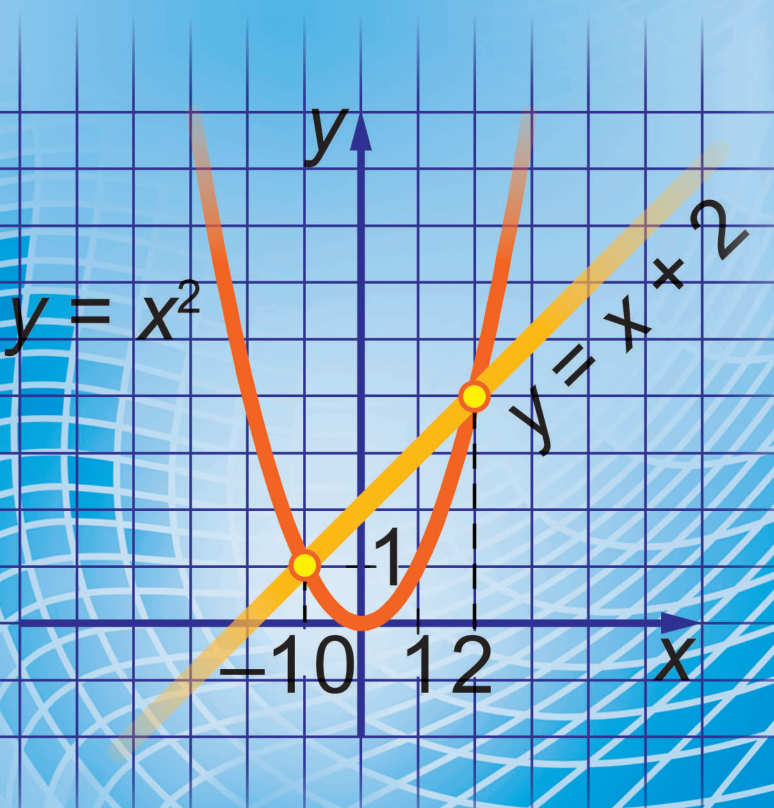
Аркадій Мерзляк
Віталій Полонський
Михайло Якір

8

АЛГЕБРА



ГІМНАЗІЯ

Частина 1

8
АЛГЕБРА
Аркадій Мерзляк, Віталій Полонський, Михайло Якір

«Моя любов — Україна і математика» — викарбовано на гранітному постаменті пам’ятника науковцеві Михайлу Пилиповичу Кравчуку (1892–1942).

Ми сподіваємося, що це патріотичне висловлювання видатного українського математика стане для вас надійним дороговказом на шляху до професіоналізму.

Квадрати й куби натуральних чисел від 1 до 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Степені чисел 2 і 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Властивості степеня із цілим показником

$a^m a^n = a^{m+n}$

$(ab)^n = a^n b^n$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}\ (b \neq 0)$

$a^m : a^n = a^{m-n}\ (a \neq 0)$

Властивості арифметичного квадратного кореня

Якщо $a \geqslant 0$, то $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Для будь-якого дійсного a $\sqrt{a^2} = |a|$

Якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Якщо $a \geqslant 0$ і $b > 0$, то $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Формула коренів квадратного рівняння

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Аркадій Мерзляк
Віталій Полонський
Михайло Якір

АЛГЕБРА

підручник для осіб
з особливими освітніми потребами
(Н 54.1 – Н 54.2)

8 клас

(у 2-х частинах)

ЧАСТИНА 1

Харків
«Гімназія»
2021

УДК 373.167.1:512
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 22.02.2021 № 243)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра : підруч. для осіб з особлив. освіт. потребами (Н 54.1 – Н 54.2) : 8 кл. (у 2-х ч.) : Ч. 1 / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2021. — 168 с. : іл.
ISBN 978-966-474-361-4 (Ч. 1)

УДК 373.167.1:512

ISBN 978-966-474-360-7
ISBN 978-966-474-361-4 (Ч. 1)

ВІД АВТОРІВ

ЛЮБІ ВОСЬМИКЛАСНИКИ ТА ВОСЬМИКЛАСНИЦІ!

У цьому навчальному році ви продовжуватимете вивчати алгебру. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу й красиву науку, а отже, з інтересом будете опановувати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Текст підручника поділено на три параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Найважливіші відомості виділено ***жирним шрифтом*** і *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і важкі задачі (особливо ті, що позначено зірочкою (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі в тестовій формі з рубрики «Перевірте себе».

Кожний пункт завершується рубрикою «Учимося робити нестандартні кроки». До неї дібрано задачі, для розв'язування яких потрібні не спеціальні алгебраїчні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни. Вони допоможуть вам навчитися приймати несподівані й нестандартні рішення не тільки в математиці, а й у житті.

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, непростий. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Дерзайте! Бажаємо успіху!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ ТА КОЛЕЖАНКИ!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв’язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка й факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення та терпіння.

Умовні позначення

- ***n***° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
- ***n***• завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
- ***n***•• завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
- ***n**** задачі для математичних гуртків і факультативів;
- ▲ закінчення доведення теореми, розв’язування прикладу;
-  завдання, які можна виконувати за допомогою комп’ютера;
-  рубрика «Коли зроблено уроки».

Блакитним кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **пурпуровим** кольором — номери задач, що рекомендовано для розв’язування усно.

§ 1 РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з дробами, чисельниками й знаменниками яких є вирази зі змінними; навчитеся додавати, віднімати, множити й ділити такі дроби; ознайомитеся з рівняннями, які складено за допомогою цих дробів.
- Ви дізнаєтеся, за якими правилами можна замінити дане рівняння на більш просте.
- Ви розширите свої уявлення про поняття «степінь», навчитеся підносити числа до степеня із цілим від'ємним показником.
- Ви навчитеся будувати математичні моделі процесів, у яких збільшення (зменшення) однієї величини в кілька разів призводить до зменшення (збільшення) другої величини в таку саму кількість разів.

1. Раціональні дроби

Перед вивченням цього пункту рекомендуємо повторити зміст п. 1 на с. 136 і п. 6 на с. 139 частини 2 підручника.

У курсі алгебри 7 класу було розглянуто цілі вирази, тобто вирази, що складені із чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення та ділення на відмінне від нуля число.

Ось приклади цілих виразів:

$$x - y,\ \frac{a+b}{5},\ m^2 + 2m + n^2,\ \frac{1}{3}x - 4,\ \frac{c}{4} + \frac{d}{7},\ x : 5,\ y,\ 7.$$

У курсі алгебри 8 класу ми розглянемо **дробові вирази**.

Дробові вирази відрізняються від цілих тим, що вони *містять ділення на вираз зі змінними*.

Наведемо приклади дробових виразів:

$$2x+\frac{a}{b},\ (x-y):(x+y),\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}},\ \frac{5}{x}.$$

Цілі та дробові вирази називають **раціональними виразами**.

Якщо в раціональному виразі замінити змінні числами, то отримаємо числовий вираз. Проте *ця заміна можлива лише тоді, коли вона не приводить до ділення на нуль*.

Наприклад, вираз $2+\frac{a+2}{a-1}$ при $a=1$ не має змісту, тобто числового значення цього виразу при $a=1$ не існує. При всіх інших значеннях a цей вираз має зміст.

Означення. **Допустимими значеннями змінних, що входять до раціонального виразу, називають усі значення змінних, при яких цей вираз має зміст.**

Наприклад, у розглянутому вище виразі допустимими значеннями для змінної a є всі числа, крім 1.

Допустимими значеннями змінних, які входять до цілого виразу, є всі числа. Окремим видом раціонального виразу є **раціональний дріб**. Це дріб, чисельником і знаменником якого є многочлени[1]. Так, раціональні вирази

$$\frac{x}{7},\ \frac{x^2-2xy}{x+y},\ \frac{12}{a},\ \frac{a+b}{5}$$

є прикладами раціональних дробів.

Зазначимо, що раціональний дріб може бути як цілим виразом, так і дробовим. Знаменник раціонального дробу не може бути **нульовим многочленом**, тобто многочленом, який тотожно дорівнює нулю.

[1] Нагадаємо, що числа й одночлени вважають окремими випадками многочленів (див. п. 6 на с. 139).

Допустимими значеннями змінних, що входять до раціонального дробу, є всі значення змінних, при яких значення знаменника дробу не дорівнює нулю.

Схема на рисунку 1 ілюструє зв'язок між поняттями, що розглядаються в цьому пункті.

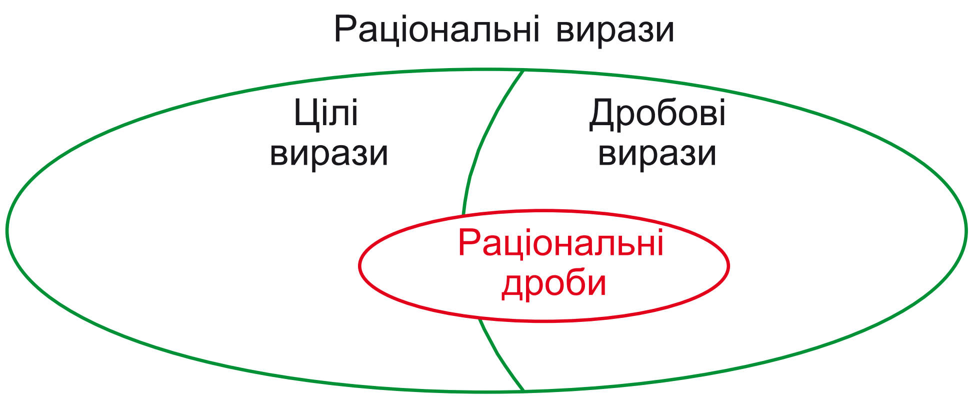


Рис. 1

ПРИКЛАД Знайдіть допустимі значення змінної, що входить до виразу $\frac{1}{x}+\frac{3}{x-5}$.

Розв'язання. Дріб $\frac{1}{x}$ має зміст при всіх значеннях x, крім $x = 0$, а дріб $\frac{3}{x-5}$ має зміст при всіх значеннях x, крім $x = 5$.

Отже, шуканими допустимими значеннями змінної є всі числа, відмінні від 0 і 5. ▲

1. Чим відрізняються дробові вирази від цілих?
2. Як разом називають цілі та дробові вирази?
3. Які значення змінних називають допустимими?
4. Які дроби називають раціональними?
5. Окремим випадком яких виразів є раціональні дроби?
6. Який многочлен не може бути знаменником раціонального дробу?

ВПРАВИ

1.° Які з виразів $\frac{3a^2}{4b^3}$, $\frac{5x^2}{4}+\frac{x}{7}$, $\frac{8}{6n+1}$, $3a-\frac{b^2}{c^4}$, $\frac{t^2-6t+15}{2t}$, $\frac{x-2}{x+2}$, $\frac{1}{6}m^3n^5$, $(y-4)^3+\frac{1}{y}$, $\frac{m^2-3mn}{18}$ є:

1) цілими виразами; 2) дробовими виразами; 3) раціональними дробами?

2.° Чому дорівнює значення дробу $\frac{c^2-4c}{2c+1}$, якщо:

1) $c=-3$; 2) $c=0$?

3.° Знайдіть значення виразу $\frac{2m-n}{3m+2n}$, якщо:

1) $m=-1$, $n=1$; 2) $m=4$, $n=-5$.

4.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\frac{a^2-1}{a-5}$ при $a=-4$; 2) $\frac{x+3}{y}-\frac{y}{x+2}$ при $x=-5$, $y=6$?

5.° Знайдіть допустимі значення змінної, що входить до виразу:

1) $2x-5$;
2) $\frac{18}{m}$;
3) $\frac{9}{x-5}$;
4) $\frac{x-5}{9}$;
5) $\frac{2+y}{1+y}$;
6) $\frac{1}{x^2+4}$;
7) $\frac{5}{x^2-4}$;
8) $\frac{5}{|x|-4}$;
9) $\frac{2}{x-2}+\frac{3x}{x+1}$;
10) $\frac{x+4}{x(x-6)}$;
11) $\frac{x}{|x|+1}$;
12) $\frac{x^2}{(x-3)(x+5)}$.

6.° При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\frac{9}{y}$; 2) $\frac{x+7}{x+9}$; 3) $\frac{m-1}{m^2-9}$;

4) $\frac{x}{|x|-3}$; 5) $\frac{4}{x-8}+\frac{1}{x-1}$; 6) $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$?

7. Запишіть раціональний дріб, який містить змінну x і має зміст при всіх значеннях x, крім:

1) $x = 7$; 2) $x = -1$; 3) $x = 0$ і $x = 4$.

8. Запишіть раціональний дріб, який містить змінну y, допустимими значеннями якої є:

1) усі числа, крім 5;
2) усі числа, крім –2 і 0;
3) усі числа, крім 3, –3 і 6;
4) усі числа.

9. Автомобіль проїхав по шосе a км зі швидкістю 75 км/год і по ґрунтовій дорозі b км зі швидкістю 40 км/год. За який час автомобіль проїхав увесь шлях? Складіть вираз і знайдіть його значення при $a = 150$, $b = 20$.

10. Учень придбав зошити по 8 грн, заплативши за них m грн, і по 14 грн, заплативши за них n грн. Скільки зошитів придбав учень? Складіть вираз і знайдіть його значення при $m = 24$, $n = 56$.

11. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної x значення дробу:

1) $\frac{1}{x^2}$ додатне; 2) $\frac{x^2+1}{6x-9-x^2}$ від'ємне.

12. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної x значення дробу:

1) $\frac{-x^2}{x^2+5}$ недодатне; 2) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}$ невід'ємне.

13. Відомо, що $5x - 15y = 1$. Знайдіть значення виразу:

1) $x - 3y$;
2) $\frac{8}{2x-6y}$;
3) $\frac{18y-6x}{9}$;
4) $\frac{1}{x^2-6xy+9y^2}$.

14.• Відомо, що $4a + 8b = 10$. Знайдіть значення виразу:

1) $2b + a$; 2) $\frac{5}{a+2b}$; 3) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{2a+4b}$.

15.•• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{4-\frac{4}{x}}$; 2) $y = \frac{1}{x-\frac{1}{x}}$.

16.•• При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\frac{x}{x-\frac{9}{x}}$; 2) $\frac{10}{2+\frac{6}{x}}$?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

17. Скоротіть дріб:

1) $\frac{5}{15}$; 2) $\frac{12}{18}$; 3) $\frac{27}{45}$; 4) $\frac{30}{48}$.

18. Зведіть дріб:

1) $\frac{3}{7}$ до знаменника 14; 2) $\frac{8}{15}$ до знаменника 60.

19. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) a^5a^3; 2) $(a^5)^3$; 3) $a^5 : a^3$; 4) $(a^8)^4 : (a^2)^8$.

20. Розкладіть на множники:

1) $6a - 15b$;
2) $2a + ab$;
3) $7am + 7bn$;
4) $4x^2 - 12xy$;
5) $a^6 + a^2$;
6) $12m^2n - 4mn$;
7) $2x^2 - 4x^3 + 10x^4$;
8) $10a^3b^2 - 15a^2b + 25ab^2$.

21. Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $ab - ac + bd - cd$;
2) $3m + 3n - mx - nx$;
3) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$;
4) $8a^2b - 2a^2 - 4b^2 + b$.

22. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) $a^2 - 8a + 16$;
2) $9x^2 + 6x + 1$;
3) $40xy + 16x^2 + 25y^2$;
4) $a^8 - 4a^4b + 4b^2$.

23. Розкладіть на множники:

1) $x^2 - 9$; 4) $a^2b^2 - 81$; 7) $c^3 - d^3$;
2) $25 - 4y^2$; 5) $100m^6 - 1$; 8) $a^3 + 8$;
3) $36m^2 - 49n^2$; 6) $a^{10} - b^6$; 9) $27m^6 - n^9$.

24. Розкладіть на множники:

1) $7a^2 - 7$; 4) $-8a^5 + 8a^3 - 2a$;
2) $3b^3 - 3b$; 5) $x - 4y + x^2 - 16y^2$;
3) $2x^3 - 2xy^2$; 6) $ab^6 - ab^4 - b^6 + b^4$.

25. Яка з рівностей є тотожністю:

1) $3x^2 - 36xy + 108y^2 = 3(x - 6y)^2$;
2) $4m^3 - 500n^6 = 4(m - 5n)(m - 5mn + 25n^2)$?

Поновіть у пам'яті зміст п. 2 на с. 136, 137 частини 2 підручника.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

26. Дано два числа: $a = \underbrace{44...4}_{m\text{ цифр}}$, $b = \underbrace{33...3}_{n\text{ цифр}}$. Чи можна підібрати такі m і n, щоб:

1) число a було дільником числа b;
2) число b було дільником числа a?

2. Основна властивість раціонального дробу

Рівність $3a - 1 + 2a + 5 = 5a + 4$ є тотожністю, оскільки вона виконується при будь-яких значеннях a.

Рівність $\frac{3a - 1 + 2a + 5}{a + 1} = \frac{5a + 4}{a + 1}$ також природно вважати тотожністю. Але вона виконується не при будь-яких значеннях a. При $a = -1$ раціональні дроби, які входять у дану рівність, не мають змісту.

Уточнимо прийняті в 7 класі означення тотожно рівних виразів і означення тотожності.

Означення. **Вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких допустимих значеннях змінних, що в них входять, називають тотожно рівними.**

Означення. **Рівність, яка виконується при будь-яких допустимих значеннях змінних, що в неї входять, називають тотожністю.**

Наприклад, рівність $\frac{a-2}{a-2}=1$ є тотожністю, оскільки вона виконується при всіх допустимих значеннях a, тобто при всіх a, крім $a=2$.

У 7 класі ми розглядали тотожні перетворення цілих виразів. Тепер розглянемо тотожні перетворення дробових виразів.

Як ви знаєте, основна властивість відношення виражається такою рівністю:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm},$$

де a, b і m — деякі числа, причому $b \neq 0$ і $m \neq 0$.

Раціональні дроби мають властивість, аналогічну основній властивості відношення:

якщо чисельник і знаменник раціонального дробу помножити на один і той самий ненульовий многочлен, то отримаємо дріб, тотожно рівний даному.

Цю властивість називають **основною властивістю раціонального дробу** й записують:

$$\frac{A}{B}=\frac{A \cdot C}{B \cdot C},$$

де A, B і C — многочлени, причому многочлени B і C ненульові.

Відповідно до цієї властивості вираз $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ можна замінити на тотожно рівний йому дріб $\frac{A}{B}$. Таке тотожне перетворення називають **скороченням дробу** на множник C.

ПРИКЛАД 1 Скоротіть дріб:

1) $\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}$; 2) $\frac{3x+15y}{3x}$; 3) $\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}$.

Розв'язання. 1) Одночлени $6a^3b^2$ і $24a^2b^4$ мають спільний множник $6a^2b^2$. Тоді можна записати:

$$\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4} = \frac{a \cdot 6a^2b^2}{4b^2 \cdot 6a^2b^2} = \frac{a}{4b^2}.$$

2) Розкладемо чисельник даного дробу на множники:

$$\frac{3x+15y}{3x} = \frac{3(x+5y)}{3x}.$$

Отже, чисельник і знаменник даного дробу мають спільний множник 3, скоротивши на який отримуємо:

$$\frac{3(x+5y)}{3x} = \frac{x+5y}{x}.$$

3) Розклавши попередньо чисельник і знаменник даного дробу на множники та скоротивши на спільний множник $y + 2$, отримуємо:

$$\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y} = \frac{(y+2)^2}{y(y+2)} = \frac{y+2}{y}. \ \blacktriangle$$

З основної властивості дробу випливає, що

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} \quad \text{і} \quad \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}.$$

Кожен із дробів $\frac{-A}{B}$ і $\frac{A}{-B}$ можна записати у вигляді виразу $-\frac{A}{B}$, тобто $\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}$.

ПРИКЛАД 2 Скоротіть дріб $\frac{4a-20}{5a-a^2}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{4a-20}{5a-a^2}=\frac{4(a-5)}{a(5-a)}=\frac{4(a-5)}{-a(a-5)}=-\frac{4}{a}.\ \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 3 Зведіть дріб:

1) $\frac{a^2}{5bc^3}$ до знаменника $15ab^3c^5$;

2) $\frac{a}{a+2b}$ до знаменника a^2-4b^2;

3) $\frac{a-b}{2a-3b}$ до знаменника $3b-2a$.

Розв'язання. 1) Оскільки $15ab^3c^5=5bc^3\cdot 3ab^2c^2$, то новий знаменник відрізняється від знаменника даного дробу множником $3ab^2c^2$. Отже, чисельник і знаменник даного дробу треба помножити на **додатковий множник** $3ab^2c^2$. Маємо:

$$\frac{a^2}{5bc^3}=\frac{a^2\cdot 3ab^2c^2}{5bc^3\cdot 3ab^2c^2}=\frac{3a^3b^2c^2}{15ab^3c^5}.$$

2) Запишемо: $\frac{a}{a+2b}=\frac{a(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)}=\frac{a^2-2ab}{a^2-4b^2}$.

3) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на число -1, отримуємо:

$$\frac{a-b}{2a-3b}=\frac{(a-b)\cdot(-1)}{(2a-3b)\cdot(-1)}=\frac{b-a}{3b-2a}.\ \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 4 Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{2m}{9a^2b^6}$ і $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$; 2) $\frac{1}{a+b}$ і $\frac{1}{a-b}$; 3) $\frac{4a^2}{a^2-36}$ і $\frac{6}{a^2+6a}$.

Розв'язання. 1) Можна взяти за спільний знаменник даних дробів добуток їхніх знаменників, який дорівнює $54a^6b^9$. Проте зручніше за спільний знаменник узяти одночлен $18a^4b^6$, сконструйований таким чином: його коефіцієнт 18 є найменшим спільним кратним коефіцієнтів 9 і 6 знаменників даних дробів, а кожну зі змінних a і b узято в степені з найбільшим показником степеня, з яким вона входить у знаменники даних дробів.

Оскільки $18a^4b^6 = 9a^2b^6 \cdot 2a^2$, то додатковим множником для дробу $\frac{2m}{9a^2b^6}$ є одночлен $2a^2$. Ураховуючи, що $18a^4b^6 = 6a^2b^3 \cdot 3b^3$, отримуємо, що додатковим множником для дробу $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$ є одночлен $3b^3$.

Отже, отримуємо:

$$\frac{2m}{9a^2b^6} = \frac{2m \cdot 2a^2}{9a^2b^6 \cdot 2a^2} = \frac{4a^2m}{18a^4b^6};$$

$$\frac{5n^2}{6a^4b^3} = \frac{5n^2 \cdot 3b^3}{6a^4b^3 \cdot 3b^3} = \frac{15b^3n^2}{18a^4b^6}.$$

2) Тут спільний знаменник даних дробів дорівнює добутку їхніх знаменників. Маємо:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a^2-b^2};$$

$$\frac{1}{a-b} = \frac{a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a^2-b^2}.$$

3) Щоб знайти спільний знаменник раціональних дробів, буває корисним попередньо розкласти їхні знаменники на множники:

$$a^2 - 36 = (a+6)(a-6), \quad a^2 + 6a = a(a+6).$$

Отже, спільним знаменником даних дробів може слугувати вираз $a(a+6)(a-6)$.

Тоді $$\frac{4a^2}{a^2-36} = {}^{a/}\frac{4a^2}{(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a^3-36a};$$

$$\frac{6}{a^2+6a} = {}^{a-6/}\frac{6}{(a+6)} = \frac{6(a-6)}{a(a+6)(a-6)} = \frac{6a-36}{a^3-36a}. \ ▲$$

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Розв'язання. Дана функція визначена при всіх значеннях x, крім 1. Маємо:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1,$$

тобто $y = x + 1$, де $x \neq 1$.

Отже, шуканим графіком є всі точки прямої $y = x + 1$, за винятком однієї точки, абсциса якої дорівнює 1 (рис. 2). ▲

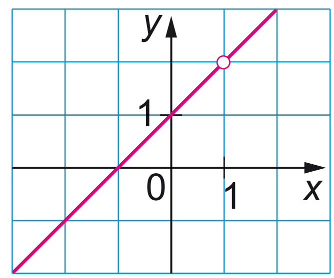


Рис. 2

ПРИКЛАД 6 Для кожного значення a розв'яжіть рівняння $(a^2 - 9)\,x = a + 3$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді $(a + 3)(a - 3)\,x = a + 3$ і розглянемо три випадки.

1) $a = 3$.

Тоді отримуємо рівняння $0x = 6$, яке не має коренів.

2) $a = -3$.

У цьому випадку отримуємо рівняння $0x = 0$, коренем якого є будь-яке число.

3) $a \neq 3$ і $a \neq -3$.

Тоді $x = \dfrac{a + 3}{(a + 3)(a - 3)} = \dfrac{1}{a - 3}$.

Відповідь: якщо $a = 3$, то рівняння не має коренів; якщо $a = -3$, то коренем є будь-яке число; якщо $a \neq 3$ і $a \neq -3$, то $x = \dfrac{1}{a - 3}$. ▲

?

1. Які вирази називають тотожно рівними?
2. Що називають тотожністю?
3. Сформулюйте основну властивість раціонального дробу.

ВПРАВИ

27.° Якому з наведених виразів тотожно дорівнює дріб $\frac{6a^2}{24a}$:

1) $\frac{a^2}{4}$; 2) $\frac{a}{4}$; 3) $\frac{12a^3}{48a}$; 4) $\frac{3a^4}{12a^2}$?

28.° Чи є тотожністю рівність:

1) $\frac{3m^2}{7m} = \frac{3m}{7}$; 3) $\frac{2b}{5c^3} = \frac{8b}{20c^5}$;

2) $\frac{4x^8}{16x^4} = \frac{x^2}{4}$; 4) $\frac{8m^2}{9n} = \frac{8m^5}{9nm^3}$?

29.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{14a^3}{21a}$; 3) $\frac{5x}{20x}$; 5) $\frac{4abc}{16ab^4}$; 7) $\frac{-10n^{10}}{5n^4}$;

2) $\frac{8b^3c^2}{12bc^3}$; 4) $\frac{24x^2y^2}{32xy}$; 6) $\frac{56m^5n^7}{42m^5n^{10}}$; 8) $\frac{3p^4q^6}{-9p^8q^7}$.

30.° Подайте частку у вигляді дробу та скоротіть отриманий дріб:

1) $6a : (18a^5)$; 2) $16b^7 : (48b^4)$; 3) $35a^8b^6 : (-49a^6b^8)$.

31.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{3x}{21y}$; 3) $\frac{5c^4}{10c^5}$; 5) $\frac{16ab^4}{40ab^2}$; 7) $\frac{12a^8}{-42a^2}$;

2) $\frac{5x^2}{6x}$; 4) $\frac{2m^4}{m^3}$; 6) $\frac{63x^5y^4}{42x^4y^5}$; 8) $\frac{-13a^5b^5}{26a^4b^3}$.

32.° Спростіть вираз:

1) $\frac{-a}{-b}$; 2) $-\frac{-a}{b}$; 3) $-\frac{a}{-b}$; 4) $-\frac{-a}{-b}$.

33.° Відновіть рівності:

1) $\frac{a}{3} = \frac{\quad}{6a} = \frac{\quad}{9a^3} = \frac{\quad}{5b} = \frac{4a^2c^3}{\quad}$;

2) $\frac{m}{n} = \frac{4m}{\quad} = \frac{\quad}{2n^2} = \frac{\quad}{mnp} = \frac{3m^4n^3}{\quad}.$

34.° Зведіть дріб:

1) $\frac{a}{b^3}$ до знаменника b^5;
3) $\frac{6}{7x^2y}$ до знаменника $35x^3y^2$;
2) $\frac{m}{9n}$ до знаменника $27n^4$;
4) $\frac{5k}{6p^5}$ до знаменника $24p^9c$.

35.° Зведіть дріб:

1) $\frac{x}{y^2}$ до знаменника y^8;
2) $\frac{a}{3b}$ до знаменника $6b^3$;
3) $\frac{9}{4m^2n}$ до знаменника $12m^3n^2$;
4) $\frac{11c}{15d^6}$ до знаменника $30bd^7$.

36.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{a(x+2)}{b(x+2)}$;
5) $\frac{7x-21y}{5x-15y}$;
9) $\frac{y^2-25}{10+2y}$;
2) $\frac{4(a-6)^2}{(a-6)^3}$;
6) $\frac{4a-20b}{12ab}$;
10) $\frac{a^2+4a+4}{9a+18}$;
3) $\frac{c^3(c-4)^5}{c^6(c-4)^3}$;
7) $\frac{6x+12}{6x}$;
11) $\frac{c^2-6c+9}{c^2-9}$;
4) $\frac{2a+2b}{7(a+b)}$;
8) $\frac{a-5b}{a^2-5ab}$;
12) $\frac{m^3+1}{m^2-m+1}$.

37.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{a-b}{2(b-a)}$;
3) $\frac{m^2-5mn}{15n-3m}$;
5) $\frac{x^2-25}{5x^2-x^3}$;
2) $\frac{3x-6y}{4y-2x}$;
4) $\frac{7a^4-a^3b}{b^4-7ab^3}$;
6) $\frac{y^2-12y+36}{36-y^2}$.

38.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{3m-3n}{7m-7n}$; 4) $\frac{x^2-49}{6x+42}$; 7) $\frac{b^5-b^4}{b^5-b^6}$;

2) $\frac{5a+25b}{2a^2+10ab}$; 5) $\frac{12a^2-6a}{3-6a}$; 8) $\frac{7m^2+7m+7}{m^3-1}$;

3) $\frac{4x-16y}{16y}$; 6) $\frac{9b^2-1}{9b^2+6b+1}$; 9) $\frac{64-x^2}{3x^2-24x}$.

39.° Зведіть дріб:

1) $\frac{a}{a+2}$ до знаменника $4a+8$;

2) $\frac{m}{m-3n}$ до знаменника m^2-9n^2;

3) $\frac{x}{2x-y}$ до знаменника $7y-14x$;

4) $\frac{5b}{2a+3b}$ до знаменника $4a^2+12ab+9b^2$;

5) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ до знаменника x^3-1.

40.° Подайте вираз $x-5y$ у вигляді дробу зі знаменником:

1) 2; 2) x; 3) $4y^3$; 4) x^2-25y^2.

41.° Зведіть дріб $\frac{6}{b-4}$ до знаменника:

1) $5b-20$; 2) $12-3b$; 3) b^2-4b; 4) b^2-16.

42.° Подайте дані дроби у вигляді дробів з однаковими знаменниками:

1) $\frac{1}{8ab}$ і $\frac{1}{2a^3}$; 5) $\frac{x}{2x+1}$ і $\frac{x}{3x-2}$;

2) $\frac{3x}{7m^3n^3}$ і $\frac{4y}{3m^2n^4}$; 6) $\frac{a-b}{3a+3b}$ і $\frac{a}{a^2-b^2}$;

3) $\frac{a+b}{a-b}$ і $\frac{2}{a^2-b^2}$; 7) $\frac{3a}{4a-4}$ і $\frac{2a}{5-5a}$;

4) $\frac{3d}{m-n}$ і $\frac{8p}{(m-n)^2}$; 8) $\frac{7a}{b-3}$ і $\frac{c}{9-b^2}$.

43.° Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{4}{15x^2y^2}$ і $\frac{1}{10x^3y}$;

2) $\frac{c}{6a^4b^5}$ і $\frac{d}{9ab^2}$;

3) $\frac{x}{y-5}$ і $\frac{z}{y^2-25}$;

4) $\frac{m+n}{m^2-mn}$ і $\frac{2m-3n}{m^2-n^2}$;

5) $\frac{x+1}{x^2-xy}$ і $\frac{y-1}{xy-y^2}$;

6) $\frac{6a}{a-2b}$ і $\frac{3a}{a+b}$;

7) $\frac{1+c^2}{c^2-16}$ і $\frac{c}{4-c}$;

8) $\frac{2m+9}{m^2+5m+25}$ і $\frac{m}{m-5}$.

44.• Скоротіть дріб:

1) $\frac{(3a+3b)^2}{a+b}$;

2) $\frac{(6x-18y)^2}{x^2-9y^2}$;

3) $\frac{xy+x-5y-5}{4y+4}$;

4) $\frac{a^2-ab+2b-2a}{a^2-4a+4}$.

45.• Скоротіть дріб:

1) $\frac{2m^2-72n^2}{(4m+24n)^2}$; 2) $\frac{a^3-8}{ab-a-2b+2}$; 3) $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^3-ab^2}$.

46.• Знайдіть значення дробу, попередньо скоротивши його:

1) $\frac{15a^2+10ab}{3ab+2b^2}$, якщо $a=-2$, $b=0{,}4$;

2) $\frac{9b^2-4c^2}{12b^2c-8bc^2}$, якщо $b=\frac{1}{3}$, $c=-6$;

3) $\frac{36x^2-12xy+y^2}{y^2-36x^2}$, якщо $x=1{,}2$, $y=-3$;

4) $\frac{a^8-a^6}{a^9+a^8}$, якщо $a=-0{,}1$.

47.• Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{16x^2-4y^2}{6x-3y}$ при $x=2{,}5$, $y=-2$;

2) $\frac{49c^2-9}{49c^2+42c+9}$ при $c = -4$.

48.• Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{2p}{5p-15}$ і $\frac{1}{p^3-27}$;

2) $\frac{3a+1}{9a^2-6a+1}$ і $\frac{a-2}{9a^2-1}$;

3) $\frac{a}{a^2-7a}$ і $\frac{a+3}{a^2-14a+49}$;

4) $\frac{2x}{x^2-1}$, $\frac{3x}{x^2-2x+1}$ і $\frac{4}{x^2+2x+1}$;

5) $\frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}$, $\frac{b}{2a-2b}$ і $\frac{ab}{4a-4c}$.

49.• Запишіть у вигляді дробів з однаковими знаменниками:

1) $\frac{3a}{3a-2}$, $\frac{a}{9a+6}$ і $\frac{a^2}{9a^2b-4b}$;

2) $\frac{1}{a-5b}$, $\frac{1}{a^2+7ac}$ і $\frac{1}{a^2+7ac-5ab-35bc}$.

50.•• Знайдіть значення виразу $\frac{2xy-y^2}{3xy+x^2}$, якщо $\frac{x}{y}=2$.

51.•• Знайдіть значення виразу $\frac{4a^2-ab}{ab+14b^2}$, якщо $\frac{a}{b}=5$.

52.•• Відомо, що $2a-6b=1$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{8}{a-3b}$;

2) $\frac{a^2-9b^2}{0{,}5a+1{,}5b}$.

53.•• Знайдіть значення виразу $\frac{2m-1{,}5n}{32m^2-18n^2}$, якщо $4m+3n=8$.

54.•• Чи існує таке значення *a*, при якому дріб $\frac{a^3-a^2-a+1}{a^3+a^2+a+1}$ набуває від'ємного значення?

55.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{x^2-4}{x+2}$;
3) $y=\frac{x^2-10x+25}{x-5}-\frac{2x^2-4x}{x}$;
2) $y=\frac{x-3}{3-x}$;
4) $y=\frac{2}{x+4}-\frac{2}{x+4}$.

56.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{x^2-8x+16}{x-4}$; 2) $y=x-\frac{x}{x}$; 3) $y=\frac{x^2-3x}{x}-\frac{2x^2-2}{x^2-1}$.

57.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{|x|}{x}$;
2) $y=\frac{x^2-1}{|x|-1}$.

58.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+1}{x+1}=1$;
2) $\frac{x^2-25}{x-5}=10$;
3) $\frac{x+6}{|x|-6}=0$.

59.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-16}{x+4}=-8$;
2) $\frac{|x|-7}{x-7}=0$.

60.* Для кожного значення *a* розв'яжіть рівняння:

1) $ax=1$;
3) $(a-6)x=a^2-12a+36$;
2) $ax=a$;
4) $(a^2-4)x=a-2$.

61.* Для кожного значення *a* розв'яжіть рівняння:

1) $(a+3)x=3$;
2) $(a^2-9a)x=a^2-18a+81$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

62. Спростіть вираз:

1) $(x+2)(x-9)-3x(3-2x)$;
2) $(a+5)(a-2)+(a+4)(a-5)$;

3) $(y-8)(2y+1)-(3y+1)(y-6)$;

4) $(2x-3y)(2x+3y)+(3x+2y)(3x-2y)$;

5) $(x+1)^2-(x-3)(x+3)$;

6) $(y-4)(y+3)-(y-6)^2$.

63. Побудуйте графік функції:

1) $y=2$; 2) $y=2x$; 3) $y=2x-1$.

64. Якого найменшого значення та при яких значеннях a і b набуває вираз $(a-2)(a+2)+4b(b-a)$?

65. Відстань від села Вишневе до залізничної станції на 14 км менша від відстані від села Яблуневе до тієї самої станції. Час, за який автобус долає відстань від села Вишневе до станції, становить 45 хв, а час, за який легковий автомобіль проїжджає від села Яблуневе до станції, на 5 хв більше, при цьому швидкість автомобіля на 12 км/год більша за швидкість автобуса. Знайдіть швидкість автобуса та швидкість легкового автомобіля.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

66. Виконайте дії:

1) $\frac{7}{18}+\frac{5}{18}$; 2) $\frac{9}{16}+\frac{7}{16}$; 3) $\frac{23}{32}-\frac{15}{32}$; 4) $4-1\frac{3}{11}$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

67. На сторонах квадрата записано чотири натуральних числа. У кожній вершині квадрата записано число, яке дорівнює добутку чисел, записаних на сторонах, для яких ця вершина є спільною. Сума чисел, записаних у вершинах, дорівнює 55. Знайдіть суму чисел, записаних на сторонах квадрата.

3. Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками

Ви знаєте правила додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками. Їх можна виразити такими рівностями:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

За такими самими правилами додають і віднімають раціональні дроби з однаковими знаменниками.

Щоб додати раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба додати їхні чисельники, а знаменник залишити той самий.

Щоб відняти раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба від чисельника першого дробу відняти чисельник другого дробу, а знаменник залишити той самий.

ПРИКЛАД 1 Виконайте віднімання:

1) $\frac{7x-5}{8x^2}-\frac{3x-5}{8x^2}$; 2) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}$; 3) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}$.

Розв'язання. 1) $\frac{7x-5}{8x^2}-\frac{3x-5}{8x^2}=\frac{7x-5-(3x-5)}{8x^2}=$

$$=\frac{7x-5-3x+5}{8x^2}=\frac{4x}{8x^2}=\frac{1}{2x}.$$

2) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-(12y-25)}{y^2-25}=$

$$=\frac{y^2+2y-12y+25}{y^2-25}=\frac{y^2-10y+25}{y^2-25}=\frac{(y-5)^2}{(y+5)(y-5)}=\frac{y-5}{y+5}.$$

3) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}=\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{-(2a-1)}=\frac{4}{2a-1}+\frac{2a-3}{2a-1}=$

$$=\frac{4+2a-3}{2a-1}=\frac{2a+1}{2a-1}. \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 2 Відомо, що $\frac{m}{n}=-3$. Знайдіть значення виразу $\frac{2m+n}{m}$.

Розв'язання. Подамо даний дріб у вигляді суми цілого та дробового виразів: $\frac{2m+n}{m}=\frac{2m}{m}+\frac{n}{m}=2+\frac{n}{m}$.

Якщо $\frac{m}{n}=-3$, то $\frac{n}{m}=-\frac{1}{3}$.

Отже, $\frac{2m+n}{m}=2+\frac{n}{m}=2-\frac{1}{3}=1\frac{2}{3}$. ▲

ПРИКЛАД 3 Знайдіть усі натуральні значення n, при яких значення виразу $\frac{2n^2+3n-15}{n}$ є цілим числом.

Розв'язання. Подамо даний дріб у вигляді різниці цілого та дробового виразів:

$$\frac{2n^2+3n-15}{n}=\frac{2n^2}{n}+\frac{3n}{n}-\frac{15}{n}=2n+3-\frac{15}{n}.$$

Вираз $2n+3$ набуває натуральних значень при будь-якому натуральному n. Тому вираз $2n+3-\frac{15}{n}$ набуває цілих значень, якщо значення виразу $\frac{15}{n}$ є цілими числами. Це можливо лише при таких натуральних значеннях n: 1, 3, 5, 15.

Відповідь: $n = 1$, або $n = 3$, або $n = 5$, або $n = 15$. ▲

?

1. Як додати раціональні дроби з однаковими знаменниками?
2. Як відняти раціональні дроби з однаковими знаменниками?

ВПРАВИ

68.° Виконайте дії:

1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}$;
2) $\frac{a}{3}-\frac{b}{3}$;
3) $\frac{m}{n}+\frac{4m}{n}$;
4) $\frac{6c}{d}-\frac{2c}{d}$;
5) $\frac{m+n}{6}-\frac{m-2n}{6}$;
6) $\frac{2a-3b}{6ab}+\frac{9b-2a}{6ab}$;
7) $-\frac{5c+4d}{cd}+\frac{4d+9c}{cd}$;
8) $\frac{8m+3}{10m^2}-\frac{2m+3}{10m^2}$.

69.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{7k}{18p}-\frac{4k}{18p}$;
2) $\frac{a-b}{2b}-\frac{a}{2b}$;
3) $-\frac{a-12b}{27a}+\frac{a+15b}{27a}$;
4) $\frac{x-7y}{xy}-\frac{x-4y}{xy}$;
5) $\frac{10a+6b}{11a^3}-\frac{6b-a}{11a^3}$;
6) $\frac{x^2-xy}{x^2y}+\frac{2xy-3x^2}{x^2y}$.

70.° Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2}{a+3}-\frac{9}{a+3}$;
2) $\frac{t}{t^2-16}-\frac{4}{t^2-16}$;
3) $\frac{m^2}{(m-5)^2}-\frac{25}{(m-5)^2}$;
4) $\frac{5x+9}{x^2-1}-\frac{4x+8}{x^2-1}$;
5) $\frac{b^2}{b+10}+\frac{20b+100}{b+10}$;
6) $\frac{c^2}{c-7}-\frac{14c-49}{c-7}$.

71.° Спростіть вираз:

1) $\frac{c^2}{c-9}-\frac{81}{c-9}$;
2) $\frac{a^2}{(a-6)^2}-\frac{36}{(a-6)^2}$;
3) $\frac{3x+5}{x^2-4}-\frac{2x+7}{x^2-4}$;
4) $\frac{y^2}{y-2}-\frac{4y-4}{y-2}$.

72.° Виконайте дії:

1) $\frac{a+b}{c-7}+\frac{a}{7-c}$;

2) $\frac{5m}{m-n}+\frac{5n}{n-m}$;

3) $\frac{2x-4y}{x-3y}-\frac{4x-14y}{3y-x}$;

4) $\frac{81b^2}{9b-a}+\frac{a^2}{a-9b}$;

5) $\frac{t^2}{3t-6}+\frac{4}{6-3t}$;

6) $\frac{y^2}{y-1}-\frac{1-2y}{1-y}$.

73.° 1) $\frac{x}{y-1}+\frac{2}{1-y}$;

2) $\frac{3c}{c-d}+\frac{3d}{d-c}$;

3) $\frac{3m+2n}{2m-3n}-\frac{m-8n}{3n-2m}$;

4) $\frac{b^2}{2b-14}+\frac{49}{14-2b}$.

74.• Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{a^2-48}{a-8}-\frac{16}{a-8}$ при $a=32$;

2) $\frac{c^2+3c+7}{c^3-8}+\frac{c+3}{8-c^3}$ при $c=-3$.

75.• Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{5x+3}{x^2-16}+\frac{6x-1}{16-x^2}$ при $x=-4{,}1$;

2) $\frac{a^2+a}{a^2-9}-\frac{7a-9}{a^2-9}$ при $a=7$.

76.• Спростіть вираз:

1) $\frac{5n-1}{20n}-\frac{7n-8}{20n}-\frac{8n+7}{20n}$;

2) $\frac{9m+2}{m^2-4}-\frac{m-9}{4-m^2}+\frac{1-7m}{m^2-4}$;

3) $\frac{3k}{k^3-1}+\frac{4k+1}{1-k^3}+\frac{k^2}{1-k^3}$.

77.• Спростіть вираз:

1) $\frac{6a-1}{16a-8}+\frac{4a-7}{16a-8}+\frac{-2a-2}{8-16a}$;

2) $\frac{2a^2+12a}{a^2-25}+\frac{8a-9}{25-a^2}-\frac{a^2+14a-16}{a^2-25}$.

78.[•] Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{15-8a}{(a-1)^2}-\frac{14-7a}{(1-a)^2}$;

3) $\frac{m^2-8n}{(m-2)(n-5)}-\frac{2m-8n}{(2-m)(5-n)}$.

2) $\frac{3b^2+12}{(b-2)^3}+\frac{12b}{(2-b)^3}$;

79.[•] Спростіть вираз:

1) $\frac{x^2-16x}{(x-7)^4}+\frac{2x+49}{(7-x)^4}$;

2) $\frac{y^2+y}{(y-6)(y+2)}+\frac{y+36}{(6-y)(2+y)}$.

80.[•] Доведіть тотожність:

1) $\frac{(a+b)^2}{4ab}-\frac{(a-b)^2}{4ab}=1$;

2) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}=2$.

81.[•] Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної x значення виразу $\frac{12x-25}{20x-15}+\frac{8x+10}{20x-15}$ не залежить від значення x.

82.[•] Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної y значення виразу $\frac{17y+5}{21y-3}-\frac{9-11y}{21y-3}$ не залежить від значення y.

83.[•] Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\frac{a^2-6}{(a-2)^4}-\frac{7a-4}{(a-2)^4}+\frac{3a+6}{(a-2)^4}$ набуває додатних значень.

84.[•] Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\frac{2-b^2}{(b-5)^6}-\frac{7-3b}{(b-5)^6}+\frac{7b-20}{(b-5)^6}$ набуває від'ємних значень.

85.[••] Подайте даний дріб у вигляді суми або різниці цілого та дробового виразів:

1) $\frac{x+3}{x}$;

2) $\frac{a^2-2a-5}{a-2}$.

86.•• Подайте даний дріб у вигляді суми або різниці цілого та дробового виразів:

1) $\frac{4a-b}{a}$; 2) $\frac{b^2+7b+3}{b+7}$.

87.•• Відомо, що $\frac{x}{y}=4$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{y}{x}$; 2) $\frac{2x-3y}{y}$; 3) $\frac{x^2+y^2}{xy}$.

88.•• Відомо, що $\frac{a}{b}=-2$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{a-b}{a}$; 2) $\frac{4a+5b}{b}$; 3) $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

89.•• Знайдіть усі натуральні значення n, при яких значення виразу є цілим числом:

1) $\frac{n+6}{n}$; 2) $\frac{3n^2-4n-14}{n}$; 3) $\frac{4n+7}{2n-3}$.

90.•• Знайдіть усі натуральні значення n, при яких значення виразу є цілим числом:

1) $\frac{8n-9}{n}$; 2) $\frac{n^2+2n-8}{n}$; 3) $\frac{9n-4}{3n-5}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

91. Із двох сіл, відстань між якими дорівнює 9 км, одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти й зустрілися через 20 хв. Якби велосипедисти їхали в одному напрямі, то один із них наздогнав би другого через 3 год. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста.

92. Розв'яжіть рівняння:

1) $1-4(x+1)=1{,}8-1{,}6x$;

2) $3(0{,}5x-4)+8{,}5x=10x-11$.

93. Доведіть, що вираз $(a+4)(a-8)+4(2a+9)$ при всіх значеннях a набуває невід'ємних значень.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

94. Замість зірочки запишіть такий одночлен, щоби справджувалася рівність:

1) $a^2b \cdot * = a^2b^2$; 2) $5xy^3 \cdot * = 10x^4y^6$; 3) $6x^5 \cdot * = 12x^{10}$.

95. Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоби справджувалася рівність:

1) $* \cdot (a-b) = (a+b)(a-b)^2$; 2) $(a+10b) \cdot * = a^3 - 10ab^2$.

96. Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{1}{3a}$ і $\frac{2}{3b}$;

2) $\frac{4m}{p^3q^2}$ і $\frac{3n}{p^2q^3}$;

3) $\frac{5}{m-n}$ і $\frac{6}{m+n}$;

4) $\frac{6x}{x-2y}$ і $\frac{y}{x+y}$;

5) $\frac{y}{6y-36}$ і $\frac{1}{y^2-6y}$;

6) $\frac{1}{a^2-1}$ і $\frac{1}{a^2+a}$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

97. Чи може парне число мати непарних дільників більше, ніж парних?

4. Додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками

Застосовуючи основну властивість раціонального дробу, додавання і віднімання дробів з різними знаменниками можна звести до додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Нехай треба додати два раціональних дроби $\frac{A}{B}$ і $\frac{C}{D}$.

Можна записати: $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D}$, $\frac{C}{D} = \frac{C \cdot B}{D \cdot B}$.

Тоді $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot D}+\frac{C\cdot B}{D\cdot B}=\frac{A\cdot D+C\cdot B}{B\cdot D}$.

Тут за **спільний знаменник** вибрано вираз, який дорівнює добутку знаменників даних дробів.

Зазначимо, що добуток знаменників даних дробів не завжди є найзручнішим спільним знаменником.

Нагадаємо, щоб знайти спільний знаменник звичайних дробів, ми знаходили найменше спільне кратне знаменників, розкладаючи їх на прості множники. Аналогічно, щоб знайти спільний знаменник раціональних дробів, може виявитися зручним попередньо розкласти знаменники на множники.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз:

1) $\frac{b+1}{abc}+\frac{1-a}{a^2c}$;

2) $\frac{m}{7m+7n}-\frac{n}{7m-7n}$;

3) $\frac{10n+14}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}$;

4) $\frac{2a}{25-10a+a^2}-\frac{1}{3a-15}$;

5) $\frac{x}{x-4}-\frac{x+2}{x-2}$.

Розв'язання. 1) Спільним знаменником даних дробів є одночлен a^2bc. Отже,

$$\overset{a/}{\frac{b+1}{abc}}+\overset{b/}{\frac{1-a}{a^2c}}=\frac{ab+a+b-ab}{a^2bc}=\frac{a+b}{a^2bc}.$$

2) Розклавши попередньо знаменники даних дробів на множники, отримуємо:

$$\frac{m}{7m+7n}-\frac{n}{7m-7n}=\overset{m-n/}{\frac{m}{7(m+n)}}-\overset{m+n/}{\frac{n}{7(m-n)}}=$$

$$=\frac{m(m-n)-n(m+n)}{7(m+n)(m-n)}=\frac{m^2-mn-mn-n^2}{7(m^2-n^2)}=\frac{m^2-2mn-n^2}{7(m^2-n^2)}.$$

3) Маємо: $\dfrac{10n+14}{n^2-49}+\dfrac{6}{7-n}=\dfrac{10n+14}{(n-7)(n+7)}-\dfrac{^{n+7/}\,6}{n-7}=$

$$=\frac{10n+14-6(n+7)}{(n-7)(n+7)}=\frac{10n+14-6n-42}{(n-7)(n+7)}=\frac{4n-28}{(n-7)(n+7)}=$$

$$=\frac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)}=\frac{4}{n+7}.$$

4) $\dfrac{2a}{25-10a+a^2}-\dfrac{1}{3a-15}=\dfrac{2a}{(5-a)^2}-\dfrac{1}{3(a-5)}=$

$$=\frac{^{3/}\,2a}{(a-5)^2}-\frac{^{a-5/}\,1}{3(a-5)}=\frac{6a-a+5}{3(a-5)^2}=\frac{5a+5}{3(a-5)^2}.$$

5) У цьому випадку спільний знаменник даних дробів дорівнює добутку їхніх знаменників. Тоді

$$\frac{^{x-2/}\,x}{x-4}-\frac{^{x-4/}\,x+2}{x-2}=\frac{x(x-2)-(x+2)(x-4)}{(x-4)(x-2)}=$$

$$\frac{x^2-2x-x^2+4x-2x+8}{(x-4)(x-2)}=\frac{8}{(x-4)(x-2)}.$$ ▲

ПРИКЛАД 2 Подайте у вигляді дробу вираз $\dfrac{21c^2}{7c-2}-3c.$

Розв'язання. Подавши вираз $3c$ у вигляді дробу зі знаменником 1, отримуємо:

$$\frac{21c^2}{7c-2}-3c=\frac{21c^2}{7c-2}-\frac{^{7c-2/}\,3c}{1}=$$

$$=\frac{21c^2-21c^2+6c}{7c-2}=\frac{6c}{7c-2}.$$ ▲

Зауважимо, що сума й різниця двох раціональних дробів є раціональними дробами.

?

1. Як виконати додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками?
2. Що є сумою та різницею двох раціональних дробів?

ВПРАВИ

98.° Виконайте дії:

1) $\frac{x}{4}+\frac{2x}{3}$;
2) $\frac{5b}{14}-\frac{b}{7}$;
3) $\frac{m}{8}-\frac{n}{6}$;
4) $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}$;
5) $\frac{m}{4n}+\frac{m}{6n}$;
6) $\frac{c}{b}-\frac{d}{3b}$;
7) $\frac{a}{b^2}+\frac{1}{ab^4}$;
8) $\frac{11}{5a}-\frac{2c}{15ab}$;
9) $\frac{m}{abc}+\frac{c}{abm}$.

99.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{x}{8}-\frac{y}{12}$;
2) $\frac{4a}{7}+\frac{a}{4}$;
3) $\frac{m}{n}-\frac{n}{m}$;
4) $\frac{x^2}{2y}+\frac{y}{8x}$;
5) $\frac{7}{cd}+\frac{k}{cp}$;
6) $\frac{6a}{35c^5}-\frac{9b}{14c^2}$.

100.° Спростіть вираз:

1) $\frac{a+7}{12}+\frac{a-4}{9}$;
2) $\frac{2b-7c}{6}-\frac{3b+2c}{15}$;
3) $\frac{3x-2}{x}-\frac{3y-1}{y}$;
4) $\frac{6p+1}{p}-\frac{2p+8}{3p}$;
5) $\frac{5m-n}{14m}-\frac{m-6n}{7m}$;
6) $\frac{x+4}{11x}-\frac{y-3}{11y}$;
7) $\frac{a+b}{ab}+\frac{a-c}{ac}$;
8) $\frac{2}{p^2}+\frac{p-1}{p}$;
9) $\frac{k+4}{k}-\frac{3k-4}{k^2}$;
10) $\frac{x-y}{x^3}-\frac{y-x^2}{x^2y}$;
11) $\frac{2m-3n}{m^2n}+\frac{7m-2n}{mn^2}$;
12) $\frac{c+d}{cd^4}-\frac{c^2-8d}{c^3d^3}$.

101.° Виконайте додавання або віднімання дробів:

1) $\frac{9-5b}{b}-\frac{7-5c}{c}$;
2) $\frac{4d+7}{7d}-\frac{d-6}{6d}$;
3) $\frac{5-k}{5p}-\frac{p+10}{5k}$;
4) $\frac{m-n}{mn}-\frac{p-n}{np}$;
5) $\frac{6a+2}{ab}-\frac{2a+4}{a^2b}$;
6) $\frac{c^2-16}{c^6}-\frac{c-9}{c^5}$;

7) $\frac{1}{x^3}-\frac{1+x^2}{x^5}$; 8) $\frac{1-ab}{abc}-\frac{1-ad}{acd}$.

102.° Виконайте дії:

1) $\frac{2}{x}+\frac{3x-2}{x+1}$; 3) $\frac{a}{a-3}-\frac{3}{a+3}$; 5) $\frac{x}{2y+1}-\frac{x}{3y-2}$;

2) $\frac{m}{n}-\frac{m}{m+n}$; 4) $\frac{c}{3c-1}-\frac{c}{3c+1}$; 6) $\frac{a-b}{b}-\frac{a-b}{a+b}$.

103.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{b}$; 2) $\frac{4}{x}-\frac{5x+4}{x+2}$; 3) $\frac{b}{b-2}-\frac{2}{b+2}$.

104.° Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{b(a-b)}-\frac{1}{a(a-b)}$; 4) $\frac{y}{2(y+3)}-\frac{y}{5(y+3)}$;

2) $\frac{5}{a}+\frac{30}{a(a-6)}$; 5) $\frac{5m+3}{2(m+1)}-\frac{7m+4}{3(m+1)}$;

3) $\frac{3}{x-2}-\frac{2x+2}{x(x-2)}$; 6) $\frac{c-a}{a(a+b)}+\frac{c+b}{b(a+b)}$.

105.° Виконайте дії:

1) $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}$; 3) $\frac{x}{5(x+7)}-\frac{x}{6(x+7)}$;

2) $\frac{4}{b}-\frac{8}{b(b+2)}$; 4) $\frac{4n+2}{3(n-1)}-\frac{5n+3}{4(n-1)}$.

106.° Виконайте додавання або віднімання дробів:

1) $\frac{a}{a-2}-\frac{3a+1}{3a-6}$; 5) $\frac{m+1}{3m-15}-\frac{m-1}{2m-10}$;

2) $\frac{18}{b^2+3b}-\frac{6}{b}$; 6) $\frac{m-2n}{6m+6n}-\frac{m-3n}{4m+4n}$;

3) $\frac{2}{c+1}-\frac{c-1}{c^2+c}$; 7) $\frac{a^2+2}{a^2+2a}-\frac{a+4}{2a+4}$;

4) $\frac{d-1}{2d-8}+\frac{d}{d-4}$; 8) $\frac{3x-4y}{x^2-2xy}-\frac{3y-x}{xy-2y^2}$.

107.° Спростіть вираз:

1) $\frac{b}{b-5}-\frac{4b-1}{4b-20}$;
2) $\frac{2}{m}-\frac{16}{m^2+8m}$;
3) $\frac{a-2}{2a-6}-\frac{a-1}{3a-9}$;
4) $\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab}+\frac{b}{a+b}$;
5) $\frac{b+4}{ab-b^2}-\frac{a+4}{a^2-ab}$;
6) $\frac{c-4}{4c+24}+\frac{4c+9}{c^2+6c}$.

108.° Виконайте дії:

1) $\frac{3}{x+3}+\frac{x+4}{x^2-9}$;
2) $\frac{a^2}{a^2-64}-\frac{a}{a-8}$;
3) $\frac{6b}{9b^2-4}-\frac{1}{3b-2}$;
4) $\frac{3a+b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}$;
5) $\frac{m}{m+5}-\frac{m^2}{m^2+10m+25}$;
6) $\frac{b}{a+b}-\frac{b^2}{a^2+b^2+2ab}$.

109.° Спростіть вираз:

1) $\frac{4x-y}{x^2-y^2}+\frac{1}{x-y}$;
2) $\frac{y^2}{y^2-81}-\frac{y}{y+9}$;
3) $\frac{10a}{25a^2-9}-\frac{1}{5a+3}$;
4) $\frac{n}{n-7}-\frac{n^2}{n^2-14n+49}$.

110.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{a}{b}+1$;
2) $\frac{x}{y}-x$;
3) $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2$;
4) $\frac{9}{p^2}-\frac{4}{p}+3$;
5) $2-\frac{3b+2a}{a}$;
6) $\frac{3b+4}{b-2}-3$;
7) $6m-\frac{12m^2+1}{2m}$;
8) $\frac{20b^2+5}{2b-1}-10b$.

111.° Виконайте дії:

1) $a-\frac{4}{a}$;
2) $\frac{1}{x}+x-2$;
3) $\frac{m}{n^3}-\frac{1}{n}+m$;
4) $\frac{2k^2}{k-5}-k$;
5) $3n-\frac{9n^2-2}{3n}$;
6) $5-\frac{4y-12}{y-2}$.

112.• Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2+1}{a^2-2a+1}+\frac{a+1}{a-1}$;

2) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$;

3) $\frac{c+7}{c-7}+\frac{28c}{49-c^2}$;

4) $\frac{5a+3}{2a^2+6a}+\frac{6-3a}{a^2-9}$;

5) $\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a+4}{a^2-4}$;

6) $\frac{2p}{p-5}-\frac{5}{p+5}+\frac{2p^2}{25-p^2}$;

7) $\frac{1}{y}-\frac{y+8}{16-y^2}-\frac{2}{y-4}$;

8) $\frac{2b-1}{4b+2}+\frac{4b}{4b^2-1}+\frac{2b+1}{3-6b}$.

113.• Спростіть вираз:

1) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;

2) $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y^2}{2xy+x^2+y^2}$;

3) $\frac{2a}{4a^2-1}-\frac{a+4}{2a^2+a}$;

4) $\frac{b-2}{b^2+6b+9}-\frac{b}{b^2-9}$;

5) $\frac{x-6}{x^2+3x}+\frac{x}{x+3}-\frac{x-3}{x}$;

6) $\frac{y+2}{y-2}-\frac{y-2}{y+2}-\frac{16}{y^2-4}$.

114.• Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення даного виразу не залежить від значення змінної:

1) $\frac{2x+1}{2x-4}+\frac{2x-1}{6-3x}-\frac{x+7}{6x-12}$;

2) $\frac{24-2a}{a^2-16}-\frac{a}{2a-8}+\frac{4}{a+4}$.

115.• Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $1-a+\frac{a^2-2}{a+2}$;

2) $\frac{a^2-b^2}{3a+b}+3a-b$;

3) $\frac{c^2+9}{c-3}-c-3$;

4) $\frac{8m^2}{4m-3}-2m-1$.

116.• Спростіть вираз:

1) $b+7-\frac{14b}{b+7}$;

2) $5c-\frac{10-29c+10c^2}{2c-5}+2$.

117.• Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $\frac{7}{2a-4}-\frac{12}{a^2-4}-\frac{3}{a+2}$, якщо $a=5$;

2) $\frac{2c+3}{2c^2-3c}+\frac{2c-3}{2c^2+3c}-\frac{16c}{4c^2-9}$, якщо $c=-0{,}8$;

3) $\frac{m^2+16n^2}{m^2-16n^2}-\frac{m+4n}{2m-8n}$, якщо $m=3$, $n=0{,}5$.

118.• Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{6}{5x-20}-\frac{x-5}{x^2-8x+16}$, якщо $x=5$;

2) $\frac{2y-1}{2y}-\frac{2y}{2y-1}-\frac{1}{2y-4y^2}$, якщо $y=-2\frac{3}{7}$.

119.• Доведіть тотожність:

1) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}+\frac{b^2}{a^2-ab}=0$;

2) $\frac{a+3}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{6}{a^2-1}=\frac{2}{a^2-1}$;

3) $\frac{2a^2+4}{a^2-1}-\frac{a-2}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}=\frac{1}{a-1}$.

120.• Доведіть тотожність:

1) $\frac{1}{6a-4b}-\frac{1}{6a+4b}-\frac{3a}{4b^2-9a^2}=\frac{1}{3a-2b}$;

2) $\frac{c+2}{c^2+3c}-\frac{1}{3c+9}-\frac{2}{3c}=0$.

121.• Знайдіть різницю дробів:

1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}$; 2) $\frac{1}{b+3}-\frac{b^2-6b}{b^3+27}$.

122.• Спростіть вираз:

1) $\frac{9m^2-3mn+n^2}{3m-n}-\frac{9m^2+3mn+n^2}{3m+n}$;

2) $1-\frac{2b-1}{4b^2-2b+1}-\frac{2b}{2b+1}$.

123.$^{\bullet}$ Доведіть тотожність

$$\frac{3a^2+24}{a^3+8}-\frac{6}{a^2-2a+4}-\frac{1}{a+2}=\frac{2}{a+2}.$$

124.$^{\bullet\bullet}$ Спростіть вираз:

1) $\frac{4b}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{b^2-ab}$;

2) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}+\frac{x^2+4}{8x-2x^3}$;

3) $\frac{1}{(a-5b)^2}-\frac{2}{a^2-25b^2}+\frac{1}{(a+5b)^2}$;

4) $\frac{x^2+9x+18}{xy+3y-2x-6}-\frac{x+5}{y-2}$.

125.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть тотожність:

1) $\frac{a+3}{a^2-3a}+\frac{a-3}{3a+9}+\frac{12}{9-a^2}=\frac{a-3}{3a}$;

2) $\frac{b-4}{2a-1}-\frac{b^2-2b-24}{2ab-4-b+8a}=\frac{2}{2a-1}$.

126.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть тотожність

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0.$$

127.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть тотожність

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1.$$

128.* Спростіть вираз

$$\frac{1}{(a-1)(a-2)}+\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-4)}.$$

129.* Спростіть вираз

$$\frac{1}{(a-1)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-5)}+\frac{1}{(a-5)(a-7)}.$$

130.* Доведіть тотожність

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}=\frac{32}{1-a^{32}}.$$

131.* Доведіть тотожність

$$\frac{3}{1-a^2}+\frac{3}{1+a^2}+\frac{6}{1+a^4}+\frac{12}{1+a^8}+\frac{24}{1+a^{16}}=\frac{48}{1-a^{32}}.$$

132.* Доведіть, що коли $\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{a+c}+\frac{c-b}{a+b}=1$, то

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+c}+\frac{a+c}{a+b}=4.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

133. Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{x}{3}+\frac{x-1}{2}=4;$ 2) $\frac{x-4}{2}-\frac{x-1}{5}=3.$

134. Розв’яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=8, \\ 3x-2y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+5y=13, \\ 3x-5y=-13. \end{cases}$

135. За перший день триденної гонки велосипедисти проїхали $\frac{4}{15}$ усього маршруту, за другий день — $\frac{2}{5}$ усього маршруту, а за третій — решту 90 км. Яку відстань проїхали велосипедисти за 3 дні?

136. (*З болгарського фольклору.*) П’ятеро братів хотіли поділити 20 овець так, щоб кожен із них одержав непарну кількість овець. Чи можливо це?

137. Чи є правильним твердження, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(5n+7)^2-(n-1)^2$ ділиться націло на 48?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

138. Укажіть число, обернене до числа:

1) $\frac{5}{8}$; 2) 7; 3) $-3\frac{5}{6}$; 4) $\frac{1}{14}$; 5) 0,12.

139. Знайдіть значення добутку:

1) $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{20}$; 2) $6\cdot\frac{7}{18}$; 3) $\frac{3}{8}\cdot\left(-2\frac{2}{3}\right)$.

140. Виконайте ділення:

1) $\frac{5}{18}:\left(-\frac{25}{27}\right)$; 2) $8:\frac{4}{17}$; 3) $-\frac{8}{15}:(-24)$; 4) $1\frac{3}{5}:5\frac{1}{3}$.

141. Знайдіть значення степеня:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; 3) $\left(-2\frac{2}{3}\right)^2$; 4) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

142. Два пороми одночасно відпливають від протилежних берегів річки та перетинають її перпендикулярно до берегів. Швидкості поромів сталі, але різні. Пороми зустрічаються на відстані 720 м від одного з берегів, після чого продовжують рух. Діставшись берегів, пороми відразу починають рухатися назад і через деякий час зустрічаються на відстані 400 м від другого берега. Яка ширина річки?

ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Який із наведених виразів є цілим?

А) $\frac{m+n}{m}$; Б) $\frac{m+n}{7}$; В) $\frac{m+n}{7m}$; Г) $m+\frac{n}{7m}$.

2. При якому значенні змінної не має змісту вираз $\frac{3a}{2a-10}$?

А) 0; Б) 10; В) 5; Г) 0; 5.

3. При яких значеннях аргументу функція $y=\frac{x+2}{x^2-1}$ не визначена?

А) –1; 1; Б) 1; В) –2; –1; 1; Г) –2; 1.

4. Скоротіть дріб $\frac{21a^6}{14a^3}$.

А) $\frac{3a^3}{2}$; Б) $\frac{3a^2}{2}$; В) $\frac{3}{2a^3}$; Г) $\frac{3}{2a^2}$.

5. Якому з наведених дробів тотожно дорівнює дріб $\frac{5b-15}{b^2-9}$?

А) $\frac{b-3}{5}$; Б) $\frac{b+3}{5}$; В) $\frac{5}{b-3}$; Г) $\frac{5}{b+3}$.

6. Скоротіть дріб $\frac{12c^2-4c}{3c-1}$.

А) $4c$; Б) $-4c$; В) $\frac{1}{4c}$; Г) $-\frac{1}{4c}$.

7. Виконайте віднімання: $\frac{5x}{x-2}-\frac{10}{x-2}$.

А) $\frac{x+2}{x-2}$; Б) $\frac{5x+10}{x-2}$; В) 5; Г) –5.

8. Виконайте додавання: $\frac{4-m}{m-3}+\frac{2m-5}{3-m}$.

А) $\frac{m-1}{m-3}$; Б) $\frac{1-3m}{m-3}$; В) 3; Г) –3.

9. Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{3n^2}{n-6}-3n$.

А) $\frac{3n}{n-4}$; Б) $\frac{3n}{4-n}$; В) $\frac{18n}{n-6}$; Г) $\frac{18}{6-n}$.

10. Спростіть вираз $\dfrac{2m+1}{3m-2}-\dfrac{3m^2+m-2}{9m^2-12m+4}$.

А) $\dfrac{1}{(3m-2)^2}$; В) $\dfrac{m}{(3m-2)^2}$;

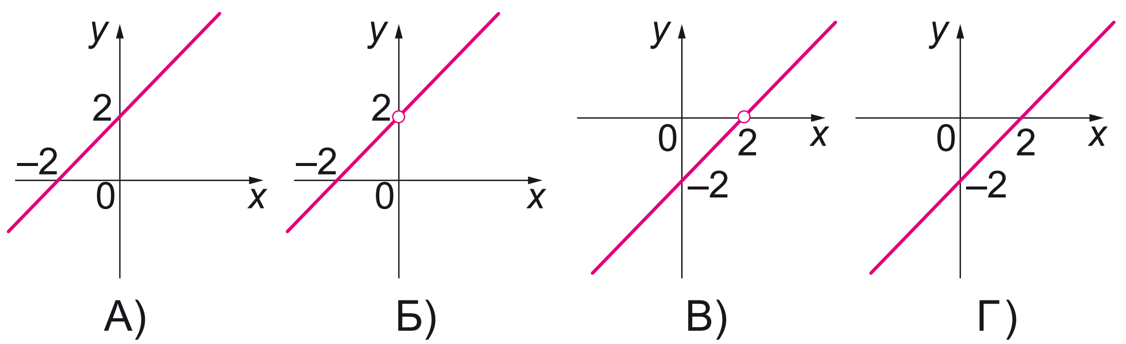
Б) $\dfrac{1}{3m-2}$; Г) $\dfrac{m}{3m-2}$.

11. Спростіть вираз $\dfrac{a-12}{a^2+4a}-\dfrac{a-4}{a}+\dfrac{a}{a+4}$.

А) $\dfrac{4}{a}$; Б) $\dfrac{1}{a}$; В) a; Г) $a+4$.

12. На якому рисунку зображено графік функції

$$y=\frac{x^2-4x+4}{x-2}?$$



5. Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня

Ви знаєте правила множення і ділення звичайних дробів. Їх можна виразити такими рівностями:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

За аналогічними правилами виконують множення і ділення раціональних дробів.

Добутком двох раціональних дробів є раціональний дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників даних дробів, а знаменник — добутку їхніх знаменників.

Часткою двох раціональних дробів є раціональний дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельника діленого та знаменника дільника, а знаменник — добутку знаменника діленого та чисельника дільника.

ПРИКЛАД 1 Виконайте дії:

1) $\frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4}$; 3) $\frac{a^2+2ab}{a+9} : \frac{a^2-4b^2}{3a+27}$;

2) $(2x-12) \cdot \frac{4x}{x^2-12x+36}$; 4) $\frac{5c^2-35c}{c+2} : (c-7)$.

Розв'язання. 1) Маємо: $\frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4} = \frac{21c^6 \cdot b^2}{b^8 \cdot 14c^4} = \frac{3c^2}{2b^6}$.

2) Подавши многочлен $2x - 12$ у вигляді дробу зі знаменником 1, отримуємо: $(2x-12) \cdot \frac{4x}{x^2-12x+36} =$

$$= \frac{2x-12}{1} \cdot \frac{4x}{x^2-12x+36} = \frac{2(x-6) \cdot 4x}{(x-6)^2} = \frac{8x}{x-6};$$

3) $\frac{a^2+2ab}{a+9} : \frac{a^2-4b^2}{3a+27} = \frac{a(a+2b)}{a+9} \cdot \frac{3(a+9)}{(a-2b)(a+2b)} = \frac{3a}{a-2b}$;

4) $\frac{5c^2-35c}{c+2} : (c-7) = \frac{5c^2-35c}{c+2} : \frac{c-7}{1} =$

$$= \frac{5c(c-7)}{c+2} \cdot \frac{1}{c-7} = \frac{5c}{c+2}. \ \blacktriangle$$

Правило множення двох дробів можна узагальнити для випадку, коли треба знайти добуток трьох і більше раціональних дробів. Наприклад, для трьох дробів маємо:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot Q}.$$

ПРИКЛАД 2 Спростіть вираз $\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3} = \frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} \cdot \frac{9bc^3}{4a^2} =$$

$$= \frac{2a^5 \cdot 10b^2 \cdot 9bc^3}{15b^3 \cdot 7c^4 \cdot 4a^2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot a^5 b^3 c^3}{15 \cdot 7 \cdot 4 \cdot a^2 b^3 c^4} = \frac{3a^3}{7c}. \quad \blacktriangle$$

Застосовуючи правило множення дробів, можна отримати правило піднесення раціональних дробів до степеня. Для натурального n, $n > 1$, маємо:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \underbrace{\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \ldots \cdot \frac{A}{B}}_{n \text{ множників}} = \frac{\overbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}^{n \text{ множників}}}{\underbrace{B \cdot B \cdot \ldots \cdot B}_{n \text{ множників}}} = \frac{A^n}{B^n}.$$

Для $n = 1$ домовилися, що $\left(\frac{A}{B}\right)^1 = \frac{A}{B}$.

Отже,

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n},$$

де n — натуральне число.

Щоб піднести раціональний дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник і знаменник. Перший результат записати як чисельник, а другий — як знаменник дробу.

ПРИКЛАД 3 Подайте у вигляді дробу вираз $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3$.

Розв'язання

$$\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\left(\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\frac{(3a^2)^3}{(2bc^4)^3} = -\frac{27a^6}{8b^3c^{12}}. \quad \blacktriangle$$

1. Що є добутком двох раціональних дробів?
2. Що є часткою двох раціональних дробів?
3. Як піднести раціональний дріб до степеня?

ВПРАВИ

143.° Якому з наведених виразів дорівнює добуток $\frac{a^3}{c^8} \cdot \frac{c^4}{a^3}$?

1) $\frac{1}{c^2}$; 2) $\frac{a}{c^2}$; 3) $\frac{1}{c^4}$; 4) $\frac{a}{c^4}$.

144.° Виконайте множення:

1) $\frac{3a^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c}$; 3) $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y^4}{5x}$; 5) $14m^9 \cdot \frac{n^2}{7m^3}$; 7) $\frac{48ab}{17c^4} \cdot \frac{51bc^5}{40a^4}$;

2) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{8a}$; 4) $\frac{3m}{16n^2} \cdot 8n^6$; 6) $\frac{15a^4}{b^{12}} \cdot \frac{b^6}{10a^2}$; 8) $\frac{21c^3}{13p^2} \cdot \frac{39p}{28c^2}$.

145.° Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2}{b^6} \cdot \frac{b^2}{a^2}$; 3) $\frac{a}{2b} \cdot 2a$; 5) $\frac{11x^3}{y^8} \cdot \frac{y^5}{33x^7}$;

2) $\frac{4m^2}{k^5} \cdot \frac{mk^5}{12}$; 4) $15x^{12} \cdot \frac{y^2}{5x^4}$; 6) $\frac{7k^8}{9mp} \cdot \frac{27m^3}{56k^6p^2}$.

146.° Спростіть вираз:

1) $\frac{a-b}{3b} \cdot \frac{3}{a-b}$;
2) $\frac{2mn+n^2}{6m} \cdot \frac{2m}{n}$;
3) $\frac{7a+7b}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a+b}$;
4) $\frac{32a}{a^2-9} \cdot \frac{a-3}{8a}$;
5) $\frac{c-1}{c+6} \cdot \frac{c+6}{c^2-2c+1}$;
6) $\frac{m-2}{m^2-49} \cdot \frac{m+7}{m-2}$;
7) $(a+4) \cdot \frac{a}{2a+8}$;
8) $\frac{x-9}{4x+8} \cdot \frac{x^2+2x}{x-9}$;
9) $\frac{4a^2-4a+1}{3a+3} \cdot \frac{a+1}{2a-1}$;
10) $\frac{a^2-25}{4a} \cdot \frac{4a^2}{a^2-5a}$.

147.° Виконайте множення:

1) $\frac{3a+b}{4c}\cdot\frac{c}{3a+b}$;
2) $\frac{ab-b^2}{8}\cdot\frac{4a}{b^4}$;
3) $\frac{5x-5y}{x^6}\cdot\frac{x^3}{x-y}$;
4) $\frac{18b}{b^2-16}\cdot\frac{b+4}{3b}$;
5) $\frac{6}{m^2-9n^2}\cdot(m-3n)$;
6) $\frac{3c-9}{9c^2+6c+1}\cdot\frac{3c+1}{c-3}$.

148.° Якому з наведених виразів дорівнює частка $\frac{3}{c^3}:\frac{12}{c^9}$?

1) $\frac{c^3}{4}$; 2) $\frac{c^6}{4}$; 3) $4c^3$; 4) $4c^6$.

149.° Виконайте ділення:

1) $\frac{8m}{n}:\frac{4m}{n}$;
2) $\frac{3b}{8}:b$;
3) $\frac{7c^2}{d}:\frac{c}{d^3}$;
4) $\frac{6a}{5b}:\frac{3a^2}{20b^2}$;
5) $-\frac{9a}{b^5}:\frac{18a^4}{b^3}$;
6) $a^2:\frac{a}{b^2c}$;
7) $24a^3:\frac{12a^2}{b}$;
8) $\frac{36a}{c^3}:(4a^2c)$.

150.° Знайдіть частку:

1) $\frac{7}{a^2}:\frac{28}{a^8}$;
2) $\frac{b^9}{8}:\frac{b^3}{48}$;
3) $\frac{27}{m^6}:\frac{36}{m^7n^2}$;
4) $\frac{6x^{10}}{y^8}:(30x^5y^2)$;
5) $49m^4:\frac{21m}{n^2}$;
6) $\frac{16x^3y^8}{33z^5}:\left(-\frac{10x^2}{55z^6}\right)$.

151.° Спростіть вираз:

1) $\frac{a-b}{7a}:\frac{a-b}{7b}$;
2) $\frac{x^2-y^2}{x^2}:\frac{6x+6y}{x^5}$;
3) $\frac{c-5}{c^2-4c}:\frac{c-5}{5c-20}$;
4) $\frac{x-y}{xy}:\frac{x^2-y^2}{3xy}$;
5) $\frac{a^2-25}{a+7}:\frac{a-5}{a+7}$;
6) $\frac{a^2-4a+4}{a+2}:(a-2)$;
7) $(p^2-16k^2):\frac{p+4k}{p}$;
8) $\frac{a^2-ab}{a^2}:\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

152.° Виконайте ділення:

1) $\frac{5m-2n}{10k}:\frac{5m-2n}{10k^2}$;
2) $\frac{p+3}{p^2-2p}:\frac{p+3}{4p-8}$;

3) $\frac{a^2-b^2}{2ab}:\frac{a+b}{ab}$;

4) $\frac{a^2-16}{a-3}:\frac{a+4}{a-3}$;

5) $\frac{y-9}{y-8}:\frac{y^2-81}{y^2-16y+64}$;

6) $(x^2-49y^2):\frac{x-7y}{x}$.

153.° Виконайте піднесення до степеня:

1) $\left(\frac{a}{b}\right)^9$;

2) $\left(\frac{m}{n^2}\right)^8$;

3) $\left(\frac{c}{2d}\right)^5$;

4) $\left(\frac{5a^6}{b^5}\right)^2$;

5) $\left(-\frac{3m^4}{2n^3}\right)^3$;

6) $\left(-\frac{6a^6}{b^7}\right)^2$.

154.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\left(\frac{a^6}{b^3}\right)^{10}$; 2) $\left(-\frac{4m}{9n^3}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{10c^7}{3d^5}\right)^3$; 4) $\left(\frac{2m^3n^2}{kp^8}\right)^6$.

155.• Спростіть вираз:

1) $\frac{6a^4b^2}{35c^3}\cdot\frac{14b^2}{a^7c^5}\cdot\frac{5a^3c^8}{18b^4}$;

2) $\frac{33m^8}{34n^8}:\frac{88m^4}{51n^4}:\frac{21m^6}{16n^2}$;

3) $\frac{36x^6}{49y^5}:\frac{24x^9}{25y^4}\cdot\frac{7x^2}{30y}$;

4) $\left(\frac{m^5n}{3p^3}\right)^3:\frac{m^{10}n^5}{54p^8}$;

5) $\left(\frac{2a^5}{y^6}\right)^4:\left(\frac{4a^6}{y^8}\right)^3$;

6) $\left(-\frac{27x^3}{16y^5}\right)^2\cdot\left(\frac{8y^3}{9x^2}\right)^3$.

156.• Спростіть вираз:

1) $\frac{3a^4b^3}{10c^5}\cdot\frac{4b^4c^2}{27a^7}:\frac{5b^7}{9a^3c^3}$;

2) $\frac{3a^2}{2b^2c^2}:\frac{7c^8}{6b^3}:\frac{9ab}{14c^{12}}$;

3) $\left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^4\cdot\frac{b^{18}}{50a^{16}}$;

4) $\left(\frac{3x^7}{y^{10}}\right)^4:\left(\frac{3x^6}{y^8}\right)^3$.

157.• Замініть змінну x таким виразом, щоб утворилася тотожність:

1) $\left(\frac{4a^2}{b^3}\right)^2\cdot x=\frac{6a}{b^2}$;

2) $\left(\frac{2b^4}{3c}\right)^3:x=\frac{b^6}{12}$.

158.• Виконайте множення і ділення дробів:

1) $\frac{4-a}{8a^3}\cdot\frac{12a^5}{a^2-16}$;

2) $\frac{4c-d}{c^2+cd}\cdot\frac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd}$;

3) $\frac{b^2-6b+9}{b^2-3b+9}\cdot\frac{b^3+27}{5b-15}$;

4) $\frac{a^3-16a}{3a^2b}\cdot\frac{12ab^2}{4a+16}$;

5) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}\cdot\frac{7a-7b}{a^2-ab+b^2}$;

6) $\frac{x^2-9}{x+y}\cdot\frac{5x+5y}{x^2-3x}$;

7) $\frac{m+2n}{2-3m}:\frac{m^2+4mn+4n^2}{3m^2-2m}$;

8) $\frac{a^3+8}{16-a^4}:\frac{a^2-2a+4}{a^2+4}$;

9) $\frac{x^2-12x+36}{3x+21}\cdot\frac{x^2-49}{4x-24}$;

10) $\frac{3a+15b}{a^2-81b^2}:\frac{4a+20b}{a^2-18ab+81b^2}$.

159.• Спростіть вираз:

1) $\frac{7a^2}{a^2-25}\cdot\frac{5-a}{a}$;

2) $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\cdot\frac{b-a}{b+a}$;

3) $\frac{a^4-1}{a^3-a}\cdot\frac{a}{1+a^2}$;

4) $\frac{a^2-8ab}{12b}:\frac{8b^2-ab}{24a}$;

5) $\frac{5m^2-5n^2}{m^2+n^2}:\frac{15n-15m}{4m^2+4n^2}$;

6) $\frac{mn^2-36m}{m^3-8}:\frac{2n+12}{6m-12}$;

7) $\frac{a^4-1}{a^2-a+1}:\frac{a-1}{a^3+1}$;

8) $\frac{4x^2-100}{6x}:(2x^2-20x+50)$.

160.• Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $\frac{a^2-81}{a^2-8a}:\frac{a-9}{a^2-64}$, якщо $a=-4$;

2) $\frac{x}{4x^2-4y^2}:\frac{1}{6x+6y}$, якщо $x=4{,}2$, $y=-2{,}8$;

3) $(3a^2-18a+27):\frac{3a-9}{4a}$, якщо $a=0{,}5$;

4) $\frac{a^6+a^5}{(3a-3)^2}:\frac{a^5+a^4}{9a^2-9a}$, якщо $a=0{,}8$.

161.• Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{a^2-ab}:\frac{b}{b^2-a^2}$, якщо $a=2\frac{1}{3}$, $b=-\frac{3}{7}$;

2) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{a^2-9b^2}:\frac{3a+6b}{2a-6b}$, якщо $a=4$, $b=-5$.

162.•• Відомо, що $x-\frac{1}{x}=9$. Знайдіть значення виразу $x^2+\frac{1}{x^2}$.

163.•• Відомо, що $3x+\frac{1}{x}=-4$. Знайдіть значення виразу $9x^2+\frac{1}{x^2}$.

164.•• Дано: $x^2+\frac{16}{x^2}=41$. Знайдіть значення виразу $x+\frac{4}{x}$.

165.•• Дано: $x^2+\frac{1}{x^2}=6$. Знайдіть значення виразу $x-\frac{1}{x}$.

166.•• Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2-36}{a^2+ab-6a-6b}:\frac{a^2+ab+6a+6b}{a^2+2ab+b^2}$;

2) $\frac{a^2+a-ab-b}{a^2+a+ab+b}:\frac{a^2-a-ab+b}{a^2-a+ab-b}$.

167.•• Спростіть вираз:

1) $\frac{25-5a+5b-ab}{25+5a-5b-ab}\cdot\frac{ab-5a-5b+25}{ab+5a+5b+25}$;

2) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab-4a+4b}:\frac{a^2-ab+4a-4b}{a^2-16}$.

168.•• Доведіть тотожність

$$\frac{8a^2}{a-3b}:\frac{6a^3}{a^2-9b^2}\cdot\frac{3a}{4a+12b}=1.$$

169.•• Доведіть тотожність

$$\frac{a^2+a}{2a-12}\cdot\frac{6a+6}{2a+12}:\frac{9a^3+18a^2+9a}{a^2-36}=\frac{1}{6}.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

170. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x + 3)^2 - 2x(5 + 2x) = 10$;

2) $(x - 2)(x - 3) - (x - 6)(x + 1) = 12$.

171. Доведіть, що рівняння $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-4}{2} = \frac{x+5}{6}$ не має коренів.

172. Із пункту A в пункт B, відстань між якими дорівнює 192 км, зі швидкістю 60 км/год виїхав мотоцикліст. Через 30 хв назустріч йому з пункту B зі швидкістю 75 км/год виїхав другий мотоцикліст. Скільки часу їхав другий мотоцикліст до зустрічі з першим?

173. У двох бідонах разом міститься 80 л молока. Якщо з першого бідона перелити 20 % молока у другий бідон, то в обох бідонах молока стане порівну. Скільки літрів молока було в кожному бідоні спочатку?

174. (*З підручника «Арифметика» Л. П. Магницького*[1].) Дванадцятеро людей несуть 12 хлібів. Кожний чоловік несе по 2 хліби, жінка — по половині хліба, а дитина — по чверті хліба. Скільки було чоловіків, жінок і дітей?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

175. Василь і Олена по черзі заміняють у рівнянні $x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + * = 0$ один знак $*$ на деяке число. Першим заміну робить Василь. Олена хоче отримати рівняння, яке має корінь. Чи може Василь їй завадити?

---

[1] Магницький Леонтій Пилипович (1669–1739) — видатний російський математик-педагог, автор знаменитого підручника «Арифметика» (1703), за яким навчалося багато поколінь.

6. Тотожні перетворення раціональних виразів

Правила дій з раціональними дробами дають змогу будь-який раціональний вираз перетворити в раціональний дріб.

Розглянемо приклади.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз

$$\left(\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}\right):\frac{a-4}{a^2-4}-\frac{2a^2+8a}{a-2}.$$

Розв'язання. Даний вираз можна спростити аналогічно до того, як ми робили це, коли знаходили значення числового виразу, що містить кілька арифметичних дій. Виконуємо дії відповідно до порядку виконання арифметичних дій: спочатку — віднімання виразів, які стоять у дужках, потім — ділення і наприкінці — віднімання:

1) $$\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}=\frac{^{a-2/}3a}{a-2}-\frac{6a}{(a-2)^2}=$$
$$=\frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2};$$

2) $$\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}:\frac{a-4}{a^2-4}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}\cdot\frac{a^2-4}{a-4}=$$
$$=\frac{3a(a-4)}{(a-2)^2}\cdot\frac{(a-2)(a+2)}{a-4}=\frac{3a(a+2)}{a-2}=\frac{3a^2+6a}{a-2};$$

3) $$\frac{3a^2+6a}{a-2}-\frac{2a^2+8a}{a-2}=\frac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2}=$$
$$=\frac{a^2-2a}{a-2}=\frac{a(a-2)}{a-2}=a.$$

Відповідь: a. ▲

Перетворення раціонального виразу можна виконувати не окремими діями, а «ланцюжком». Проілюструємо цей прийом на прикладі.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу $\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}$ не залежить від значення a.

Розв'язання. Спростимо даний вираз:

$$\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}=\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{6(3-a)}\cdot\frac{54a}{a(5+a)}=$$

$$=\frac{3a}{a-3}+\frac{9}{3-a}=\frac{3a}{a-3}-\frac{9}{a-3}=\frac{3a-9}{a-3}=\frac{3(a-3)}{a-3}=3.$$

Отже, при всіх допустимих значеннях a значення даного виразу дорівнює 3. ▲

ПРИКЛАД 3 Доведіть тотожність

$$\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{4}{a+1}.$$

Розв'язання. Перетворимо ліву частину рівності, що доводиться. Тут доцільно розкрити дужки, застосовуючи розподільну властивість множення:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{a-7}{3a-1}\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}+\frac{a-7}{a+1}\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=$$

$$=\frac{1}{a}^{\backslash a+1}+\frac{3a-1}{a(a+1)}=\frac{a+1+3a-1}{a(a+1)}=\frac{4a}{a(a+1)}=\frac{4}{a+1}.$$

Тотожність доведено. ▲

ПРИКЛАД 4 Спростіть вираз $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}$.

Розв'язання. Записавши даний вираз у вигляді частки від ділення чисельника на знаменник, отримаємо:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right):\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=$$

$$=\frac{bc+ac+ab}{abc}:\frac{c+a+b}{abc}=\frac{bc+ac+ab}{abc}\cdot\frac{abc}{c+a+b}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Даний вираз можна спростити іншим способом, використовуючи основну властивість дробу, а саме: помножити його чисельник і знаменник на одночлен *abc*:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc}{\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)abc}=$$

$$=\frac{\frac{1}{a}\cdot abc+\frac{1}{b}\cdot abc+\frac{1}{c}\cdot abc}{\frac{1}{ab}\cdot abc+\frac{1}{bc}\cdot abc+\frac{1}{ac}\cdot abc}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Відповідь: $\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}$. ▲

ВПРАВИ

176.° Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{4}\right)\cdot\frac{6}{a^2}$;

2) $\frac{a^2b}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$;

3) $\left(1+\frac{a}{b}\right):\left(1-\frac{a}{b}\right)$;

4) $\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}+1\right)\cdot\frac{b}{a-b}$;

5) $\frac{a^2-ab}{b^2-1}\cdot\frac{b+1}{a}-\frac{a}{b-1}$;

6) $\left(\frac{5}{m-n}-\frac{4}{m+n}\right):\frac{m+9n}{m+n}$;

7) $\frac{x-2}{x+2}\cdot\left(x-\frac{x^2}{x-2}\right)$;

8) $\frac{x^2+x}{4}:\frac{x^2}{4}+\frac{x-1}{x}$;

9) $\frac{6c^2}{c^2-1}:\left(\frac{1}{c-1}+1\right)$;

10) $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)\cdot\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$.

177.° Спростіть вираз:

1) $\left(x+\frac{x}{y}\right):\left(x-\frac{x}{y}\right)$;

2) $\left(\frac{a}{b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\cdot\frac{ab^2}{a^2+b^2}$;

3) $\left(\frac{m}{m-1}-1\right):\frac{m}{mn-n}$;

4) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{4ab}{a-b}$;

5) $\frac{a}{b}-\frac{a^2-b^2}{b^2}:\frac{a+b}{b}$;

6) $\frac{7x}{x+2}-\frac{x-8}{3x+6}\cdot\frac{84}{x^2-8x}$;

7) $\left(a-\frac{9a-9}{a+3}\right):\frac{a^2-3a}{a+3}$;

8) $\left(\frac{a}{a+2}-\frac{8}{a+8}\right)\cdot\frac{a^2+8a}{a-4}$.

178.• Виконайте дії:

1) $\frac{a+2}{a^2-2a+1}:\frac{a^2-4}{3a-3}-\frac{3}{a-2}$;

2) $\frac{b^2+3b}{b^3+9b}\cdot\left(\frac{b-3}{b+3}+\frac{b+3}{b-3}\right)$;

3) $\left(\frac{3c+1}{3c-1}-\frac{3c-1}{3c+1}\right):\frac{2c}{6c+2}$;

4) $\left(\frac{1}{a^2-4ab+4b^2}-\frac{1}{4b^2-a^2}\right):\frac{2a}{a^2-4b^2}$;

5) $\left(\frac{a-8}{a^2-10a+25}-\frac{a}{a^2-25}\right):\frac{a-20}{(a-5)^2}$;

6) $\left(\frac{2x+1}{x^2+6x+9}-\frac{x-2}{x^2+3x}\right):\frac{x^2+6}{x^3-9x}$.

179.• Виконайте дії:

1) $\frac{b+4}{b^2-6b+9}:\frac{b^2-16}{2b-6}-\frac{2}{b-4}$;

2) $\left(\frac{m-1}{m+1}-\frac{m+1}{m-1}\right):\frac{4m}{m^2-1}$;

3) $\frac{2x}{x^2-y^2}:\left(\frac{1}{x^2+2xy+y^2}-\frac{1}{y^2-x^2}\right)$;

4) $\left(\frac{2a-3}{a^2-4a+4}-\frac{a-1}{a^2-2a}\right):\frac{a^2-2}{a^3-4a}$.

180.• Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{15}{x-7}-x-7\right)\cdot\frac{7-x}{x^2-16x+64}$;

2) $\left(a-\frac{5a-16}{a-3}\right):\left(2a-\frac{2a}{a-3}\right)$;

3) $\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{a}{b^2}\right)\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{2}{b-a}$;

4) $\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a+1}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right):\frac{a^2+a}{(a-1)^2}$;

5) $\left(\frac{x+2y}{x-2y}-\frac{x-2y}{x+2y}-\frac{16y^2}{x^2-4y^2}\right):\frac{4y}{x+2y}$;

6) $\left(\frac{3a-8}{a^2-2a+4}+\frac{1}{a+2}-\frac{4a-28}{a^3+8}\right)\cdot\frac{a^2-4}{4}$.

181.• Спростіть вираз:

1) $\frac{x^2+14x+49}{x+6}:\left(\frac{13}{x+6}-x+6\right)$;

2) $\left(c-\frac{2c-9}{c+8}\right):\frac{c^2+3c}{c^2-64}+\frac{24}{c}$;

3) $\left(\frac{36}{x^2-9}-\frac{x-3}{x+3}-\frac{3+x}{3-x}\right):\frac{6}{3-x}$;

4) $\left(\frac{2y-1}{y^2+2y+4}+\frac{9y+6}{y^3-8}+\frac{1}{y-2}\right)\cdot\frac{y^2-4}{18}$.

182.• Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{2b-2a}\right):\frac{2b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{4}$;

2) $\left(\frac{8a}{4-a^2}-\frac{a-2}{a+2}\right):\frac{a+2}{a}+\frac{2}{a-2}=-1$;

3) $\left(\frac{3}{36-c^2}+\frac{1}{c^2-12c+36}\right)\cdot\frac{(c-6)^2}{2}+\frac{3c}{c+6}=2$.

183.° Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{b}{a^2-ab}-\frac{2}{a-b}-\frac{a}{b^2-ab}\right):\frac{a^2-b^2}{4ab}=\frac{4}{a+b}$;

2) $\frac{(a-b)^2}{a}\cdot\left(\frac{a}{(a-b)^2}+\frac{a}{b^2-a^2}\right)+\frac{3a+b}{a+b}=3.$

184.• Чи залежить значення виразу від значення змінної, яка входить до нього:

1) $\left(\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{1}{a^2+a}\right):\frac{3a+3}{a^2-a}$;

2) $\left(\frac{a}{a^2-49}-\frac{1}{a+7}\right):\frac{7a}{a^2+14a+49}-\frac{2}{a-7}$?

185.° Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної, яка входить до нього:

1) $\frac{3x^2-27}{4x^2+2}\cdot\left(\frac{6x+1}{x-3}+\frac{6x-1}{x+3}\right)$;

2) $\frac{3}{2a-3}-\frac{8a^3-18a}{4a^2+9}\cdot\left(\frac{2a}{4a^2-12a+9}-\frac{3}{4a^2-9}\right).$

186.• Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a-\dfrac{a^2}{a+1}}{a-\dfrac{a}{a+1}}$;

2) $\dfrac{a-\dfrac{6a-9}{a}}{1-\dfrac{3}{a}}$;

3) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}$;

4) $\dfrac{\dfrac{2a-b}{b}+1}{\dfrac{2a+b}{b}-1}+\dfrac{3-\dfrac{b}{a}}{\dfrac{3a}{b}-1}.$

187.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a-b}{a}}$;

2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a+1}}}.$

188.•• Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{a^2}{b^3-ab^2}+\frac{a-b}{b^2}-\frac{1}{b}\right):\left(\frac{a+b}{b-a}-\frac{b-a}{a+b}+\frac{6a^2}{a^2-b^2}\right);$

2) $\left(\frac{a+2}{4a^3-4a^2+a}-\frac{2-a}{1-8a^3}\cdot\frac{4a^2+2a+1}{2a^2+a}\right):\left(\frac{1}{1-2a}\right)^2-\frac{8a-1}{2a^2+a}.$

189.•• Спростіть вираз

$$\left(\frac{18y^2+3y}{27y^3-1}-\frac{3y+1}{9y^2+3y+1}\right):\left(1-\frac{3y-1}{y}-\frac{5-6y}{3y-1}\right).$$

190.•• Доведіть тотожність:

1) $\frac{16}{(a-2)^4}:\left(\frac{1}{(a-2)^2}-\frac{2}{a^2-4}+\frac{1}{(a+2)^2}\right)-\frac{8a}{(a-2)^2}=1;$

2) $\frac{a+11}{a+9}-\left(\frac{a+5}{a^2-81}+\frac{a+7}{a^2-18a+81}\right):\left(\frac{a+3}{a-9}\right)^2=1.$

191.•• Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\frac{b^2+9}{3b^2-b^3}+\left(\frac{b+3}{b-3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{b-3}+\frac{6}{9-b^2}-\frac{3}{b^2+3b}\right)$ набуває додатних значень.

192.•• Підставте замість x даний вираз і спростіть отриманий вираз:

1) $\frac{x-a}{x-b}$, якщо $x=\frac{ab}{a+b}$; 2) $\frac{a-bx}{b+ax}$, якщо $x=\frac{a-b}{a+b}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

193. Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x-1)(4x+5)-(2x+3)(6x+1)=4;$

2) $8x(2x+7)-(4x+3)^2=15.$

194. Доведіть, що значення виразу $2^{14}-2^{12}-2^{10}$ ділиться націло на 11.

195. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$ ділиться націло на 10.

196. На першому складі було картоплі в 3 рази більше, ніж на другому. Коли з першого складу вивезли 400 кг картоплі, то на ньому залишилося картоплі у 2 рази менше, ніж було на другому. Скільки картоплі було на першому складі спочатку?

197. Куртка коштувала на 200 грн менше від костюма. Під час сезонного розпродажу куртка подешевшала на 10 %, а костюм — на 20 %, після чого куртку та костюм можна було придбати за 1010 грн. Якою була початкова ціна куртки та якою — ціна костюма?

198. З пункту *A* в пункт *B* автомобіль їхав зі швидкістю 60 км/год, а повертався з пункту *B* у пункт *A* зі швидкістю 70 км/год іншою дорогою, яка на 15 км коротша від першої. На зворотний шлях автомобіль витратив на 30 хв менше, ніж на шлях з пункту *A* в пункт *B*. За який час він доїхав з пункту *A* в пункт *B*?

199. Робітник мав виготовляти щодня 10 деталей. Проте він виготовляв щодня 12 деталей, і вже за 2 дні до закінчення терміну роботи йому залишилося виготовити 6 деталей. Скільки деталей мав виготовити робітник?

200.* (*З українського фольклору.*) За 30 монет купили 30 птахів. Скільки купили птахів кожного виду, якщо за трьох горобців платили одну монету, за двох голубів — теж одну монету, а за одну горлицю — дві монети, причому купили хоча б одну пташку кожного виду?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

201. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x+7}{4}=\frac{x+5}{3}$; 3) $0{,}21x-0{,}7x=0$; 5) $25x^2-36=0$;

2) $x^2+6x=0$; 4) $x^2-16=0$; 6) $x^2+4=0$.

202. При якому значенні змінної не має змісту вираз:

1) $\frac{6}{3x-9}$; 3) $\frac{x+4}{3x^2+12x}$; 5) $\frac{x}{x^2-10x+25}$;

2) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 4) $\frac{8}{x+7}+\frac{4}{x-2}$; 6) $\frac{x+2}{(x+10)(x-12)}$?

203. При якому значенні змінної значення дробу дорівнює нулю:

1) $\frac{x-8}{9}$; 2) $\frac{x-2}{x+2}$; 3) $\frac{4}{x-5}$?

Поновіть у пам'яті зміст пп. 14, 15 на с. 142 частини 2 підручника.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

204. На дошці написано многочлени $x + 2$ і $2x + 1$. Дозволяється записати суму, різницю або добуток будь-яких двох з уже написаних многочленів. Чи може на дошці з'явитися многочлен $2x^3 + x + 5$?

ЗАВДАННЯ № 2 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{12m^4}{n^{10}}\cdot\frac{n^5}{36m^8}$.

А) $\frac{1}{3m^2n^2}$; Б) $\frac{1}{3m^4n^5}$; В) $\frac{3}{m^2n^2}$; Г) $\frac{3}{m^4n^5}$.

2. Виконайте множення: $(a+5b)\cdot\frac{8}{a^2-25b^2}$.

А) $8(a - 5b)$; Б) $8(a + 5b)$; В) $\frac{8}{a+5b}$; Г) $\frac{8}{a-5b}$.

3. Спростіть вираз $\frac{b^2-6b+9}{b-7}\cdot\frac{b-7}{b-3}$.

А) $b + 3$; Б) $b - 3$; В) $\frac{1}{b-3}$; Г) $\frac{1}{b+3}$.

4. Виконайте ділення: $\dfrac{5a^6}{b^8}:(10a^3b^2)$.

А) $\dfrac{2a^9}{b^6}$; Б) $\dfrac{b^6}{2a^9}$; В) $\dfrac{2b^{10}}{a^3}$; Г) $\dfrac{a^3}{2b^{10}}$.

5. Спростіть вираз $\dfrac{3x+9}{x^2-2x}:\dfrac{x+3}{4x-8}$.

А) $\dfrac{12}{x}$; Б) $\dfrac{x}{12}$; В) 12; Г) x.

6. Подайте у вигляді дробу вираз $\dfrac{n^2-3n}{64n^2-1}:\dfrac{n^4-27n}{64n^2+16n+1}$.

А) $\dfrac{8n+1}{(8n-1)(n^2+3n+9)}$; В) $\dfrac{8n-1}{(8n+1)(n^2+3n+9)}$;

Б) $\dfrac{8n+1}{(8n-1)(n^2-3n+9)}$; Г) $\dfrac{8n-1}{(8n+1)(n^2-3n+9)}$.

7. Виконайте піднесення до степеня: $\left(-\dfrac{2a^2}{b^3}\right)^4$.

А) $\dfrac{8a^8}{b^{12}}$; Б) $-\dfrac{8a^8}{b^{12}}$; В) $\dfrac{16a^8}{b^{12}}$; Г) $-\dfrac{16a^8}{b^{12}}$.

8. Спростіть вираз $\left(\dfrac{1}{a-6}-\dfrac{1}{a+6}\right):\dfrac{2}{a+6}$.

А) $\dfrac{6}{a+6}$; Б) $\dfrac{6}{a-6}$; В) $6\,(a-6)$; Г) $6\,(a+6)$.

9. Якому числу при всіх допустимих значеннях a дорівнює значення виразу $\left(\dfrac{30a}{9a^2-25}+\dfrac{5}{5-3a}\right):\left(\dfrac{3a-5}{3a+5}-1\right)$?

А) $\dfrac{1}{2}$; Б) 2; В) $-\dfrac{1}{2}$; Г) –2.

10. Чому дорівнює значення виразу $\dfrac{a^2-4ab}{b^2}$, якщо $3a-5b=$ $=0{,}2\,(2a+b)$?

А) 4; Б) –4; В) 3; Г) –3.

11. Відомо, що $x+\frac{1}{x}=6$. Знайдіть значення виразу $x^2+\frac{1}{x^2}$.

А) 36; Б) 38; В) 34; Г) 35.

12. Спростіть вираз $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}}{\frac{a}{b^2}-\frac{1}{a}}$.

А) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; Б) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$; В) $\frac{a^2+b^2}{ab^2(a^2-b^2)}$; Г) $\frac{ab(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$.

7. Рівносильні рівняння. Раціональні рівняння

Розглянемо два рівняння: $x^2=4$ і $|x|=2$.

Очевидно, що кожне з них має одні й ті самі корені: –2 і 2. Говорять, що рівняння $x^2=4$ і $|x|=2$ **рівносильні**.

Наведемо ще приклади пар рівносильних рівнянь:

$$\frac{1}{2}x=0 \quad \text{і} \quad 2x=0;$$

$$2x=4 \quad \text{і} \quad 4x-8=0;$$

$$x^2=1 \quad \text{і} \quad (x-1)(x+1)=0.$$

Розглянемо рівняння $x^2=-5$ і $|x|=-3$. Кожне із цих рівнянь не має коренів. Такі рівняння також прийнято вважати рівносильними.

Означення. **Два рівняння називають рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі корені або кожне з рівнянь не має коренів.**

Число 2 є коренем кожного з рівнянь $(x-2)(x+1)=0$ і $x-2=0$. Проте ці рівняння не є рівносильними, оскільки перше рівняння має ще один корінь, що дорівнює –1, який не є коренем другого рівняння.

У 7 класі ви вивчили властивості рівнянь з однією змінною. Тепер, використовуючи поняття «рівносильні рівняння», ці властивості можна сформулювати так.

- ***Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***
- ***Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***
- ***Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Розглянемо таку задачу. Автомобіль, проїхавши 180 км шляху, збільшив швидкість на 10 км/год і решту 210 км проїхав за той самий час, що й першу частину шляху. Знайдіть початкову швидкість автомобіля.

Нехай x км/год — шукана швидкість. Тоді швидкість автомобіля на другій частині шляху дорівнює $(x + 10)$ км/год. Автомобіль подолав першу частину шляху за $\frac{180}{x}$ год, а другу — за $\frac{210}{x+10}$ год.

Рівняння $\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}$ є математичною моделлю розглянутої реальної ситуації. Обидві частини отриманого рівняння є раціональними виразами.

Означення. **Рівняння, ліва й права частини якого є раціональними виразами, називають *раціональним*.**

З означення випливає, що, розв'язуючи задачу, ми отримали раціональне рівняння.

Зауважимо, що лінійне рівняння з однією змінною, тобто рівняння виду $ax = b$, є раціональним.

Розглянемо раціональне рівняння виду $\frac{A}{B} = 0$, де A і B — многочлени.

Ви знаєте, що *дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля*. Тому, щоб розв'язати рівняння виду $\frac{A}{B} = 0$, треба вимагати *одночасного* виконання двох умов: $A = 0$ і $B \neq 0$. Це означає, що під час розв'язування рівнянь указаного виду слід керуватися таким алгоритмом:

- розв'язати рівняння $A = 0$;
- перевірити, які зі знайдених коренів задовольняють умову $B \neq 0$;
- корені, які задовольняють умову $B \neq 0$, включити до відповіді.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3} = 0$.

Розв'язання. Прирівняємо чисельник дробу, який стоїть у лівій частині рівняння, до нуля. Маємо: $(x-1)(x+1) = 0$. Коренями цього рівняння є числа -1 і 1.

Перевіримо, чи задовольняють ці корені умову $x^2 - 4x + 3 \neq 0$.

При $x = -1$ отримуємо, що $x^2 - 4x + 3 = 8 \neq 0$.

При $x = 1$ отримуємо, що $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Отже, число -1 є коренем заданого рівняння, а число 1 — ні.

Відповідь: -1. ▲

Як ми вже зазначали вище, розв'язування рівняння виду $\frac{A}{B}=0$ зводиться до розв'язування рівняння $A = 0$ та перевірки умови $B \neq 0$. Говорять, що рівняння $\frac{A}{B}=0$ рівносильне системі

$$\begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0. \end{cases}$$

Наприклад, рівняння $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3}=0$ рівносильне системі

$$\begin{cases} (x-1)(x+1) = 0, \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0. \end{cases}$$

Як ми з'ясували, розв'язком цієї системи є число –1.

Завершимо розв'язування задачі про автомобіль. Маємо:

$$\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}.$$

Переходимо до рівносильного рівняння $\frac{180}{x} - \frac{210}{x+10} = 0.$

Звідси

$$\frac{180(x+10)-210x}{x(x+10)} = 0;$$

$$\frac{1800-30x}{x(x+10)} = 0.$$

Останнє рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 1800 - 30x = 0, \\ x(x+10) \neq 0. \end{cases}$$

Коренем рівняння, яке входить до системи, є число 60; очевидно, що воно задовольняє умову $x(x + 10) \neq 0$.

Відповідь: 60 км/год.

Як відомо, будь-який раціональний вираз можна подати у вигляді дробу. Тому будь-яке раціональне рівняння можна звести до рівняння виду $\frac{A}{B}=0$. Саме так ми зробили, розв'язуючи рівняння $\frac{180}{x}=\frac{210}{x+10}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\frac{3x+5}{6x+3}+\frac{1}{4x^2-1}=\frac{x}{2x-1}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{3x+5}{3(2x+1)}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}-\frac{x}{2x-1}=$ $=0$. Подавши ліву частину цього рівняння у вигляді раціонального дробу, отримаємо:

$$\frac{4x-2}{3(2x-1)(2x+1)}=0.$$

Отримане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}4x-2=0,\\3(2x-1)(2x+1)\neq 0.\end{cases}$$

Перепишемо цю систему так: $\begin{cases}4x-2=0,\\x\neq 0{,}5,\\x\neq -0{,}5.\end{cases}$

Звідси $\begin{cases}x=0{,}5,\\x\neq 0{,}5,\\x\neq -0{,}5.\end{cases}$

Отже, дане рівняння не має коренів.

Відповідь: коренів немає. ▲

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\frac{2x^2-4x-16}{x-4}-x=0$.

Розв'язання. Подамо ліву частину рівняння у вигляді дробу:

$$\frac{2x^2-4x-16-x^2+4x}{x-4}=0;$$

$$\frac{x^2-16}{x-4}=0.$$

Отримане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0, \\ x - 4 \neq 0, \end{cases}$$

звідси отримуємо:

$$\begin{cases} x = 4 \text{ або } x = -4, \\ x \neq 4; \end{cases}$$

$$x = -4.$$

Відповідь: -4. ▲

Розглянемо задачу, у якій раціональне рівняння є математичною моделлю реальної ситуації.

ПРИКЛАД 4 Турист проплив на човні 3 км за течією річки та 2 км проти течії за 30 хв. Знайдіть швидкість човна в стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

Розв'язання. Нехай швидкість човна в стоячій воді дорівнює x км/год. Тоді його швидкість за течією річки становить $(x + 2)$ км/год, а проти течії — $(x - 2)$ км/год. Турист проплив 3 км за течією за $\frac{3}{x+2}$ год, а 2 км проти течії — за $\frac{2}{x-2}$ год. Оскільки весь шлях було пройдено за 30 хв $= \frac{1}{2}$ год, то $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2}$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{3x - 6 + 2x + 4}{x^2 - 4} - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\frac{10x - 4 - x^2 + 4}{2(x^2 - 4)} = 0;$$

$$\frac{10x - x^2}{2(x^2 - 4)} = 0;$$

$$\begin{cases} 10x - x^2 = 0, \\ 2(x^2 - 4) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(10 - x) = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$x = 0$ або $x = 10$.

Корінь $x = 0$ не задовольняє змісту задачі. Отже, швидкість човна в стоячій воді дорівнює 10 км/год.

Відповідь: 10 км/год. ▲

?

1. Які два рівняння називають рівносильними?
2. За допомогою яких перетворень даного рівняння можна отримати рівняння, рівносильне даному?
3. Яке рівняння називають раціональним?
4. Сформулюйте умову, за якої дріб дорівнює нулю.
5. Опишіть алгоритм розв'язування рівняння виду $\frac{A}{B} = 0$, де A і B — многочлени.

ВПРАВИ

205.° Чи є рівносильними рівняння:

1) $x + 2 = 10$ і $3x = 24$;

2) $-2x = -6$ і $\frac{1}{3}x = 1$;

3) $x - 5 = 0$ і $x(x - 5) = 0$;

4) $(3x - 12)(x + 2) = 0$ і $(0{,}4 - 0{,}1x)(7x + 14) = 0$;

5) $\frac{6}{x} = 0$ і $x^2 = -4$;

6) $x + 1 = 1 + x$ і $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$?

206.° Складіть рівняння, рівносильне даному:

1) $2x - 3 = 4$; 2) $|x| = 1$; 3) $x + 6 = x - 2$.

207.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-6}{x-4}=0$;

2) $\frac{x-2}{x^2-4}=0$;

3) $\frac{x^2-4}{x-2}=0$;

4) $\frac{x-2}{x-2}=1$;

5) $\frac{2x^2+18}{x^2+9}=2$;

6) $\frac{x}{x-5}+\frac{2x-9}{x-5}=0$;

7) $\frac{5x-7}{x+1}-\frac{x-5}{x+1}=0$;

8) $\frac{2x+16}{x+3}-\frac{1-3x}{x+3}=0$;

9) $\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}=0$;

10) $\frac{3}{x-2}=\frac{4}{x+3}$;

11) $\frac{x}{x-6}=2$;

12) $\frac{x-4}{x-3}=\frac{2x+1}{2x-1}$;

13) $\frac{x+8}{x}-\frac{6}{x-2}=0$;

14) $\frac{2x}{x-5}-\frac{x^2+15x}{x^2-25}=0$;

15) $3-\frac{2x^2-5x}{x^2-3x}=0$.

208.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=0$;

2) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=0$;

3) $\frac{x+7}{x-7}-\frac{2x-3}{x-7}=0$;

4) $\frac{10-3x}{x+8}+\frac{5x+6}{x+8}=0$;

5) $\frac{x-6}{x-2}-\frac{x-8}{x}=0$;

6) $\frac{2x-4}{x}-\frac{3x+1}{x}+\frac{x+5}{x}=0$;

7) $\frac{x}{x+6}-\frac{36}{x^2+6x}=0$;

8) $\frac{2x^2+3x+1}{2x+1}-x=1$;

9) $\frac{4}{x-1}-\frac{4}{x+1}=1$.

209.° Яке число треба відняти від чисельника та знаменника дробу $\frac{15}{19}$, щоб отримати дріб, який дорівнює $\frac{2}{3}$?

210.° Яке число треба додати до чисельника та знаменника дробу $\frac{25}{32}$, щоб отримати дріб, який дорівнює $\frac{5}{6}$?

211.• Складіть пару рівносильних рівнянь, кожне з яких:

1) має один корінь;
2) має два корені;
3) має безліч коренів;
4) не має коренів.

212.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{5}{x^2-4}+\frac{2x}{x+2}=2;$

2) $\frac{2}{6x+1}+\frac{3}{6x-1}=\frac{30x+9}{36x^2-1};$

3) $\frac{6x+14}{x^2-9}+\frac{7}{x^2+3x}=\frac{6}{x-3};$

4) $\frac{2y^2+5}{1-y^2}+\frac{y+1}{y-1}=\frac{4}{y+1};$

5) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{4}{1-4x^2};$

6) $\frac{7}{(x+2)(x-3)}-\frac{4}{(x-3)^2}=\frac{3}{(x+2)^2};$

7) $\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x}=\frac{6x+64}{x^2-16}+4;$

8) $\frac{2x-6}{x^2-36}-\frac{x-3}{x^2-6x}-\frac{x-1}{x^2+6x}=0.$

213.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{1-x}=\frac{x^2+27}{x^2-1};$

2) $\frac{3x+1}{3x-1}-\frac{3x-1}{3x+1}=\frac{6}{1-9x^2};$

3) $\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x}=\frac{5}{x-2};$

4) $\frac{2x^2-2x}{x^2-4}+\frac{6}{x+2}=\frac{x+2}{x-2};$

5) $\frac{7}{x^2+2x}+\frac{x+1}{x^2-2x}=\frac{x+4}{x^2-4};$

6) $\frac{x^2-9x+50}{x^2-5x}=\frac{x+1}{x-5}+\frac{x-5}{x}.$

214.• Моторний човен проплив 8 км за течією річки й повернувся назад, витративши на весь шлях 54 хв. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість човна становить 18 км/год.

215.• Теплохід пройшов 28 км проти течії річки й повернувся назад, витративши на зворотний шлях на 4 хв менше. Знайдіть власну швидкість теплохода, якщо швидкість течії річки дорівнює 1 км/год.

216.• Човен проплив 6 км проти течії річки та 12 км за течією, витративши на весь шлях 2 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки становить 3 км/год.

217.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+5}{x^2-5x}-\frac{x-5}{2x^2+10x}=\frac{x+25}{2x^2-50}$;

2) $\frac{2}{x^2-9}-\frac{1}{2x^2-12x+18}=\frac{3}{2x^2+6x}$;

3) $\frac{9x+12}{x^3-64}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x^2+4x+16}$.

218.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4y+24}{5y^2-45}+\frac{y+3}{5y^2-15y}=\frac{y-3}{y^2+3y}$;

2) $\frac{y+2}{8y^3+1}-\frac{1}{4y+2}=\frac{y+3}{8y^2-4y+2}$.

219.* Для кожного значення *a* розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-1}{x-a}=0$;

2) $\frac{x-a}{x+5}=0$;

3) $\frac{a(x-a)}{x-3}=0$;

4) $\frac{(x-a)(x-6)}{x-7}=0$;

5) $\frac{(x-4)(x+2)}{x-a}=0$;

6) $\frac{x-a}{(x-4)(x+2)}=0$.

220.* При яких значеннях *a* рівняння $\frac{x+a}{x^2-4}=0$ не має коренів?

221.* При яких значеннях *a* рівняння $\frac{(x-a)(x-3a)}{x+9}=0$ має один корінь?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

222. На кінець року населення міста становило 72 100 мешканців. Визначте кількість мешканців у цьому місті на початок року, якщо приріст населення за цей час становив 3 %.

223. Відстань між двома станціями електропоїзд проходить за 45 хв. Якщо його швидкість збільшити на 10 км/год, то він пройде цю відстань за 40 хв. Яка відстань між станціями?

224. Доведіть, що при будь-яких значеннях змінних даний вираз набуває невід'ємного значення:

1) $(a-5)^2-2(a-5)+1$; 2) $(a-b)(a-b-8)+16$.

225. Знайдіть значення функції $f(x)=3x-7$ при: 1) $x=-3$; 2) $x=2\frac{1}{3}$. При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 0,2?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

226. Знайдіть значення виразу:

1) 4^3+3^4;

2) $(-8)^2-(-1)^{12}$;

3) $9\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)^2$;

4) $(2{,}8-3{,}1)^3\cdot\left(-1\frac{2}{3}\right)^2$.

227. Не виконуючи обчислень, порівняйте значення виразів:

1) $(-5{,}7)^2$ і 0; 2) 0 і $(-6{,}9)^3$; 3) $(-23)^5$ і $(-2)^4$; 4) -8^8 і $(-8)^8$.

228. Подайте у вигляді степеня:

1) з основою 2 числа 4; 8; 16; 32; 64;

2) з основою 10 числа 100; 1000; 10 000; 1 000 000.

229. Знайдіть значення виразу:

1) $18a^2$, якщо $a = -\frac{1}{6}$; 3) $16 + b^4$, якщо $b = -2$;

2) $(18a)^2$, якщо $a = -\frac{1}{6}$; 4) $(16 + b)^4$, якщо $b = -2$.

Поновіть у пам'яті зміст п. 3 на с. 137 частини 2 підручника.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

230. Чи існує натуральне число, яке при множенні на 2 дає в результаті квадрат натурального числа, а при множенні на 3 — куб натурального числа?

8. Степінь із цілим від'ємним показником

Часто для запису великих чисел у компактному вигляді використовують степінь з натуральним показником. Наприклад,

$$129\ 140\ 163 = 3^{17},$$

$$282\ 475\ 249 = 7^{10}.$$

У науці та практиці для короткого запису великих значень величин використовують степінь числа 10.

Наприклад, відстань від Землі до Полярної зорі приблизно дорівнює 4 470 000 000 000 000 км, або $4{,}47 \cdot 10^{15}$ км. Маса Сонця дорівнює

$$1\ 990\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 \text{ кг},$$

або $1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг.

Це були приклади з макросвіту, тобто світу дуже великих фізичних величин. Наведемо приклади з мікросвіту, тобто світу дуже малих фізичних величин.

Маса атома Гидроґену дорівнює

0,000000000000000000000000001661 кг.

Радіус атома Оксиґену дорівнює 0,0000000066 см.

Для запису цих величин так само можна використовувати степінь числа 10. Маємо:

$$0{,}000000000000000000000000001661 \text{ кг} = \frac{1{,}661}{10^{27}} \text{ кг},$$

$$0{,}0000000066 \text{ см} = \frac{6{,}6}{10^{9}} \text{ см}.$$

Проте якщо домовитися позначити $\frac{1}{10^{27}}$ і $\frac{1}{10^{9}}$ відповідно 10^{-27} і 10^{-9}, то для розглянутих величин отримаємо «одноповерхову» форму запису:

$$\frac{1{,}661}{10^{27}} = 1{,}661 \cdot 10^{-27}, \quad \frac{6{,}6}{10^{9}} = 6{,}6 \cdot 10^{-9}.$$

Аналогічно можна домовитися, що, наприклад, $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$, $\frac{1}{(-3)^5} = (-3)^{-5}$, $\frac{1}{0{,}7} = (0{,}7)^{-1}$.

Означення. **Для будь-якого числа *a*, яке не дорівнює нулю, і натурального числа *n***

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

З означення випливає, що, наприклад, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16$, $(0{,}3)^{-1} = \frac{1}{0{,}3} = \frac{10}{3}$.

Отже, ми можемо підносити число до будь-якого цілого степеня, крім нуля. Заповнимо цю прогалину.

Означення. **Для будь-якого числа *a*, яке не дорівнює нулю, $a^0 = 1$.**

Наприклад, $5^0 = 1$, $(-17)^0 = 1$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^0 = 1$, $\pi^0 = 1$.

Вираз 0^n при цілих n, які менші від нуля або дорівнюють нулю, не має змісту.

З наведених означень випливає, що при будь-якому $a \neq 0$ та цілому n числа a^n і a^{-n} є взаємно оберненими. Тому рівність

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

виконується при будь-якому цілому n.

Наприклад, при $n = -2$ маємо: $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$.

У довідковій літературі ви можете знайти таку інформацію: «Маса Венери дорівнює $4{,}9 \cdot 10^{24}$ кг. Маса Марса дорівнює $6{,}423 \cdot 10^{23}$ кг. Площа поверхні Місяця складає $3{,}8 \cdot 10^7$ км^2». Числа, що виражають ці величини, записано в так званому **стандартному вигляді**.

Означення. Стандартним виглядом числа називають його запис у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a < 10$ і n — ціле число.

Число n називають **порядком** числа, записаного в стандартному вигляді. Наприклад, порядок числа, яке виражає масу Сонця в кілограмах, дорівнює 30, а порядок числа, що виражає масу атома Гідроґену в кілограмах, дорівнює –27.

У стандартному вигляді можна записати будь-яке додатне число. Наприклад, $171{,}25 = 1{,}7125 \cdot 10^2$; $0{,}00958 = 9{,}58 \cdot 10^{-3}$. Проте на практиці стандартний вигляд числа зазвичай використовують для запису великих і малих значень величин. При цьому порядок числа дає уявлення про величину. Наприклад, якщо порядок числа m дорівнює 3, тобто $m = a \cdot 10^3$, то з урахуванням того, що $1 \leqslant a < 10$, отримуємо: $10^3 \leqslant m < 10^4$.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу: 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$; 2) $1{,}2^{-2}$; 3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0$.

Розв'язання. 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$.

І взагалі, **якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.**

2) $1{,}2^{-2} = \left(\frac{12}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$.

3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0 = \frac{1}{3^3} \cdot 15 + \frac{1}{6^2} \cdot 8 - 1 =$

$= \frac{1}{27} \cdot 15 + \frac{1}{36} \cdot 8 - 1 = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} - 1 = -\frac{2}{9}$. ▲

ПРИКЛАД 2 Подайте вираз $(a - b)^{-2}\,(a^{-2} - b^{-2})$ у вигляді раціонального дробу.

Розв'язання

$$(a-b)^{-2}\,(a^{-2}-b^{-2}) = \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} =$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2} \cdot \frac{(b-a)(b+a)}{a^2 b^2} = \frac{b+a}{a^2 b^2\,(b-a)} = \frac{b+a}{a^2 b^3 - a^3 b^2}.$$ ▲

ПРИКЛАД 3 Запишіть у стандартному вигляді число: 1) 564 000 000; 2) 0,0036.

Розв'язання

1) $564000000 = 5{,}64 \cdot 100000000 = 5{,}64 \cdot 10^8$.

2) $0{,}0036 = 3{,}6 \cdot 0{,}001 = 3{,}6 \cdot \frac{1}{1000} = 3{,}6 \cdot \frac{1}{10^3} = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$. ▲

?

1. Чому дорівнює a^{-n} для будь-якого числа a, відмінного від нуля, і натурального числа n?
2. Чому дорівнює нульовий степінь будь-якого відмінного від нуля числа?
3. Що називають стандартним виглядом числа?
4. Як у записі числа в стандартному вигляді $a \cdot 10^n$ називають число n?

ВПРАВИ

231.° Якому з виразів дорівнює вираз a^{-6}:

1) $-a^6$; 2) $\frac{1}{a^{-6}}$; 3) $\frac{1}{a^6}$; 4) $-\frac{1}{a^6}$?

232.° Подайте степінь у вигляді дробу:

1) 3^{-8}; 3) a^{-9}; 5) 12^{-1}; 7) $(a-b)^{-2}$;
2) 5^{-6}; 4) d^{-3}; 6) m^{-1}; 8) $(2x-3y)^{-4}$.

233.° Замініть степінь дробом:

1) 14^{-4}; 2) p^{-20}; 3) $(m+n)^{-1}$; 4) $(4c-5d)^{-10}$.

234.° Подайте дріб у вигляді степеня із цілим від'ємним показником або у вигляді добутку степенів:

1) $\frac{1}{7^2}$; 3) $\frac{1}{c}$; 5) $\frac{a}{b}$; 7) $\frac{(a+b)^5}{(c-d)^8}$;
2) $\frac{1}{x^5}$; 4) $\frac{m}{n^3}$; 6) $\frac{x^6}{y^7}$; 8) $\frac{(x-y)^2}{x+y}$.

235.° Замініть дріб степенем із цілим від'ємним показником або добутком степенів:

1) $\frac{1}{11^{11}}$; 2) $\frac{1}{k^4}$; 3) $\frac{x^2}{y}$; 4) $\frac{m^6}{n^6}$; 5) $\frac{(2x-y)^3}{(x-2y)^9}$.

236.° Подайте числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ у вигляді степеня з основою: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

237.° Подайте у вигляді степеня одноцифрового натурального числа дріб:

1) $\frac{1}{49}$; 2) $\frac{1}{216}$; 3) $\frac{1}{625}$; 4) $\frac{1}{128}$.

238.° Подайте у вигляді степеня з основою 10 число:

1) 0,1; 2) 0,01; 3) 0,0001; 4) 0,000001.

239.° Подайте числа 1, 3, 9, 27, 81, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ у вигляді степеня з основою: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

240.° Обчисліть:

1) 5^{-2}; 3) $(-9)^{-2}$; 5) 1^{-24}; 7) $(-1)^{-17}$; 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;

2) 2^{-4}; 4) $0{,}2^{-3}$; 6) $(-1)^{-16}$; 8) $\left(\frac{7}{8}\right)^{0}$; 10) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

241.° Знайдіть значення виразу:

1) 20^{-2}; 3) $(-6)^{-3}$; 5) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$;

2) $0{,}3^{-1}$; 4) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

242.° Обчисліть значення виразу:

1) $3^{-1} - 4^{-1}$; 4) $9 \cdot 0{,}1^{-1}$;

2) $2^{-3} + 6^{-2}$; 5) $0{,}5^{-2} \cdot 4^{-1}$;

3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2{,}3)^{0} - 5^{-2}$; 6) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

243.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $2^{-2} + 2^{-1}$; 3) $0{,}03^{0} + 0{,}7^{0}$;

2) $3^{-2} - 6^{-1}$; 4) $(9 \cdot 3^{-3} - 12^{-1})^{-1}$?

244.° Яке з даних чисел записане в стандартному вигляді:

1) $12 \cdot 10^{4}$; 2) $1{,}2 \cdot 10^{4}$; 3) $0{,}12 \cdot 10^{4}$?

245.° Запишіть число в стандартному вигляді та вкажіть порядок числа:

1) 3400; 4) 0,000008; 7) $0{,}86\cdot10^3$;
2) 15; 5) 0,73; 8) $0{,}23\cdot10^4$;
3) 0,0046; 6) $250\cdot10^2$; 9) $9300\cdot10^4$.

246.° Використовуючи стандартний вигляд числа, запишіть:

1) швидкість світла у вакуумі дорівнює 300 000 км/с;
2) висота Говерли, найвищої гори України, дорівнює 2061 м;
3) площа України становить 603 700 км^2;
4) середня відстань від Землі до Сонця становить 149,6 млн км;
5) атмосферний тиск на висоті 100 км становить 0,032 Па;
6) діаметр молекули води дорівнює 0,00000028 мм.

247.° Запишіть число в стандартному вигляді та вкажіть порядок числа:

1) 45 000; 3) 0,00024; 5) $0{,}059\cdot10^8$;
2) 260; 4) 0,032; 6) $526\cdot10^4$.

248.° Число подано в стандартному вигляді. Запишіть його у вигляді натурального числа або десяткового дробу:

1) $1{,}6\cdot10^3$; 2) $5{,}7\cdot10^6$; 3) $2{,}1\cdot10^{-2}$; 4) $1{,}1\cdot10^{-5}$.

249.° Число подано в стандартному вигляді. Запишіть його у вигляді натурального числа або десяткового дробу:

1) $2{,}4\cdot10^2$; 2) $4{,}8\cdot10^5$; 3) $1{,}4\cdot10^{-3}$; 4) $8{,}6\cdot10^{-4}$.

250.• Доведіть, що $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

251.• Знайдіть значення виразу:

1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot10^{-1}+9^0-(-2)^3+\left(\frac{2}{9}\right)^{-2}\cdot(-1{,}5)^{-3}$;

2) $(2{,}5)^{-2}-(8^5)^0+\left(1\frac{2}{3}\right)^{-3}+0{,}1^{-1}$.

252.° Розташуйте вирази в порядку спадання їхніх значень:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{1}{2}\right)^0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; 2) 4^{-1}, 4^3, 4^0, 4^{-2}.

253.° Розташуйте вирази в порядку зростання їхніх значень:

1) 7^{-2}, 7^2, 7^{-1}, 7^0;
2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^0$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

254.° Порівняйте значення виразів:

1) 12^0 і $(-6)^0$;
2) $0{,}2^3$ і $0{,}2^{-3}$;
3) 4^6 і $0{,}25^{-6}$;
4) $3^{-1} \cdot 7^{-1}$ і 21^{-1};
5) $5^{-1} - 7^{-1}$ і 2^{-1};
6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ і $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$.

255.° Порівняйте значення виразів:

1) 3^{-2} і $(-3)^0$; 2) $3^{-1} + 2^{-1}$ і 5^{-1}; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ і $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)^{-2}$.

256.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $ab^{-1} + a^{-1}b$;
2) $3a^{-1} + ab^{-2}$;
3) $m^2n^2\,(m^{-3} - n^{-3})$;
4) $(a+b)^{-1} \cdot (a^{-1} + b^{-1})$;
5) $(c^{-2} - d^{-2}) : (c + d)$;
6) $(xy^{-2} + x^{-2}y) \cdot \left(\frac{x^2 - xy + y^2}{x}\right)^{-1}$.

257.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $a^{-2} + a^{-3}$;
2) $mn^{-4} + m^{-4}n$;
3) $(c^{-1} - d^{-1}) \cdot (c - d)^{-2}$;
4) $(x^{-2} + y^{-2}) \cdot (x^2 + y^2)^{-1}$.

258.° Порядок деякого натурального числа дорівнює 4. Скільки цифр містить десятковий запис цього числа?

259.° Десятковий запис деякого натурального числа складається із семи цифр. Чому дорівнює порядок цього числа?

260.° Яке число більше:

1) $9{,}7 \cdot 10^{11}$ або $1{,}2 \cdot 10^{12}$;
2) $3{,}6 \cdot 10^{-5}$ або $4{,}8 \cdot 10^{-6}$;
3) $2{,}34 \cdot 10^6$ або $0{,}23 \cdot 10^7$;
4) $42{,}7 \cdot 10^{-9}$ або $0{,}072 \cdot 10^{-7}$?

261.° Яке число менше:

1) $6{,}1 \cdot 10^{19}$ або $6{,}15 \cdot 10^{18}$; 2) $1{,}5 \cdot 10^{-9}$ або $0{,}9 \cdot 10^{-8}$?

262.° У таблиці наведено відстані від Сонця до планет Сонячної системи.

Планета	Відстань, км	Планета	Відстань, км
Венера	$1{,}082 \cdot 10^{8}$	Нептун	$4{,}497 \cdot 10^{9}$
Земля	$1{,}495 \cdot 10^{8}$	Сатурн	$1{,}427 \cdot 10^{9}$
Марс	$2{,}280 \cdot 10^{8}$	Уран	$2{,}871 \cdot 10^{9}$
Меркурій	$5{,}790 \cdot 10^{7}$	Юпітер	$7{,}781 \cdot 10^{8}$

1) Яка планета знаходиться на найменшій відстані від Сонця, а яка — на найбільшій?
2) Яка з планет, Марс або Сатурн, знаходиться далі від Сонця?
3) Складіть таблицю, записавши в лівому стовпці назви планет у порядку збільшення відстані від них до Сонця, а в правому — відстані від них до Сонця, виражені в мільйонах кілометрів.

263.° У таблиці наведено маси атомів деяких хімічних елементів.

Елемент	Маса атома, кг	Елемент	Маса атома, кг
Нітроґен	$2{,}32 \cdot 10^{-26}$	Аурум	$3{,}27 \cdot 10^{-25}$
Алюміній	$4{,}48 \cdot 10^{-26}$	Купрум	$1{,}05 \cdot 10^{-25}$
Гідроґен	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$	Натрій	$3{,}81 \cdot 10^{-26}$
Гелій	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$	Станум	$1{,}97 \cdot 10^{-25}$
Ферум	$9{,}28 \cdot 10^{-26}$	Уран	$3{,}95 \cdot 10^{-25}$

1) Маса атома якого з наведених елементів найменша, а якого — найбільша?
2) Маса атома якого з елементів, Купруму чи Натрію, більша?
3) Складіть таблицю, упорядкувавши елементи в порядку зменшення маси їхніх атомів.

264.° У таблиці наведено запаси деяких речовин у мінеральних ресурсах світу.

Речовина	Запаси, т	Речовина	Запаси, т
Алюміній	$1{,}1 \cdot 10^9$	Нікель	$6{,}8 \cdot 10^7$
Вольфрам	$1{,}3 \cdot 10^6$	Олово	$4{,}76 \cdot 10^6$
Залізо	$8{,}8 \cdot 10^{10}$	Ртуть	$1{,}15 \cdot 10^5$
Золото	$1{,}1 \cdot 10^4$	Фосфати	$1{,}98 \cdot 10^{10}$
Марганець	$6{,}35 \cdot 10^8$	Хром	$4{,}4 \cdot 10^9$
Мідь	$2{,}8 \cdot 10^9$	Цинк	$1{,}12 \cdot 10^8$

1) Запаси якої з наведених речовин найбільші, а якої — найменші?
2) Запаси якої з речовин, нікелю чи цинку, більші?
3) Складіть таблицю мінеральних ресурсів, розмістивши речовини в порядку зменшення їхніх запасів.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

265. Маса чавунної болванки 16 кг. Яка найменша кількість болванок потрібна, щоб відлити 41 деталь масою 12 кг кожна?

266. У деякому місті на сьогоднішній день проживає 88 200 мешканців. Скільки мешканців було в цьому місті 2 роки тому, якщо щорічний приріст населення становив 5 %?

267. Дмитро ходить з дому до стадіону пішки зі швидкістю 4 км/год. Якщо він поїде до стадіону на велосипеді зі швидкістю 12 км/год, то приїде до нього на 20 хв раніше, ніж зазвичай. На якій відстані від дому Дмитра знаходиться стадіон?

268. Спростіть вираз

$$\frac{2a^2+2}{a^2-1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{3a-3}{2a+2}.$$

269. Чи можна стверджувати, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(5n+6{,}5)^2-(2n+0{,}5)^2$ кратне 42?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

270. Подайте у вигляді степеня з основою a вираз:

1) $a^7 \cdot a^5$; 2) $a^7 : a^5$; 3) $(a^7)^5$; 4) $\dfrac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}$.

271. Спростіть вираз:

1) $-4m^3n^5 \cdot 5m^4n^2$; 2) $(-2m^7n^2)^4$; 3) $8x^3y^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2y^5\right)^3$.

272. Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{3^{10} \cdot 27^3}{9^9}$; 2) $\left(5\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^8$.

Поновіть у пам’яті зміст п. 4 на с. 137, 138 частини 2 підручника.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

273. У деякому будинку живуть тільки подружні пари з маленькими дітьми, причому в кожного хлопчика є сестра і хлопчиків більше, ніж дівчаток. Чи може дорослих бути більше, ніж дітей?

9. Властивості степеня із цілим показником

У 7 класі ви вивчали властивості степеня з натуральним показником. Вони залишаються справедливими й для степеня з будь-яким цілим показником.

Теорема 9.1. ***Для будь-якого $a \neq 0$ та будь-яких цілих m і n виконуються рівності*:**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \qquad (1)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \qquad (2)$$

Теорема 9.2. ***Для будь-яких $a \neq 0$ і $b \neq 0$ та будь-якого цілого n виконується рівність***

$$(ab)^n = a^n b^n. \qquad (3)$$

Рівність (1) виражає **основну властивість степеня**. Доведемо її.

Для натуральних m і n цю рівність уже було доведено в курсі алгебри 7 класу.

Розглянемо тепер випадок, коли m і n — цілі від'ємні числа.

Якщо m і n — цілі від'ємні числа, то $-m$ і $-n$ — натуральні числа. Тоді $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}$.

Маємо:

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

Щоб завершити доведення основної властивості степеня, треба також розглянути такі випадки: один із показників степеня m або n від'ємний, а другий — додатний; один або обидва показники дорівнюють нулю. Розгляньте ці випадки самостійно.

Рівності (2) і (3) доводять аналогічно.

За допомогою властивості (1) доведемо таку теорему.

Теорема 9.3. ***Для будь-якого $a \neq 0$ та будь-яких цілих m і n виконується рівність***

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \quad (4)$$

Доведення. Маємо:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}. \blacktriangle$$

За допомогою властивостей (2) і (3) доведемо таку теорему.

Теорема 9.4. ***Для будь-яких $a \neq 0$ і $b \neq 0$ та будь-якого цілого n виконується рівність***

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad (5)$$

Доведення. Маємо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}. \blacktriangle$$

Властивості (1)–(5) називають **властивостями степеня із цілим показником**.

ПРИКЛАД 1 Подайте у вигляді степеня з основою a вираз: 1) $a^{-14} \cdot a^{12}$; 2) $a^{-5} : a^{-9}$; 3) $(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6$.

Розв'язання. 1) Застосувавши основну властивість степеня, отримуємо:

$$a^{-14} \cdot a^{12} = a^{-14+12} = a^{-2}.$$

2) Використовуючи рівність $a^m : a^n = a^{m-n}$, отримуємо:

$$a^{-5} : a^{-9} = a^{-5-(-9)} = a^{-5+9} = a^4.$$

3) Застосувавши послідовно правила піднесення степеня до степеня (властивість (2)), множення і ділення степенів з однаковими основами (властивості (1) і (4)), отримуємо:

$$(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6 = a^{-4\cdot(-2)} \cdot a^{-7} : a^6 = a^8 \cdot a^{-7} : a^6 = a^{8+(-7)-6} = a^{-5}. \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть значення виразу:

1) $(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3}$; 2) $16^{-9} \cdot 8^{12}$; 3) $\dfrac{6^{-3}}{18^{-3}}$; 4) $\left(1\dfrac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\dfrac{5}{6}\right)^{3}\right)^{-5}$.

Розв'язання. 1) Маємо: $(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3} = 5^{20} : 5^{21} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$.

2) Подавши числа 16 і 8 у вигляді степенів з основою 2, отримуємо:

$$16^{-9} \cdot 8^{12} = (2^4)^{-9} \cdot (2^3)^{12} = 2^{-36} \cdot 2^{36} = 2^0 = 1.$$

3) Використовуючи правило піднесення дробу до степеня (властивість (5)), отримуємо:

$$\frac{6^{-3}}{18^{-3}} = \left(\frac{6}{18}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27.$$

4) $$\left(1\frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^{3}\right)^{-5} = \left(\frac{36}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^{2}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} =$$

$$= \left(\frac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \frac{5}{6}.$$ ▲

ПРИКЛАД 3 Спростіть вираз: 1) $0{,}6m^2n^{-6} \cdot \dfrac{1}{3}m^{-4}n^3$;
2) $(a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6)$.

Розв'язання

1) $$0{,}6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3 = \left(0{,}6 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot (m^2 \cdot m^{-4}) \cdot (n^{-6} \cdot n^3) = 0{,}2m^{-2}n^{-3}.$$

2) $(a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6) = a^{-4} - 4a^{-2} + 9a^{-2} - 36 - a^{-4} + 36 = 5a^{-2}$. ▲

ПРИКЛАД 4 Виконайте множення $(3{,}4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8})$ і результат запишіть у стандартному вигляді.

Розв'язання. $(3{,}4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8}) = (3{,}4 \cdot 7) \cdot (10^{14} \cdot 10^{-8}) = 23{,}8 \cdot 10^6 = 2{,}38 \cdot 10 \cdot 10^6 = 2{,}38 \cdot 10^7$. ▲

? Сформулюйте властивості степеня із цілим показником.

ВПРАВИ

274.° Подайте вираз у вигляді степеня з основою *a* або добутку степенів з різними основами:

1) $a^{-6}\cdot a^{9}$;
2) $a^{5}\cdot a^{-8}$;
3) $a^{-5}\cdot a^{10}\cdot a^{-12}$;
4) $a^{-2}:a^{6}$;
5) $a^{7}:a^{-3}$;
6) $a^{-3}:a^{-15}$;
7) $a^{12}\cdot a^{-20}:a^{-9}$;
8) $(a^{-5})^{4}$;
9) $(a^{-6})^{-8}$;
10) $(a^{2})^{-4}\cdot(a^{-3})^{-2}:(a^{-8})^{3}$;
11) $(a^{4}b^{-2}c^{3})^{-10}$;
12) $\left(\dfrac{a^{10}b^{-7}}{c^{6}d^{-14}}\right)^{-2}$.

275.° Подайте вираз у вигляді степеня з основою *a* або добутку степенів з різними основами:

1) $a^{6}\cdot a^{-10}$;
2) $a^{4}:a^{7}$;
3) $a^{-5}:a^{-9}$;
4) $(a^{-2})^{6}$;
5) $(a^{-3}b^{-1}c^{7})^{-4}$;
6) $\left(\dfrac{a^{2}}{bc^{-1}}\right)^{-3}$;
7) $a^{-16}\cdot a^{8}:a^{-4}$;
8) $(a^{-3})^{8}:(a^{-1})^{7}\cdot(a^{-7})^{4}$.

276.° Знайдіть значення виразу:

1) $9^{5}\cdot 9^{-7}$;
2) $10^{-8}\cdot 10^{12}$;
3) $3^{-18}:3^{-21}$;
4) $2^{-9}\cdot 2^{-12}:2^{-22}$;
5) $(17^{4})^{-12}\cdot(17^{-6})^{-8}$;
6) $\dfrac{6^{-5}\cdot(6^{-3})^{4}}{(6^{-7})^{2}\cdot 6^{-3}}$;
7) $3^{-3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$;
8) $\dfrac{14^{-5}}{7^{-5}}$.

277.° Знайдіть значення виразу:

1) $6^{-9}\cdot 6^{6}$;
2) $7^{-16}:7^{-18}$;
3) $5^{-7}:5^{-6}\cdot 5^{3}$;
4) $\dfrac{4^{-7}\cdot(4^{-5})^{3}}{(4^{-3})^{7}}$;
5) $0{,}8^{-4}\cdot\left(1\dfrac{1}{4}\right)^{-4}$;
6) $\dfrac{11^{-2}}{22^{-2}}$.

278.° Спростіть вираз:

1) $3a^{-3} \cdot 4a^{-4}$;
2) $\dfrac{10b^{-4}}{15b^{-5}}$;
3) $(2c^{-6})^4$;
4) $m^{-2}n \cdot mn^{-2}$;
5) $abc^{-1} \cdot ab^{-1}c$;
6) $\dfrac{kp^{-6}}{k^4p^4}$;
7) $(c^{-6}d^2)^{-7}$;
8) $\dfrac{1}{3}a^{-3}b^{-6} \cdot \dfrac{6}{7}a^7b^4$;
9) $0,2c^{-3}d^5 \cdot 1,5c^{-2}d^{-5}$;
10) $4x^8 \cdot (-3x^{-2}y^4)^{-2}$;
11) $\dfrac{13m^{-10}}{12n^{-8}} \cdot \dfrac{27n}{26m^2}$;
12) $\dfrac{18p^{-6}k^2}{7} : \dfrac{15k^{-2}}{p^6}$.

279.° Спростіть вираз:

1) $2a^{-5}b^2 \cdot 3a^{-2}b^{-5}$;
2) $\left(\dfrac{1}{2}mn^{-3}\right)^{-2}$;
3) $\dfrac{3,6a^2b}{0,9a^3b^{-3}}$;
4) $0,8a^{-6}b^8 \cdot 5a^{10}b^{-8}$;
5) $\dfrac{25x^{-3}}{y^{-4}} \cdot \dfrac{y^4}{5x^{-7}}$;
6) $28c^3d^{-2} \cdot (2cd^{-1})^{-2}$.

280.• Знайдіть значення виразу:

1) $8^{-3} \cdot 2^7$;
2) $27^{-2} : 9^{-4}$;
3) $100^{-2} : 1000^{-5} \cdot 0,01^6$;
4) $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\right)^{-3}$;
5) $25^{-4} : (0,2^{-3})^{-2}$;
6) $\dfrac{(-36)^{-3} \cdot 6^8}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;
7) $\dfrac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 16^{-3}}$;
8) $\dfrac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8}$.

281.• Знайдіть значення виразу:

1) $9^{-4} \cdot 27^2$;
2) $32^{-5} : 64^{-4}$;
3) $\left(2\dfrac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$;
4) $8^{-2} : 0,5^4$;
5) $\dfrac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9}$;
6) $\dfrac{10^{-2} \cdot 15^{-4}}{30^{-6}}$.

282.• Виконайте дії та зведіть отриманий вираз до вигляду, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $-2{,}4a^{-4}b^{3}\cdot(-2a^{-3}c^{-5})^{-3}$;

2) $(-10x^{-2}yz^{-8})^{-2}\cdot(0{,}1yz^{-4})^{-2}$;

3) $1\frac{7}{9}m^{-6}n\cdot\left(1\frac{1}{3}m^{-1}n^{-4}\right)^{-3}$;

4) $\left(-\frac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3}\cdot(-6a^{2}b^{9})^{-2}$;

5) $\left(\frac{7p^{-3}}{5k^{-1}}\right)^{-2}\cdot 49m^{-6}n^{4}$;

6) $\left(\frac{4x^{-5}}{3y^{-2}}\right)^{-3}\cdot(16x^{-6}y^{4})^{2}$.

283.• Виконайте дії та зведіть отриманий вираз до вигляду, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $3{,}6a^{-8}b^{4}\cdot(-3a^{-3}b^{-7})^{-2}$;

2) $1\frac{9}{16}x^{-6}y^{2}\cdot\left(1\frac{1}{4}x^{-1}y^{-3}\right)^{-3}$;

3) $\left(\frac{5m^{-4}}{6n^{-1}}\right)^{-3}\cdot 125m^{-10}n^{2}$;

4) $\left(\frac{7a^{-6}}{b^{5}}\right)^{-2}\cdot(a^{-4}b)^{4}$.

284.• Винесіть за дужки степінь з основою a та найменшим із даних показників:

1) $a^{3}-2a^{4}$; 2) $a^{-3}-2a^{-4}$; 3) $a^{3}-2a^{-4}$.

285.• Винесіть за дужки степінь з основою b і найменшим із даних показників:

1) $b^{3}+3b^{2}$; 2) $b^{-3}+3b^{-2}$; 3) $b^{-3}+3b^{2}$.

286.• Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $a^{-2}-4$;

2) $a^{-4}b^{-6}-1$;

3) $25x^{-8}y^{-12}-z^{-2}$;

4) $a^{-3}+b^{-3}$;

5) $m^{-4}-6m^{-2}p^{-1}+9p^{-2}$;

6) $a^{-8}-49a^{-2}$.

287.• Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $x^{-4} - 25$;
2) $m^{-6} - 8n^{-3}$;
3) $a^{-10} + 8a^{-5}b^{-7} + 16b^{-14}$;
4) $a^{-4} - a^{-2}$.

288.• Доведіть тотожність

$$a^{-8} - b^{-8} = (a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})(a^{-4} + b^{-4}).$$

289.• Спростіть вираз:

1) $(a^{-4} + 3)(a^{-4} - 3) - (a^{-4} + 2)^2$;

2) $\dfrac{m^{-2} - n^{-2}}{m^{-1} + n^{-1}}$;

3) $\dfrac{2x^{-2} + y^{-2}}{3x^{-2} - 3x^{-1}y^{-1}} - \dfrac{x^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}$;

4) $\dfrac{a^{-5} + b^{-5}}{a^{-6}} : \dfrac{a^{-3}b^{-5} + a^{-8}}{a^{-4}}$.

290.• Спростіть вираз:

1) $(x^{-2} - 1)^2 - (x^{-2} - 4)(x^{-2} + 4)$;

2) $\dfrac{a^{-2} - 10a^{-1}b^{-1} + 25b^{-2}}{a^{-1} - 5b^{-1}}$;

3) $\dfrac{5m^{-2} + n^{-2}}{4m^{-3} + 4m^{-1}n^{-2}} - \dfrac{m^{-1}}{m^{-2} + n^{-2}}$;

4) $\dfrac{b^{-1} + 3c^{-1}}{c^{-2}} \cdot \dfrac{bc}{b^{-2}c^{-1} + 3b^{-1}c^{-2}}$.

291.• Порядок числа a дорівнює –4. Визначте порядок числа: 1) $10a$; 2) $0{,}1a$; 3) $100a$; 4) $0{,}001a$; 5) $10\,000a$; 6) $1\,000\,000a$.

292.• Порядок числа b дорівнює 3. Визначте порядок числа:

1) $10b$; 2) $0{,}01b$; 3) $0{,}0001b$; 4) $1000b$.

293.• Виконайте обчислення та запишіть результат у стандартному вигляді:

1) $(1{,}8 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^3)$;
2) $(3 \cdot 10^6) \cdot (5{,}2 \cdot 10^{-9})$;

3) $\dfrac{5,4\cdot10^{5}}{9\cdot10^{8}}$; 4) $\dfrac{1,7\cdot10^{-6}}{3,4\cdot10^{-4}}$.

294.° Виконайте обчислення та запишіть результат у стандартному вигляді:

1) $(1,6\cdot10^{-5})\cdot(4\cdot10^{7})$; 3) $\dfrac{7\cdot10^{-4}}{1,4\cdot10^{-6}}$;

2) $(5\cdot10^{-3})\cdot(1,8\cdot10^{-1})$; 4) $\dfrac{6,4\cdot10^{3}}{8\cdot10^{-2}}$.

295.° Середня відстань від Землі до Сонця дорівнює $1,5\cdot10^{8}$ км, а швидкість світла — $3\cdot10^{8}$ м/с. За скільки хвилин світло від Сонця досягне Землі? Відповідь округліть до одиниць.

296.° Густина міді дорівнює $8,9\cdot10^{3}$ кг/м^{3}. Знайдіть масу мідної плитки, довжина якої $2,5\cdot10^{-1}$ м, ширина — 12 см, а висота — 0,02 м.

297.° Маса Землі дорівнює $6\cdot10^{24}$ кг, а маса Місяця — $7,4\cdot10^{22}$ кг. У скільки разів маса Місяця менша від маси Землі? Відповідь округліть до одиниць.

298.°° Спростіть вираз і запишіть результат у вигляді раціонального виразу, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $\left(\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}-\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}}\right):\left(\dfrac{b}{a^{2}}\right)^{-1}$;

2) $\dfrac{b^{-2}-2}{b^{-2}}-\dfrac{b^{-4}-4}{b^{-2}}\cdot\dfrac{1}{b^{-2}-2}$;

3) $\dfrac{5c^{-3}}{c^{-3}-3}-\dfrac{c^{-3}+6}{2c^{-3}-6}\cdot\dfrac{90}{c^{-6}+6c^{-3}}$;

4) $\left(\dfrac{m^{-4}}{m^{-4}-4}-\dfrac{3m^{-4}}{m^{-8}-8m^{-4}+16}\right)\cdot\dfrac{16-m^{-8}}{m^{-4}-7}+\dfrac{8m^{-4}}{m^{-4}-4}$.

299.•• Спростіть вираз і запишіть результат у вигляді раціонального виразу, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $\dfrac{a^{-2}+5}{a^{-4}-6a^{-2}+9}:\dfrac{a^{-4}-25}{4a^{-2}-12}-\dfrac{2}{a^{-2}-5}$;

2) $\left(b^{-1}-\dfrac{5b^{-1}-36}{b^{-1}-7}\right)\cdot\left(2b^{-1}+\dfrac{2b^{-1}}{b^{-1}-7}\right)^{-1}$.

300.•• Порядок числа a дорівнює –4, а порядок числа b дорівнює 3. Яким може бути порядок значення виразу:
1) ab; 2) $a + b$; 3) $a + 10b$; 4) $10a + 0{,}1b$?

301.•• Порядок числа m дорівнює 2, а порядок числа n дорівнює 4. Яким може бути порядок значення виразу:
1) mn; 2) $0{,}01mn$; 3) $100m + n$; 4) $0{,}01m + n$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

302. Середнє арифметичне двох натуральних чисел дорівнює 18. У результаті ділення більшого із цих чисел на менше отримаємо неповну частку 3 й остачу 4. Знайдіть ці числа.

303. Завдяки заходам щодо економії електроенергії за перший місяць її витрати було зменшено на 20 %, за другий — на 10 % порівняно з попереднім, а за третій — на 5 % порівняно з попереднім. На скільки відсотків у результаті було зменшено витрати електроенергії?

304. Для відкачування води із затопленого приміщення було задіяно три насоси. Перший із них може відкачати всю воду за 12 год, другий — за 15 год, а третій — за 20 год. Спочатку протягом 3 год працювали перший і другий насоси, а потім підключили третій насос. За який час було відкачано всю воду?

305. Зошит коштує 19 грн. У покупця є купюри лише по 5 грн, а в продавця — лише по 2 грн. Чи може покупець розрахуватися за зошит без додаткового розміну грошей? У разі ствердної відповіді визначте, яку найменшу кількість купюр відповідної вартості повинні мати покупець і продавець.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

306. Знайдіть значення функції $y = -\frac{14}{x}$, якщо:

1) $x = 2$; 2) $x = -1$; 3) $x = 3{,}5$; 4) $x = -6$.

307. Функцію задано формулою $y = \frac{x+2}{x-6}$. Яка область визначення даної функції? Заповніть таблицю, обчисливши відповідні значення функції:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y							

308. Побудуйте графік функції $y = 2x - 1$. Чи проходить цей графік через точку: 1) A (30; 59); 2) B (–15; –29)?

309. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків функцій $y = 2{,}7x - 8$ і $y = 1{,}2x + 7$.

310. Розв’яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + y = 7. \end{cases}$

Поновіть у пам’яті зміст пп. 17–19 на с. 143, 144 частини 2 підручника.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

311. Після закінчення тенісного турніру, який проводили за олімпійською системою (той, хто програв, вибуває), виявилося, що тільки 32 учасники виграли зустрічей більше, ніж програли. Скільки тенісистів брало участь у турнірі?

10. Функція $y = \frac{k}{x}$ та її графік

У курсі математики 6 класу ви ознайомилися з функціональною залежністю, за якої зі **збільшенням** (**зменшенням**) однієї величини в кілька разів друга величина **зменшується** (**збільшується**) в таку саму кількість разів. Таку залежність називають **оберненою пропорційністю**.

Розглянемо два приклади.

ПРИКЛАД 1 Нехай є 500 грн. Позначимо через x грн ціну 1 кг товару, а через y кг — кількість цього товару, яку можна придбати за 500 грн.

Залежність змінної y від змінної x є оберненою пропорційністю: збільшення ціни x у кілька разів приводить до зменшення кількості товару y у стільки ж разів, і навпаки, зменшення ціни спричиняє збільшення кількості купленого товару.

Цій функціональній залежності відповідає функція, задана формулою $y = \frac{500}{x}$. ▲

ПРИКЛАД 2 Розглянемо прямокутник, площа якого дорівнює 18 см^2, а сторони — x см і y см. Тоді $y = \frac{18}{x}$.

Збільшення (зменшення) знаменника x у кілька разів спричиняє зменшення (збільшення) величини y у стільки ж разів, тобто залежність змінної y від змінної x є оберненою пропорційністю. ▲

У розглянутих прикладах математичною моделлю реальних ситуацій є функція, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$.

Означення. **Функцію, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, називають оберненою пропорційністю.**

Оскільки у виразі $\frac{k}{x}$ допустимими значеннями змінної x є всі числа, крім 0, то областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$ також є всі числа, крім 0.

Розглянемо функцію $y = \frac{6}{x}$. У таблиці наведено деякі значення аргументу та відповідні їм значення функції.

x	–6	–4	–3	–2	–1,5	–1	1	1,5	2	3	4	6
y	–1	–1,5	–2	–3	–4	–6	6	4	3	2	1,5	1

Позначимо на координатній площині точки, координати (x; y) яких наведено в таблиці (рис. 3).

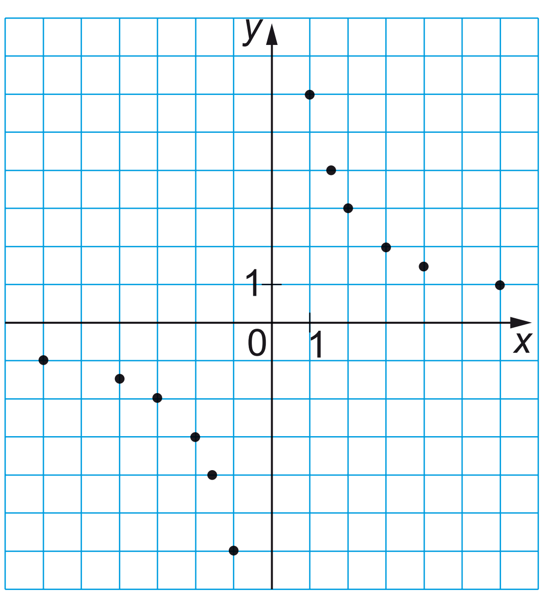


Рис. 3

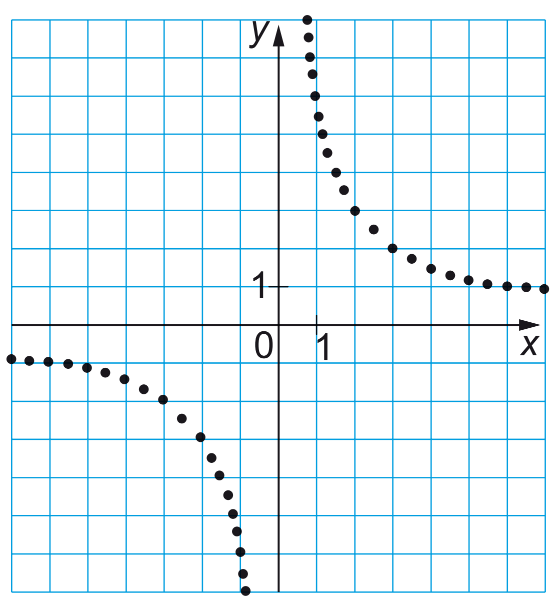


Рис. 4

Чим більше точок, координати яких задовольняють рівняння $y=\frac{6}{x}$, нам удасться позначити, тим менше отримана фігура (рис. 4) відрізнятиметься від графіка функції $y=\frac{6}{x}$.

Серед позначених точок не може бути точки, абсциса якої дорівнює нулю, оскільки число 0 не належить області визначення даної функції. Тому графік функції $y=\frac{6}{x}$ не має спільних точок з віссю ординат.

Крім того, цей графік не має спільних точок і з віссю абсцис, тобто точок, ординати яких дорівнюють нулю. Справді, рівняння $\frac{6}{x}=0$ не має розв'язків. Отже, число 0 не належить області значень даної функції.

Якщо $x > 0$, то $\frac{6}{x}>0$, тобто $y > 0$; якщо $x < 0$, то $y < 0$. Отже, точки графіка даної функції можуть розміщуватися тільки в I і III координатних чвертях.

Зауважимо, що зі збільшенням модуля абсциси відстані від точок графіка функції $y=\frac{6}{x}$ до осі абсцис зменшуються та можуть стати як завгодно малими, але ніколи не дорівнюватимуть нулю. Справді, чим більший модуль аргументу, тим менший модуль відповідного значення функції.

Аналогічно можна встановити, що зі зменшенням модуля абсциси відстані від точок графіка до осі ординат зменшуються та можуть стати як завгодно малими, проте ніколи не дорівнюватимуть нулю.

Якби вдалося позначити на координатній площині всі точки, координати яких задовольняють рівняння $y=\frac{6}{x}$, то ми отримали б фігуру, зображену на рисунку 5.

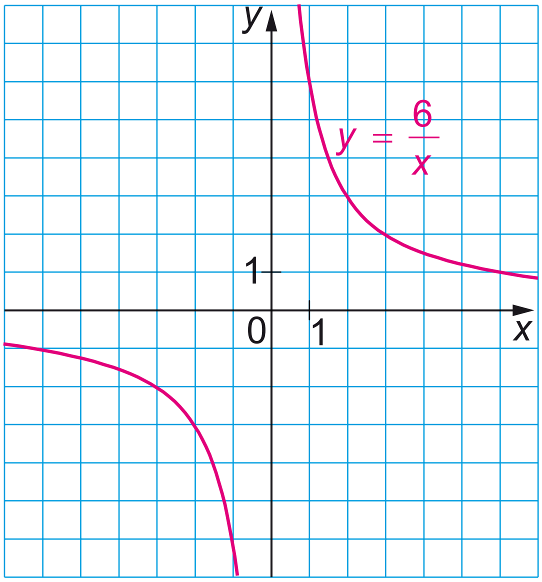


Рис. 5

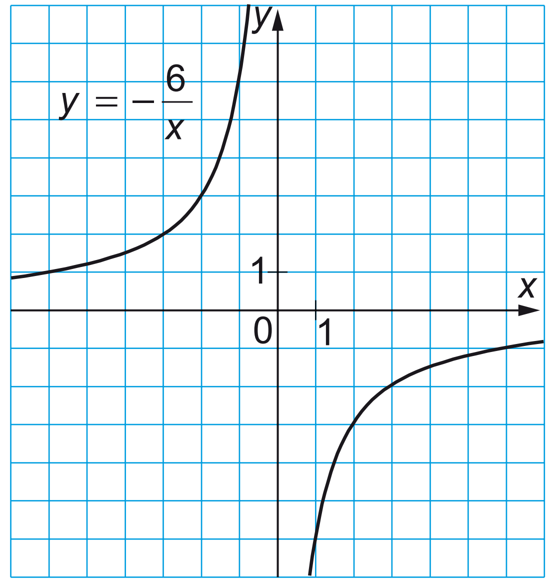


Рис. 6

Фігуру, яка є графіком функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, називають **гіперболою**. Гіпербола складається з двох частин — **віток гіперболи**.

Зауважимо, що коли є правильною рівність $y_0 = \frac{k}{x_0}$, то також є правильною рівність $-y_0 = \frac{k}{-x_0}$. Тоді можна зробити такий висновок: якщо точка $A\ (x_0;\ y_0)$ належить гіперболі $y = \frac{k}{x}$, то точка $B\ (-x_0;\ -y_0)$ також належить цій гіперболі.

На рисунку 5 зображено гіперболу $y = \frac{6}{x}$.

Якщо $k > 0$, то вітки гіперболи розміщені в I і III чвертях, а якщо $k < 0$ — то в II і IV чвертях.

На рисунку 6 зображено графік функції $y = -\frac{6}{x}$. Вітки гіперболи $y = -\frac{6}{x}$ розміщені в II і IV чвертях.

Зауважимо, що областю значень функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, є всі числа, крім 0.

У таблиці наведено властивості функції $y = \frac{k}{x}$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	Усі числа, крім 0
Область значень	Усі числа, крім 0
Графік	Гіпербола
Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0)	Не існує
Властивість графіка	Якщо точка A $(x_0; y_0)$ належить гіперболі $y = \frac{k}{x}$, то точка B $(-x_0; -y_0)$ також належить цій гіперболі.

Покажемо, як графік функції $y = \frac{k}{x}$ можна використовувати під час розв'язування рівнянь.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\frac{4}{x} = x + 3$.

Розв'язання. Розглянемо функції $y = \frac{4}{x}$ і $y = x + 3$. Побудуємо в одній системі координат графіки цих функцій (рис. 7). Вони перетинаються у двох точках, абсциси яких дорівнюють 1 і –4. У кожній із точок перетину графіків значення функції $y = \frac{4}{x}$ дорівнює значенню функції $y = x + 3$. Отже, при знайдених абсцисах

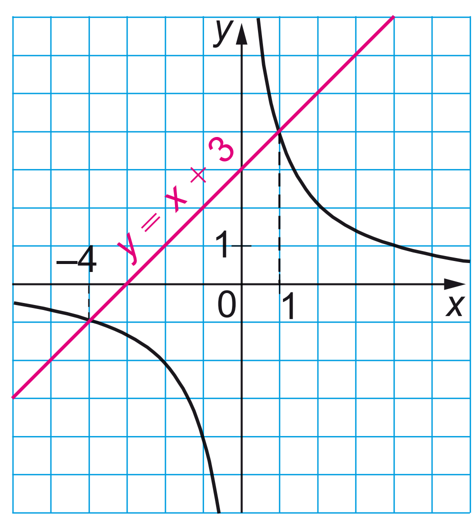


Рис. 7

значення виразів $\frac{4}{x}$ і $x + 3$ рівні, тобто числа 1 і –4 є коренями рівняння $\frac{4}{x} = x + 3$. Перевірка це підтверджує. Справді, $\frac{4}{1} = 1 + 3$ і $\frac{4}{-4} = -4 + 3$. ▲

Описаний метод розв'язування рівнянь називають **графічним**. У 7 класі ви ознайомилися з графічним методом розв'язування систем рівнянь і знаєте, що цей метод не завжди дає точні результати. Тому перевірка знайдених коренів є обов'язковим етапом розв'язування рівняння.

У подальшому (п. 22) ви навчитеся розв'язувати такі рівняння, не використовуючи графічний метод.

?

1. Поясніть, яку залежність між величинами називають оберненою пропорційністю.
2. Яку функцію називають оберненою пропорційністю?
3. Що є областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$?
4. Як називають фігуру, що є графіком оберненої пропорційності?
5. Як називають частини, з яких складається гіпербола?
6. Що є областю значень функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$?
7. У яких координатних чвертях розміщений графік функції $y = \frac{k}{x}$, якщо $k > 0$? якщо $k < 0$?
8. Поясніть, у чому полягає графічний метод розв'язування рівнянь.

ВПРАВИ

312.° Автомобіль проїжджає деяку відстань за 10 год. За який час він проїде цю саму відстань, якщо його швидкість:

1) збільшиться у 2 рази; 2) зменшиться в 1,2 раза?

313.° Довжина прямокутника дорівнює 30 см. Якою стане його довжина, якщо при тій самій площі ширину прямокутника:

1) збільшити в 1,5 раза; 2) зменшити в 3,2 раза?

314.° За деяку суму грошей купили 40 м тканини. Скільки метрів тканини купили б за ту саму суму грошей, якби ціна за 1 м:

1) зменшилась у 2,6 раза;

2) збільшилася в 1,6 раза?

315.° Пішохід пройшов 12 км. Заповніть таблицю, у першому рядку якої вказано швидкість, а в другому — час руху.

v, км/год	5		2,4	
t, год		3		$3\frac{1}{3}$

Задайте формулою залежність t від v.

316.° Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює 48 см^3. Заповніть таблицю, у першому рядку якої вказано площу його основи, а в другому — висоту.

S, см^2	16		240	
h, см		8		4,8

Задайте формулою залежність h від S.

317.° Бригада із семи робітників з однаковою продуктивністю праці може виконати певне виробниче завдання за 12 днів. Скільки потрібно робітників з такою самою продуктивністю праці, щоб виконати це завдання за 4 дні?

318.° Заготовлених кормів вистачить для 24 коней на 18 днів. На скільки днів вистачить цих кормів для 36 коней?

319.° Серед даних функцій укажіть обернені пропорційності:

1) $y = 2x$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 5) $y = -\frac{0,8}{x}$; 7) $y = \frac{1}{2x}$;

2) $y = \frac{x}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{2x}{3}$; 8) $y = \frac{2}{3x}$.

320.° Задано функцію $y = \frac{24}{x}$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: –3; 6; 0,2;

2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 12; –6; 100.

321.° Задано функцію $y = -\frac{36}{x}$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: –4; 0,9; 18;

2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 6; –0,3; 8.

322.° Побудуйте графік функції $y = -\frac{8}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 4, –1;

2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 2, –8;

3) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

323.° Побудуйте графік функції $y = \frac{10}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 2, –10;

2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 5, –2;
3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

324.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = \frac{28}{x}$, визначте, чи проходить графік через точку:
1) A (–4; –7); 2) B (14; –2); 3) C (0,5; 14); 4) D (0,2; 140).

325.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = -\frac{48}{x}$, визначте, чи проходить графік через точку:
1) A (–6; –8); 2) B (12; –4); 3) C (0,3; –16); 4) D (0,4; –120).

326.• На рисунку 8 зображено графік залежності часу t руху з пункту A до пункту B від швидкості v руху. Користуючись графіком, визначте:
1) за який час можна дістатися з пункту A до пункту B, якщо рухатися зі швидкістю 8 км/год; 24 км/год;

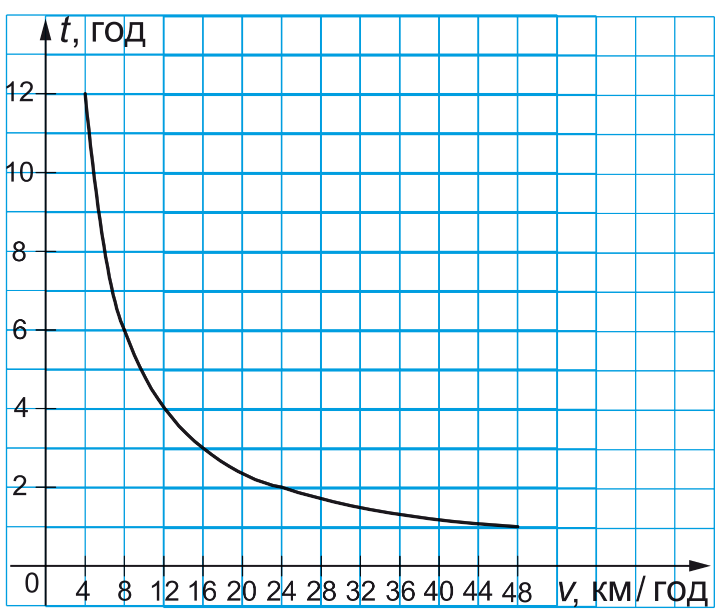


Рис. 8

2) з якою швидкістю треба рухатися, щоб дістатися з пункту *A* до пункту *B* за 3 год; 4 год;

3) чому дорівнює відстань між пунктами *A* і *B*.

327.• Дротяний реостат підключено до блоку живлення (рис. 9). Опір реостата *R* залежить від положення повзунка й може змінюватися в межах від 0 до 6 Ом. Користуючись графіком залежності сили струму *I* від опору *R* за умови, що напруга на кінцях реостата залишається незмінною (рис. 10), визначте:

1) чому дорівнює сила струму, якщо опір дорівнює 2 Ом;

2) при якому значенні опору сила струму дорівнює 3 А;

3) скільки вольт становить напруга на кінцях реостата.

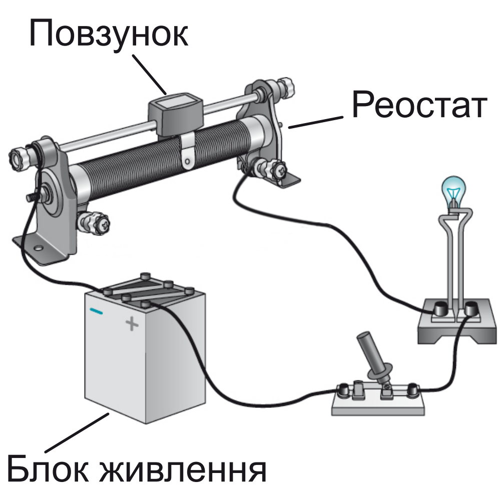


Рис. 9

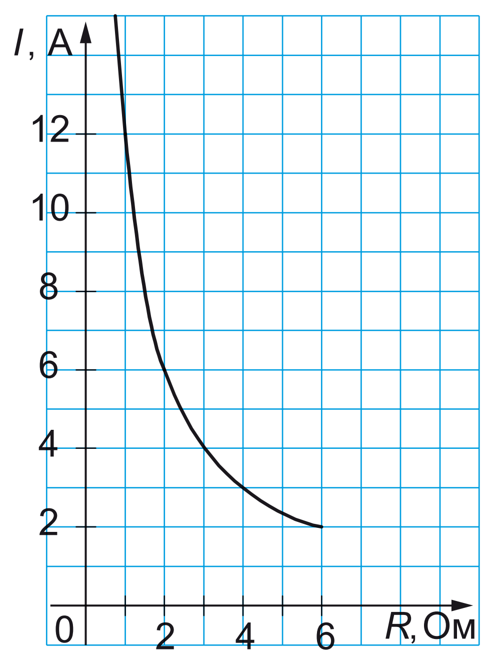


Рис. 10

328.• Знайдіть значення *k*, при якому графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:

1) $A\ (-5;\ 4)$; 2) $B\left(\frac{1}{6}; -2\right)$; 3) $C\ (1{,}5;\ -8)$.

329.• Графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку A (10; 1,6). Чи проходить графік цієї функції через точку:

1) B (–1; –16); 2) C (–2; 8)?

330.• Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{4}{x}$ і $y = x$ та визначте координати точок їхнього перетину.

331.• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\frac{4}{x} = 4 - x$; 2) $x - 2 = \frac{3}{x}$; 3) $x + 2 = -\frac{5}{x}$.

332.• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\frac{8}{x} = 6 - x$; 2) $2x = \frac{2}{x}$; 3) $\frac{7}{x} = -x$.

333.• Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} xy = 4, \\ 4y = x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$

334.• Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} xy = 5, \\ y - x = 4. \end{cases}$

335.• Визначте графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} xy = -1, \\ x + 3y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -1, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 6, \\ 3x - 2y = 6. \end{cases}$

336.• Визначте графічно кількість розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} xy = -8, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$

337.•• Знайдіть координати всіх точок графіка функції $y = \frac{64}{x}$, у яких абсциса й ордината рівні.

338.•• Знайдіть координати всіх точок графіка функції $y = -\frac{25}{x}$, у яких абсциса й ордината — протилежні числа.

339.•• Побудуйте графік функції $y = \frac{6}{|x|}$.

340.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{якщо } x \leqslant -1, \\ x + 3, & \text{якщо } x > -1; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} -2x + 10, & \text{якщо } x \leqslant 2, \\ \frac{12}{x}, & \text{якщо } 2 < x < 4, \\ 3, & \text{якщо } x \geqslant 4. \end{cases}$

341.•• Побудуйте графік функції:

$$y = \begin{cases} -\frac{4}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ 2, & \text{якщо } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \frac{4}{x}, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

342.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{9x - 18}{x^2 - 2x}$; 2) $y = \frac{5x^2 - 5}{x - x^3}$.

343.•• Побудуйте графік функції $y = \frac{10x^2 - 40}{x^3 - 4x}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

344. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінних, які містить вираз

$$\frac{a^2 - b^2}{a + 3b} \cdot \left(\frac{a + b}{a^2 - 2ab + b^2} + \frac{b}{a^2 - b^2}\right) - \frac{b}{a - b},$$

його значення не залежить від значень змінних.

345. Розв’яжіть рівняння

$$\frac{3}{5x+25} + \frac{1}{2x-10} = \frac{5}{x^2-25}.$$

346. Ціну шафи знизили на 30 %, а через деякий час підвищили на 30 %. Як змінилася, збільшилася чи зменшилася, ціна шафи порівняно з початковою і на скільки відсотків?

347. (*Задача Сунь-Цзи*[1].) Два чоловіки отримали монети, які вони повинні поділити між собою так, що коли до монет, які отримає перший із них, додати половину монет другого або до монет, які отримає другий, додати $\frac{2}{3}$ монет першого, то в обох випадках буде 48 монет. Скільки монет має отримати кожен із них?

348. Якщо лижниця рухатиметься зі швидкістю 10 км/год, то дістанеться до пункту призначення на 1 год пізніше за запланований час прибуття, а якщо рухатиметься зі швидкістю 15 км/год — то на 1 год раніше. З якою швидкістю вона має рухатися, щоб прибути до пункту призначення в запланований час?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

349. Кожний із трьох учнів написав по 100 різних слів. Після цього однакові слова викреслили. У результаті в першого учня залишилося 45 слів, у другого — 68, а в третього — 78. Доведіть, що щонайменше одне слово записали всі троє.

[1] Сунь-Цзи — китайський математик, який жив у III чи IV ст. н. е.

ЗАВДАННЯ № 3 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2-100}{x-10}=0.$

А) –10; 10; Б) 10; В) –10; Г) коренів немає.

2. Розв'яжіть рівняння $\frac{x-10}{x^2-100}=0.$

А) –10; 10; Б) 10; В) –10; Г) коренів немає.

3. Яка з наведених рівностей є правильною?

А) $10^{-3}=-1000;$ В) $(-2)^{-3}=-\frac{1}{8};$

Б) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-2}=-\frac{9}{16};$ Г) $\frac{1}{7^{-2}}=-49.$

4. Як записують у стандартному вигляді число 42 000?

А) $4{,}2\cdot10^3;$ Б) $4{,}2\cdot10^4;$ В) $0{,}42\cdot10^5;$ Г) $42\cdot10^3.$

5. Як записують у вигляді десяткового дробу число $6{,}3\cdot10^{-3}$?

А) 0,63; Б) 0,063; В) 0,0063; Г) 0,00063.

6. Подайте число $\frac{1}{25}$ у вигляді степеня з основою 5.

А) $5^{-2};$ Б) $5^2;$ В) $5^{-3};$ Г) $5^3.$

7. Чому дорівнює значення виразу $(1{,}7\cdot10^8)\cdot(6\cdot10^{-3})$?

А) $1{,}02\cdot10^5;$ Б) $1{,}02\cdot10^6;$ В) $10{,}2\cdot10^6;$ Г) $1{,}02\cdot10^7.$

8. Знайдіть значення виразу $\frac{9^{-2}\cdot3^{-5}}{81\cdot27^{-3}}.$

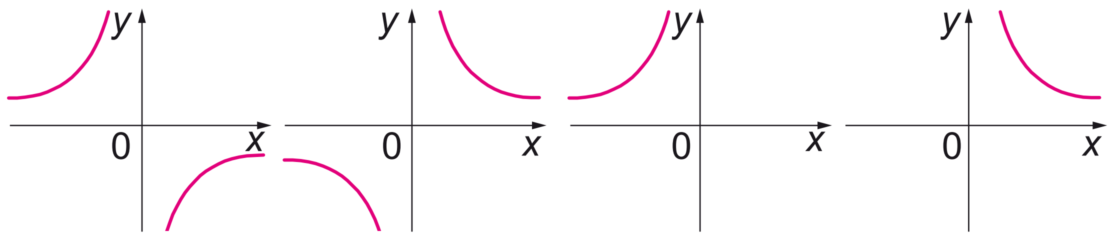
А) 81; Б) $\frac{1}{81};$ В) 27; Г) $\frac{1}{27}.$

9. Яка з даних функцій не є оберненою пропорційністю?

А) $y=\frac{3}{x};$ Б) $y=-\frac{3}{x};$ В) $y=\frac{3}{2x};$ Г) $y=\frac{3x}{2}.$

10. На одному з рисунків зображено графік функції $y = -\dfrac{4}{x}$.

Укажіть цей рисунок.



А) Б) В) Г)

11. При якому значенні k графік функції $y = \dfrac{k}{x}$ проходить через точку A (–3; 0,6)?

А) –1,8; Б) –0,2; В) –2,4; Г) –3,6.

12. Розв’яжіть рівняння $\dfrac{2x-1}{x+4} - \dfrac{3x+1}{4-x} = \dfrac{4x^2+8}{x^2-16}$.

А) 0; 4; Б) –4; 0; В) –4; Г) 0.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Раціональний вираз

Цілі та дробові вирази називають раціональними виразами.

Допустимі значення змінних

Допустимими значеннями змінних, що входять до раціонального виразу, називають усі значення змінних, при яких цей вираз має зміст.

Тотожно рівні вирази

Вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких допустимих значеннях змінних, що в них входять, називають тотожно рівними.

Тотожність

Рівність, яка виконується при будь-яких допустимих значеннях змінних, що в неї входять, називають тотожністю.

Основна властивість раціонального дробу

Якщо чисельник і знаменник раціонального дробу помножити на один і той самий ненульовий многочлен, то отримаємо дріб, тотожно рівний даному.

Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками

Щоб додати раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба додати їхні чисельники, а знаменник залишити той самий.

Щоб знайти різницю раціональних дробів з однаковими знаменниками, треба від чисельника першого дробу відняти чисельник другого дробу, а знаменник залишити той самий.

Множення раціональних дробів

Добутком двох раціональних дробів є раціональний дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників даних дробів, а знаменник — добутку їхніх знаменників.

Ділення раціональних дробів

Часткою двох раціональних дробів є раціональний дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельника діленого та знаменника дільника, а знаменник — добутку знаменника діленого та чисельника дільника.

Піднесення раціонального дробу до степеня

Щоб піднести раціональний дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник і знаменник. Перший результат записати як чисельник, а другий — як знаменник дробу.

Рівносильні рівняння

Два рівняння називають рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі корені або кожне з рівнянь не має коренів.

Властивості рівнянь

Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Раціональне рівняння

Рівняння, ліва й права частини якого є раціональними виразами, називають раціональним.

Степінь із цілим від'ємним показником

Для будь-якого числа a, яке не дорівнює нулю, і натурального числа n

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Степінь з показником, рівним нулю

Для будь-якого числа a, яке не дорівнює нулю, $a^0 = 1$.

Стандартний вигляд числа

Стандартним виглядом числа називають його запис у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a < 10$ і n — ціле число.

Властивості степеня із цілим показником

Для будь-яких $a \neq 0$ і $b \neq 0$ та будь-яких цілих m і n виконуються рівності:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (основна властивість степеня);

$(a^m)^n = a^{mn}$;

$(ab)^n = a^n b^n$;

$a^m : a^n = a^{m-n}$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Функція обернена пропорційність

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, називають оберненою пропорційністю.

Властивості функції $y = \frac{k}{x}$

Область визначення: усі числа, крім 0.
Область значень: усі числа, крім 0.
Графік: гіпербола.
Нуль функції: не існує.
Властивість графіка: якщо точка A $(x_0;\ y_0)$ належить гіперболі $y = \frac{k}{x}$, то точка B $(-x_0;\ -y_0)$ також належить цій гіперболі.

§ 2 КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

- Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви ознайомитеся з функцією $y = x^2$ та її властивостями.
- Дізнаєтеся про нову дію «добування квадратного кореня». Вам стане зрозуміло, що для вивчення навколишнього світу лише раціональних чисел недостатньо.
- Ви ознайомитеся з новим математичним поняттям — арифметичним квадратним коренем, дізнаєтеся про його властивості. Навчитеся спрощувати вирази, які містять квадратні корені.

11. Функція $y = x^2$ та її графік

Позначимо через y площу квадрата зі стороною x. Тоді $y = x^2$.

Зі зміною сторони x квадрата відповідно змінюватиметься і його площа y.

Зрозуміло, що кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y. Отже, залежність змінної y від змінної x є функціональною, а формула $y = x^2$ задає функцію.

Розглянемо функцію $y = x^2$, областю визначення якої є всі числа. У таблиці наведено деякі значення аргументу та відповідні їм значення функції.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Позначимо на координатній площині точки, координати яких (x; y) візьмемо з таблиці (рис. 11).

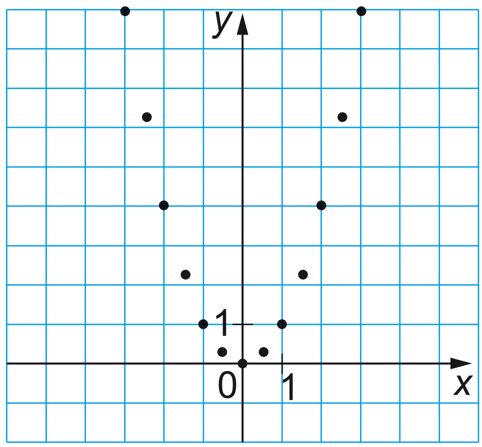


Рис. 11

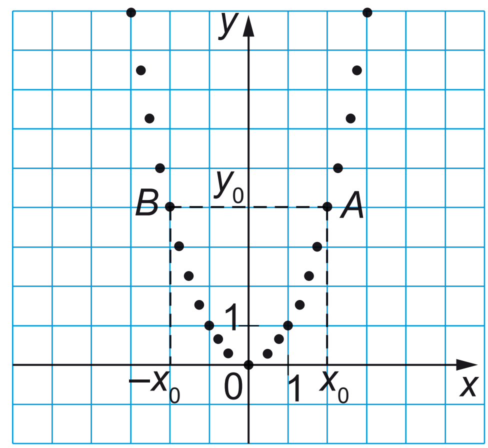


Рис. 12

Чим більше точок, координати яких задовольняють рівняння $y = x^2$, буде позначено, тим менше отримана фігура (рис. 12) відрізнятиметься від графіка функції $y = x^2$.

Пара чисел (0; 0) є розв'язком рівняння $y = x^2$. Отже, графік даної функції проходить через початок координат. Оскільки $y = x^2$ і $x^2 \geqslant 0$, то $y \geqslant 0$, тобто серед позначених точок не може бути точок з від'ємними ординатами.

Областю значень функції $y = x^2$ є всі невід'ємні числа.

Якби вдалося позначити на координатній площині всі точки, координати яких задовольняють рівняння $y = x^2$, то отримали б фігуру — графік функції $y = x^2$, яку називають **параболою** (рис. 13).

Точка з координатами (0; 0) ділить параболу на дві рівні частини, кожну з яких називають **віткою параболи**, а саму точку — **вершиною параболи**.

Зауважимо, що коли є правильною рівність $y_0 = x_0^2$, то є правильною й рівність $y_0 = (-x_0)^2$. Тоді можна зробити такий висновок: якщо точка A $(x_0; y_0)$ належить параболі $y = x^2$, то точка B $(-x_0; y_0)$ також належить цій параболі.

У таблиці наведено властивості функції $y = x^2$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	Усі числа
Область значень	Усі невід'ємні числа
Графік	Парабола
Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0)	$x = 0$
Властивість графіка	Якщо точка A $(x_0; y_0)$ належить параболі $y = x^2$, то точка B $(-x_0; y_0)$ також належить цій параболі.

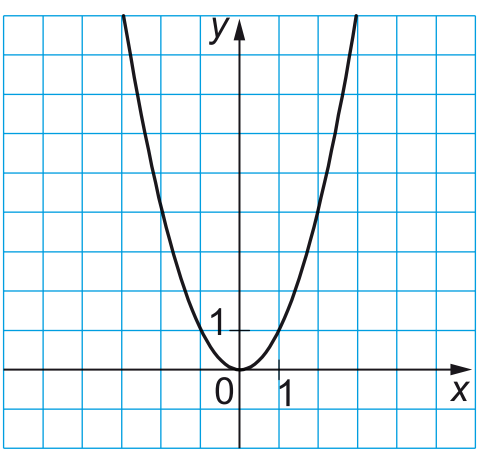


Рис. 13

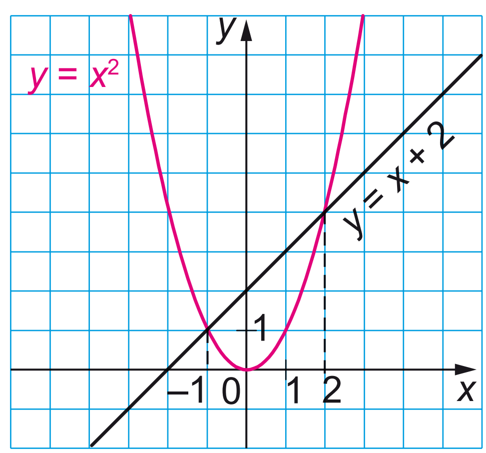


Рис. 14

ПРИКЛАД Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 = x + 2$.

Розв'язання. В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = x + 2$ (рис. 14). Ці графіки перетинаються у двох точках, абсциси яких дорівнюють 2 і –1. Отже, як при $x = 2$, так і при $x = -1$ значення виразів

x^2 і $x + 2$ рівні, тобто числа 2 і –1 є коренями рівняння $x^2 = x + 2$. Перевірка це підтверджує. Справді, $2^2 = 2 + 2$ і $(-1)^2 = -1 + 2$. ▲

1. Що є областю визначення функції $y = x^2$?
2. Що є областю значень функції $y = x^2$?
3. При якому значенні аргументу значення функції $y = x^2$ дорівнює нулю?
4. Порівняйте значення функції $y = x^2$ при протилежних значеннях аргументу.
5. Яка фігура є графіком функції $y = x^2$?

ВПРАВИ

350.° Функцію задано формулою $y = x^2$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: –6; 0,8; –1,2; 150;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 49; 0; 2500; 0,04.

351.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = x^2$, визначте, чи проходить цей графік через точку:

1) A (–8; 64); 2) B (–9; –81); 3) C (0,5; 2,5); 4) D (0,1; 0,01).

352.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = x^2$ і $y = 4x - 4$. Побудуйте графіки даних функцій і позначте знайдені точки.

353.• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 = x - 1$; 2) $x^2 - 2x - 3 = 0$; 3) $x^2 = \frac{8}{x}$.

354.• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 = -4x - 3$; 2) $x^2 - 3x + 5 = 0$; 3) $x^2 + \frac{1}{x} = 0$.

355.• Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x - y + 6 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x + 5y = 10. \end{cases}$

356.• Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = -6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2, \\ x - 3y = -3. \end{cases}$

357.•• Функцію f задано в такий спосіб:

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 1, \\ 2x - 1, & \text{якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$$

1) Знайдіть $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(0{,}5)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

358.•• Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{якщо } x \leqslant -1, \\ x^2, & \text{якщо } -1 < x < 2, \\ 4, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-4)$, $f(-0{,}3)$, $f(1{,}9)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(2)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

359.•• Дано функцію $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ x + 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-7)$, $f(0)$, $f(2)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

360.•• Дано функцію $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{6}{x}, & \text{якщо } x \leqslant -1, \\ x^2, & \text{якщо } x > -1. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-12)$, $f(-1)$, $f(-0{,}9)$, $f(3)$, $f(0)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

361.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x + 1}$; 2) $y = \dfrac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 4}$.

362.•• Побудуйте графік функції $y = \dfrac{x^3}{x}$.

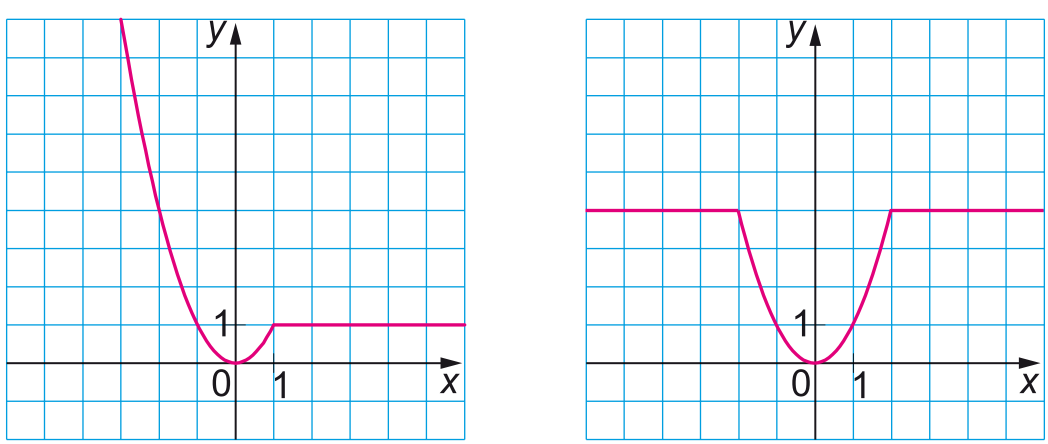
363.•• Знайдіть область визначення, область значень і нулі функції $y = -x^2$. Побудуйте графік цієї функції.

364.* Побудуйте графік рівняння:

1) $\dfrac{y - x^2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0$; 2) $\dfrac{y - x^2}{y - x} = 0$.

365.* Побудуйте графік рівняння $\dfrac{x^2 - y}{(x+2)^2 + (y-4)^2} = 0$.

366.* Задайте за допомогою формул функцію, графік якої зображено на рисунку 15.



а *б*

Рис. 15

367.* Задайте за допомогою формул функцію, графік якої зображено на рисунку 16.

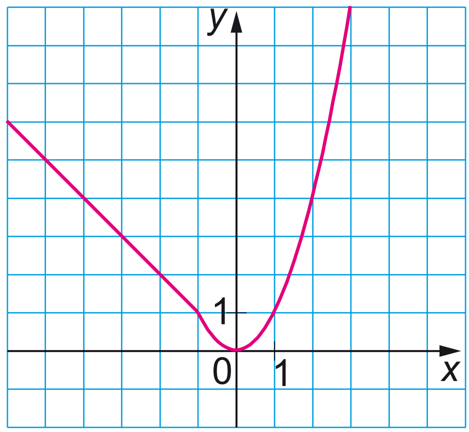


Рис. 16

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

368. Доведіть тотожність

$$\frac{(a+b)^2}{a-b} : \left(\frac{a}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{a+b}\right) = a+b.$$

369. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{6}{x-2} - \frac{x+3}{x} = \frac{x+6}{x^2-2x}.$$

370. Доведіть, що значення виразу $27^6 - 9^7$ кратне 48.

371. Із двох пунктів, відстань між якими дорівнює 30 км, одночасно назустріч один одному вийшли пішохід і пішохідка та зустрілися через 3 год 45 хв. Якби пішохід вийшов на 2 год раніше від пішохідки, то вони зустрілися б через 4,5 год після виходу пішохода. Знайдіть швидкості пішохода й пішохідки.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

372. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює: 1) 25 см^2; 2) 1600 дм^2; 3) 0,04 м^2.

373. Розв’яжіть рівняння:

1) $x^2 = 9$; 2) $x^2 = \frac{36}{49}$.

374. При яких значеннях a рівняння $x^2 = a$ не має коренів?

375. Побудуйте графіки функцій $y = x^2$ і $y = 1$ та знайдіть координати їхніх спільних точок.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

376. Натуральні числа x, y, z такі, що значення виразів $x + y$, $y + z$, $x + z$ — прості числа. Доведіть, що серед чисел x, y, z є принаймні два числа, які дорівнюють 1.

12. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь

Розглянемо квадрат, площа якого дорівнює 49 квадратним одиницям. Нехай довжина його сторони дорівнює x одиниць. Тоді рівняння $x^2 = 49$ можна розглядати як математичну модель задачі про знаходження сторони квадрата, площа якого дорівнює 49 квадратним одиницям.

Коренями цього рівняння є числа 7 і –7. Говорять, що числа 7 і –7 є **квадратними коренями** із числа 49.

Означення. Квадратним коренем із числа *a* називають число, квадрат якого дорівнює *a*.

Наведемо кілька прикладів.

Квадратними коренями із числа 9 є числа 3 і –3. Справді, $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$.

Квадратними коренями із числа $\frac{25}{4}$ є числа $\frac{5}{2}$ і $-\frac{5}{2}$.

Справді, $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Квадратним коренем із числа 0 є тільки число 0. Справді, існує лише одне число, квадрат якого дорівнює нулю, — це число 0.

Оскільки не існує числа, квадрат якого дорівнює від'ємному числу, то квадратного кореня з від'ємного числа не існує.

Додатний корінь рівняння $x^2 = 49$, число 7, є відповіддю до задачі про знаходження сторони квадрата, площа якого дорівнює 49 квадратним одиницям. Це число називають **арифметичним квадратним коренем** із числа 49.

Означення. Арифметичним квадратним коренем із числа *a* називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює *a*.

Арифметичний квадратний корінь із числа *a* позначають $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{\ }$ називають **знаком квадратного кореня** або **радикалом** (від лат. *radix* — корінь).

Запис $\sqrt{a}$ читають: «квадратний корінь з *a*», опускаючи при читанні слово «арифметичний».

Вираз, який стоїть під радикалом, називають **підкореневим виразом**. Наприклад, у записі $\sqrt{b-5}$ двочлен $b - 5$ є підкореневим виразом. З означення арифметичного квадратного кореня випливає, що ***підкореневий вираз може набувати тільки невід'ємних значень***.

Дію знаходження арифметичного квадратного кореня із числа називають **добуванням квадратного кореня**.

Розглянемо кілька прикладів.

$\sqrt{9} = 3,$ оскільки $3 \geqslant 0,$ і $3^2 = 9;$

$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2},$ оскільки $\frac{5}{2} \geqslant 0,$ і $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4};$

$\sqrt{0} = 0$, оскільки $0 \geqslant 0$, і $0^2 = 0$.

Узагалі, ***рівність*** $\sqrt{a} = b$ ***виконується за умови, що*** $b \geqslant 0$ **і** $b^2 = a$.

Цей висновок можна подати в іншій формі: ***для будь-якого невід'ємного числа а справедливо, що*** $\sqrt{a} \geqslant 0$ ***і*** $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Наприклад,

$$\sqrt{4} \geqslant 0 \text{ і } \left(\sqrt{4}\right)^2 = 4,\ \sqrt{2} \geqslant 0 \text{ і } \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2,$$

$$\sqrt{5{,}2} \geqslant 0 \text{ і } \left(\sqrt{5{,}2}\right)^2 = 5{,}2.$$

Наголосимо, що до поняття квадратного кореня ми прийшли, розв'язуючи рівняння виду $x^2 = a$, де $a \geqslant 0$. Коренями цього рівняння є числа, кожне з яких є квадратним коренем із числа a.

Пошук коренів рівняння $x^2 = a$ проілюструємо, розв'язавши графічно рівняння $x^2 = 4$.

В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = 4$ (рис. 17). Точки перетину цих графіків мають абсциси 2 і –2, які і є коренями заданого рівняння.

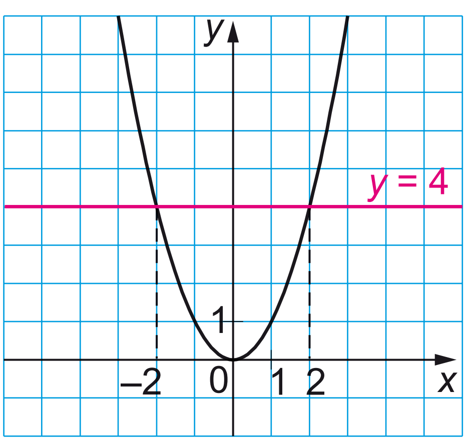


Рис. 17

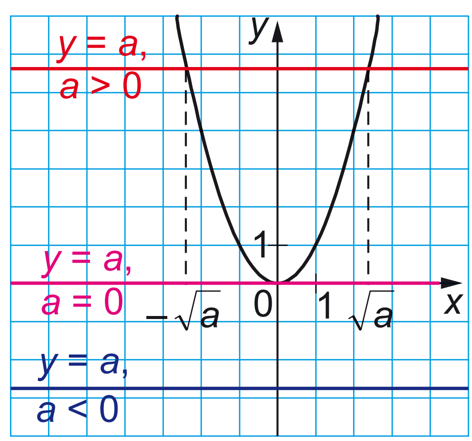


Рис. 18

Рівняння $x^2 = a$ при $a < 0$ не має коренів, що підтверджується графічно: графіки функцій $y = x^2$ і $y = a$ при $a < 0$ спільних точок не мають (рис. 18).

При $a = 0$ рівняння $x^2 = a$ має єдиний корінь $x = 0$, що також підтверджується графічно: графіки функцій $y = x^2$ і $y = 0$ мають тільки одну спільну точку (рис. 18).

Графічний метод також дозволяє зробити такий висновок: якщо $a > 0$, то рівняння $x^2 = a$ має два корені. Справді, парабола $y = x^2$ і пряма $y = a$, де $a > 0$, мають дві спільні точки (рис. 18). При цьому коренями рівняння $x^2 = a$ є числа $\sqrt{a}$ і $-\sqrt{a}$. Дійсно, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Наприклад, рівняння $x^2 = 5$ має два корені: $\sqrt{5}$ і $-\sqrt{5}$.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу $\left(-8\sqrt{2}\right)^2$.

Розв'язання. Застосувавши правило піднесення добутку до степеня та тотожність $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, отримуємо:

$\left(-8\sqrt{2}\right)^2 = (-8)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 64 \cdot 2 = 128.$ ▲

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння: 1) $\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$; 2) $\sqrt{1 + \sqrt{x+2}} = 2$.

Розв'язання. 1) Маємо: $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$; $\sqrt{x} = 6$. Тоді $x = 6^2$; $x = 36$.

Відповідь: 36.

2) $\sqrt{1 + \sqrt{x+2}} = 2$; $1 + \sqrt{x+2} = 2^2$; $\sqrt{x+2} = 3$; $x + 2 = 3^2$; $x = 7$.

Відповідь: 7. ▲

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $(x - 5)^2 = 16$.

Розв'язання. $(x - 5)^2 = 16$;

$$x - 5 = -4 \text{ або } x - 5 = 4;$$
$$x = 1 \text{ або } x = 9.$$

Відповідь: 1; 9. ▲

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $(3x - 1)^2 = 2$.

Розв'язання

$$(3x - 1)^2 = 2;$$
$$3x - 1 = -\sqrt{2} \text{ або } 3x - 1 = \sqrt{2};$$
$$3x = 1 - \sqrt{2} \text{ або } 3x = 1 + \sqrt{2};$$
$$x = \frac{1 - \sqrt{2}}{3} \text{ або } x = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1 - \sqrt{2}}{3}$; $\frac{1 + \sqrt{2}}{3}$. ▲

ПРИКЛАД 5 При яких значеннях x має зміст вираз: 1) $\sqrt{-5x}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{x} - 2}$?

Розв'язання. 1) Вираз $\sqrt{-5x}$ має зміст, якщо підкореневий вираз $-5x$ набуває невід'ємних значень. Підкореневий вираз є добутком двох множників, один з яких є від'ємним числом. Отже, цей добуток набуватиме невід'ємних значень, якщо другий множник x набуватиме недодатних значень.

Відповідь: при $x \leqslant 0$.

2) Даний вираз має зміст, якщо виконуються дві умови: має зміст вираз $\sqrt{x}$ і знаменник $\sqrt{x} - 2$ відмінний від нуля. Отже, повинні одночасно виконуватися дві умови: $x \geqslant 0$ і $\sqrt{x} - 2 \neq 0$. Звідси $x \geqslant 0$ і $x \neq 4$.

Відповідь: при $x \geqslant 0$ і $x \neq 4$. ▲

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння: 1) $\sqrt{-x} + \sqrt{x - 2} = 2$; 2) $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x - 2} = 0$; 3) $(x + 2)\sqrt{x - 2} = 0$.

Розв'язання. 1) Ліва частина даного рівняння має зміст, якщо підкореневі вирази $-x$ і $x - 2$ одночасно набувають невід'ємних значень. З того, що перший підкореневий вираз має бути невід'ємним, маємо: $-x \geqslant 0$, тоді $x \leqslant 0$. Але коли $x \leqslant 0$, то другий підкореневий вираз, $x - 2$, набуває тільки від'ємних значень. Отже, ліва частина даного рівняння не має змісту.

Відповідь: коренів немає.

2) Ліва частина даного рівняння є сумою двох доданків, кожен з яких може набувати тільки невід'ємних значень. Тоді їхня сума дорівнюватиме нулю, якщо кожен із доданків дорівнює нулю. Отже, одночасно мають виконуватися дві умови: $\sqrt{x^2 - 2x} = 0$ і $\sqrt{x - 2} = 0$. Це означає, що треба знайти спільні корені отриманих рівнянь, тобто розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x} = 0, \\ \sqrt{x - 2} = 0. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2 - 2x = 0, \\ x - 2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\,(x - 2) = 0, \\ x = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \text{ або } x = 2, \\ x = 2. \end{cases}$

Розв'язком останньої системи, а отже, і початкового рівняння, є число 2.

Відповідь: 2.

3) Використовуючи умову рівності добутку нулю, отримуємо:

$$x + 2 = 0 \text{ або } \sqrt{x - 2} = 0;$$
$$x = -2 \text{ або } x = 2.$$

Проте при $x = -2$ вираз $\sqrt{x - 2}$ не має змісту. Отже, дане рівняння має єдиний корінь — число 2.

Відповідь: 2. ▲

1. Що називають квадратним коренем із числа a?
2. Що називають арифметичним квадратним коренем із числа a?
3. Як позначають арифметичний квадратний корінь із числа a?
4. Як називають знак $\sqrt{\ }$?
5. Як читають запис $\sqrt{a}$?
6. Як називають вираз, який стоїть під радикалом?
7. Яких значень може набувати підкореневий вираз?
8. Як називають дію знаходження арифметичного квадратного кореня із числа?
9. Чому дорівнює значення виразу $(\sqrt{a})^2$ для будь-якого невід'ємного числа a?
10. Скільки коренів має рівняння $x^2 = a$ при $a > 0$? Чому вони дорівнюють?
11. Чи має корені рівняння $x^2 = a$ при $a = 0$? при $a < 0$?

ВПРАВИ

377.° Чому дорівнює квадратний корінь із числа 16? із числа 1? із числа 0? Чому дорівнює арифметичний квадратний корінь із цих чисел?

378.° Чи є правильною рівність (відповідь обґрунтуйте):

1) $\sqrt{25} = 5$; 3) $\sqrt{36} = -6$; 5) $\sqrt{0,81} = 0,9$;
2) $\sqrt{0} = 0$; 4) $\sqrt{0,4} = 0,2$; 6) $\sqrt{10} = 100$?

379.° Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня:

1) $\sqrt{9}$; 4) $\sqrt{225}$; 7) $\sqrt{1,21}$; 10) $\sqrt{3600}$;
2) $\sqrt{49}$; 5) $\sqrt{0,25}$; 8) $\sqrt{1,96}$; 11) $\sqrt{\frac{1}{64}}$;
3) $\sqrt{100}$; 6) $\sqrt{0,01}$; 9) $\sqrt{400}$; 12) $\sqrt{\frac{4}{9}}$;

13) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 14) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$; 15) $\sqrt{0,0004}$; 16) $\sqrt{0,000025}$.

380.° Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня:

1) $\sqrt{36}$; 4) $\sqrt{0,04}$; 7) $\sqrt{2500}$; 10) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$;

2) $\sqrt{64}$; 5) $\sqrt{0,49}$; 8) $\sqrt{10\,000}$; 11) $\sqrt{0,0009}$;

3) $\sqrt{144}$; 6) $\sqrt{1,69}$; 9) $\sqrt{\frac{16}{121}}$; 12) $\sqrt{0,0196}$.

381.° Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{2}$; 2) $-\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{-2}$; 4) $\sqrt{(-2)^2}$; 5) $\left(\sqrt{-2}\right)^2$?

382.° Знайдіть число, арифметичний квадратний корінь з якого дорівнює:

1) 4; 2) 0; 3) 0,8; 4) $2\frac{1}{4}$; 5) 1,6; 6) –9.

383.° Користуючись таблицею квадратів натуральних чисел, розміщеною на форзаці, знайдіть:

1) $\sqrt{484}$; 4) $\sqrt{5929}$; 7) $\sqrt{68,89}$;

2) $\sqrt{729}$; 5) $\sqrt{5,76}$; 8) $\sqrt{67\,600}$;

3) $\sqrt{1156}$; 6) $\sqrt{14,44}$; 9) $\sqrt{384\,400}$.

384.° Знайдіть:

1) $\sqrt{841}$; 3) $\sqrt{9,61}$; 5) $\sqrt{72,25}$;

2) $\sqrt{1296}$; 4) $\sqrt{10,24}$; 6) $\sqrt{672\,400}$.

385.° Користуючись мікрокалькулятором, знайдіть значення квадратного кореня (результат округліть до сотих):

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{34}$; 4) $\sqrt{1,8}$; 5) $\sqrt{2,439}$.

386.° Користуючись мікрокалькулятором, знайдіть значення квадратного кореня (результат округліть до сотих):

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5,1}$; 3) $\sqrt{40}$; 4) $\sqrt{12,56}$.

387.° Знайдіть значення виразу:

1) $(\sqrt{7})^2$; 4) $-(\sqrt{10})^2$; 7) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

2) $(\sqrt{4,2})^2$; 5) $(2\sqrt{3})^2$; 8) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{14}\right)^2$;

3) $(-\sqrt{11})^2$; 6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$; 9) $(-0,3\sqrt{2})^2$.

388.° Обчисліть:

1) $(\sqrt{6})^2$; 3) $(3\sqrt{2})^2$; 5) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$;

2) $(-\sqrt{21})^2$; 4) $(-4\sqrt{5})^2$; 6) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\right)^2$.

389.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{16+9}$; 7) $\frac{1}{3}\sqrt{0,09}-2$;

2) $\sqrt{16}+\sqrt{9}$; 8) $-2\sqrt{0,16}+0,7$;

3) $\sqrt{36}-\sqrt{49}$; 9) $(\sqrt{13})^2-3\cdot(\sqrt{8})^2$;

4) $\sqrt{36}\cdot\sqrt{49}$; 10) $\frac{1}{6}\cdot(\sqrt{18})^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2$;

5) $5\sqrt{4}-\sqrt{25}$; 11) $50\cdot\left(-\frac{1}{5}\sqrt{2}\right)^2$;

6) $\sqrt{0,81}+\sqrt{0,01}$; 12) $\sqrt{4\cdot5^2-6^2}$.

390.° Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{3+\sqrt{36}}$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt{900}+0,2\sqrt{1600}$;

2) $\sqrt{72-\sqrt{64}}$; 5) $(2\sqrt{6})^2-3(\sqrt{21})^2$;

3) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{225}$; 6) $\sqrt{10^2-4\cdot3^2}$.

391.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{12+a}$, якщо $a=0,25$;

2) $\sqrt{7-3b}$, якщо $b = 2$;

3) $\sqrt{2a-b}$, якщо $a = 34$, $b = 19$;

4) $\dfrac{b^3-a^3b-b^2c+ca^3}{(b-c)^2}+\sqrt{d}$, якщо $a=-\dfrac{1}{2}$, $b = –0,19$, $c =$ $= 0,18$, $d = 0,04$.

392.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{27+m}$, якщо $m = 54$;

2) $\sqrt{m-3n}$, якщо $m = 0,13$, $n = –0,04$.

393.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}=9$; 2) $\sqrt{x}=\dfrac{1}{4}$; 3) $\sqrt{x}-0,2=0$; 4) $\sqrt{x}+7=0$.

394.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}=20$; 2) $\sqrt{x}=-16$; 3) $\sqrt{x}-\dfrac{2}{3}=0$.

395.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 25$; 2) $x^2 = 0,49$; 3) $x^2 = 3$; 4) $x^2 = –25$.

396.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 100$; 2) $x^2 = 0,81$; 3) $x^2 = 7$; 4) $x^2 = 3,6$.

397.• Знайдіть значення виразу:

1) $-0,06\cdot\sqrt{10\,000}+\dfrac{8}{\sqrt{256}}-2,5\sqrt{3,24}$;

2) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{6,25}+\sqrt{2^3+17}$;

3) $\sqrt{1\dfrac{11}{25}}+3\sqrt{7\dfrac{1}{9}}-0,6\sqrt{3025}$;

4) $\left(\dfrac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2+\sqrt{26^2-24^2}$;

5) $\left(3\sqrt{8}\right)^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2-2\left(\sqrt{24}\right)^2$;

6) $\sqrt{144}:\sqrt{0,04}-\sqrt{2,56}\cdot\sqrt{2500}$.

398. Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}15\sqrt{3600}-0{,}18\sqrt{400}+\left(10\sqrt{0{,}08}\right)^2$;

2) $\dfrac{95}{\sqrt{361}}-\dfrac{13}{14}\sqrt{1\dfrac{27}{169}}+\sqrt{8^2+15^2}$;

3) $\left(-8\sqrt{\dfrac{1}{4}}+\dfrac{\sqrt{1{,}44}}{3}\cdot\sqrt{12{,}25}\right):\left(0{,}1\sqrt{13}\right)^2$.

399. При яких значеннях x має зміст вираз:

1) $\sqrt{x}$; 5) $\sqrt{x-8}$; 9) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$; 13) $\dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{-x}}$;

2) $\sqrt{-x}$; 6) $\sqrt{8-x}$; 10) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$; 14) $\sqrt{|x|}$;

3) $\sqrt{x^2}$; 7) $\sqrt{x^2+8}$; 11) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$; 15) $\sqrt{-|x|}$;

4) $\sqrt{-x^2}$; 8) $\sqrt{(x-8)^2}$; 12) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{-x}$; 16) $\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$?

400. При яких значеннях y має зміст вираз:

1) $\sqrt{2y}$; 3) $\sqrt{y^3}$; 5) $\sqrt{-y^4}$; 7) $\dfrac{1}{\sqrt{y}-1}$;

2) $\sqrt{-3y}$; 4) $\sqrt{-y^3}$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{y}}$; 8) $\dfrac{1}{\sqrt{y}+1}$?

401. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{5x}-4=0$; 3) $\sqrt{5x-4}=6$; 5) $\dfrac{18}{\sqrt{x+3}}=9$;

2) $\sqrt{5x-4}=0$; 4) $\dfrac{42}{\sqrt{x}}=6$; 6) $\sqrt{x^2-36}=8$.

402. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{1}{3}\sqrt{x}-2=0$; 3) $\dfrac{4}{\sqrt{x-5}}=6$;

2) $\sqrt{2x+3}=11$; 4) $\sqrt{130-x^2}=9$.

403.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+6)^2=0$;
2) $(x+6)^2=9$;
3) $(x+6)^2=3$;
4) $(7x+6)^2=5$.

404.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x-3)^2=25$;
2) $(x-3)^2=7$;
3) $(2x-3)^2=7$.

405.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3+\sqrt{2+x}}=4$;
2) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=3$;
3) $\sqrt{4-\sqrt{10+\sqrt{x}}}=2$.

406.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{17+\sqrt{\sqrt{x}-6}}=5$;
2) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=1$.

407.•• При яких значеннях a і b має зміст вираз:

1) $\sqrt{ab}$; 2) $\sqrt{-ab}$; 3) $\sqrt{ab^2}$; 4) $\sqrt{a^2b^2}$; 5) $\sqrt{-a^2b}$?

408.•• Чи можна стверджувати, що при будь-якому значенні x має зміст вираз:

1) $\sqrt{x^2-4x+4}$;
2) $\sqrt{x^2-4x+5}$?

409.•• Доведіть, що не існує такого значення x, при якому має зміст вираз $\sqrt{-x^2+6x-12}$.

410.•• Який із даних виразів має зміст при будь-якому значенні x:

1) $\sqrt{x^2+8x+15}$;
2) $\sqrt{x^2-10x+27}$?

411.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}=-x$;
2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=0$;
3) $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x-1}=0$;
4) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4}=0$;
5) $(x-1)\sqrt{x+1}=0$;
6) $(x+1)\sqrt{x-1}=0$.

412.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=0$;
2) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=1$;
3) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-1}=0$;
4) $(x-2)\sqrt{x-3}=0$.

413.•• При яких значеннях a рівняння $x^2 = a + 1$:

1) має два корені;
2) має один корінь;
3) не має коренів?

414.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{-x^2}$;
2) $y = \sqrt{-x^2 - 4x - 4} + 2$;
3) $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

415.•• Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2x - 1 - x^2} - 1$.

416.* Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $a\sqrt{x-1} = 0$;
2) $\sqrt{(a-1)\,x} = 0$;
3) $a\sqrt{x-1} = a$;
4) $\sqrt{x-2} = a$.

417.* При яких значеннях a рівняння $\left(\sqrt{x} - 1\right)(x - a) = 0$ має тільки один корінь?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

418. Будинки на вулиці пронумеровано поспіль числами від 1 до 24. Скільки разів цифра 1 трапляється в нумерації?

419. Спростіть вираз

$$\left(\frac{a}{a^2 - 25} + \frac{5}{5 - a} + \frac{1}{a + 5}\right) : \left(\frac{28 - a^2}{a + 5} + a - 5\right).$$

420. Робітник одержав 4700 грн авансу купюрами по 100 грн і по 500 грн. Скільки було купюр кожного номіналу, якщо всього була 31 купюра?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

421. Знайдіть усі трицифрові натуральні числа n такі, що сума цифр числа n в 11 разів менша від самого числа n.

Чи ростуть у городі радикали?

У Стародавній Греції дію добування кореня ототожнювали з пошуком сторони квадрата за його площею, а сам квадратний корінь називали «стороною».

У Стародавній Індії слово «мула» означало «початок», «основа», «корінь дерева». Це слово почали застосовувати й до сторони квадрата, можливо, виходячи з такої асоціації: зі сторони квадрата, як із кореня, виростає сам квадрат. Мабуть, тому в латинській мові поняття «сторона» та «корінь» виражаються одним і тим самим словом — *radix*. Від цього слова походить термін «радикал».

Слово *radix* можна також перекласти як «редис», тобто коренеплід — частина рослини, видозмінений корінь, який може бути їстівним.

У XIII–XV ст. європейські математики, скорочуючи слово *radix*, позначали квадратний корінь знаками R, ℞, R^2. Наприклад, запис $\sqrt{7}$ мав такий вигляд: $R^2 7$.

У XVI ст. стали використовувати знак $\surd$. Походження цього символу, мабуть, пов'язано з виглядом рукописної латинської букви *r*.

У XVII ст. видатний французький математик Рене Декарт, поєднавши знак $\surd$ з горизонтальною рискою, отримав символ $\sqrt{}$, який ми й використовуємо сьогодні.

Рене Декарт
(1596–1650)

Перша задача першої математичної олімпіади в Україні

Задача 391 (4) варта уваги ще й тому, що в 1935 р. саме її умовою відкривався текст першої математичної олімпіади в Україні. Ініціатором цих математичних змагань був видатний український математик, академік Михайло Пилипович Кравчук[1].

Відтоді минуло понад 80 років, і за цей час математичні олімпіади стали для багатьох талановитих школярів і школярок першим кроком на шляху до наукової творчості. Сьогодні такі імена, як О. В. Погорєлов, С. Г. Крейн, М. О. Красносельський, В. Г. Дрінфельд, відомі в усьому науковому світі. Ці видатні вчені в різні роки були переможцями математичних олімпіад в Україні.

Із задоволенням зазначаємо, що й зараз математичні олімпіади в Україні дуже популярні. Десятки тисяч школярів і школярок нашої країни на різних етапах беруть участь у цьому математичному змаганні. В організації та проведенні олімпіад задіяно наукову та освітянську спільноту. Саме завдяки ентузіазму та професіоналізму цієї спільноти команда України гідно представляє нашу країну на міжнародних математичних олімпіадах.

Радимо й вам, любі восьмикласники та восьмикласниці, брати участь у математичних олімпіадах.

---

[1] На першому форзаці підручника зображено пам'ятник М. П. Кравчуку, установлений на території Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». На базі цього навчального закладу раз на два роки проводяться Міжнародні математичні конференції імені академіка М. П. Кравчука.

13. Множина та її елементи. Підмножина

Ми часто говоримо: стадо баранів, букет квітів, колекція марок, косяк риб, зграя птахів, рій бджіл, зібрання картин, набір ручок, компанія друзів.

Якщо в цих парах перемішати перші слова, то може вийти смішно: букет баранів, косяк картин, колекція друзів. Водночас такі словосполучення, як колекція риб, колекція птахів, колекція картин, колекція ручок тощо є прийнятними. Річ у тім, що слово «колекція» досить універсальне. Однак у математиці є термін, яким можна замінити будь-яке з перших слів у наведених парах. Це термін **множина**.

Наведемо ще кілька прикладів множин:

- множина учнів вашого класу;
- множина планет Сонячної системи;
- множина двоцифрових чисел;
- множина пар чисел (x; y), які є розв'язками рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

Окремим найважливішим множинам присвоєно загальноприйняті назви та позначення:

- множина точок площини — **геометрична фігура**;
- множина точок, які мають задану властивість, — **геометричне місце точок (ГМТ)**;
- множина значень аргументу функції f — **область визначення функції** f, яку позначають $D(f)$;
- множина значень функції f — **область значень функції** f, яку позначають $E(f)$.

Як правило, множини позначають великими літерами латинського алфавіту: A, B, C, D і т. д.

Об'єкти, які складають дану множину, називають **елементами** цієї множини. Зазвичай елементи позначають малими літерами латинського алфавіту: a, b, c, d і т. д.

Якщо a — елемент множини A, то пишуть: $a \in A$ (читають: «a належить множині A»). Якщо b не є елементом множини A, то пишуть: $b \notin A$ (читають: «b не належить множині A»).

Якщо множина A складається з трьох елементів a, b, c, то пишуть: $A = \{a, b, c\}$.

Якщо M — множина натуральних дільників числа 6, то пишуть: $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Множина дільників числа 6, які є складеними числами, має такий вигляд: $\{6\}$. Це приклад **одноелементної** множини.

Задавати множину за допомогою фігурних дужок, у яких вказано список її елементів, зручно у тих випадках, коли множина складається з невеликої кількості елементів.

Означення. **Дві множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B і, навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.**

Якщо множини A і B рівні, то пишуть: $A = B$.

З означення випливає, що ***множина однозначно визначається своїми елементами***. Якщо множину записано за допомогою фігурних дужок, то порядок, у якому виписано її елементи, не має значення. Так, припускають шість варіантів запису множини, яка складається з трьох елементів a, b, c:

$$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}.$$

Оскільки з означення рівних множин випливає, що, наприклад, $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c\}$, то надалі розглядатимемо множини, які складаються з різних елементів. Так, множина букв слова «космодром» має вид {к, о, с, м, д, р}.

Зазначимо, що $\{a\} \neq \{\{a\}\}$. Справді, множина $\{a\}$ складається з одного елемента a; множина $\{\{a\}\}$ складається з одного елемента — множини $\{a\}$.

Найчастіше множину задають одним із таких двох способів.

Перший спосіб полягає в тому, що множину задають указанням (переліком) усіх її елементів. Ми вже використовували цей спосіб, записуючи множину за допомогою фігурних дужок, у яких указували перелік її елементів. Зрозуміло, що не будь-яку множину можна задати в такий спосіб. Наприклад, множину парних чисел так задати неможливо.

Другий спосіб полягає в тому, що вказують **характеристичну властивість** елементів множини, тобто властивість, яку мають усі елементи даної множини й тільки вони. Наприклад, властивість «натуральне число при діленні на 2 дає в остачі 1» задає множину непарних чисел.

Якщо задавати множину характеристичною властивістю її елементів, то може виявитися, що жоден об'єкт цієї властивості не має.

Звернемося до прикладів.

- Множина трикутників, сторони яких пропорційні числам 1, 2, 5. З нерівності трикутника випливає, що ця множина не містить жодного елемента.
- Позначимо через A множину учнів вашого класу, які є майстрами спорту з шахів. Може виявитися, що множина A також не містить жодного елемента.
- Розглядаючи множину коренів довільного рівняння, потрібно передбачити ситуацію, коли рівняння коренів не має.

Наведені приклади вказують на те, що зручно до сукупності множин віднести ще одну особливу множину, яка не містить жодного елемента. Її називають **порожньою множиною** та позначають символом $\varnothing$.

Зазначимо, що множина $\{\varnothing\}$ не є порожньою. Вона містить один елемент — порожню множину.

Розглянемо множину цифр десяткової системи числення: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Виокремимо з множини A її елементи, які є парними цифрами. Отримаємо множину $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, усі елементи якої є елементами множини A.

Означення. **Множину B називають підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.**

Це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$ (читають: «множина B є підмножиною множини A» або «множина A містить множину B»).

Розглянемо приклади:

- множина учнів вашого класу є підмножиною множини учнів вашої школи;
- множина ссавців є підмножиною множини хребетних;
- множина точок променя CB є підмножиною множини точок прямої AB (рис. 19);

Рис. 19

- множина прямокутників є підмножиною множини паралелограмів;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$.

Для ілюстрації співвідношень між множинами користуються схемами, які називають **діаграмами Ейлера**.

На рисунку 20 зображено множину A (більший круг) і множину B (менший круг, який міститься в більшому). Ця схема означає, що $B \subset A$ (або $A \supset B$).

З означень підмножини та рівності множин випливає, що коли $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$.

Якщо в множині B немає елемента, який не належить множині A, то множина B є підмножиною множини A. З огляду на ці міркування порожню множину вважають підмножиною будь-якої множини. Справді, порожня множина не містить жодного елемента, отже, у ній немає елемента, який не належить даній множині A. Тому для будь-якої множини A справедливо твердження: $\varnothing \subset A$.

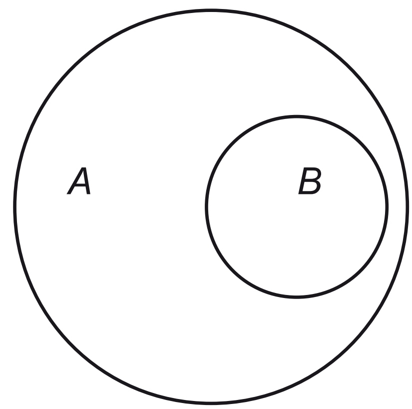


Рис. 20

Будь-яка множина A є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$.

ПРИКЛАД Випишіть усі підмножини множини $A = \{a, b, c\}$.

Розв'язання. Маємо: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\varnothing$. ▲

?

1. Як позначають множину та її елементи?
2. Як позначають область визначення та область значень функції?
3. Як записати, що елемент належить (не належить) множині A?
4. Які множини називають рівними?
5. Які існують способи задання множин?
6. Яку множину називають порожньою? Як її позначають?
7. Яку множину називають підмножиною даної множини?
8. Як наочно ілюструють співвідношення між множинами?
9. Яка множина є підмножиною будь-якої множини?

ВПРАВИ

422.° Як називають множину точок кута, рівновіддалених від його сторін?

423.° Як називають множину вовків, що підкорюються одному ватажку?

424.° Назвіть яку-небудь множину учнів вашої школи.

425.° Як називають множину вчителів, які працюють в одній школі?

426.° Дано функцію $f(x) = x^2$. Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $3 * D(f)$;
2) $0 * D(f)$;
3) $0 * E(f)$;
4) $-\frac{1}{2} * E(f)$.

427.° Які з наведених тверджень є правильними:

1) $1 \in \{1, 2, 3\}$;
2) $1 \notin \{1\}$;
3) $\{1\} \in \{1, 2\}$;
4) $\{1\} \in \{\{1\}\}$;
5) $\varnothing \notin \{1, 2\}$;
6) $\varnothing \in \{\varnothing\}$?

428.° Запишіть множину коренів рівняння:

1) $x(x - 1) = 0$;
2) $(x - 2)(x^2 - 4) = 0$;
3) $x = 2$;
4) $x^2 + 3 = 0$.

429.° Задайте за допомогою переліку елементів множину:

1) правильних дробів зі знаменником 7;
2) правильних дробів, знаменник яких не більший за 4;
3) букв слова «математика»;
4) цифр числа 5555.

430.° Назвіть кілька підмножин учнів вашого класу.

431.° Нехай A — множина букв слова «координата». Множина букв якого зі слів є підмножиною множини A:

1) нора;
2) трактор;
3) картина;
4) крокодил;
5) нитки;
6) корка;
7) нарада;
8) дарунок;
9) ордината;
10) дорога;
11) корона;
12) кардинал?

432.° Нехай A — множина цифр числа 1958. Чи є множина цифр числа x підмножиною множини A, якщо:

1) $x = 98$;
2) $x = 9510$;
3) $x = 519$;
4) $x = 5858$;
5) $x = 195\ 888$;
6) $x = 91\ 258$?

433.° Нехай $A \neq \varnothing$. Які дві різні підмножини завжди має множина A?

434.• Чи рівні множини A і B, якщо:

1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
2) $A = \{(1; 0)\}$, $B = \{(0; 1)\}$;
3) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$?

435.• Чи рівні множини A і B, якщо:

1) A — множина коренів рівняння $|\,x\,| = x$, B — множина невід'ємних чисел;
2) A — множина чотирикутників, у яких протилежні сторони попарно рівні; B — множина чотирикутників, у яких діагоналі точкою перетину діляться навпіл?

436.• Які з наведених множин дорівнюють порожній множині:

1) множина трикутників, сума кутів яких дорівнює 181°;
2) множина гірських вершин заввишки понад 8800 м;
3) множина гострокутних трикутників, медіана яких дорівнює половині сторони, до якої її проведено;
4) множина функцій, графіками яких є кола?

437.• Доведіть, що коли $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

438.• Розташуйте дані множини в такій послідовності, щоб кожна наступна множина була підмножиною попередньої:

1) A — множина прямокутників, B — множина чотирикутників, C — множина квадратів, D — множина паралелограмів;
2) A — множина ссавців, B — множина собачих, C — множина хребетних, D — множина вовків, E — множина хижих ссавців.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

439. Спростіть вираз:

1) $\frac{5b}{b-3}-\frac{b+6}{2b-6}\cdot\frac{90}{b^2+6b}$; 2) $\frac{b+2}{b^2-2b+1}:\frac{b^2-4}{3b-3}-\frac{3}{b-2}$.

440. Моторний човен проплив 36 км за течією річки за 3 год і 36,8 км проти течії за 4 год. Яка швидкість течії річки?

441. У коробці лежать 42 олівці, з яких 14 — червоні, 16 — сині, а решта — зелені. Яка ймовірність того, що навмання взятий олівець не буде ні червоним, ні синім?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

442. Петро та Дмитро щодня записують по одному числу. Першого дня кожний із хлопців записав число 1. Кожного наступного дня Петро записує число 1, а Дмитро — число, яке дорівнює сумі чисел, записаних хлопцями за попередні дні. Чи може якогось дня Дмитро написати число, запис якого закінчуватиметься на 101?

14. Числові множини[1]

Натуральні числа — це перші числа, якими почали користуватися люди. З ними ви ознайомилися в дитинстві, коли вчилися рахувати предмети. Усі натуральні числа утворюють **множину натуральних чисел**, яку позначають буквою $\mathbb{N}$.

[1] У цьому пункті використано символіку теорії множин, з елементами якої ви ознайомилися в курсі математики попередніх класів. За потреби радимо звернутися до п. 13.

Практичні потреби людей спричинили виникнення дробових чисел. Згодом з'явилася необхідність розглядати величини, для характеристики яких додатних чисел виявилося замало. Так виникли від'ємні числа.

Усі натуральні числа, протилежні їм числа та число нуль утворюють **множину цілих чисел**, яку позначають буквою $\mathbb{Z}$.

Наприклад, $-2 \in \mathbb{Z}$, $0 \in \mathbb{Z}$, $5 \in \mathbb{Z}$.

Множина натуральних чисел є підмножиною множини цілих чисел, тобто $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Цілі та дробові (як додатні, так і від'ємні) числа утворюють **множину раціональних чисел**, яку позначають буквою $\mathbb{Q}$. Наприклад, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $-0{,}2 \in \mathbb{Q}$, $0 \in \mathbb{Q}$, $-3 \in \mathbb{Q}$, $15 \in \mathbb{Q}$.

Зрозуміло, що $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Схема, зображена на рисунку 21, показує, як співвідносяться множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{Q}$.

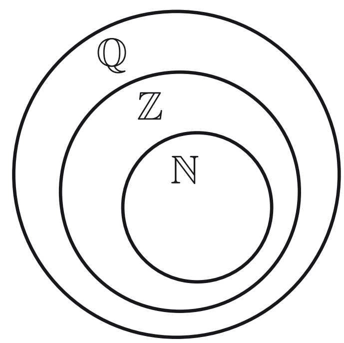


Рис. 21

Кожне раціональне число можна подати у вигляді відношення $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне. Наприклад, $5 = \frac{5}{1}$, $-3 = \frac{-3}{1}$, $0{,}2 = \frac{1}{5}$, $0 = \frac{0}{7}$, $5{,}3 = \frac{53}{10}$. З можливістю такого подання пов'язана назва «раціональне число»: одним із значень латинського слова *ratio* є «відношення».

У 6 класі ви дізналися, що кожне раціональне число можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу або у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. Для дробу $\frac{m}{n}$ таке подання можна отримати, виконавши ділення числа m на число n куточком.

Наприклад, $\frac{5}{8} = 0,625$, $\frac{5}{11} = 0,454545...$.

Число $\frac{5}{8}$ записано у вигляді скінченного десяткового дробу, а число $\frac{5}{11}$ — у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. У записі 0,454545... цифри 4 і 5 періодично повторюються. Групу цифр, яка повторюється, називають **періодом дробу** й записують у круглих дужках. У даному випадку період дробу дорівнює 45, а дріб $\frac{5}{11}$ записують так: $\frac{5}{11} = 0,(45)$.

Зауважимо, що будь-який скінченний десятковий дріб і будь-яке ціле число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. Наприклад,

$0,625 = 0,6250000... = 0,625(0)$;

$2 = 2,000... = 2,(0)$.

Отже, ***кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу***.

Справедливим є й таке твердження: ***кожний нескінченний періодичний десятковий дріб є записом деякого раціонального числа***.

У 9 класі ви навчитеся записувати нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу.

Сума й добуток двох натуральних чисел є натуральними числами. Проте різниця натуральних чисел не завжди має таку властивість. Наприклад, $(5-7) \notin \mathbb{N}$.

Сума, різниця, добуток двох цілих чисел є цілими числами. Проте частка цілих чисел не завжди має таку властивість. Наприклад, $\frac{5}{7} \notin \mathbb{Z}$.

Сума, різниця, добуток і частка (крім ділення на нуль) двох раціональних чисел є раціональними числами.

Отже, дія віднімання натуральних чисел може вивести результат за межі множини $\mathbb{N}$, дія ділення цілих чисел — за межі множини $\mathbb{Z}$, проте виконання будь-якої із чотирьох арифметичних дій з раціональними числами не виводить результат за межі множини $\mathbb{Q}$.

Ви ознайомилися з новою дією — добуванням квадратного кореня. Виникає природне запитання: чи завжди квадратний корінь з невід'ємного раціонального числа є раціональним числом? Іншими словами, чи може дія добування квадратного кореня з раціонального числа вивести результат за межі множини $\mathbb{Q}$?

Розглянемо рівняння $x^2 = 2$. Оскільки $2 > 0$, то це рівняння має два корені: $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ (рис. 22).

Проте *не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює* 2 (доведення цього факту ви можете знайти в рубриці «Коли зроблено уроки» в оповіданні «Відкриття ірраціональності»), тобто числа $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ не є раціональними. Ці числа є прикладами **ірраціональних чисел** (префікс «ір» означає «заперечення»).

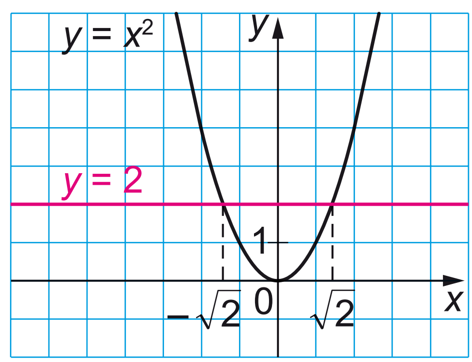


Рис. 22

Отже, дія добування кореня з раціонального числа може вивести результат за межі множини $\mathbb{Q}$.

Жодне ірраціональне число не можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, а отже, у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

Ірраціональні числа можуть бути подані у вигляді **нескінченних неперіодичних** десяткових дробів.

Наприклад, за допомогою спеціальної комп'ютерної програми можна встановити, що

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097\ldots .$$

Числа $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ — це не перші ірраціональні числа, з якими ви стикаєтеся. Число π, яке дорівнює відношенню довжини кола до діаметра, також є ірраціональним:

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937\ldots .$

Ірраціональні числа виникають не тільки в результаті добування квадратних коренів. Їх можна конструювати, будуючи нескінченні неперіодичні десяткові дроби.

Наприклад, число 0,101001000100001000000... (після коми записано послідовно степені числа 10) є ірраціональним. Справді, якщо припустити, що розглядуваний десятковий дріб має період, який складається з n цифр, то з деякого місця цей період повністю складатиметься з нулів, інакше кажучи, починаючи із цього місця, у записі не повинно бути жодної одиниці, що суперечить конструкції числа.

Разом множини ірраціональних і раціональних чисел утворюють **множину дійсних чисел**. Її позначають буквою $\mathbb{R}$ (першою буквою латинського слова *realis* — «реальний», «той, що існує насправді»).

Тепер «ланцюжок» $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ можна продовжити: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Зв'язок між числовими множинами, які розглянуто в цьому пункті, ілюструє схема, зображена на рисунку 23.

Довжину будь-якого відрізка можна виразити дійсним числом. Цей факт дає змогу встановити зв'язок між множиною $\mathbb{R}$ і множиною точок координатної прямої. Точці O,

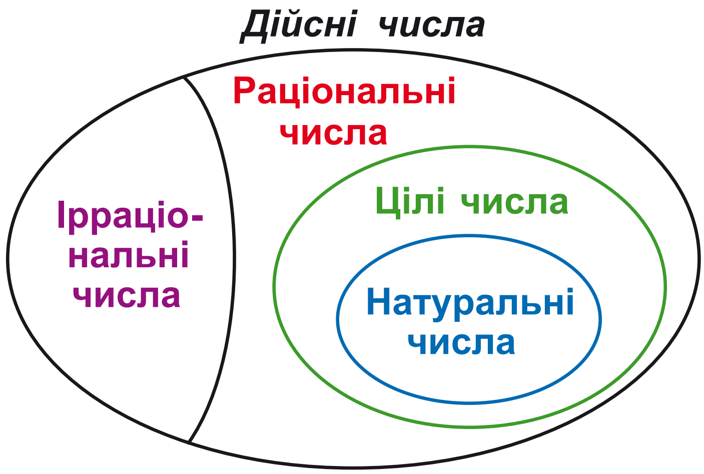


Рис. 23

початку відліку, поставимо у відповідність число 0. Кожній точці A координатної прямої, відмінній від точки O, поставимо у відповідність єдине число, яке дорівнює довжині відрізка OA, якщо точка A розміщена праворуч від точки O, і число, протилежне довжині відрізка OA, якщо точка A розміщена ліворуч від точки O. Також зрозуміло, що кожне дійсне число є відповідним єдиній точці координатної прямої.

Над дійсними числами можна виконувати чотири арифметичні дії (крім ділення на нуль), у результаті отримуватимемо дійсне число. Цим діям притаманні звичні для вас властивості:

$a + b = b + a$	Переставна властивість додавання
$ab = ba$	Переставна властивість множення
$(a + b) + c = a + (b + c)$	Сполучна властивість додавання
$(ab)\,c = a\,(bc)$	Сполучна властивість множення
$a\,(b + c) = ab + ac$	Розподільна властивість множення відносно додавання

Дійсні числа можна порівнювати, використовуючи правила порівняння десяткових дробів, тобто порівняння цифр у відповідних розрядах. Наприклад, 7,853126... < < 7,853211... .

Будь-яке додатне дійсне число більше за нуль і за будь-яке від'ємне дійсне число. Будь-яке від'ємне дійсне число менше від нуля. Із двох від'ємних дійсних чисел більшим є те, у якого модуль менший.

Якщо позначити на координатній прямій два дійсних числа, то менше з них буде розміщено ліворуч від більшого.

Знаходячи довжину кола та площу круга, ви користувалися **наближеним значенням числа** π (наприклад, $\pi \approx 3{,}14$). Аналогічно під час розв'язування практичних задач, де необхідно виконати дії з дійсними числами, за потреби ці числа заміняють їхніми наближеними значеннями. Наприклад, для числа $\sqrt{2}$ можна скористуватися такими наближеними рівностями: $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ або $\sqrt{2} \approx 1{,}415$. Першу з них називають наближеним значенням числа $\sqrt{2}$ за нестачею з точністю до 0,001, друге — наближеним значенням числа $\sqrt{2}$ за надлишком з точністю до 0,001. Докладніше про наближені значення ви дізнаєтеся в 9 класі.

На закінчення наголосимо, що з будь-якого невід'ємного дійсного числа можна добути квадратний корінь і в результаті цієї дії отримати дійсне число. Отже, дія добування квадратного кореня з невід'ємного дійсного числа не виводить результат за межі множини $\mathbb{R}$.

?

1. Які числа утворюють множину цілих чисел?
2. Якою буквою позначають множину цілих чисел?
3. Які числа утворюють множину раціональних чисел?

4. Якою буквою позначають множину раціональних чисел?
5. У вигляді якого відношення можна подати кожне раціональне число?
6. Як пов'язані між собою раціональні числа та нескінченні періодичні десяткові дроби?
7. Як називають числа, що не є раціональними?
8. Які множини утворюють разом множину дійсних чисел?
9. Якою буквою позначають множину дійсних чисел?
10. Як взаємопов'язані числові множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$?

ВПРАВИ

443.° Яке з наведених тверджень хибне:
1) –3 — дійсне число;
2) –3 — раціональне число;
3) –3 — ціле число;
4) –3 — натуральне число?

444.° Чи є правильним твердження:
1) $1 \in \mathbb{N}$;
2) $1 \in \mathbb{Z}$;
3) $1 \in \mathbb{Q}$;
4) $1 \in \mathbb{R}$;
5) $-2{,}3 \in \mathbb{N}$;
6) $-2{,}3 \in \mathbb{R}$;
7) $\sqrt{7} \notin \mathbb{R}$;
8) $\sqrt{121} \notin \mathbb{R}$;
9) $\frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$?

445.° Чи є правильним твердження:
1) $0 \in \mathbb{N}$;
2) $0 \notin \mathbb{Z}$;
3) $0 \in \mathbb{R}$;
4) $-\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$;
5) $-\frac{3}{7} \notin \mathbb{R}$;
6) $\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$;
7) $\sqrt{9} \in \mathbb{Z}$;
8) $\sqrt{9} \in \mathbb{R}$?

446.° Чи є правильним твердження:
1) будь-яке натуральне число є цілим;
2) будь-яке натуральне число є раціональним;
3) будь-яке натуральне число є дійсним;
4) будь-яке раціональне число є цілим;
5) будь-яке дійсне число є раціональним;
6) будь-яке раціональне число є дійсним;

7) будь-яке ірраціональне число є дійсним;

8) будь-яке дійсне число є або раціональним, або ірраціональним?

447.° Які з даних нескінченних дробів є записами раціональних чисел, а які — ірраціональних:

1) 0,(3);

2) 0,4(32);

3) 0,20200200020... (кількість нулів між сусідніми двійками послідовно збільшується на 1)?

448.° Порівняйте:

1) 6,542... і 6,452...; 2) –24,064... і –24,165... .

449.° Порівняйте:

1) 0,234... і 0,225...; 2) –1,333... і –1,345... .

450.° За допомогою мікрокалькулятора знайдіть наближене значення числа $\sqrt{3}$ з точністю до 0,01: 1) за нестачею; 2) за надлишком.

451.° За допомогою мікрокалькулятора знайдіть наближене значення числа $\sqrt{5}$ з точністю до 0,01: 1) за нестачею; 2) за надлишком.

452.• Укажіть яке-небудь значення a, при якому рівняння $x^2 = a$:

1) має два раціональних корені;

2) має два ірраціональних корені;

3) не має коренів.

453.• Порівняйте числа:

1) $\frac{43}{7}$ і 6,12; 3) π і 3,(14); 5) 7,(18) і 7,(17).

2) 3,(24) і 3,24; 4) –2,(36) і –2,36;

454.• Порівняйте числа:

1) $\frac{1}{6}$ і 0,2; 2) $\frac{7}{9}$ і 0,77; 3) –1,(645) і –1,(643).

455.• Запишіть у порядку спадання числа 3,(16); π; –1,82...; –0,08...; 2,(136).

456.• Запишіть у порядку зростання числа 1,57; 1,571...; $\frac{\pi}{2}$; 1,(56); 1,(572).

457.•• Доведіть, що сума, різниця, добуток і частка двох раціональних чисел є раціональними числами.

458.•• Доведіть, що сума раціонального та ірраціонального чисел є ірраціональним числом.

459.•• Чи є правильним твердження, що:

1) сума будь-яких двох ірраціональних чисел є ірраціональним числом;
2) добуток будь-яких двох ірраціональних чисел є ірраціональним числом;
3) добуток будь-якого ірраціонального числа та будь-якого раціонального числа є ірраціональним числом?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

460. У кожному під’їзді на кожному поверсі дев’ятиповерхового будинку міститься по вісім квартир. У якому під’їзді та на якому поверсі розташована квартира № 186?

461. Натуральні числа *a* і *b* є такими, що *a* — парне число, а *b* — непарне. Значення якого з даних виразів не може бути натуральним числом:

1) $\frac{8b}{5a}$; 2) $\frac{a^2}{b^2}$; 3) $\frac{4a}{b}$; 4) $\frac{b^2}{a}$?

462. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу

$$\left(\frac{3}{4-4a+a^2}+\frac{2}{a^2-4}\right)\cdot(a-2)^2-\frac{2a-4}{a+2}$$

не залежить від значення *a*.

463. У цеберку є кілька літрів води. Якщо відлити половину води, то в ньому залишиться на 14 л води менше, ніж уміщується в цеберку. Якщо долити 4 л, то об’єм води становитиме $\frac{2}{3}$ того, що вміщує цеберко. Скільки літрів води вміщує цеберко?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

464. Знайдіть значення виразу:
1) $|-3{,}5| - |2{,}6|$;
2) $|-9{,}6| - |-32|$.

465. Модуль якого числа дорівнює 6?

466. Для яких чисел виконується рівність:
1) $|a| = a$;
2) $|a| = -a$;
3) $|a| = |-a|$;
4) $|a| = -|a|$?

467. Для яких чисел одночасно виконуються обидві рівності $|a| = a$ і $|a| = -a$?

468. Знайдіть значення кожного з виразів a^2, $(-a)^2$, $|a|^2$ при $a = -8$ і при $a = 7$. Зробіть висновок.

469. Відомо, що $a > 0$, $c < 0$. Порівняйте з нулем значення виразу:
1) a^3c^4;
2) ac^5.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

470. У роті 100 солдатів. Щоночі на чергування виходять три солдати. Чи можна так організувати чергування, щоб через деякий час кожний солдат побував на чергуванні з кожним з решти солдатів рівно один раз?

Відкриття ірраціональності

У п. 14, розв'язуючи графічно рівняння $x^2 = 2$, ми встановили, що довжина кожного з відрізків OA і OB дорівнює $\sqrt{2}$ (рис. 24). Покажемо, що число $\sqrt{2}$ ірраціональне.

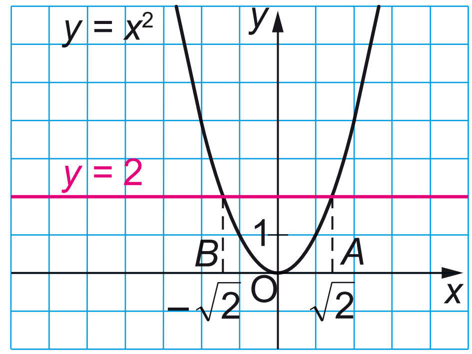


Рис. 24

Припустимо, що число $\sqrt{2}$ раціональне. Тоді його можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m і n — натуральні числа. Маємо:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Тоді

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2; \; 2 = \frac{m^2}{n^2}; \; m^2 = 2n^2.$$

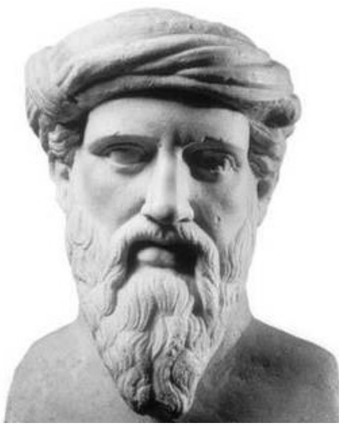
З останньої рівності випливає, що число m^2 парне. А це означає, що парним є і число m. Тоді $m = 2k$, де k — деяке натуральне число. Маємо: $(2k)^2 = 2n^2$; $4k^2 = 2n^2$; $n^2 = 2k^2$. Звідси випливає, що число n^2, а отже, і число n парні.

Таким чином, чисельник і знаменник дробу $\frac{m}{n}$ — парні числа. Отже, цей дріб є скоротним. Отримали суперечність.

Наведений приклад показує, що існують відрізки (у нашому випадку це відрізки OA і OB на рисунку 24), довжини яких не можна виразити раціональними числами, тобто *для вимірювання відрізків раціональних чисел недостатньо*.

Цей факт було відкрито в школі великого давньогрецького вченого Піфагора.

Спочатку піфагорійці вважали, що для будь-яких відрізків AB і CD завжди можна знайти такий відрізок MN, який у кожному з них вкладається ціле число разів. Звідси випливало, що відношення довжин будь-яких двох відрізків виражається відношенням цілих чисел, тобто раціональним числом.



Піфагор
(бл. 570 — бл. 500 р. до н. е.)

Наприклад, на рисунку 25 маємо: $AB = 5MN$, $CD = 2MN$ і $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{2}$. Відрізок MN називають **спільною мірою** відрізків AB і CD.

Якщо для відрізків існує спільна міра, то їх називають **спільномірними**. Наприклад, відрізки AB і CD (рис. 25) є спільномірними.

Отже, давньогрецькі вчені вважали, що будь-які два відрізки є спільномірними. А із цього випливало, що довжину будь-якого відрізка можна виразити раціональним числом.

Справді, нехай деякий відрізок AB вибрано за одиничний. Тоді для відрізка AB і будь-якого іншого відрізка CD

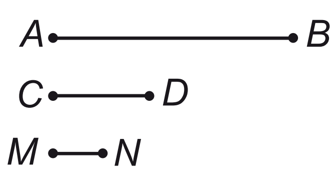


Рис. 25

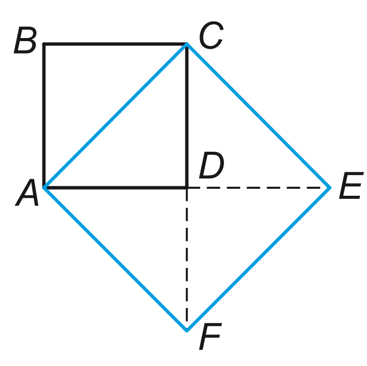


Рис. 26

існує відрізок завдовжки e, який є їхньою спільною мірою. Отримуємо: $AB = ne$, $CD = me$, де m і n — деякі натуральні числа. Звідси $\frac{CD}{AB} = \frac{me}{ne} = \frac{m}{n}$. Оскільки $AB = 1$, то $CD = \frac{m}{n}$.

Проте самі ж піфагорійці зробили видатне відкриття. Вони довели, що діагональ і сторона квадрата неспільномірні, тобто якщо сторону квадрата взяти за одиницю, то довжину діагоналі квадрата виразити раціональним числом не можна.

Для доведення розглянемо довільний квадрат $ABCD$ і візьмемо його сторону за одиницю довжини. Тоді його площа дорівнює $AB^2 = 1$. На діагоналі AC побудуємо квадрат $ACEF$ (рис. 26). Зрозуміло, що площа квадрата $ACEF$ у 2 рази більша за площу квадрата $ABCD$. Звідси $AC^2 = 2$, тобто $AC = \sqrt{2}$. Отже, довжина діагоналі AC не може бути виражена раціональним числом.

Це відкриття змінило один із фундаментальних постулатів давньогрецьких учених, який полягав у тому, що відношення будь-яких двох величин виражають відношенням цілих чисел.

Існує легенда про те, що піфагорійці тримали відкриття ірраціональних чисел у найсуворішій таємниці, а людину, яка розголосила цей факт, покарали боги: вона загинула під час корабельної катастрофи.

ВПРАВИ

1. Доведіть, що число $\sqrt{3}$ ірраціональне.

2. Доведіть, що коли натуральне число n не є квадратом натурального числа, то число $\sqrt{n}$ ірраціональне.

ДРУЖИМО З КОМП'ЮТЕРОМ

У попередніх класах ви вже використовували комп'ютер під час вивчення математики. Ви навчилися:

- користуватися **калькулятором** для обчислень;
- набирати й оформляти нескладні тексти в **текстовому редакторі** (наприклад, *Microsoft Word*);
- складати таблиці за допомогою **редактора таблиць** (наприклад, *Microsoft Excel*);
- малювати за допомогою **графічного редактора** (наприклад, *Paint*);
- користуватися глобальною мережею «**Інтернет»** і шукати в ній інформацію.

Усі ці вміння ви вдосконалюватимете й надалі.

Якщо в майбутньому ви плануєте отримати освіту в галузі математики, інформаційних технологій, інженерної справи, тобто широко використовувати математику у своїй діяльності, то радимо вам опанувати спеціалізовані математичні пакети, які допомагають школярам і школяркам, студентам і студенткам виконувати технічну роботу під час

Понад 70 років у нашій державі діє Мала академія наук України (МАН), у наукових відділеннях і численних секціях якої учні та учениці можуть проводити дослідницьку та практичну роботу за найрізноманітнішими напрямами. Ви можете брати участь у роботі її секцій та позашкільному навчанні, турнірах і конкурсах фахової майстерності, всеукраїнських учнівських олімпіадах з базових і спеціальних дисциплін, представляти свої роботи на Всеукраїнському конкурсі-захисті науково-дослідницьких робіт учнів і учениць — членів МАН.

розв’язування задач. Це, наприклад, *MathLAB*, *MathCAD*. Також корисно опанувати графічний редактор, за допомогою якого можна працювати з геометричними фігурами та будувати креслення. Прикладами таких редакторів можуть бути *CorelDraw*, *Visio* тощо. Якщо ви маєте намір виступити з доповіддю або цікавим повідомленням, то зробити його наочнішим допоможуть **програми для побудови презентацій** (наприклад, *PowerPoint*).

Крім того, існує багато програм, створених спеціально для школярів та школярок і призначених для того, щоб допомогти опанувати математику. Ви зможете знайти їх на просторах Інтернету.

А може, ви й самі придумаєте корисні програми для вивчення математики?

У цьому розділі наведено завдання, які ви зможете виконувати за допомогою комп’ютера в міру вивчення відповідних тем. Деякі з них — продовження та розвиток вправ цього підручника (такі вправи в тексті підручника помічено значком «», а тут указано номер відповідної вправи).

Завдання, які потребують використання калькулятора, виконуйте за допомогою мікрокалькулятора або стандартної програми «калькулятор», що є на вашому комп’ютері.

Тим, хто цікавиться інформатикою, пропонуємо завдання на складання алгоритмів і програм, у яких можна використати отримані математичні знання. Ці завдання позначено зірочкою. Поки ви не опанували на потрібному рівні яку-небудь мову програмування, достатньо придумати алгоритм і записати його словами або у вигляді блок-схеми. Зауважимо, що вміння складати алгоритми (послідовності дій) стане вам у пригоді не лише в програмуванні, а й в інших галузях діяльності.

До п. 1 «Раціональні дроби»

Навчіться обчислювати значення дробового виразу за допомогою калькулятора. У яких випадках неможливо обчислити значення дробового виразу? Чи завжди можна отримати точне значення дробового виразу?

2–4. Виконайте які-небудь із цих завдань за допомогою калькулятора або спеціалізованого математичного пакета.

До п. 2 «Основна властивість раціонального дробу»

46, 47. Виберіть який-небудь приклад із цих завдань. Знайдіть значення виразу двічі: спочатку записаного в умові виразу, потім — попередньо скоротивши дріб. Обчислення виконуйте за допомогою калькулятора або спеціалізованого математичного пакета. Наскільки зменшилася кількість дій після скорочення дробу? Чи можна після скорочення виконати обчислення усно?

63. Побудуйте графік функції за допомогою графічного редактора. Який інструмент потрібен, щоби з графіка функції $y = 2x$ отримати графік функції $y = 2x - 1$?

До п. 3 «Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками»

74, 75. Виберіть який-небудь приклад із цих завдань. Знайдіть значення виразу двічі: спочатку записаного в умові виразу, потім — попередньо спростивши його. Обчислення виконуйте за допомогою калькулятора або спеціалізованого математичного пакета. Наскільки зменшилася кількість дій після спрощення виразу? Чи можна після спрощення виконати обчислення усно?

До п. 4 «Додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками»

138. Виконайте це завдання також за допомогою калькулятора. Чи завжди буде отримано «зручний» результат?

До п. 5 «Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня»

160, 161. Виконайте які-небудь приклади із цих завдань за допомогою калькулятора. Який висновок можна зробити про обчислення з дробами, зроблені за допомогою комп’ютера?

До п. 6 «Тотожні перетворення раціональних виразів»

194, 195. Доведіть твердження задачі 194, виконавши обчислення за допомогою калькулятора. Який шлях доведення виявився більш наочним? Чи можна за допомогою калькулятора довести твердження задачі 195?

До п. 7 «Рівносильні рівняння. Раціональні рівняння»

222. Розв’яжіть цю задачу за допомогою калькулятора.

До п. 8 «Степінь із цілим від’ємним показником»

Чи існує в калькуляторі та в інших програмах, якими ви користуєтеся для обчислень, спосіб подання числа в стандартному вигляді? Опануйте цей інструмент.

* Ознайомтеся з різними типами даних, які пропонує вибрана вами мова програмування для подання дробових чисел. Як зберігаються ці дані в пам’яті комп’ютера? Як впливає спосіб зберігання на точність, з якою подаються ці дані?

262–264. Виконайте яке-небудь із цих завдань, створивши таблицю в табличному редакторі. Використайте засоби автоматичного сортування. Побудуйте на основі отриманої таблиці діаграму. Наскільки наочною вона виявилася? Чому?

266. Розв'яжіть цю задачу за допомогою калькулятора. Чим ця задача схожа на задачу 222 і чим відрізняється від неї? Які спільні елементи розв'язування ви використовували для обох задач?

* Побудуйте спільний алгоритм для розв'язування задач 222 і 266. Передбачте можливість використання цього алгоритму для довільної кількості років.

До п. 9 «Властивості степеня із цілим показником»

276. Обчисліть значення якого-небудь виразу з прикладів 5–8 цього завдання, виконуючи дії за допомогою калькулятора в тому порядку, у якому їх записано в прикладі (без попереднього спрощення). Чи отримали ви той самий результат, що й під час розв'язування прикладу на папері? Чому результати можуть відрізнятися? Який висновок із цього можна зробити?

293, 294. Яким чином використання стандартного вигляду числа спрощує обчислення?

* Дізнайтеся, яким чином у пам'яті комп'ютера подаються дані у форматі «з плаваючою крапкою»; за якими алгоритмами виконуються дії з такими числами; як цей спосіб подання даних впливає на точність обчислень.

307. Побудуйте шукану таблицю за допомогою табличного редактора. Зробіть так, щоб значення функції обчислювались автоматично.

До п. 10 «Функція $y=\frac{k}{x}$ та її графік»

315, 316. Заповніть шукану таблицю за допомогою табличного редактора. Побудуйте за допомогою засобів табличного редактора графік функції, яка є математичною моделлю задачі. Як треба вдосконалити таблицю, щоб отримати точніший графік?

До п. 11 «Функція $y = x^2$ та її графік»

357–360. Виберіть яку-небудь функцію із цих завдань і побудуйте її графік двома способами. *Перший спосіб*: визначте, з яких геометричних фігур складається цей графік, і зобразіть ці фігури на координатній площині за допомогою графічного редактора. *Другий спосіб*: складіть таблицю, яка містить набір значень аргументу та відповідних їм значень функції, і побудуйте графік за цією таблицею за допомогою відповідних інструментів автоматичної побудови графіків; для цього способу виберіть зовнішній вид графіка, у якому задані точки сполучаються відрізками. Який графік точніше зображає задану функцію? Як треба врахувати особливості цієї функції під час вибору множини значень аргументу для таблиці?

До п. 12 «Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь»

Навчіться добувати квадратний корінь за допомогою калькулятора та інших програм, якими ви користуєтеся для обчислень.

398. Виконайте завдання двома способами: 1) спростивши вираз на папері; 2) обчисливши його значення за допомогою калькулятора без попереднього спрощення. Зробіть висновки.

* **421.** Запишіть алгоритм для розв’язування цієї задачі методом перебору.

До п. 13 «Множина та її елементи. Підмножина»

Знайдіть за допомогою Інтернету які-небудь цікаві факти та опишіть їх, використовуючи слова «множина», «елемент множини», «підмножина», «порожня множина». Задайте яку-небудь із розглянутих множин переліком елементів і заданням характеристичної властивості.

До п. 14 «Числові множини»

Для кожної із числових множин уведіть у калькуляторі кілька елементів цієї множини. Чи будь-яке раціональне число ви можете ввести з усіма його цифрами? Чи можна ввести ірраціональне число? Наскільки точно подає калькулятор ці числа? Зробіть висновок.

Як у калькуляторі можна задати число π?

Придумайте вираз, у якому змінні будуть раціональними числами, які можна задати точно, а результатом буде дійсне або ірраціональне число, яке калькулятор відображає наближено. Обчисліть значення цього виразу за допомогою калькулятора.

***** Зробіть висновки: коли операції з дійсними числами можуть не давати очікуваного результату? Як у таких випадках потрібно домагатися бажаного результату?

450, 451. Виконайте завдання за допомогою калькулятора та/або інших програм, якими ви користуєтеся для обчислень.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

50. 0,3. **51.** 5. **53.** $\frac{1}{32}$. **54.** Ні. *Вказівка*. Подайте даний дріб у вигляді $\frac{(a-1)^2}{a^2+1}$. **58.** 1) x — будь-яке число, крім –1; 2) коренів немає; 3) коренів немає. **59.** 1) Коренів немає; 2) –7. **60.** 1) Якщо $a = 0$, то коренів немає; якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$; 2) якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; 3) якщо $a = 6$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 6$, то $x = a - 6$; 4) якщо $a = -2$, то коренів немає; якщо $a = 2$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq -2$ і $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{a+2}$. **61.** 1) Якщо $a = -3$, то коренів немає; якщо $a \neq -3$, то $x = \frac{3}{a+3}$; 2) якщо $a = 0$, то коренів немає; якщо $a = 9$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 9$, то $x = \frac{a-9}{a}$. **64.** –4 при $a = 2b$. **65.** 48 км/год, 60 км/год. **76.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{m+2}$; 3) $\frac{1}{1-k}$. **77.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{a-5}{a+5}$. **78.** 1) $\frac{1}{1-a}$; 2) $\frac{3}{b-2}$; 3) $\frac{m}{n-5}$. **79.** 1) $\frac{1}{(x-7)^2}$; 2) $\frac{y+6}{y+2}$. **87.** 2) 5; 3) $4\frac{1}{4}$. **88.** 2) –3; 3) –4,5. **89.** 1) 1; 2; 3; 6; 2) 1; 2; 7; 14; 3) 1; 2; 8. **90.** 1) 1; 3; 9; 2) 1; 2; 4; 8; 3) 2. **91.** 15 км/год, 12 км/год. **92.** 1) –2; 2) коренів немає. **112.** 6) $\frac{5}{p-5}$; 7) $\frac{16}{16y-y^3}$; 8) $\frac{2b+1}{12b-6}$. **113.** 5) $\frac{1}{x}$; 6) $\frac{8}{y+2}$. **116.** 2) 4. **117.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2,5; 3) 0,1. **118.** 1) 1,2; 2) $\frac{7}{17}$. **121.** 2) $\frac{3}{b^2-3b+9}$. **122.** 1) $\frac{2n^3}{9m^2-n^2}$; 2) $\frac{2-2b}{8b^3+1}$.

124. 1) $-\frac{a+b}{ab}$; 2) $\frac{1}{2x}$; 3) $\frac{100b^2}{(a^2-25b^2)^2}$; 4) $\frac{1}{y-2}$.
128. $\frac{3}{(a-1)(a-4)}$. *Вказівка*. Подайте кожний із доданків у вигляді різниці двох дробів. Наприклад, $\frac{1}{(a-1)(a-2)} = \frac{1}{a-2} - \frac{1}{a-1}$. **129.** $\frac{3}{(a-7)(a-1)}$. **132.** *Вказівка*. До кожного з дробів, записаних у лівій частині рівності, додайте 1, а до правої частини додайте 3. **135.** 270 км. **160.** 1) –5; 2) 0,9; 3) –5; 4) –3,2. **161.** 1) $\frac{40}{21}$; 2) $\frac{4}{11}$. **162.** 83. **163.** 10. **164.** 7 або –7. **165.** 2 або –2. **166.** 1) 1; 2) 1. **167.** 1) $\frac{(a-5)^2}{(a+5)^2}$; 2) 1. **170.** 1) 0,5; 2) x — будь-яке число. **172.** 1,2 год. **173.** 50 л, 30 л. **174.** 5 чоловіків, 1 жінка, 6 дітей. **178.** 1) $\frac{3}{1-a}$; 2) $\frac{2}{b-3}$; 3) $\frac{12}{3c-1}$; 4) $\frac{1}{a-2b}$; 5) $\frac{2}{a+5}$; 6) $\frac{x-3}{x+3}$. **179.** 1) $\frac{2}{3-b}$; 2) –1; 3) $x + y$; 4) $\frac{a+2}{a-2}$. **180.** 1) $\frac{x+8}{x-8}$; 2) $\frac{a-4}{2a}$; 3) $\frac{1}{b}$; 4) $\frac{a-1}{a}$; 5) 2; 6) $a - 2$. **181.** 1) $\frac{7+x}{7-x}$; 2) $c - 5$; 3) –2; 4) $\frac{y+2}{6}$. **184.** 1) Не залежить; 2) залежить. **186.** 1) $\frac{1}{a}$; 2) $a - 3$; 3) $a + 1$; 4) $\frac{a+b}{a}$. **187.** 1) $\frac{a^2+b^2}{b^2}$; 2) $-a$. **188.** 1) $-\frac{a+b}{2ab}$; 2) $\frac{1}{a}$. **189.** $-y$. **192.** 1) $\frac{a^2}{b^2}$; 2) 1. **193.** 1) $-1\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$. **195.** *Вказівка*. Подайте даний вираз у вигляді $10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n$. **196.** 480 кг. **197.** 500 грн, 700 грн. **198.** 2 год. **199.** 90 деталей. **200.** 9 горобців, 10 голубів, 11 горлиць. **207.** 2) Коренів немає; 3) –2; 4) x — будь-яке

число, крім 2; 5) x — будь-яке число; 6) 3; 7) 0,5; 8) коренів немає; 9) $-\frac{1}{3}$; 10) 17; 11) 12; 12) $1\frac{3}{4}$; 13) –4; 4; 14) 0; 15) 4. **208.** 1) –1; 2) коренів немає; 3) 10; 4) коренів немає; 5) 4; 6) x — будь-яке число, крім 0; 7) 6; 8) x — будь-яке число, крім –0,5; 9) –3; 3. **209.** 7. **210.** 10. **212.** 1) $\frac{13}{4}$; 2) коренів немає; 3) 7; 4) 0; –2; 5) коренів немає; 6) –17; 7) 0; 8) коренів немає. **213.** 1) 10; 2) –0,5; 3) –3; 4) –4; 4; 5) коренів немає; 6) –5. **214.** 2 км/год. **215.** 29 км/год. **216.** 9 км/год. **217.** 1) Коренів немає; 2) 9; 3) 0. **218.** 1) 0,6; 2) 0. **219.** 1) Якщо $a \neq 1$, то $x = 1$; якщо $a = 1$, то коренів немає; 2) якщо $a \neq -5$, то $x = a$; якщо $a = -5$, то коренів немає; 3) якщо $a = 0$, то x — будь-яке число, крім 3; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 3$, то $x = a$; якщо $a = 3$, то коренів немає; 4) якщо $a \neq 7$, то $x = a$ або $x = 6$; якщо $a = 7$, то $x = 6$; 5) якщо $a \neq 4$ і $a \neq -2$, то $x = 4$ або $x = -2$; якщо $a = 4$, то $x = -2$; якщо $a = -2$, то $x = 4$; 6) якщо $a \neq 4$ і $a \neq -2$, то $x = a$; якщо $a = 4$ або $a = -2$, то коренів немає. **220.** $a = 2$ або $a = -2$. **221.** $a = -9$, або $a = -3$, або $a = 0$. **222.** 70 000 мешканців. **223.** 60 км. **251.** 1) 2,7; 2) $9\frac{47}{125}$. **258.** 5. **259.** 6. **265.** 31 болванка. **266.** 80 000 мешканців. **267.** 2 км. **280.** 6) $-\frac{1}{6}$; 7) $\frac{4}{9}$; 8) $\frac{4}{7}$. **281.** 5) 16; 6) 144. **291.** 1) –3; 2) –5; 3) –2; 4) –7; 5) 0; 6) 2. **292.** 1) 4; 2) 1; 3) –1; 4) 6. **295.** 8 хв. **296.** 5,34 кг. **297.** У 81 раз. **298.** 1) $\frac{1}{a+b}$; 2) $-4b^2$; 3) $15c^3 + 5$; 4) $-\frac{1}{m^4}$. **299.** 1) $\frac{2a^2}{3a^2-1}$; 2) $\frac{1-6b}{2}$. **300.** 1) –1 або 0; 2) 3 або 4; 3) 4 або 5; 4) 2 або 3. **301.** 1) 6 або 7; 2) 4 або 5; 3) 4 або 5;

4) 4 або 5. **302.** 28; 8. **303.** На 31,6 %. **304.** 5 год 45 хв. **305.** Так, треба 5 купюр по 5 грн і 3 купюри по 2 грн. **331.** 1) 2; 2) –1; 3; 3) коренів немає. **332.** 1) 2; 4; 2) –1; 1; 3) коренів немає. **345.** Коренів немає. **346.** Зменшилася на 9 %. **347.** 36 монет, 24 монети. **348.** 12 км/год. **353.** 1) Коренів немає; 2) –1; 3; 3) 2. **354.** 1) –3; –1; 2) коренів немає; 3) –1. **369.** 4. **371.** 5 км/год, 3 км/год. **397.** 1) –10; 2) 25; 3) –23,8; 4) 13; 5) 216; 6) –20. **398.** 1) 13,4; 2) 21; 3) –20. **399.** 2) $x \leqslant 0$; 3) x — будь-яке число; 4) $x = 0$; 5) $x \geqslant 8$; 6) $x \leqslant 8$; 9) x — будь-яке число, відмінне від 8; 10) $x \geqslant 0$ і $x \neq 9$; 11) $x \geqslant 0$; 12) $x = 0$; 13) такого значення x не існує; 14) x — будь-яке число; 15) $x = 0$; 16) x — будь-яке число, відмінне від 0. **400.** 2) $y \leqslant 0$; 3) $y \geqslant 0$; 4) $y \leqslant 0$; 5) $y = 0$; 6) $y > 0$; 7) $y \geqslant 0$ і $y \neq 1$. **401.** 6) –10; 10. **402.** 4) –7; 7. **405.** 1) 167; 2) 2116; 3) коренів немає. **406.** 1) 4900; 2) коренів немає. **407.** 1) Якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то a і b — числа одного знака; якщо $a = 0$, то b — будь-яке число; якщо $b = 0$, то a — будь-яке число; 3) якщо $b \neq 0$, то $a \geqslant 0$; якщо $b = 0$, то a — будь-яке число; 5) якщо $a \neq 0$, то $b \leqslant 0$; якщо $a = 0$, то b — будь-яке число. **408.** 2) *Вказівка*. $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$. **409.** *Вказівка*. $-x^2 + 6x - 12 = -(x - 3)^2 - 3$. **410.** Вираз 2. **411.** 1) 0; 2) коренів немає; 3) 1; 4) –2; 5) –1; 1; 6) 1. **412.** 1) 0; 2) коренів немає; 3) 1; 4) 3. **413.** 1) $a > -1$; 2) $a = -1$; 3) $a < -1$. **416.** 1) Якщо $a = 0$, то $x \geqslant 1$; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; 2) якщо $a = 1$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 1$, то $x = 0$; 3) якщо $a = 0$, то $x \geqslant 1$; якщо $a \neq 0$, то $x = 2$; 4) якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a \geqslant 0$, то $x = a^2 + 2$. **417.** $a < 0$ або $a = 1$. **418.** 13. **419.** $\frac{a+10}{5-a}$. **420.** 27 купюр по 100 грн, 4 купюри по 500 грн. **428.** 2) {–2, 2}; 4) $\varnothing$. **429.** 4) {5}.

439. 1) $\frac{5b+15}{b}$; 2) $\frac{3}{1-b}$. **440.** 1,4 км/год. **441.** $\frac{2}{7}$. **457.** *Вказівка*. Нехай $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ — дані раціональні числа. Тоді їхня сума дорівнює $\frac{mq+np}{nq}$, тобто є числом виду $\frac{s}{t}$, де $s \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$. **458.** *Вказівка*. Якщо припустити, що дана сума є раціональним числом, то із цього випливає, що дане ірраціональне число можна подати у вигляді різниці двох раціональних чисел. **459.** 1) Ні, наприклад, $\sqrt{3}+\left(-\sqrt{3}\right)=0$; 2) ні, наприклад, $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2=3$; 3) ні, наприклад, $\sqrt{3}\cdot 0=0$. **460.** У третьому під'їзді на шостому поверсі. **461.** $\frac{b^2}{a}$. **463.** 18 л.

Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі

Номер завдання	Номер задачі											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Б	В	А	А	Г	А	В	Г	В	Г	Б	В
2	Б	Г	Б	Г	А	А	В	Б	В	Б	В	А
3	В	Г	В	Б	В	А	Б	Б	Г	А	А	Г

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА
Підручник для осіб з особливими освітніми потребами
(Н 54.1 – Н 54.2)
8 клас
(у 2-х частинах)

ЧАСТИНА 1

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам «Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

Відповідальна за випуск *Г. Ф. Висоцька*
Редактор *Т. Є. Цента*. Обкладинка *Д. В. Висоцький*
Макет, художнє оформлення,
комп'ютерна обробка ілюстрацій *Д. В. Висоцький*
Технічний редактор *О. В. Гулькевич*
Комп'ютерна верстка *С. І. Северин*. Коректор *А. Ю. Вєнза*

Формат 84×108/16. Ум. друк. арк. 17,64. Обл.-вид. арк. 8,49.
Тираж 1716 прим. Вид. № 86. Зам. №

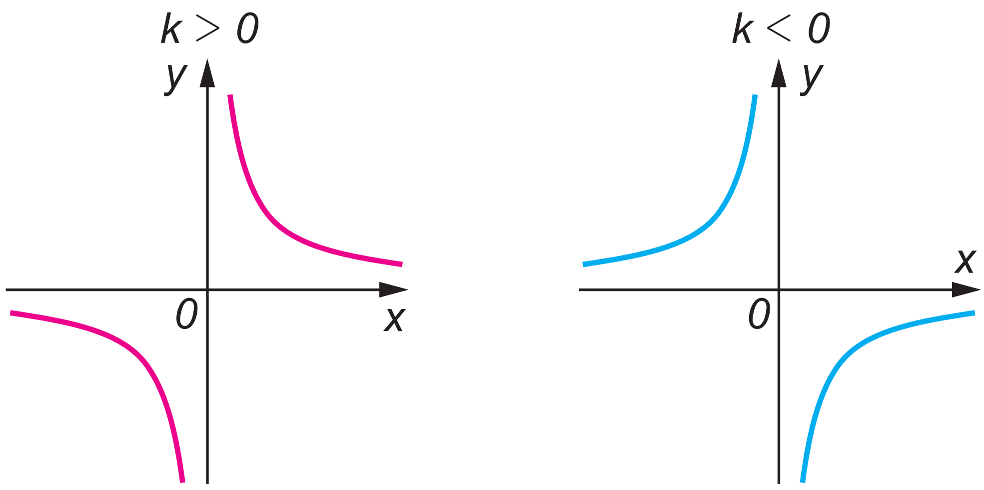
ТОВ ТО «Гімназія», вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua, www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано в друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052, Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

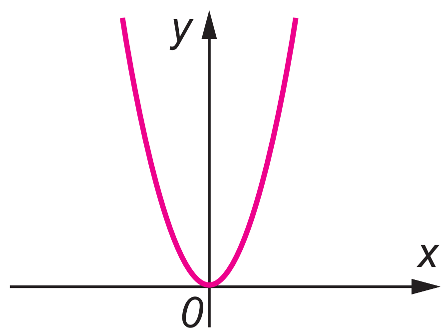
Таблиця квадратів натуральних чисел від 10 до 99

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Графік функції $y = \frac{k}{x}$



Графік функції $y = x^2$



Графік функції $y = \sqrt{x}$