лінійною.
- ✓ Графіком лінійної функції, область визначення якої — усі числа, є пряма.

- ✓ Лінійну функцію, задану формулою $y = kx$, де $k \neq 0$, називають прямою пропорційністю.
- ✓ Графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат. Тому для побудови графіка прямої пропорційності достатньо вказати яку-небудь точку графіка, відмінну від початку координат, і провести пряму через цю точку й точку O (0; 0).
- ✓ Якщо у формулі $y = kx + b$ покласти $k = 0$, то отримаємо $y = b$. У цьому разі значення функції залишатимуться незмінними при будь-яких змінах значень аргументу. Графіком такої функції є пряма, яка паралельна осі абсцис.

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

21. Рівняння з двома змінними

- ✓ Пару значень змінних, яка перетворює рівняння з двома змінними в правильну рівність, називають розв’язком рівняння з двома змінними.
- ✓ Розв’язати рівняння з двома змінними — це означає знайти всі його розв’язки або показати, що воно не має розв’язків.
- ✓ Властивості рівнянь із двома змінними аналогічні властивостям рівнянь з однією змінною (див. п. 15 на с. 142).
- ✓ Графіком рівняння з двома змінними називають геометричну фігуру, що складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, координати яких (пари чисел) є розв’язками даного рівняння.
- ✓ Коли якась фігура є графіком рівняння, то виконуються дві умови:

  1) усі розв’язки рівняння є координатами точок, які належать графіку;

2) координати будь-якої точки, що належить графіку, — це пара чисел, яка є розв'язком даного рівняння.

22. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік

✓ Лінійним рівнянням із двома змінними називають рівняння виду $ax + by = c$, де x і y — змінні, a, b, c — деякі числа.

Рівняння	Значення a, b, c	Графік
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a і c — будь-які	Невертикальна пряма
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c — будь-яке	Вертикальна пряма
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	Уся координатна площина
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	— (рівняння розв'язків не має)

23. Системи рівнянь із двома змінними

✓ Якщо треба знайти всі спільні розв'язки кількох рівнянь, то говорять, що треба розв'язати систему рівнянь.

✓ Систему рівнянь записують за допомогою фігурної дужки.

✓ Розв'язком системи рівнянь із двома змінними називають пару значень змінних, які перетворюють кожне рівняння в правильну рівність.

✓ Розв'язати систему рівнянь — це означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків не існує.

24. Графічний метод розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними

✓ Графічний метод розв'язування системи рівнянь полягає в такому:

- побудувати на одній координатній площині графіки рівнянь, що входять до системи;
- знайти координати всіх точок перетину побудованих графіків;
- отримані пари чисел і будуть шуканими розв'язками.

✓ Якщо графіками рівнянь, що входять до системи лінійних рівнянь, є прямі, то кількість розв'язків цієї системи залежить від взаємного розміщення двох прямих на площині:

- якщо прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок;
- якщо прямі збігаються, то система має безліч розв'язків;
- якщо прямі паралельні, то система розв'язків не має.

25. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом підстановки

✓ Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь методом підстановки, треба:

1) виразити з будь-якого рівняння системи одну змінну через другу;
2) підставити в друге рівняння системи замість цієї змінної вираз, отриманий на першому кроці;
3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;
4) підставити знайдене значення змінної у вираз, отриманий на першому кроці;
5) обчислити значення другої змінної;
6) записати відповідь.

26. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом додавання

✓ Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь методом додавання, треба:

1) дібравши «вигідні» множники, перетворити одне чи обидва рівняння системи так, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами;
2) додати почленно ліві й праві частини рівнянь, отриманих на першому кроці;
3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;
4) підставити знайдене на третьому кроці значення змінної в будь-яке з рівнянь вихідної системи;
5) обчислити значення другої змінної;
6) записати відповідь.

МОДУЛЬ ЧИСЛА

27. Модуль числа

✓ Модулем числа *a* називають відстань від початку відліку до точки, яка зображує це число на координатній прямій.

✓ Модуль числа *a* позначають так: $|a|$ (читають: «модуль *a*»).

✓ Модуль додатного числа дорівнює цьому числу, модуль від'ємного числа дорівнює числу, яке протилежне даному.

$$|0| = 0.$$

✓ За допомогою фігурної дужки властивість модуля числа *a* можна записати так:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

- ✓ Модуль числа набуває тільки невід'ємних значень.
- ✓ Модулі протилежних чисел рівні: $|a| = |-a|$.

КООРДИНАТНА ПЛОЩИНА

28. Прямокутна система координат

Проведемо на площині дві перпендикулярні координатні прямі так, щоб їхні початки відліку збігалися (рис. 37). Ці прямі називають осями координат, точку O їхнього перетину — початком координат. Горизонтальну вісь називають віссю абсцис і позначають буквою x, вертикальну вісь називають віссю ординат і позначають буквою y.

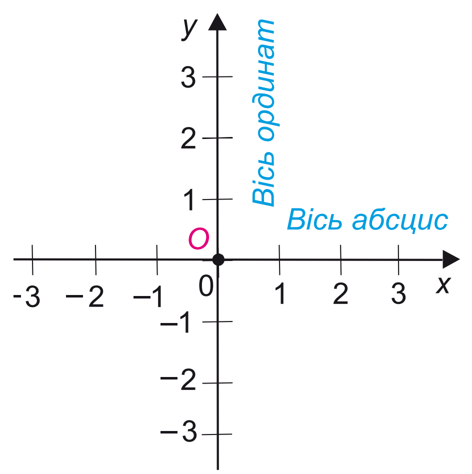


Рис. 37

- ✓ Вісь абсцис називають також віссю x, а вісь ординат — віссю y, разом вони утворюють прямокутну систему координат. Таку систему координат називають декартовою.

- ✓ Площину, на якій задано прямокутну систему координат, називають координатною площиною.
- ✓ Координатні осі розбивають площину на чотири частини, які називають координатними чвертями й нумерують так, як показано на рисунку 38.

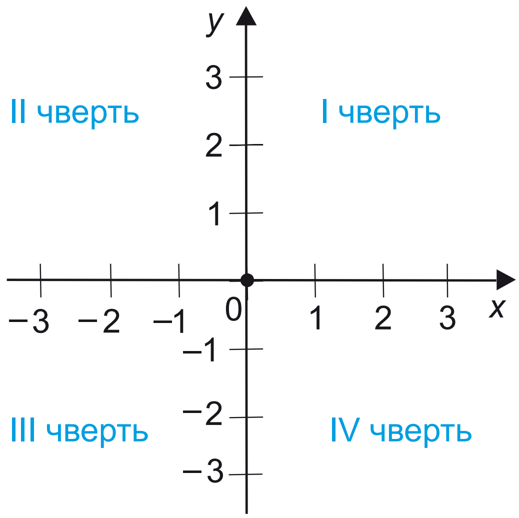


Рис. 38

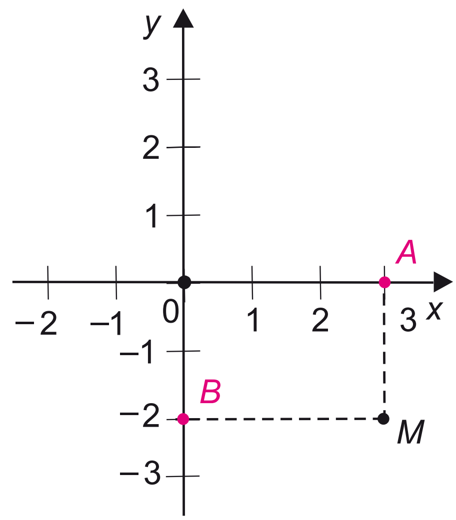


Рис. 39

На координатній площині позначимо точку M (рис. 39). Пряма, що проходить через точку M перпендикулярно до осі абсцис, перетинає її в точці A, а пряма, яка перпендикулярна до осі ординат, перетинає цю вісь у точці B. Точка A на осі x має координату 3, а точка B на осі y — координату –2. Число 3 називають абсцисою точки M, число –2 — ординатою точки M. Числа 3 і –2 однозначно визначають положення точки M на координатній площині. Тому їх називають координатами точки M і записують так: M (3; –2).

Записуючи координати точки, абсцису завжди ставлять на перше місце, а ординату — на друге.

Якщо точка лежить на осі абсцис, то її ордината дорівнює нулю, а якщо точка лежить на осі ординат, то нулю дорівнює її абсциса.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

493. 1) Ні при якому значенні x; 2) 3; 3) –1; 3. **494.** 1) –4; 2) 2. **495.** –4. **496.** 120 га. **525.** 1) $6\sqrt{2}$; 2) $11\sqrt{2}$; 3) $10\sqrt{3}$; 4) $9\sqrt{5a}$; 5) $-a\sqrt{ab}$; 6) 0. **526.** 1) $-6\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt{7b}$; 3) $10a^3\sqrt{a}$. **528.** 1) $16+\sqrt{3}$; 2) $-10\sqrt{5}-5$; 3) 1; 4) 1; 5) 4. **529.** 1) $10-4\sqrt{2}$; 2) 74; 3) 4; 4) 32. **536.** 1) $\sqrt{a}-2$; 2) $\frac{6}{m-2\sqrt{m}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt{xy}}$; 4) $\frac{4\sqrt{a}}{16-a}$; 5) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$; 6) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$; 7) $\frac{3\sqrt{c}}{\sqrt{c}+5}$; 8) $\sqrt{a}-1$; 9) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 10) $\sqrt{x}$. **537.** 1) $\frac{4}{a+\sqrt{a}}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{ab}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{y}}$; 4) $\sqrt{\frac{n}{m}}$; 5) $\sqrt{x}$; 6) $\frac{22}{9-a}$. **538.** 1) $m^4\sqrt{-m}$; 2) $a^2b^6\sqrt{b}$; 3) $-2x^3\sqrt{y}$; 4) $m^3n^3\sqrt{mn}$; 5) $-3xy^7\sqrt{5x}$; 6) $8ab^4\sqrt{b}$; 7) $-11m^5b^9\sqrt{2m}$; 8) $mnp^7\sqrt{-p}$. **539.** 1) $-m^9\sqrt{-m}$; 2) $a^{11}b^{12}\sqrt{a}$; 3) $-7a\sqrt{b}$; 4) $a^4b^4\sqrt{ab}$; 5) $-3x^7y^{17}\sqrt{3x}$; 6) $-5m^3n^3p^3\sqrt{-2p}$. **540.** 2) Оскільки з умови випливає, що $b\leqslant 0$, то $b\sqrt{-b}=-\sqrt{-b^3}$; 3) $\sqrt{c^7}$; 5) $-\sqrt{x^3y^5}$; 8) $\sqrt{a^3b^3}$. **541.** 2) $-\sqrt{54n^2}$; 3) $\sqrt{p^5}$; 6) $-\sqrt{-5a^9b}$. **543.** 1) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 2) $\sqrt{a}$. **544.** 1) $\sqrt{2}+1$; 2) $\sqrt{3}+2$; 3) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$. **545.** 1) $\sqrt{7}+1$; 2) $\sqrt{6}+3$; 3) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. **546.** 9. **549.** 1) $4+\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{3}+1$. **550.** 180 деталей. **551.** На 25 %. **552.** 6 км/год, 2 км/год. **553.** 17 вагонів. **571.** 1) 0; 1; 2) 0; 1; 3) коренів немає; 4) 1; 5) 4; 6) 1. **573.** 4) $5-2\sqrt{3}$. **574.** 2) $-\sqrt{2}$. **575.** 0. *Вказівка*. Ліва частина цього рівняння набуває тільки невід'ємних значень, а права — тільки недодатних. **580.** 1) $\sqrt{7}-1$; 2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 3) $3-\sqrt{3}$; 4) $6-\sqrt{2}$. **581.** 1) $\sqrt{5}-2$; 2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 3) $5-2\sqrt{3}$. **582.** Якщо $a \geqslant 0$, то один корінь; якщо $a < 0$, то коренів немає. **583.** $2\sqrt{a}+1$ при $a > 1$; 3 при $0 \leqslant a \leqslant 1$. **584.** 12 при $a > 36$; $2\sqrt{a}$ при $0 \leqslant a \leqslant 36$. **585.** 63 кг. **586.** 3 км/год. **588.** 1 год 12 хв. **605.** 6; 7. **605.** 9; 10. **608.** 1) 0; 14; 2) коренів немає. **609.** 1) 0; $\frac{4}{3}$; 2) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$. **615.** –3; –2 або 3; 4. **616.** –1; 0 або 0; 1. **617.** 1) 4; 2) 0; –8; 3) –9; 9. **622.** 1) 0; –3; 3; 2) 0; 1; 3) 1; 4) –2; 2. **623.** 1) 0; 7; –7; 2) 0; 5; –7; 3) –1,5; 1,5. **624.** 1) 2; 2) 3; 3) 0,5; –2; 4) такого значення не існує. **625.** 1) $a = 4$, $x_2 = -4$; 2) $a = 0$, $x_2 = 2$ або $a = -1$, $x_2 = \frac{9}{4}$; 3) $a = 3$, $x_2 = -2$. **629.** 35. **636.** 1) 1; $-\frac{7}{6}$; 2) 1; 9; 3) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$. **637.** 1) 2; $-\frac{7}{3}$; 2) –3; $\frac{1}{7}$. **638.** 1) 4; –3,5; 2) 1; $-\frac{1}{25}$; 3) 2; $\frac{4}{3}$; 4) $-3 \pm \sqrt{15}$; 5) 3; 6; 6) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}$. **639.** 1) 3; 9; 2) $\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$; 3) коренів немає. **640.** 7. **641.** 38 см. **642.** 6 і 14 або –14 і –6. **643.** 10; 11. **644.** 13; 14. **645.** 1) $\sqrt{5}$; $\frac{-3\sqrt{5}}{2}$; 2) –1; $\sqrt{6}$; 3) 6; $-\frac{2}{3}$; 4) –1; $\frac{31}{22}$. **646.** 1) $-\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$; 2) 2; $\sqrt{3}$; 3) 1; $\frac{3}{8}$. **647.** –20; 4. **648.** 1; $-\frac{4}{3}$. **649.** 8 см. **650.** 6 см або 12 см. **651.** 16 см, 30 см. **652.** 9 см, 40 см. **653.** 9; 11; 13. **654.** 4; 6; 8; 10. **656.** 16 мавп або 48 мавп. **657.** 9 команд. **658.** 15 сторін. **659.** 1) –8; –7; 0; 1; 2) –1; 1; 0,6; –0,6; 3) $-3+\sqrt{14}$; 4) –2; 2; 5) 3; 5; –3; –5; 6) 2; –2. **660.** 1) –12; 2; –2; –8; 2) 3;

3) 15; $-7 - \pm\sqrt{34}$; 4) 9; –9. **661.** 1) –10; 2) 3. **662.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 3. **663.** 1) $b = -2$; 2) $b = -12$ або $b = 12$. **664.** 1) $b = 13{,}5$; 2) $b = -8$ або $b = 8$. **668.** 1) $x = -2a - 1$ або $x = -a$; 2) $x = 2a$ або $x = 4$; 3) якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{25}{a}$ або $x = -\frac{1}{a}$, якщо $a = 0$, то коренів немає; 4) якщо $a = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{1}{3}$, якщо $a \neq \frac{1}{2}$, то $x = \frac{1}{3}$ або $x = \frac{1}{2a-1}$. **669.** 1) $x = 3a - 5$ або $x = -a$; 2) $x = -3a$ або $x = 4$; 3) якщо $a = 0$, то $x = 1$; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$ або $x = \frac{1}{a}$. **670.** 1) $b = 0$ або $b = -\frac{9}{7}$; 2) $b = -5$, або $b = 2\sqrt{6}$, або $b = -2\sqrt{6}$; 3) $b = 19$. **671.** 1) $b = 0$, або $b = -0{,}5$, або $b = 0{,}5$; 2) $b = -3$ або $b = -5$. **672.** $\frac{a-b}{a}$. **673.** 9. **674.** 4, $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$. **675.** 45 т, 75 т. **676.** 14 аркушів. **690.** $x_2 = 10$, $q = -20$. **691.** $x_2 = -6$, $p = -1$. **692.** $x_2 = 2$, $b = 14$. **693.** $x_2 = 1{,}6$, $m = -1{,}28$. **694.** –20,5. **695.** –7. **696.** $\sqrt{17}$; $-\sqrt{17}$. **700.** $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $c = 9$. **701.** $x_1 = -14$, $x_2 = -6$, $a = 84$. **702.** $x_1 = 9$, $x_2 = -2$, $m = -18$. **703.** $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, $n = -5$. **706.** 1) 1,5; 2) 69. *Вказівка*. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$; 3) 57; 4) 567. **707.** 1) 80; 2) $-\frac{57}{16}$; 3) $\sqrt{89}$. *Вказівка*. $|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$. **708.** $x^2 + 12x + 17 = 0$. **709.** $x^2 - 18x + 49 = 0$. **710.** $6x^2 - 14x + 3 = 0$. **711.** $x^2 - 15x + 8 = 0$. **712.** $a = 2$ або $a = -2$. **713.** $a = 6$ або $a = -6$. **715.** 1) 7; –7; 5; –5; 2) –11; 11; –1; 1; –4; 4. **716.** 1) –9; 9; –6; 6; 2) –17; 17; –7; 7; –3; 3. **717.** $b = c = 0$ або $b = 1$, $c = -2$. **718.** 1) $a = 2$; 2) такого значення a не існує. **719.** $a = 2$. **721.** 4 ряди по 12 дерев. **723.** 18 %. **732.** 1) $\frac{2a-3}{a-6}$; 2) $\frac{b-3}{2b-1}$; 3) $\frac{c+1}{c-2}$; 4) $\frac{m^2+m+1}{m+10}$; 5) $-\frac{x+4}{x+8}$;

6) $\frac{1-4n}{5n+1}$. **733.** 1) $\frac{4x-3}{x-1}$; 2) $\frac{2y+5}{y-1}$; 3) $\frac{a+1}{a-5}$; 4) $\frac{3-b}{b-1}$. **734.** 1) –3; 2) –2; 3) $\frac{4}{3}$. **735.** 1) –4; 2) –14. **736.** 1) 1; 2) $\frac{2b+1}{b^2}$; 3) $-\frac{4}{c}$; 4) 4. **740.** 1) $(x-y)(x-5y)$; 2) $(a+9b)(a-4b)$; 3) $(3m+n)(m-3n)$; 4) $(4x-y)(x-y)$. **741.** 1) $(a-4b)(a-10b)$; 2) $(3b-2c)(4b+3c)$. **742.** 1) Якщо $a=3$, то x — будь-яке число; якщо $a=-2$, то коренів немає; якщо $a\neq 3$ і $a\neq -2$, то $x=\frac{a+3}{a+2}$; 2) якщо $a=7$, то x — будь-яке число; якщо $a=1$, то коренів немає; якщо $a\neq 7$ і $a\neq 1$, то $x=\frac{2a+1}{a-1}$. **743.** Якщо $a=-8$, то x — будь-яке число; якщо $a=1$, то коренів немає; якщо $a\neq -8$ і $a\neq 1$, то $x=\frac{a+8}{a-1}$. **746.** 6,8 %. **748.** 1) Коренів немає; 2) –4; 3) 3; 4) y — будь-яке дійсне число, відмінне від –4 і від 5. **752.** 1) –4; 1; 2) –1; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) –2; 10; 5) 7; 6) –6; 7) –5; 10; 8) 5; 9) 2; 8; 10) –2; 9; 11) –3; 2; 12) 4; –0,4. **753.** 1) –1; 2) –0,25; 3) 0,5; 6; 4) 8; 5) –3; 6) –3; 12; 7) –1; $\frac{2}{7}$; 8) –3; 13. **758.** 1) 6; 2) 5; 3) 7; 4) 6. **759.** 1) 10; 2) –7. **760.** 1) $3\pm\sqrt{18}$; 2) –23; 1; 3) –27; –1; 4) 3. **761.** 1) 4; 9; 2) 5. **762.** 1) –1; 18; 2) –98; 2; 3) –1,5; 4) –2; 5) –3; 4; 6) –3; 7) 2; 8) 9; 9) 1; 10) 9. **763.** 1) –60; 50; 2) –3; 3) –9; 24; 4) 2; 5) –20; 2; 6) 15. **764.** 1) $-\frac{2}{3}$; 14; 2) –56; 60. **765.** 1) –15; 12; 2) –20; 2. **766.** 1) –5; 2) коренів немає; 3) $3\frac{1}{3}$; 4) 1. **767.** 1) –15; 1; 2) 1,5. **769.** 1) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; –3; 3; 2) –6; –4; –1; 1; 3) 0; 3; 4) –1; –3; 1. **769.** 1) $-\frac{1}{3}$; 1; 2) 0,5.

770. 1) –1; 7; 2; 4; 2) –6; –2; $-4 \pm \sqrt{20}$; 3) –2; 1; 4) $-\frac{5}{3}$; 10.

771. 1) Якщо $a = 1$, то $x = 7$; якщо $a = 7$, то $x = 1$; якщо $a \neq 1$ і $a \neq 7$, то $x = 1$ або $x = 7$; 2) якщо $a \neq 1$ і $a \neq 7$, то $x = a$; якщо $a = 1$ або $a = 7$, то коренів немає; 3) якщо $a \neq 2$ і $a \neq \frac{2}{3}$, то $x = 3a$ або $x = 2$; якщо $a = 2$ або $a = \frac{2}{3}$, то $x = 2$; 4) якщо $a = 0$, то x — будь-яке число, відмінне від –3; якщо $a = -3$, то коренів немає; якщо $a \neq 0$ і $a \neq -3$, то $x = a$. **772.** $a = 2\sqrt{5}$, або $a = -2\sqrt{5}$, або $a = 6$. **777.** 75 км/год. **778.** 50 км/год, 60 км/год. **779.** 80 км/год, 60 км/год. **780.** 80 км/год. **781.** 12 км/год. **782.** 12 сторінок. **783.** 30 м^3, 25 м^3. **784.** 6 днів. **785.** 31 км/год. **786.** 10 км/год. **787.** 3 км/год. **788.** 2 км/год або 2,25 км/год. **789.** 60 км/год, 40 км/год. **790.** 60 км/год. **791.** 60 км/год. **792.** 8 км/год. **793.** 32 км/год. **794.** $\frac{1}{4}$. **795.** $\frac{7}{12}$. **796.** 45 днів, 36 днів. **797.** 15 год, 10 год. **798.** 21 год, 24 год. **799.** 80 г. **800.** 30 кг. **801.** 3 км/год. **802.** 5 год. **803.** 4 год, 6 год, 12 год. **804.** 80 км/год. **805.** 24 деталі. **806.** 12 год. **808.** 6. **823.** 3) $\frac{8}{3}$. **829.** 4) 1, 2, 3. **832.** $\frac{4}{a(a+12)}$. **833.** *Вказівка*. Розгляньте різницю лівої та правої частин даної рівності. **886.** $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{2}}{3}$. **909.** 1) –5; 5; –1; 1; 2) –10; 10; –22; 22. **910.** $a = 1$. **911.** $a = 3$.

Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі

Номер завдання	Номер задачі											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	В	Б	Б	В	В	А	В	Г	В	В	А	Б
5	В	Г	Г	В	А	Б	А	Б	А	Г	Б	А
6	Г	В	А	Б	А	В	А	В	А	Г	Б	В

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА
Підручник для осіб з особливими освітніми потребами
(Н 54.1 – Н 54.2)
8 клас
(у 2-х частинах)

ЧАСТИНА 2

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

Відповідальна за випуск *Г. Ф. Висоцька*
Редактор *Т. Є. Цента*
Обкладинка *Д. В. Висоцький*
Макет, художнє оформлення,
комп'ютерна обробка ілюстрацій *Д. В. Висоцький*
Технічний редактор *О. В. Гулькевич*
Комп'ютерна верстка *С. І. Северин*
Коректор *А. Ю. Вєнза*

Формат 84×108/16. Ум. друк. арк. 16,80. Обл.-вид. арк. 6,10.
Тираж 1716 прим. Вид. № 87. Зам. №

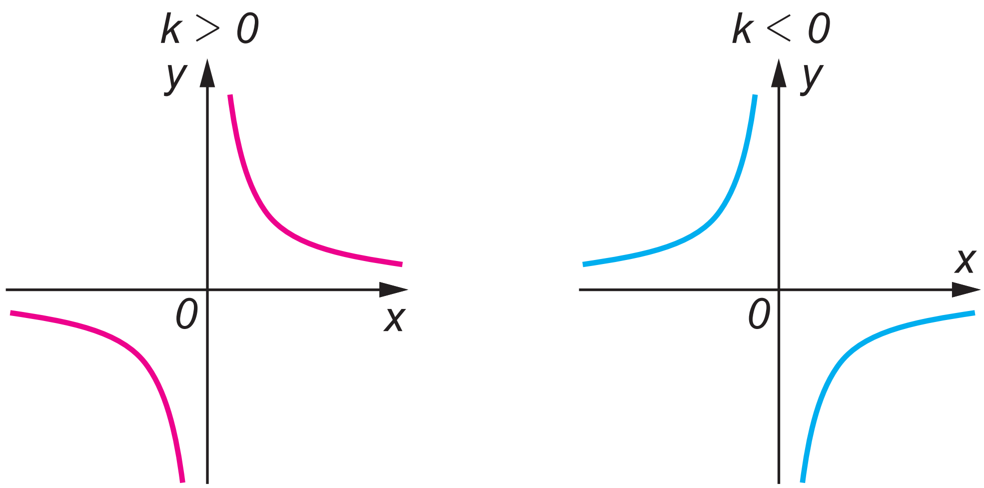
ТОВ ТО «Гімназія», вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua, www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано в друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052, Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

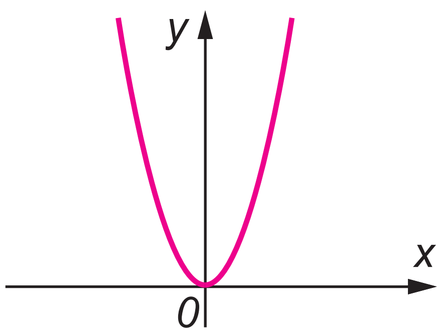
Таблиця квадратів натуральних чисел від 10 до 99

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Графік функції $y = \frac{k}{x}$



Графік функції $y = x^2$



Графік функції $y = \sqrt{x}$