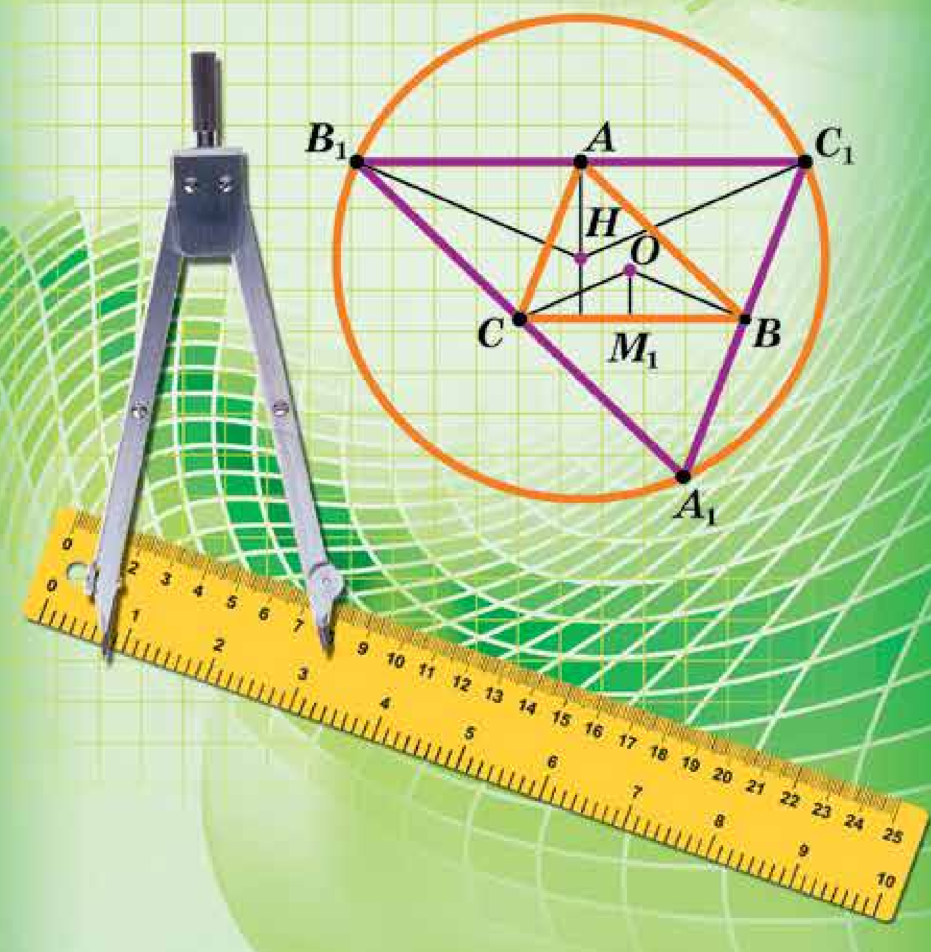
A.G.Merzleak
V.B.Polonsikyi
M.S.Iakir

8

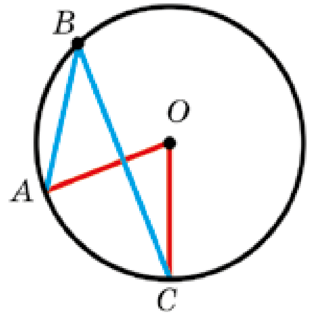
GEOMETRIE



8
GEOMETRIE
A.G.Merzleak, V.B.Polonsikyi, M.S.Iakir
2021

ISBN 978-966-914-357-0

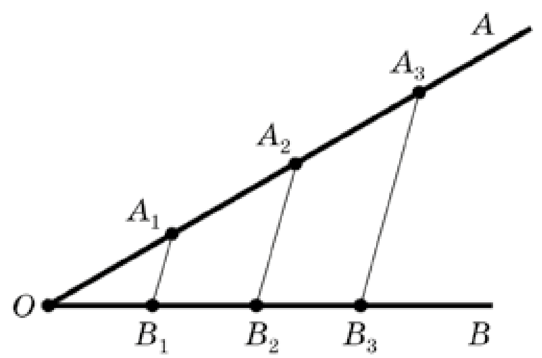
UNGHIURI LA CENTRU ȘI ÎNSCRISE



$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$

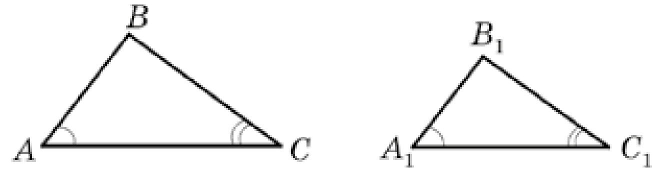
$\angle AOC = \cup AC$

TEOREMA LUI TALES



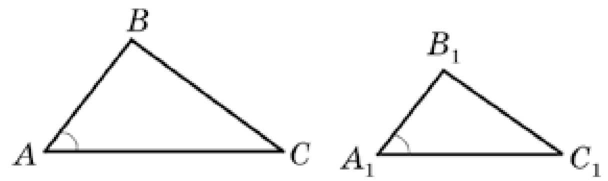
Dacă $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ și $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, atunci $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$

PRIMUL CRITERIU DE ASEMĂNARE AL TRIUNGHIURILOR



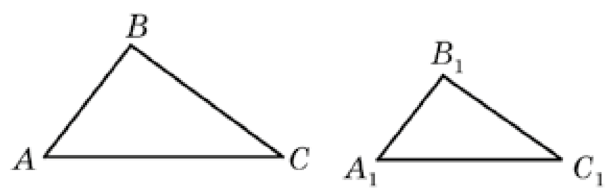
Dacă $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

AL DOILEA CRITERIU DE ASEMĂNARE AL TRIUNGHIURILOR



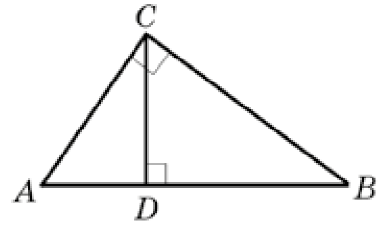
Dacă $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ și $\angle A = \angle A_1$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

AL TREILEA CRITERIU DE ASEMĂNARE AL TRIUNGHIURILOR



Dacă $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

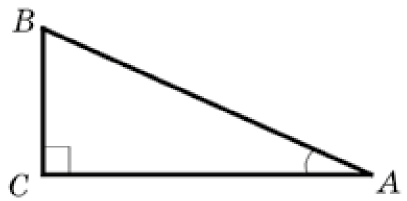
RELAȚIILE METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC



$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad \text{(teorema lui Pitagora)}$$
$$CD^2 = AD \cdot DB$$
$$AC^2 = AB \cdot AD$$
$$BC^2 = AB \cdot DB$$

SINUSUL, COSINUSUL, TANGENTA ȘI COTANGENTA UNGHIULUI ASCUȚIT AL TRIUNGHIULUI DREPTUNGHIC

$$\sin A = \frac{BC}{AB} \qquad \cos A = \frac{AC}{AB}$$



$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$$

	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ALFABETUL LATIN

Litere de tipar		Denumirea literelor
A	a	a
B	b	be
C	c	ce
D	d	de
E	e	e
F	f	ef
G	g	ghe
H	h	haş
I	i	i
J	j	je
K	k	ca
L	l	le
M	m	me
N	n	ne
O	o	o
P	p	pe
Q	q	chiu
R	r	re
S	s	se
T	t	te
U	u	u
V	v	ve
W	w	dublu-ve
X	x	ix
Y	y	igrec
Z	z	zet

ALFABETUL GREC

Litere de tipar		Denumirea literelor
Α	α	alpha
Β	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ε	epsilon
Ζ	ζ	zeta
Η	η	eta
Θ	θ, ϑ	theta
Ι	ι	iota
Κ	κ	kappa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mu
Ν	ν	nu
Ξ	ξ	ksi
Ο	ο	omicron
Π	π	pi
Ρ	ρ	rho
Σ	σ	sigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	φ	phi
Χ	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

A. G. Merzleak
V. B. Polonskyi
M. S. Iakir

GEOMETRIE

Manual pentru clasa a 8-a
cu limba rămână/moldovenească de predare
a instituțiilor de învățământ mediu general

a 2-a ediție, prelucrată

Recomandat
de Ministerul Învățământului și Științei al Ucrainei

Львів
Видавництво «Світ»
2021

УДК 373.167.1:514
М52

Перекладено за виданням

Мерзляк А. Г. Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — 2-ге видання, переробл. — Х. : Гімназія, 2021. — 208 с. : іл.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 22.02.2021 № 243)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрія : підруч. для 8 кл. з навч. рум./молд. мов. закл. заг. серед. осв. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. І. М. Грінчешин. — 2-ге вид., переробл. — Львів : Світ, 2021. — 208 с. : іл.
ISBN 978-966-914-357-0

УДК 373.167.1:514

ISBN 978-966-914-357-0 (рум./молд.)
ISBN 978-966-474-275-4 (укр.)

DIN PARTEA UTORILOR

Dragi elevi ai clasei a 8-a!

În acest an de învățământ voi veți continua studierea geometriei. Sperăm că voi ați dovedit să îndrăgiți această știință importantă și frumoasă, și, deci, cu interes veți acapara cunoștințe noi. Noi sperăm, că în acesta va contribui manualul, pe care voi îl țineți în mâini.

Faceți cunoștință, vă rugăm, cu structura lui.

Manualul este împărțit în patru paragrafe, fiecare din ele constă din puncte. În puncte este expus materialul teoretic. Învățându-l, o atenție deosebită cordați textului, care este tipărit cu caractere **grase** sau ***cursiv gras*** și *cursiv*; în așa un mod în manual sunt evidențiate definițiile, regulile și cele mai importante afirmații matematice.

De obicei expunerea materialului teoretic se termină cu exemple de rezolvare a problemelor. Aceste scrieri pot fi privite ca una din posibilele modele de perfectare a rezolvării.

La fiecare punct sunt alese probleme pentru rezolvarea de sine stătătoare; vă sfătuim să treceți la a lor soluționare după însușirea materialului teoretic. Printre însărcinări sunt atât exerciții simple și mijlocii după complexitate, așa și probleme complicate (mai ales acele, care sunt însemnate cu asterisc (*)). Cunoștințele sale se poate de verificat, rezolvând problemele date în formă de test, care sunt amplasate la sfârșitul fiecărui paragraf.

Fiecare punct se termină cu rubrica „Observați, desenați, construiți, plăsmuiți”. În ea sunt alese probleme pentru rezolvarea cărora trebuie nu cunoștințe geometrice speciale, ci numai judecată sănătoasă, inventivitate și istețime. Aceste probleme sunt de folos, ca vitaminele: ele dezvoltă „vederea geometrică” și intuiția.

Dacă după îndeplinirea temei pentru acasă v-a rămânea timp liber și voi veți vrea să știți mai mult, atunci vă recomandăm să vă adresați la rubrica „după ce s-au făcut lecțiile”. Materialul, expus acolo, nu este simplu. Însă cu atât este mai interesant de încercat puterile sale!

Cutezați! Vă urăm succes!

Stimați colegi!

Noi sperăm, că acest manual va deveni un ajutor de nădejde în munca Dumneavoastră nu ușoară și nobilă, și vom fi sinceri bucuroși, dacă el o să vă placă.

În carte este adunat un mare și divers material didactic. Dar într-un an de învățământ nu este posibil de rezolvat toate problemele, însă nici nu e nevoie în asta. Totodată este cu mult mai lesne de lucrat atunci când este o rezervă considerabilă de probleme. Aceasta permite realizarea principiilor diferențierii a nivelurilor de cunoștințe și a individualizării în învățământ.

Atragem atenția la aceea, că în manual sunt prezente probleme de construcție. Ele nu sunt obligatorii pentru cercetare. Acest material este rațional de-l folosit numai în cazul, când elevii deja au făcut cunoștință cu capitolul respectiv din cursul de geometrie clasa a 7-a.

Cu culoare azurie sunt însemnate numerele problemelor, care se recomandă pentru acasă, cu culoare purpurie — numerele problemelor care după părerea profesorului (ținând cont de particularitățile individuale ale elevilor clasei) pot fi rezolvate oral.

Materialul rubricii „După ce s-au făcut lecțiile” poate fi folosit în organizarea lucrului cercului de matematică și a ocupațiilor facultative.

Hai împreună să transformăm cursul școlar de geometrie într-un obiect înțeles și atrăgător.

Vă dorim inspirație creativă și răbdare.

NOTAȚII CONVENȚIONALE

n° însărcinări ce corespund nivelurilor inițial și mijlociu ale reușitelor în învățătură;

$n^{\bullet}$ însărcinări ce corespund nivelului suficient al reușitei în învățătură;

$n^{\bullet\bullet}$ însărcinări care corespund nivelului superior al reușitei în învățătură;

n^* probleme menite cercurilor de matematică și facultativelor;

probleme-cheie, al căror rezultat poate fi folosit în procesul rezolvării altor probleme;

⊙ demonstrarea teoremei, care corespunde nivelului suficient al reușitei în învățătură;

demonstrarea teoremei, care corespunde nivelului superior al reușitei în învățătură;

demonstrarea teoremei neobligatorie pentru studiere;

▲ sfârșitul demonstrării teoremei;

● terminarea rezolvării problemei;

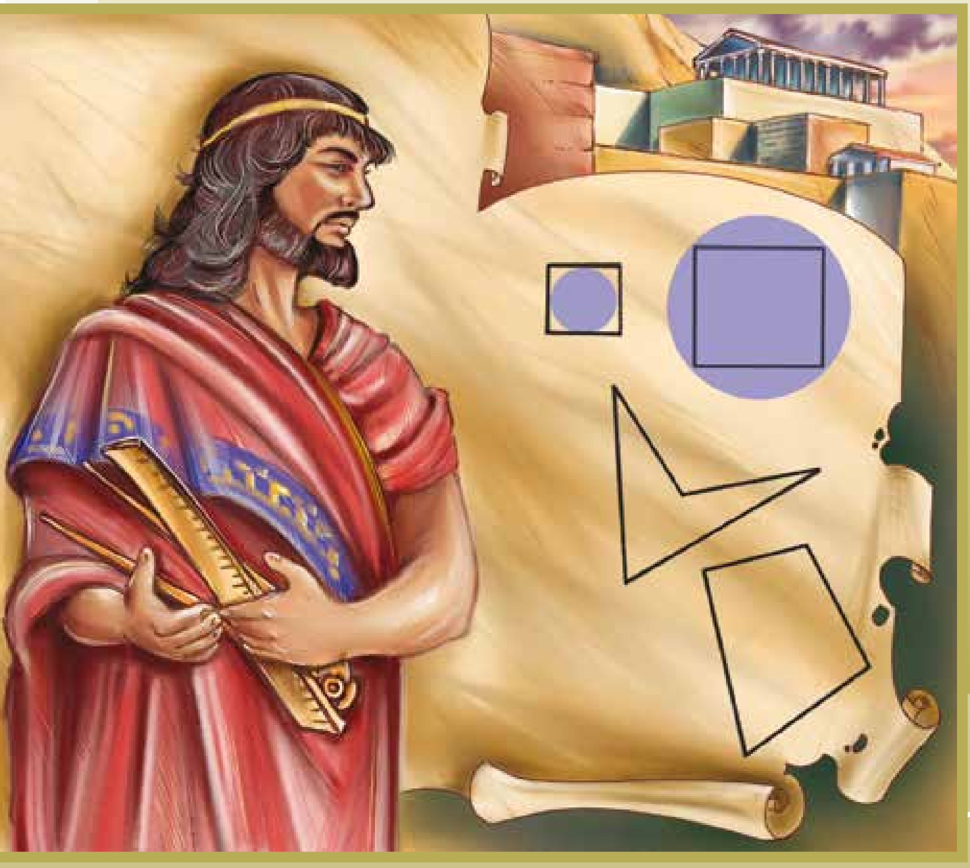
 rubrica „După ce s-au făcut lecțiile”.

PATRULATERE §1

În acest paragraf se consideră figura geometrică, cunoscută vouă, **patrulaterul**. Veți face cunoștință cu tipuri particulare de patrulatere: cu paralelogramul, dreptunghiul, rombul, pătratul, trapezul, veți învăța proprietățile acestor figuri și veți afla criteriile cu ajutorul cărora o să puteți recunoaște figurile menționate dintr-o mulțime de patrulatere.

Veți învăța proprietățile segmentului, care unește mijlocurile laturilor unui triunghi, o să vă convingeți, că aceste proprietăți pot servi în calitate de cheie la rezolvarea unei serii întregi de probleme.

Cum de măsurat arcul circumferinței? Cărui patrulater i se poate circumscrie o circumferință? În care patrulater poate fi înscrisă o circumferință? Însușind materialul acestui paragraf, voi veți obține răspuns la aceste întrebări.



1. Patrulaterul și elementele lui

În figura 1 segmentele AB și AC au numai un singur punct comun, care este extremitatea fiecăruia din ei. Astfel de segmente se numesc vecine. În figura 2 fiecare două segmente sunt vecine.

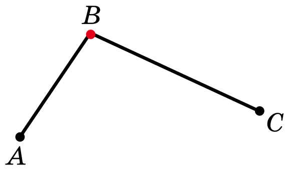


Fig. 1

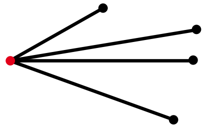


Fig. 2

Segmentele AB și CD din figura 3 nu sunt vecine.

Fig. 3

Să considerăm figura, care este constituită din patru puncte A, B, C, D și patru astfel de segmente AB, BC, CD, DA că oricare două segmente vecine nu se află pe o dreaptă și orice segmente, care nu-s vecine nu au puncte comune (fig. 4, *a*).

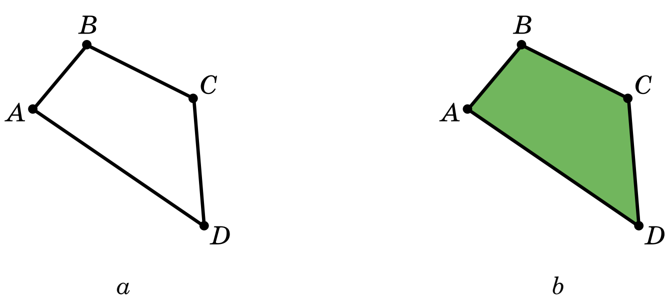
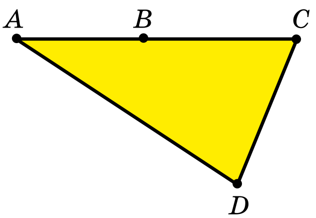


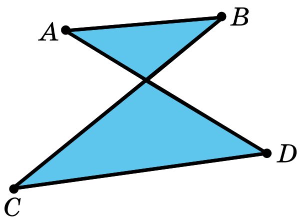
Fig. 4

Figura, formată de aceste segmente, mărginește o parte a planului, evidențiată în figura 4, *b* cu culoare verde. Această parte a planului împreună cu segmentele AB, BC, CD și DA se numește **patrulater**. Punctele A, B, C, D se numesc **vârfurile patrulaterului**, iar segmentele AB, BC, CD, DA — **laturile patrulaterului**.

În figura 5 sunt reprezentate figurile, care sunt compuse din patru segmente AB, BC, CD, DA și o parte din plan, pe care ele o mărginesc. Însă aceste figuri nu sunt patrulatere. Explicați de ce.



a



b

Fig. 5

Laturile patrulaterului, care sunt segmente vecine, se numesc **laturile alăturate** ale patrulaterului. Vârfurile, care sunt extremitățile unei laturi, se numesc **vârfurile vecine** ale patrulaterului. Laturile, care nu sunt vecine se numesc **laturile opuse** ale patrulaterului. Vârfurile, care nu sunt vecine se numesc **vârfurile opuse** ale patrulaterului.

În figura 6 este reprezentat un patrulater, în care, de exemplu, laturile MQ și MN sunt alăturate, iar laturile NP și MQ — opuse. Vârfurile Q și P — vecine, iar vârfurile M și P — opuse.

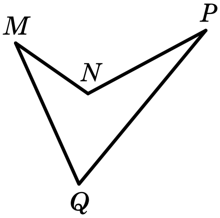
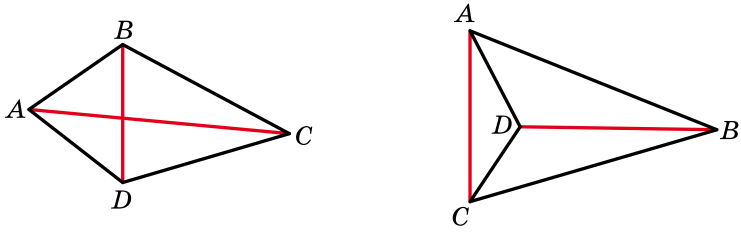


Fig. 6

Patrulaterul se numește și se notează după vârfurile lui. De exemplu, în figura 4, *b* este reprezentat patrulaterul $ABCD$, iar în figura 6 — patrulaterul $MNPQ$. În notarea patrulaterului literele, ce sunt amplasate alături, corespund vârfurilor vecine ale patrulaterului. De exemplu, patrulaterul, reprezentat în figura 6 poate fi notat încă și așa: $PQMN$, sau $MQPN$, sau $NPQM$ și altele.

Suma lungimilor a tuturor laturilor patrulaterului se numește **perimetrul patrulaterului.**



a *b*

Fig. 7

Segmentul care unește vârfurile opuse ale patrulaterului se numește diagonală. În figura 7 segmentele *AC* și *BD* — diagonalele patrulaterului *ABCD*.

Unghiurile *ABC*, *BCD*, *CDA*, *DAB* (fig. 8) se numesc **unghiurile** patrulaterului *ABCD*. În acest patrulater ele toate sunt mai mici decât unghiul desfășurat. Astfel de patrulater se numește **convex**. Însă există patrulatere, în care nu toate unghiurile sunt mai mici decât cel desfășurat. De exemplu, în figura 9 unghiul *B* al patrulaterului *ABCD* este mai mare decât 180°. Un astfel de patrulater se numește **neconvex**[1].

Unghiurile *ABC* și *ADC* se numesc **unghiuri opuse** ale patrulaterului *ABCD*. De asemenea sunt opuse unghiurile *BAD* și *BCD*.

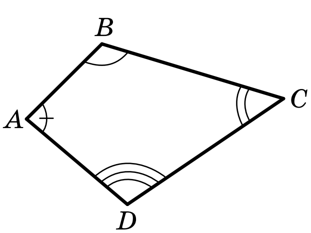


Fig. 8

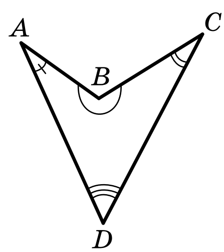
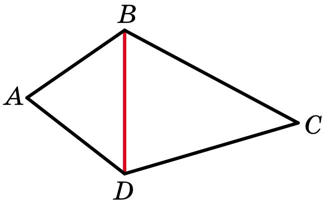


Fig. 9

Teorema 1.1. ***Suma unghiurilor unui patrulater este egală cu 360°.***

Demonstrare. ⊙ Ducem în patrulater diagonala, care îl împarte în două triunghiuri. De exemplu, în figura 10 asta-i diagonala *BD*. Atunci suma unghiurilor patrulaterului *ABCD* este egală cu suma unghiurilor ale triunghiurilor *ABD* și *CBD*. Deoarece suma unghiurilor a unui triunghi este egală cu 180°, reiese că suma unghiurilor a unui patrulater este egală cu 360°. ▲

[1] Mai amănunțit cu noțiunea „convex” veți face cunoștință în p.19.



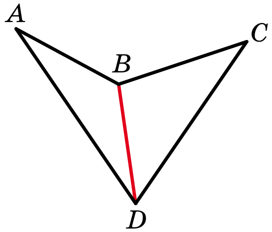


Fig. 10

Consecință. ***Într-un patrulater numai un singur unghi poate fi mai mare decât cel desfășurat.***

Demonstrați această proprietate de sine stătător.

Problema 1. Demonstrați, că lungimea oricărei laturi a patrulaterului este mai mică decât suma lungimilor celorlalte trei laturi ale lui.

Rezolvare. Să considerăm un patrulater oarecare $ABCD$ (fig. 11). Vom arăta, de exemplu, că $AB < AD + DC + CB$.

Ducem diagonala AC. Aplicând inegalitatea triunghiului pentru laturile AB și AC corespunzătoare triunghiurilor ABC și ADC, obținem inegalitățile: $AB < AC + CB$, $AC < AD + DC$.

De aici $AB < AC + CB < AD + DC + CB$.

Deci, $AB < AD + DC + CB$.

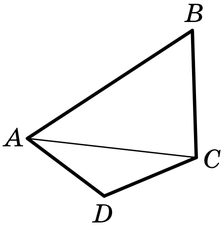


Fig. 11

Problema 2. Construiți patrulaterul, fiind date două laturi alăturate și patru unghiuri, fiecare din ele este mai mic decât unghiul desfășurat.[1]

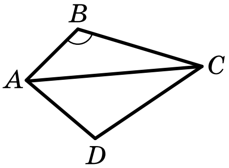


Fig. 12

Rezolvare. În figura 12 este reprezentat patrulaterul $ABCD$, în care sunt cunoscute lungimile laturilor AB și BC, și de asemenea toate unghiurile lui.

În triunghiul ABC sunt cunoscute două laturi AB și BC și unghiul B dintre ele. Deci, acest triunghi poate fi construit. Acum putem de la semidreptele AB și CB depune unghiurile, care sunt egale cu unghiurile patrulaterului de la vârfurile A și C.

[1] În manual problemele de construcție nu sunt considerate obligatorii.

Analiza efectuată arată, cum de construit patrulaterul căutat.

Construim triunghiul după laturi date ale patrulaterului și unghiul dintre ele. În figura 12 acesta este triunghiul ABC. Mai departe de la semidreptele AB și CD depunem două unghiuri cunoscute ale patrulaterului. Cele două semidrepte construite se intersectează în punctul D. patrulaterul $ABCD$ — cel căutat.

1. Explicați care segmente se numesc vecine?
2. Explicați care figură se numește patrulater?
3. Care laturi ale patrulaterului se numesc alăturate? opuse?
4. Care vârfuri ale patrulaterului se numesc vecine? opuse?
5. Cum se notează patrulaterul?
6. Ce se numește perimetrul patrulaterului?
7. Ce se numește diagonală a patrulaterului?
8. Care patrulater se numește convex?
9. Formulați teorema despre suma unghiurilor patrulaterului.

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

1.° Desenați patrulaterul, în care:
1) trei unghiuri sunt obtuze;
2) unghiurile vârfurilor vecine sunt drepte, iar celelalte două nu sunt drepte;
3) o diagonală este împărțită în jumătăți de punctul de intersecție, iar a doua nu se împarte în două jumătăți;
4) diagonalele sunt perpendiculare.

2.° Construiți un patrulater arbitrar, notați vârfurile lui cu literele M, K, E, F. Indicați perechile laturilor alăturate ale lui, ale laturilor opuse, ale vârfurilor opuse. Scrieți oarecare trei însemnări ale acestui patrulater.

3.° Desenați patrulaterul, în care:
1) trei unghiuri sunt ascuțite;
2) două unghiuri opuse sunt drepte, iar altele două nu sunt drepte;
3) punctul de intersecție al diagonalelor le împarte pe fiecare din ele în jumătăți.

EXERCIȚII

4.° Printre figurile, reprezentate în figura 13, indicați patrulaterele.

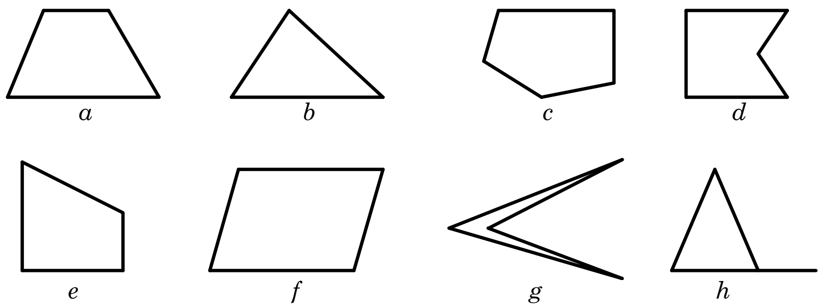


Fig. 13

5.° Aduceți patru însemnări oarecare ale patrulaterului, reprezentat în figura 14. Indicați:
1) vârfurile patrulaterului;
2) laturile lui;
3) perechile vârfurilor vecine;
4) perechile vârfurilor opuse;
5) perechile laturilor alăturate;
6) perechile laturilor opuse;
7) diagonalele patrulaterului.

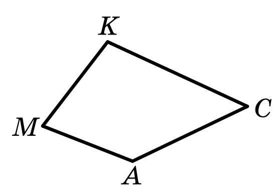


Fig. 14

6.° Printre patrulaterele, reprezentate în figura 15, indicați pe cele convexe.

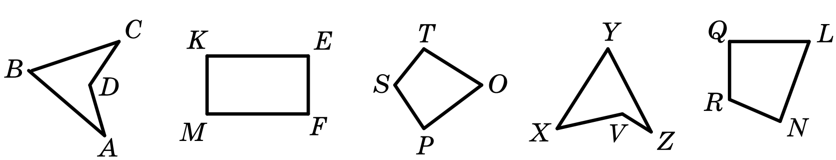


Fig. 15

7.° Cu ce este egal al patrulea unghi al patrulaterului, dacă trei unghiuri ale lui sunt egale cu 78°, 89° și 93°?

8.° Aflați unghiurile patrulaterului, dacă ele sunt egale între ele.

9.° În patrulaterul $ABCD$ se știe că $\angle B = 150°$, $\angle A = \angle C = \angle D$. Aflați unghiurile necunoscute ale patrulaterului.

10.° Unul din unghiurile patrulaterului este de 2 ori mai mic, decât al doilea unghi, cu 20° mai mic, decât al treilea și cu 40° mai mare, decât al patrulea. Aflați unghiurile patrulaterului.

11.° Aflați unghiurile patrulaterului, dacă ele sunt proporționale cu numerele 2, 3, 10 și 21. Oare este acest patrulater convex?

12.° Aflați unghiurile patrulaterului, dacă trei unghiuri ale lui sunt proporționale cu numerele 4, 5 și 7, iar al patrulea este egal cu semisuma lor. Oare este acest patrulater convex?

13.° Oare poate să aibă patrulaterul:
1) trei unghiuri drepte și unul ascuțit;
2) trei unghiuri drepte și unul obtuz;
3) patru unghiuri drepte;
4) patru unghiuri ascuțite;
5) două unghiuri drepte și două unghiuri obtuze;
6) două unghiuri drepte, unul ascuțit și unul obtuz?

În cazul afirmativ desenați un astfel de patrulater.

14.° Perimetrul patrulaterului este egal cu 63 cm. Aflați laturile lui, dacă a doua latură constituie $\frac{2}{3}$ din prima, a treia – 50% din cea de-a doua, iar a patra 150% din prima.

15.° Aflați laturile patrulaterului, dacă una din ele este cu 2 cm mai mare, decât a doua, cu 6 cm mai mică, decât a treia, de 3 ori mai mică, decât a patra, iar perimetru este egal cu 64 cm.

16.° În patrulaterul $ABCD$ laturile AB și BC sunt egale, iar diagonala BD formează cu aceste laturi unghiuri egale. Demonstrați că laturile CD și AD tot sunt egale.

17.° Diagonalele patrulaterului sunt împărțite în jumătăți de către punctul lor de intersecție, una din laturile lui este egală cu 6 cm. Cu ce este egală latura opusă ei a patrulaterului?

18.° În patrulaterul $MNKP$ se știe, că $MN = NK$, $MP = PK$, $\angle M = 100°$. Aflați unghiul K.

19.° În patrulaterul $ABCD$ diagonala AC formează cu laturile AB și AD unghiuri egale și cu laturile CB și CD de asemenea unghiuri egale, $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm. Aflați perimetrul patrulaterului $ABCD$.

20.• În triunghiul ABC se știe, că $\angle A = 44°$, $\angle B = 56°$. Bisectoarele AK și BM ale triunghiului se intersectează în punctul O. Aflați unghiurile patrulaterului: 1) $MOKC$; 2) $AOBC$.

21.• În triunghiul ABC se știe că $\angle A = 36°$, $\angle B = 72°$. Înălțimea AE și înălțimea BF ale triunghiului se intersectează în punctul H. Aflați unghiurile patrulaterului: 1) $CFHE$; 2) $ACBH$.

22.• Aflați diagonala patrulaterului, dacă perimetrul lui este egal cu 80 cm, iar perimetrele triunghiurilor, în care această diagonală împarte patrulaterul dat, sunt egale cu 36 cm și 64 cm.

23.• Oare pot laturile patrulaterului să fie egale cu:
1) 2 dm, 3 dm, 4 dm, 9 dm; 2) 2 dm, 3 dm, 4 dm, 10 dm?

24.•• Se știe că în patrulaterul $ABCD$ $\angle A = \angle C = 90°$. Demonstrați că bisectoarele altor două unghiuri ale patrulaterului sau sunt paralele, sau sunt situate pe aceeași dreaptă.

25.•• Demonstrați că dacă bisectoarele a două unghiuri opuse ale unui patrulater convex sunt paralele sau se află pe aceeași dreaptă, atunci celelalte două unghiuri ale patrulaterului sunt egale.

26.•• Construiți patrulaterul după laturile lui și unul din unghiuri.

27.•• Construiți patrulaterul, știind trei laturi și două diagonale ale lui.

28.•• Construiți patrulaterul, dacă sunt date laturile și o diagonală ale lui.

29.* Construiți patrulaterul $ABCD$, dacă sunt cunoscute unghiurile A și B, laturile AB și BC și suma laturilor AD și CD ale acestui patrulater.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

30. Dreapta c intersectează fiecare din dreptele a și b (fig. 16). Indicați perechile de unghiuri alterne interne și de aceeași parte a secantei, care totodată s-au format. Care este repartizarea reciprocă a dreptelor a și b, dacă: 1) $\angle 1 = \angle 4$; 2) $\angle 1 = 20°$, $\angle 3 = 170°$?

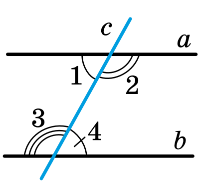


Fig. 16

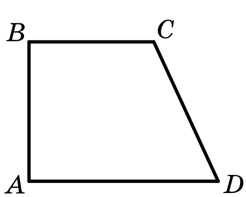


Fig. 17

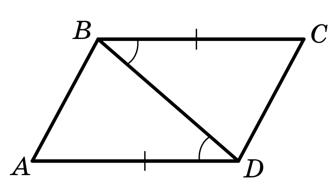


Fig. 18

31. În patrulaterul $ABCD$ (fig. 17) $\angle C = 110°$, $\angle D = 70°$. Demonstrați, că $BC \parallel AD$.

32. În patrulaterul $ABCD$ se știe că $\angle A = \angle B = 90°$, $\angle C = 100°$. Oare sunt paralele dreptele: 1) BC și AD; 2) AB și CD?

33. În figura 18 $AD = BC$, $\angle ADB = \angle CBD$. Demonstrați că $AB = CD$ și $AB \parallel CD$.

34. Segmentul BK — bisectoarea triunghiului ABC. Dreapta DK este paralelă cu latura AB și intersectează latura BC în punctul D, $\angle BDK = 116°$. Aflați unghiul BKD.

Împrospătați în memorie conținutul pp 12, 13, 14 de la pag. 188, 189.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

35. Un plan alb a fost stropit arbitrar cu vopsea neagră. Demonstrați, că pe plan există un segment cu lungimea de 1 m, ale cărui extremități sunt vopsite în aceeași culoare.

CUTEZAȚI!

Problema 29 este notată cu asterisc (*). Aceasta înseamnă că ea aparține la problemele de complexitate sporită. Măcar că astfel de probleme nu vor fi date la lucrările de sine stătător sau de control, ele în manual sunt nu puține. La voi poate apărea întrebarea: „De ce trebuie de cheltuit timp și puteri la problemele complicate, dacă ele nu sunt obligatorii pentru rezolvare, iar o notă mare se poate obține cu eforturi considerabil mai mici?” După părerea noastră, cel mai bun răspuns la întrebarea aceasta poate fi găsit în cartea „Matematica și romantica” a cunoscutului geometric și pedagog ucrainean Micola Ivanovici Kovanțov. El scria: „Dragi prieteni! Luați-vă de rezolvarea problemelor matematice complicate. Și a celor ce numai ce au fost formulate, și a celora care deja multe decenii sau secole nu au putut fi rezolvate. Pe voi o să vă chinuie suferințele și dezamăgirile, când o să vă pară, că voi în zadar ați pierdut ani în căutarea unei năluci, care vă eschivează. Totul poate fi. Însă voi o să fiți însutit recompensați, când într-o bună zi veți fi în fața acelui scop sacru, spre care atâta timp și greu ați mers. Nu fiți indiferenți, că atunci vă așteaptă decesul spiritual”.

M.I.Kovanțov
(1924–1988)

M.I. Kovanțov aproape 30 de ani a condus catedra de geometrie a Universității Naționale Taras Șevcenco din Kiev. Peniței lui îi aparțin peste 200 de lucrări științifice și științifico-populare.

Micola Ivanovici a educat zeci de savanți, care azi lucrează în Ucraina, de asemenea și în multe țări ale lumii.

2. Paralelogramul. Proprietățile paralelogramului

Definiție. Paralelogram se numește patrulaterul, la care fiecare două laturi opuse sunt paralele.

În figura 19 este reprezentat paralelogramul $ABCD$. În virtutea definiției paralelogramului avem: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Să considerăm câteva proprietăți ale paralelogramului.

Teorema 2.1. ***Laturile opuse ale paralelogramului sunt egale.***

Demonstrație. ⊙ În figura 19 este reprezentat paralelogramul $ABCD$. Să demonstrăm că $AB = CD$ și $BC = AD$.

Ducem diagonala AC. Să demonstrăm că triunghiurile ABC și CDA sunt egale (fig. 20).

În aceste triunghiuri, latura AC — comună, unghiurile 1 și 2 sunt egale ca unghiuri alterne interne formate de dreptele paralele BC și AD și secanta AC, unghiurile 3 și 4 sunt egale, ca unghiuri alterne interne formate de dreptele paralele AB și CD și secanta AC. Așadar triunghiurile ABC și CDA sunt egale conform celui de-al doilea criteriu de egalitate al triunghiurilor. De aici $AB = CD$ și $BC = AD$. ▲

Teorema 2.2. ***Unghiurile opuse ale paralelogramului sunt egale.***

Demonstrație. ⊙ În figura 19 este reprezentat paralelogramul $ABCD$. Să demonstrăm că $\angle A = \angle C$ și $\angle B = \angle D$.

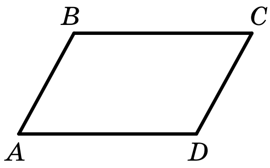


Fig. 19

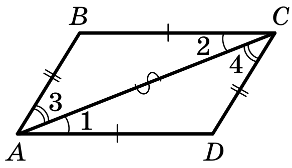


Fig. 20

În procesul demonstrării teoremei anterioare s-a stabilit că $\Delta ABC = \Delta CDA$ (fig.20). De aici, $\angle B = \angle D$. Din egalitatea unghiurilor 1 și 2, și a egalității unghiurilor 3 și 4 rezultă, că $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$. Așadar, $\angle BAD = \angle BCD$. ▲

Teorema 2.3. ***Diagonalele paralelogramului sunt împărțite în jumătate de către punctul lor de intersecție.***

Demonstrație. ⊙ În figura 21 este reprezentat paralelogramul $ABCD$, ale cărui diagonale se intersectează în punctul O. Să demonstrăm, că $AO = OC$ și $BO = OD$.

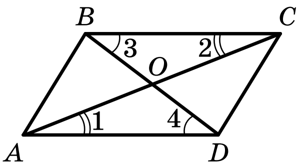


Fig. 21

Să cercetăm triunghiurile AOD și COB.

Avem: $\angle 1$ și $\angle 2$, $\angle 3$ și $\angle 4$ egale ca unghiuri alterne interne la dreptele paralele AD și BC și secantele AC și corespunzător BD. Conform teoremei 2.1 obținem: $AD = BC$. Deci, triunghiurile AOD și COB sunt egale în virtutea criteriului al doilea de egalitate a triunghiurilor. De aici, $AO = OC$, $BO = OD$. ▲

Definiție. Înălțimea paralelogramului se numește perpendiculara, coborâtă din orice punct al dreptei, care conține latura paralelogramului, pe dreapta, care conține latura opusă.

În figura 22 fiecare din segmentele AF, QE, BM, PN, CK este înălțimea paralelogramului $ABCD$.

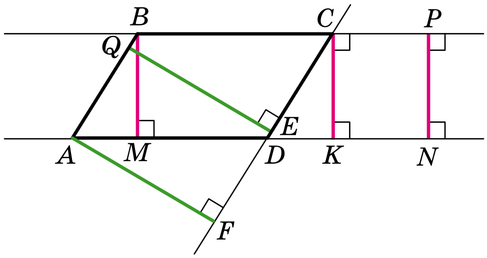


Fig. 22

Din cursul de geometrie al clasei a 7-a voi știți că toate punctele a uneia din două drepte paralele sunt egal depărtate de la cealaltă dreaptă. De aceea $AF = QE$ și $BM = PN = CK$.

Se spune că **înălțimile** BM, CK, PN **sunt duse la laturile** BC și AD, iar înălțimile AF, QE — la laturile AB și CD.

Problema 1. Demonstrați că dreptele care conțin înălțimile triunghiului, se intersectează într-un punct.

Rezolvare. Prin fiecare vârf al triunghiului dat ABC ducem dreapta, paralelă la latura opusă. Obținem triunghiul $A_1B_1C_1$ (fig. 23).

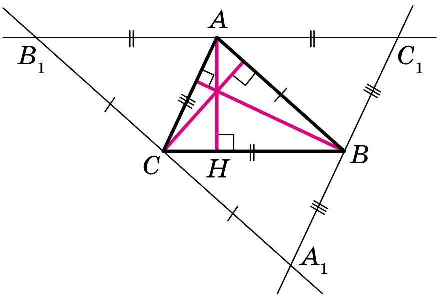


Fig. 23

Din construcție rezultă că patrulaterele AC_1BC și $ABCB_1$ — sunt paralelograme. De aici $AC_1 = BC = AB_1$. Deci punctul A este mijlocul segmentului B_1C_1.

Deoarece dreptele B_1C_1 și BC паралельні, то висота AH sunt paralele reiese că înălțimea AH a triunghiului ABC este perpendiculară pe segmentul B_1C_1. Așadar, dreapta AH – mediatoarea laturii B_1C_1 a triunghiului $A_1B_1C_1$. Analogic se poate demonstra, că dreptele care conțin altele două înălțimi ale triunghiului ABC sunt medianele laturilor C_1A_1 și A_1B_1 și ale triunghiului $A_1B_1C_1$.

Deoarece mediatoarele laturilor unui triunghi se intersectează într-un punct, reiese că afirmația problemei este demonstrată.

Problema 2. Bisectoarea unghiului obtuz a paralelogramului împarte latura lui în raportul 2 : 1, socotind de la vârful unghiului ascuțit. De aflat latura paralelogramului, dacă perimetrul lui este egal cu 60 cm.

Rezolvare. Fie că bisectoarea unghiului obtuz B a paralelogramului $ABCD$ (fig. 24) intersectează latura AD în punctul M. Conform condiției $AM : MD = 2 : 1$.

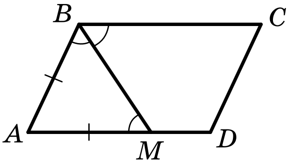


Fig. 24

Unghiurile ABM și CBM sunt egal în virtutea condiției.

Unghiurile CBM și AMB sunt egale ca unghiuri alterne interne la dreptele paralele BC și AD și secanta BM.

Atunci $\angle ABM = \angle AMB$. Deci, triunghiul BAM este isoscel, de aici $AB = AM$.

Fie $MD = x$ cm, atunci $AB = AM = 2x$ cm, $AD = 3x$ cm. Deoarece laturile opuse ale paralelogramului sunt egale, rezultă că perimetrul lui este egal cu $2\,(AB + AD)$. Ținând cont de faptul că conform condiției perimetrul paralelogramului este egal cu 60 cm, obținem:

$$2\,(2x + 3x) = 60;$$
$$x = 6.$$

Așadar, $AB = 12$ cm, $AD = 18$ cm.

Răspuns: 12 cm, 18 cm.

1. Care patrulater se numește paralelogram?
2. Ce proprietate au laturile opuse ale paralelogramului?
3. Ce proprietate au unghiurile opuse ale paralelogramului?
4. Ce proprietate au diagonalele paralelogramului?
5. Ce se numește înălțime a paralelogramului?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

36.° În figura 25 este reprezentat paralelogramul $ABCD$. Faceți așa un desen în caiet. Duceți din punctele B și M înălțimile paralelogramului la latura AD, iar din punctul K — înălțimea la latura AB.

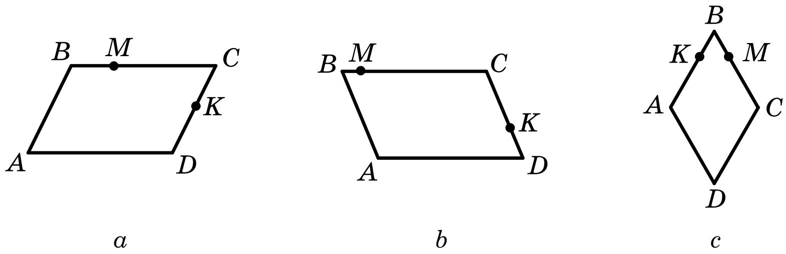


Fig. 25

EXERCIȚII

37.° Două drepte paralele intersectează alte trei drepte paralele. Câte paralelograme se vor obține în acest caz?

38.° În figura 26 sunt reprezentate paralelograme. Determinați, fără a face măsurări, pe care figuri mărimile unghiurilor sau lungimile segmentelor sunt însemnate incorect (lungimile segmentelor sunt date în centimetri).

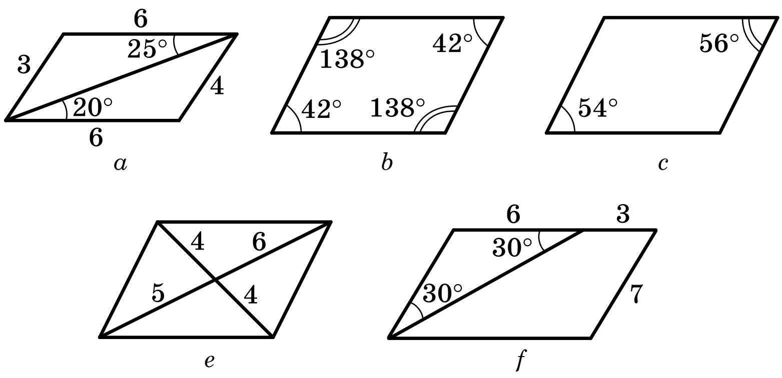


Fig. 26

39.° Oare vor fi suficienți 40 cm de sârmă pentru a confecționa din ea un paralelogram cu laturile: 1) 14 cm și 8 cm; 2) 16 cm și 4 cm; 3) 12 cm și 6 cm?

40.° Perimetrul paralelogramului este egal cu 112 cm. Aflați laturile lui, dacă: 1) una din ele este cu 12 mai mică decât cealaltă; 2) două laturi ale lui se raportă 5 : 9.

41.° Aflați laturile paralelogramului, dacă una din ele este de 5 ori mai mare decât cealaltă, iar parametrul paralelogramului este egal cu 96 cm.

42.° Se știe că în paralelogramul $ABCD$ $AB = 6$ cm, $AC = 10$ cm, $BD = 8$ cm, O — punctul de intersecție al diagonalelor lui. Aflați perimetrul triunghiului COD.

43.° Demonstrați că suma a oricare două unghiuri vecine ale paralelogramului este egală cu 180°.

44.° Aflați unghiurile paralelogramului, dacă:
1) unul din ele este egal cu 70°;
2) suma a două unghiuri ale lui este egală cu 100°;
3) diferența a două unghiuri ale lui este egală cu 20°;
4) două unghiuri ale lui se raportă ca 3 : 7.

45.° Aflați unghiurile paralelogramului, dacă unul din ei:
1) de 2 ori este mai mare, decât celălalt;
2) cu 24° este mai mic, decât celălalt.

46.° În triunghiul ABC se știe, că $\angle A = 35°$. Printr-un punct arbitrar, care aparține laturii BC, sunt duse două drepte, paralele cu laturile AB și AC ale triunghiului. Determinați tipul patrulaterului ce s-a format, și aflați toate unghiurile lui.

47.° Aflați unghiurile paralelogramului $ABCD$ (fig. 27), dacă $\angle ABD = 68°$, $\angle ADB = 47°$.

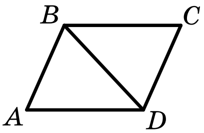


Fig. 27

48.° În paralelogramul $ABCD$ diagonala AC formează cu latura AB unghiul, egal cu 32°, $\angle BCD = 56°$. Aflați unghiurile CAD și D.

49.° Bisectoarele unghiurilor A și B ale paralelogramului $ABCD$ se intersectează în punctul M. Determinați mărimea unghiului M al triunghiului ABM.

50.° Laturile paralelogramului sunt egale cu 6 cm și 10 cm. Oare poate una din diagonalele lui să fie egală cu 16 cm?

51.• Înălțimea BK a paralelogramului ABCD împarte latura lui AD în segmentele AK și KD astfel, că $AK = 4$ cm, $KD = 6$ cm. Aflați unghiurile și perimetrul paralelogramului, dacă $\angle ABK = 30°$.

52.• Unul din unghiurile paralelogramului este egal cu 45°. Înălțimea paralelogramului, coborâtă din vârful unghiului obtuz, este egală cu 3 cm și împarte latura paralelogramului în două părți egale. Aflați această latură a paralelogramului și unghiurile, pe care le face diagonala, care unește vârfurile unghiurilor obtuze, cu laturile paralelogramului.

53.• În paralelogramul $ABCD$ se știe că $\angle C = 30°$, înălțimea BH, coborâtă pe latura CD, este egală cu 7 cm, iar perimetrul paralelogramului — 46 cm. Aflați laturile paralelogramului.

54.• Se dă paralelogramul $ABCD$ și triunghiul MKN. Oare pot avea loc în același timp egalitățile $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle N$?

55.• Demonstrați că vârfurile B și D ale paralelogramului $ABCD$ sunt egal depărtate de la dreapta AC.

56.• Demonstrați că orice segment care trece prin punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului și extremitățile căruia aparțin laturilor opuse ale paralelogramului, este împărțit de acest punct în jumătate.

57.• Perimetrul paralelogramului $ABCD$ este egal cu 24 cm, $\angle ABC = 160°$, diagonala AC formează cu latura AD unghiul de 10°. Aflați laturile paralelogramului.

58.• Diagonala BD a paralelogramului $ABCD$ face cu latura AB unghiul de 65°, $\angle C = 50°$, $AB = 8$ cm. Aflați perimetrul paralelogramului.

59.• Aflați unghiurile paralelogramului $ABCD$, dacă $BD \perp AB$ și $BD = AB$.

60.• Diagonala paralelogramului formează cu laturile lui unghiurile de 30° și 90°. Aflați laturile paralelogramului, dacă perimetrul lui este egal cu 36 cm.

61.• În afara paralelogramului $ABCD$ este dusă o dreaptă paralelă cu diagonala lui BD. Această dreaptă intersectează dreptele AB, BC, CD și AD corespunzător în punctele E, M, F și K. Demonstrați, că $MK = EF$.

62.• Paralel cu diagonala AC a paralelogramului $ABCD$ este dusă dreapta, care intersectează segmentele AB și BC în punctele M și N, iar dreptele AD și CD în punctele P și K corespunzător. Demonstrați, că $PM = NK$.

63.• Unul din unghiurile, formate la intersecția bisectoarei unghiului paralelogramului cu latura lui, este egal cu 24°. Aflați unghiurile paralelogramului.

64.• Bisectoarea unghiului A a paralelogramului $ABCD$ intersectează latura lui BC în punctul M. Aflați perimetrul acestui paralelogram, dacă $AB = 12$ cm, $MC = 16$ cm.

65.• Bisectoarea unghiului ascuțit al paralelogramului împarte latura lui în raportul 3:5, socotind de la vârful unghiului obtuz. Aflați laturile paralelogramului, dacă perimetrul lui este egal cu 66 cm.

66.• Bisectoarea unghiului B al paralelogramului $ABCD$ intersectează latura CD în punctul K astfel, că segmentul CK este de 5 ori mai mare, decât segmentul *KD*. Aflați laturile paralelogramului, dacă perimetrul lui este egal cu 88 cm.

67.° În paralelogramul *ABCD* se știe, că *AD* = 12 cm, *AB* = 3 cm, bisectoarele unghiurilor *B* și *C* intersectează latura *AD* în punctele *E* și *F* corespunzător. Găsiți segmentul *EF*.

68.° Unghiul dintre înălțimea *BH* a paralelogramului *ABCD* și bisectoarea *BM* a unghiului *ABC* este egal cu 24°. Aflați unghiurile paralelogramului.

69.° Demonstrați că unghiul format de înălțimile paralelogramului, duse din vârful unghiului obtuz, este egal cu unghiul ascuțit al paralelogramului.

70.° Demonstrați că unghiul dintre înălțimile paralelogramului, duse din vârful unghiului ascuțit, este egal cu unghiul obtuz al paralelogramului.

71.° Unghiul făcut de înălțimile paralelogramului, duse din vârful unghiului obtuz, este egal cu 30°. Aflați perimetrul paralelogramului, dacă înălțimile lui sunt egale cu 4 cm și 6 cm.

72.° Înălțimile paralelogramelor, duse din vârful unghiului ascuțit, formează unghiul de 150°, laturile paralelogramului sunt egale cu 10 cm și 18 cm. Aflați înălțimile paralelogramului.

73.° Printr-un punct arbitrar al bazei unui triunghi isoscel sunt duse drepte, paralele la laturile lui laterale. Demonstrați, că perimetrul patrulaterului format este egal cu suma laturilor laterale ale triunghiului dat.

74.° Prin fiecare vârf al triunghiului *ABC* este dusă o dreaptă paralelă cu latura opusă. Suma perimetrelor ale tuturor paralelogramelor obținute este egală cu 100 cm. Aflați perimetrul triunghiului *ABC*.

75.° Construiți paralelogramul:
1) cunoscând două laturi și unghiul făcut de ele;
2) știind două diagonale și o latură;
3) dacă sunt date o latură, o diagonală și unghiul dintre ele.

76.° Construiți paralelogramul:
1) știind două laturi și diagonala;
2) se știu două diagonale și unghiul format de ele.

77.•• Sunt date trei puncte care nu sunt situate pe o dreaptă. Construiți paralelogramul, ale cărui vârfuri sunt aceste puncte. Câte soluții are problema?

78.•• Punctul de intersecție al bisectoarelor a două unghiuri vecine ale paralelogramelor aparține laturii lui. Aflați raportul laturilor alăturate ale paralelogramului.

79.•• Pe latura *BC* a paralelogramului *ABCD* există așa un punct *M*, că *BM* = *MD* = *CD*. Aflați unghiurile paralelogramului, dacă *AD* = *BD*.

80.•• Construiți paralelogramul:
1) dacă se știe o latură, înălțimea coborâtă pe ea și o diagonală;
2) știind două diagonale și înălțimea;
3) cunoscând unghiul ascuțit și două înălțimi, duse la două laturi alăturate.

81.•• Construiți paralelogramul:
1) dacă se dau două laturi și înălțimea;
2) dacă sunt cunoscute diagonala și două înălțimi, coborâte pe două laturi alăturate.

82.* Din vârful B al paralelogramului $ABCD$ au coborât perpendiculara BE pe diagonala AC. Prin punctul A este dusă dreapta m, perpendiculară pe dreapta AD, iar prin punctul C — dreapta n, perpendiculară pe dreapta CD. Să se demonstreze că punctul de intersecție al dreptelor m și n aparține dreptei BE.

83.* Construiți paralelogramul, dacă se știe latura, suma diagonalelor și unghiul dintre diagonale.

84.* Pe laturile AB și BC ale paralelogramului $ABCD$ în afara lui sunt construite triunghiurile echilaterale ABM și BCK. Demonstrați că triunghiul MKD este echilateral.

85.* Prin punctul, care aparține unui unghi, duceți o dreaptă astfel, ca segmentul acestei drepte, care se conține în interiorul unghiului, să fie împărțit de punctul dat în jumătate.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

86. Lungimea segmentului AB este egală cu 24 cm. Punctul C aparține dreptei AB, totodată $BC = 5AC$. Pe segmentul AB este notat punctul D astfel, că $AB = 4BD$. Aflați segmentul CD.

87. Câte neegale între ele există:
1) riunghiuri dreptunghice cu latura de 5 cm și unghiul egal cu 45°;
2) triunghiuri isoscele cu latura de 6 cm și unghiul de 30°;
3) triunghiuri dreptunghice cu latura de 7 cm și unghiul de 60°?

88. Diagonalele AC și BD ale patrulaterului $ABCD$ sunt diametrele unei circumferințe. Demonstrați că $AB \parallel CD$.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

89. Oare poate fi tăiat pătratul cu dimensiunea de 10 × 10 pătrățele în 25 de figuri, compusă fiecare din patru pătrățele, care au așa o înfățișare cum este reprezentată în figura 28?

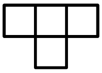


Fig. 28

3. Criteriile paralelogramului

Definiția paralelogramului permite de-a recunoaște paralelogramul dintre patrulatere. Aceluiași scop servește următoarele trei teoreme, care se numesc criteriile paralelogramului.

Teorema 3.1 (inversă teoremei 2.1). ***Dacă într-un patrulater fiecare două laturi opuse sunt egale, atunci acest patrulater este paralelogram.***

Demonstrare. ⊙ În figura 29 este reprezentat patrulaterul $ABCD$, în care $AB = CD$ și $BC = AD$. Să demonstrăm, că patrulaterul $ABCD$ — paralelogram.

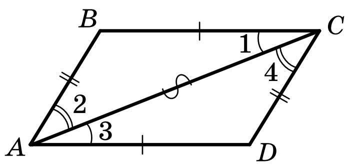


Fig. 29

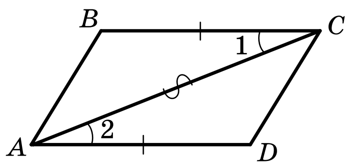


Fig. 30

Ducem diagonala AC. Triunghiurile ABC și CDA sunt egale pa baza criteriului al treilea de egalitate a triunghiurilor. De aici $\angle 1 = \angle 3$ și $\angle 2 = \angle 4$. Unghiurile 1 și 3 sunt alterne interne pentru dreptele BC și AD și secanta AC. Deci, $BC \parallel AD$. Analogic din egalitatea $\angle 2 = \angle 4$ urmează că $AB \parallel CD$.

Așadar, în patrulaterul $ABCD$ fiecare două laturi opuse sunt paralele, și de aceea acest patrulater — paralelogram. ▲

Teorema 3.2. ***Dacă într-un patrulater două laturi opuse sunt egale și paralele, atunci acest patrulater este paralelogram.***

Demonstrație. ⊙ În figura 30 este reprezentat patrulaterul $ABCD$, în care $BC = AD$ și $BC \parallel AD$. Să demonstrăm că patrulaterul $ABCD$ — paralelogram.

Trasăm diagonala AC. În triunghiurile ABC și CDA avem: $BC = AD$ în conformitate cu condiția, unghiurile 1 și 2 sunt egale ca unghiuri alterne interne la dreptele paralele BC și AD și secanta AC, iar latura AC comună. Așadar, triunghiurile ABC și CDA sunt egale pa baza primului criteriu de egalitate al triunghiurilor. De aici $AB = CD$. Deci în patrulaterul $ABCD$ fiecare două laturi opuse sunt egale. De aceea pe baza teoremei 3.1 patrulaterul $ABCD$ este paralelogram. ▲

Teorema 3.3 (inversă teoremei 2.3). ***Dacă într-un patrulater diagonalele sunt împărțite în jumătate de către punctul lor de intersecție, atunci acest patrulater este paralelogram.***

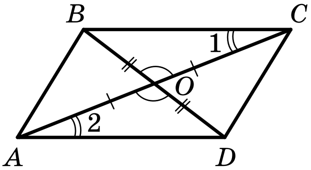


Fig. 31

Demonstrație. ⊙ În figură este reprezentat patrulaterul $ABCD$, în care diagonalele AC și BD se intersectează în punctul O, totodată $AO = OC$ și $BO = OD$. Să demonstrăm, că patrulaterul $ABCD$ — paralelogram.

Deoarece unghiurile BOC și DOA sunt egale ca verticale, $AO = OC$ i $BO = OD$, reiese că triunghiurile BOC și DOA sunt egale pa baza primului criteriu de e galitate al triunghiurilor. De aici $BC = AD$ și $\angle 1 = \angle 2$. Unghiurile 1 și 2 sunt alterne interne pentru dreptele BC și AD și secanta AC. Deci $BC \parallel AD$.

Așadar, în patrulaterul $ABCD$ două laturi opuse sunt egale și paralele. În virtutea teoremei 3.2 patrulaterul $ABCD$ — paralelogram. ▲

Voi știți că triunghiul poate fi determinat univoc de laturile lui, adică problema construirii triunghiului, fiind cunoscute trei laturi ale lui, are o singură soluție. Altă chestie — paralelogramul. În figura 32 sunt reprezentate paralelogramele $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, ale căror laturi sunt egale, adică $AB = A_1B_1 = A_2B_2$ și $BC = B_1C_1 = B_2C_2$. Însă este evident că înseși paralelogramele nu sunt egale.

Cele spuse înseamnă, că dacă patru stinghii de le unit astfel, ca să se formeze un paralelogram, atunci construcția nu va fi rigidă.

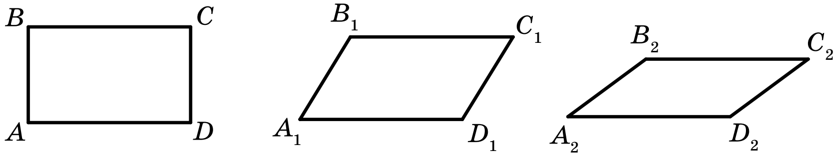


Fig. 32

Această proprietate a paralelogramelor se aplică pe larg în practică. Datorită mobilității paralelogramului lampa poate fi stabilită într-o poziție comodă pentru lucru, iar rețeaua glisantă — de-o mutat la distanța necesară în deschizătură ușii (fig. 33).

În figura 34 este reprezentată schema mecanismului, care este parte componentă a mașinii cu abur. Odată cu mărirea vitezei de rotație a axului bilele se îndepărtează de el sub acțiunea forței centrifuge, ca urmare ridicând clapeta, care reguleazǎ cantitatea aburului. Mecanismul se numește **paralelogramul lui Watt** (se pronunță Uatt) în cinstea inventatorului primei mașini universale cu abur.

Fig. 33

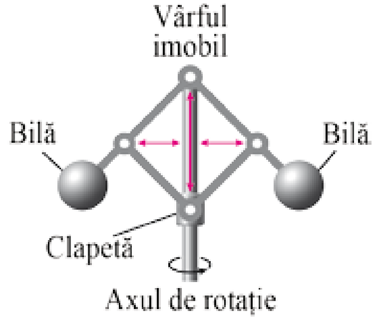


Fig. 34

Problemă. Demonstrați că dacă într-un patrulater fiecare două unghiuri opuse sunt egale, atunci acest patrulater este paralelogram.

Rezolvare. În figura 35 este reprezentat patrulaterul $ABCD$, în care $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$. Să demonstrăm, că patrulaterul $ABCD$ — paralelogram.

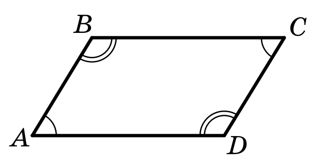


Fig. 35

Pe baza teoremei despre suma unghiurilor unui patrulater $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Ținând cont de faptul că $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, obținem: $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$.

Deoarece unghiurile A și B — sunt unghiuri de aceeași parte a secantei AD și BC pentru laturile AB, iar suma lor este egală cu $180°$, rezultă că $BC \parallel AD$.

Analogic demonstrăm, că $AB \parallel CD$.

Deci, patrulaterul $ABCD$ — paralelogram.

1. Ce criterii ale paralelogramului voi știți? Formulați-le.
2. Dintre proprietățile și criteriile paralelogramului indicați teoremele reciproc inverse.
3. Care proprietate a paralelogramului se aplică în practică?

EXERCIȚII

90.° Demonstrați că dacă suma unghiurilor, alăturate la oricare din laturile alăturate ale patrulaterului este egală cu 180°, atunci acest patrulater este paralelogram.

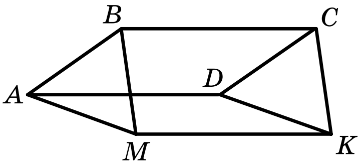


Fig. 36

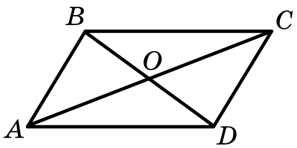


Fig. 37

91.° Patrulaterele *ABCD* și *AMKD* sunt paralelograme (fig. 36). Demonstrați, că patrulaterul *BMKC* — paralelogram.

92.° Segmentul *AO* — mediana triunghiului *ABD*, segmentul *BO* — mediana triunghiului *ABC* (fig. 37). Demonstrați că patrulaterul *ABCD* — paralelogram.

93.° Pe diagonala *AC* a paralelogramului *ABCD* au notat punctele *M* și *K* astfel, că $AM = CK$. Demonstrați că patrulaterul *MBKD* — paralelogram.

94.° Două circumferințe au centrul comun *O* (fig. 38). În una din circumferințe este dus diametrul *AB*, iar în a doua — diametrul *CD*. Demonstrați că patrulaterul *ACBD* — paralelogram.

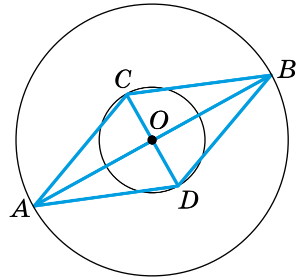


Fig. 38

95.° Punctele *E* și *F* — sunt corespunzător mijlocurile laturilor *BC* și *AD* ale paralelogramului *ABCD*. Demonstrați că patrulaterul *AECF* — paralelogram.

96.° Pe laturile *AB* și *CD* ale paralelogramului *ABCD* sunt depuse segmentele egale *AM* și *CK*. Demonstrați că patrulaterul *MBKD* — paralelogram.

97.° Pe laturile paralelogramului *ABCD* (fig. 39) sunt depuse segmentele egale *AM*, *BK*, *CE* și *DF*. Demonstrați că patrulaterul *MKEF* — paralelogram.

98.• În triunghiul *ABC* pe prelungirea medianei *AM* după punctul M s-a depus segmentul *MK*, care este egal cu segmentul *AM*. Determinați tipul patrulaterului *ABKC*.

99.• În patrulaterul *ABCD* se știe că $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$. Demonstrați că patrulaterul *ABCD* — paralelogram.

100.• Bisectoarea unghiului *A* a paralelogramului *ABCD* intersectează latura *BC* în punctul *M*, iar bisectoarea unghiului *C* — latura *AD* în punctul *K*. Demonstrați, că patrulaterul *AMCK* — paralelogram.

101.• În figura 40 patrulaterul *ABCD* este paralelogram, $\angle BCP = \angle DAE$. Demonstrați că patrulaterul *APCE* — paralelogram.

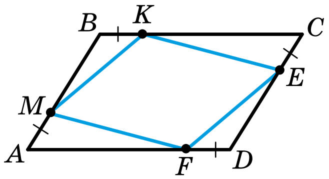


Fig. 39

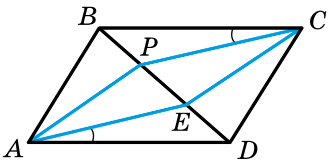


Fig. 40

102.• În figura 41 patrulaterul $ABCD$ — paralelogram, $\angle BEC = \angle DFA$. Demonstrați că patrulaterul $AECF$ — paralelogram.

103.• Din vârfurile B și D ale paralelogramului $ABCD$ sunt coborâte perpendicularele BM și DK pe diagonala AC. Demonstrați că patrulaterul $BKDM$ — paralelogram.

104.• Bisectoarele unghiurilor A și C ale paralelogramului $ABCD$ intersectează diagonala lui BD în punctele E și F corespunzător. Demonstrați că patrulaterul $AECF$ — paralelogram.

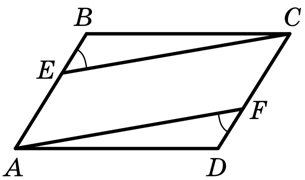


Fig. 41

105.•• Prin mijlocul O al diagonalei NP a paralelogramului $MNKP$ este dusă o dreaptă, care intersectează laturile MN și KP în punctele A și B corespunzător. Demonstrați că patrulaterul $ANBP$ — paralelogram.

106.•• Prin punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului $CDEF$ sunt duse două drepte, din care una intersectează laturile CD și EF în punctele A și B corespunzător, iar a doua — laturile DE și CF în punctele M și K respectiv. Demonstrați că patrulaterul $AMBK$ — paralelogram.

107.•• Punctele M, N, K și P sunt mijlocurile laturilor AB, BC, CD și AD ale paralelogramului $ABCD$ corespunzător. Demonstrați, că patrulaterul, ale cărui vârfuri sunt punctele de intersecție ale dreptelor AN, BK, CP și DM — paralelogram.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

108. Dreptele, pe care se află bisectoarele AK și BM ale triunghiului ABC, se intersectează sub unghiul de 74°. Aflați unghiul C.

109. Unghiul, opus bazei unui triunghi isoscel, este egal cu 120°, iar înălțimea, coborâtă pe latura laterală, este egală cu 8 cm. Aflați baza triunghiului.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

110. Profesorul le-a propus elevilor să decupeze dintr-o foaie de carton cu dimensiunile de 8×8 pătrățele opt pătrate cu dimensiunea 2×2 pătrățele cu condiția să nu strice pătrățelele care rămân. Apoi s-a constatat că trebuie încă tot așa un pătrat. Oare totdeauna se poate aceasta face din resturile foii?

NECESAR ȘI SUFICIENT

Din cursul de geometrie al clasei a 7-a ați aflat că majoritatea teoremelor constau din două părți: condiția (aceea, ce se dă) și concluzia (aceea ce trebuie de demonstrat).

Dacă afirmația, care expune condiția de o însemnat cu litera A, iar afirmația, care expune concluzia — cu litera B, atunci formularea teoremei poate fi reprezentată cu schema următoare:

dacă *A*, atunci *B*.

De exemplu teorema 2.3 poate fi formulată astfel:

	A		*B*
dacă	patrulaterul este paralelogram,	**atunci**	diagonalele patrulaterului sunt împărțite în jumătate de punctul lor de intersecție

Atunci teorema 3.3, inversă teoremei 2.3 se poate formula astfel:

	A		*B*
dacă	diagonalele patrulaterului sunt împărțite în jumătate de punctul lor de intersecție,	**atunci**	patrulaterul este paralelogram

Deseori în viața de toate zilele noi în enunțările noastre ne folosim de cuvintele „necesar”, „suficient”. Aducem câteva exemple.

- Pentru a se pricepe a rezolva problemele este *necesar* de știut teoremele.
- Dacă voi la olimpiada matematică ați rezolvat corect toate problemele propuse, atunci aceasta este *suficient* pentru aceea ca să ocupați primul loc.

Întrebuințarea cuvintelor „necesar” și „suficient” este strâns legată cu teoremele.

Să considerăm teorema:

	A		***B***
dacă	umărul natural este multiple lui 10,	**atunci**	acest număr este multiplul lui 5

Condiția A este suficientă pentru a face concluzia B. În același timp împărțirea numărului fără rest la 5 (afirmația B) este necesară pentru divizibilitatea (împărțirea fără rest) a numărului la 10 (afirmația A).

Aducem încă un exemplu:

	A		***B***
dacă	două unghiuri sunt verticale,	**atunci**	aceste unghiuri sunt egale

În această teoremă afirmația A este **condiție suficientă** pentru afirmația B, adică pentru aceea ca două unghiuri să fie egale, este *suficient*, ca ele să fie verticale. În tot această teoremă afirmația B este **condiție necesară** pentru afirmația A, adică pentru aceea ca două unghiuri să fie verticale, este *necesar* sa ele să fie egale. Menționăm că afirmația B nu este condiție suficientă pentru afirmația A. Într-adevăr, dacă două unghiuri sunt egale, atunci aceasta deloc nu înseamnă că ele sunt verticale.

Deci, în oricare teoremă de tipul **dacă *A*, atunci *B*** afirmația A este suficientă pentru afirmația B, iar afirmația B — necesară pentru afirmația A.

Dacă este justă nu numai teorema

dacă *A*, atunci *B*,

dar și teorema inversă

dacă *B*, atunci *A*,

atunci A este condiția **necesară și suficientă** pentru B, iar B — condiția necesară și suficientă pentru A.

De exemplu, teoremele 3.3 și 2.3 sunt reciproc inverse. În limbajul „necesar — suficient” acest fapt se poate formula astfel:

pentru aceea ca patrulaterul să fie paralelogram este necesar și suficient ca diagonalele lui să fie împărțite în jumătate de punctul lor de intersecție.

Subliniem că dacă în teoremă sunt cuvintele „necesar” și „suficient”, atunci ea unește două teoreme: directă și inversă (teoremă directă poate fi oricare din două teoreme, atunci a doua va fi inversă). Așadar, demonstrarea unei astfel de teoreme trebuie să fie compusă din două părți: a demonstrațiilor teoremelor directe și inverse. Teorema care unește teoremele directă și inversă se numește **criteriu**.

Uneori în loc de „necesar și suficient” se spune „atunci și numai atunci”. De exemplu, teoremele reciproc inverse 2.1 și 3.1 pot fi unite în următorul criteriu:

patrulaterul este paralelogram atunci și numai atunci, când fiecare două laturi opuse ale lui sunt egale.

Formulați de sine stătător teorema 2.2 și problema — cheie din punctul 3 în formă de teoremă — criteriu.

4. Dreptunghiul

Paralelogramul este patrulater, însă este evident, că nu fiecare patrulater este paralelogram. Într-un asemenea caz se spune că paralelogramul este un tip aparte, particular de patrulatere. Figura 43 ilustrează acest fapt.

Există de asemenea tipuri particulare de paralelograme.

Definiție. Dreptunghi se numește paralelogramul, în care toate unghiurile sunt drepte.

În figura 43 este reprezentat dreptunghiul $ABCD$.

Din definiție rezultă că dreptunghiul are toate proprietățile paralelogramului. *Într-un dreptunghi*:

- *laturile opuse sunt egale;*
- *diagonalele sunt împărțite în jumătate de punctul lor de intersecție.*

Dar dreptunghiul are proprietățile sale specifice, pe care nu le are paralelogramul, diferit de dreptunghi. Astfel din definiție reiese, că toate unghiurile dreptunghiului sunt egale. Mai o proprietate a dreptunghiului o stabilește așa o teoremă.

Teorema 4.1. ***Diagonalele dreptunghiului sunt egale.***

Demonstrație. ⊙ În figura 44 este reprezentat dreptunghiul $ABCD$. Să demonstrăm că diagonalele lui AC și BD sunt egale.

În triunghiurile dreptunghice ABD și DCA catetele AB și CD sunt egale, iar cateta AD este comună. De aceea triunghiurile ABD și DCA sunt egale după două catete. De aici $BD = AC$. ▲

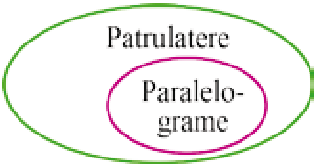


Fig. 42

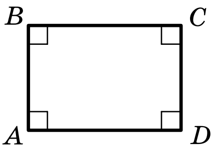


Fig. 43

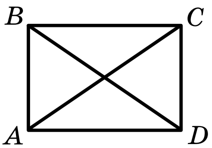


Fig. 44

Definiția dreptunghiului ne permite să recunoaștem printre paralelograme dreptunghiurile. Anume acestui scop servesc următoarele două teoreme, care se numesc criteriile dreptunghiului.

Teorema 4.2. ***Dacă unul din unghiurile paralelogramului este drept, atunci acest paralelogram este dreptunghi.***

Demonstrați această teoremă de sine stătător.

Teorema 4.3. ***Dacă diagonalele paralelogramului sunt egale, atunci acest paralelogram este dreptunghi.***

Demonstrație. ⊙ În figura 45 este reprezentat paralelogramul $ABCD$, ale cărui diagonale AC și BD sunt egale. Să demonstrăm, că paralelogramul $ABCD$ este dreptunghi.

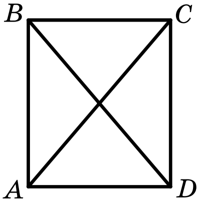


Fig. 45

Să cercetăm triunghiurile ABD și DCA. În ele $AB = CD$, $BD = AC$, AD — latura comună. Deci, aceste triunghiuri sunt egale pe baza criteriului al treilea de egalitate a triunghiurilor. De aici $\angle BAD = \angle CDA$. Aceste unghiuri sunt de aceeași parte a secantei pentru dreptele paralele AB și DC și secanta AD. Astfel, $\angle BAD + \angle CDA = 180°$. De aici $\angle BAD = \angle CDA = 90°$. De aceea pe baza teoremei 4.2 paralelogramul $ABCD$ — dreptunghi. ▲

1. Ce figură se numește dreptunghi?
2. Ce proprietăți are dreptunghiul?
3. Care proprietate specifică au diagonalele dreptunghiului?
4. Cu care criterii se poate stabili că paralelogramul este dreptunghi?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

111.° Desenați un dreptunghi. Folosindu-se numai de riglă de găsit punctul, egal depărtat de vârfurile lui.

EXERCIȚII

112.° Demonstrați că patrulaterul la care toate unghiurile sunt drepte este dreptunghi.

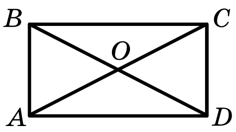


Fig. 46

113.° Diagonalele dreptunghiului $ABCD$ (fig. 46) se intersectează în punctul O. Demonstrați că triunghiurile AOB și AOD sunt isoscele.

114.° Diagonalele dreptunghiului $ABCD$ (fig. 46) se intersectează în punctul O, $\angle ABD = 64°$. Aflați unghiurile COD și AOD.

115.° Diagonalele dreptunghiului $ABCD$ (fig. 46) se intersectează în punctul O, $\angle ADB = 30°$, $BD = 10$ cm. Aflați perimetrul triunghiului AOB.

116.° Diagonalele dreptunghiului fac unghi de 60°, iar latura mai mică a dreptunghiului este egală cu 8 cm. Aflați diagonala dreptunghiului.

117.• Pe diagonala AC a dreptunghiului $ABCD$ sunt depuse segmentele egale AM și CK (punctul M este situat între punctele A și K). Demonstrați că patrulaterul $BKDM$ — paralelogram, diferit de dreptunghi.

118.• Pe prelungirea diagonalei BD a dreptunghiului $ABCD$ după punctul B au însemnat punctul E, iar pe prelungirea ei după punctul D — punctul F astfel, că $BE = DF$. Demonstrați că patrulaterul AECF — paralelogram diferit de dreptunghi.

119.• Punctul M — mijlocul laturii BC a dreptunghiului $ABCD$, $MA \perp MD$, perimetrul dreptunghiului este egal cu 36 cm. Aflați laturile dreptunghiului.

120.• Perimetrul dreptunghiului $ABCD$ este egal cu 30 cm. Bisectoarele unghiurilor A și D se intersectează în punctul M, care aparține laturii BC. Aflați laturile dreptunghiului.

121.• Ipotenuza unui triunghi isoscel dreptunghic este egală cu 55 cm. Dreptunghiul $ABCD$ este construit astfel că două vârfuri A și D ale lui aparțin ipotenuzei, iar celelalte două — catetelor triunghiului dat. Aflați laturile dreptunghiului, dacă $AB : BC = 3 : 5$.

122.• În triunghiul ABC se știe că $\angle C = 90°$, $AC = BC = 6$ cm. Dreptunghiul $CMKN$ este construit astfel, că punctul M aparține catetei AC, punctul N — catetei BC, iar punctul K — ipotenuzei AB. Aflați perimetrul dreptunghiului $CMKN$.

123.• Demonstrați că atunci, când diagonalele paralelogramului formează unghiuri egale cu una din laturile lui, în acest caz paralelogramul este dreptunghi.

124.• Demonstrați că mediana triunghiului dreptunghic, dusă la ipotenuză, este egală cu jumătatea ei.

125.• Construiți dreptunghiul
1) după două laturi;
2) după diagonală și unghiul făcut de diagonală cu latura.

126.• Construiți dreptunghiul:
1) după latură și diagonală:
2) după diagonală și unghiul dintre diagonale.

127.•• Mediatoarea diagonalei AC a dreptunghiului $ABCD$ intersectează latura BC în punctul M astfel, că $BM : MC = 1 : 2$. Aflați unghiurile, în care diagonala dreptunghiului împarte unghiul lui.

128.•• În dreptunghiul $ABCD$ se știe, că $\angle BCA : \angle DCA = 1 : 5$, $AC = 18$ cm. Aflați distanța de la punctul C până la diagonala BD.

129.•• Demonstrați că bisectoarele unghiurilor unui paralelogram, în care laturile alăturate nu sunt egale, intersectându-se, formează un dreptunghi.

130.•• Construiți dreptunghiul, dacă se știe latura și unghiul dintre diagonale, care este opus laturii date.

131.* Construiți dreptunghiul:
1) dacă se știe diagonala lui și diferența a două laturi;
2) după perimetru și diagonală;
3) după perimetrul și unghiul format de diagonale.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

132. În triunghiul ABC se știe că $\angle C = 48°$, segmentele AK și BM — înălțimile lui. Aflați unghiurile dintre dreptele AK și BM.

133. Pe latura AC a triunghiului este notat punctul D astfel, că $\angle A = \angle CBD$. Aflați unghiul ABC, dacă triunghiurile ABC și BCD au încă o pereche de unghiuri egale.

134. Segmentul AD — bisectoarea triunghiului ABC. Prin punctul C este dusă dreapta, paralelă cu dreapta AD și care intersectează dreapta AB în punctul E. Determinați tipul triunghiului ACE.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

135. Pe plan sunt însemnate 1000 de puncte. Demonstrați că există o dreaptă, în raport cu care în fiecare semiplan sunt situate câte 500 de puncte.

5. Rombul

Voi deja știți că dreptunghiul este un tip particular al paralelogramului. Faceți cunoștință cu încă un tip particular al paralelogramului — cu rombul.

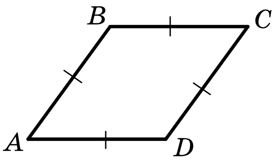


Fig. 47

Definiție. Se numește romb paralelogramul, la care toate laturile sunt egale.

În figura 47 este reprezentat rombul $ABCD$. Din definiție rezultă că rombul are toate proprietățile paralelogramului. În romb:

- *unghiurile opuse sunt egale;*
- *diagonalele sunt împărțite în jumătate de către punctul lor de intersecție.*

Dar rombul are și proprietățile sale specifice.

Teorema 5.1. ***Diagonalele rombului sunt perpendiculare și sunt bisectoarele unghiurilor lui.***

Demonstrație. ⊙ În figura 48 este reprezentat rombul $ABCD$, ale cărui diagonale se intersectează în punctul O. Să demonstrăm, că $BD \perp AC$ și $\angle ABO = \angle CBO$.

Deoarece conform definiției rombului toate laturile lui sunt egale, rezultă că triunghiul ABC este isoscel ($AB = BC$). Pe baza proprietății diagonalelor unui paralelogram $AO = OC$. Atunci segmentul BO este mediana triunghiului ABC, deci, și înălțimea, și bisectoarea acestui triunghi. Astfel, $BD \perp AC$ și $\angle ABO = \angle CBO$. ▲

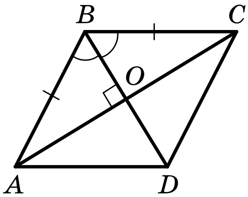


Fig. 48

A recunoaște rombul dintre paralelograme permit nu numai definiția rombului, dar și următoarele două teoreme, care se numesc criteriile rombului.

Teorema 5.2. ***Dacă diagonalele paralelogramului sunt perpendiculare, atunci acest paralelogram este romb.***

Teorema 5.3. ***Dacă diagonala paralelogramului este bisectoarea unghiului lui, atunci acest paralelogram este romb.***

Demonstrați aceste teoreme de sine stătător.

?

1. Ce figură se numește romb?
2. Ce proprietăți are rombul?
3. Ce proprietăți specifice au diagonalele rombului?
4. După care criterii se poate stabili că paralelogramul este romb?

ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

136.° Desenați rombul cu latura de 5 cm și unghiul de 40°. Duceți două înălțimi din vârful unghiului ascuțit al lui și două înălțimi din vârful unghiului obtuz.

EXERCIȚII

137.° Demonstrați că dacă două laturi alăturate ale paralelogramului sunt egale, atunci el este romb.

138.° Demonstrați că patrulaterul, toate laturile căruia sunt egale, este romb.

139.° Diagonala AC a rombului $ABCD$ (fig. 49) formează cu latura AD unghi de 42°. Aflați toate unghiurile rombului.

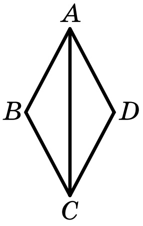


Fig. 49

140.° În rombul $ABCD$ se știe că $\angle C = 140°$, iar diagonalele se intersectează în punctul O. Aflați unghiurile triunghiului AOB.

141.° Una din diagonalele rombului este egală cu latura lui. Aflați unghiurile lui.

142.° Aflați unghiurile rombului, dacă perimetrul lui este egal cu 24 cm, iar înălțimea — cu 3 cm.

143.° Aflați perimetrul rombului $ABCD$, dacă $\angle A = 60°$, $BD = 9$ cm.

144.° Unghiul D al rombului $ABCD$ este de 8 ori mai mare decât unghiul CAD. Aflați unghiul BAD.

145.° Unghiurile, pe care latura rombului le formează cu diagonalele lui, se raportă ca 2 : 7. Aflați unghiurile rombului.

146.° Punctele M și K — respectiv mijlocurile laturilor AB și CB ale rombului $ABCD$. Demonstrați că $MD = KD$.

147.° Punctele E și F sunt respectiv mijlocurile laturilor BC și CD ale rombului $ABCD$. Demonstrați că $\angle EAC = \angle FAC$.

148.° Demonstrați că înălțimile rombului sunt egale.

149.• Înălțimea rombului, dusă din vârful unghiului obtuz al lui, împarte latura rombului în jumătate. Diagonala mai mică a rombului este egală cu 4 cm. Aflați unghiurile și perimetrul rombului.

150.• Demonstrați că diagonala rombului împarte în jumătate unghiul dintre înălțimile rombului, duse din tot același vârf al lui, ca și diagonala.

151.• Pe laturile AB și AD ale rombului $ABCD$ sunt depuse segmentele egale AE și AF corespunzător. Demonstrați, că $\angle CEF = \angle CFE$.

152.• Segmentul AM — bisectoarea triunghiului ABC. Prin punctul M este dusă dreapta, care este paralelă cu latura AC și intersectează latura AB în punctul K, și dreapta, care este paralelă cu latura AB și intersectează latura AC în punctul D. Demonstrați că $AM \perp DK$.

153.• Bisectoarele unghiurilor A și B ale paralelogramului $ABCD$ intersectează laturile lui BC și AD respectiv în punctele F și E. Determinați tipul patrulaterului $ABFE$.

154.• În triunghiul ABC este dusă mediatoarea bisectoarei lui BD, care intersectează laturile AB și BC corespunzător în punctele K și P. Determinați tipul patrulaterului $BKDP$.

155.• Construiți rombul:
1) dacă se dă latura și un unghi;
2) dacă se dau ambele diagonale;
3) după înălțimea și unghiul cunoscut.

156.• Construiți rombul:
1) după latură și diagonală;
2) după înălțime și diagonală.

157.•• În dreptunghiul $ABCD$ se știe că $AD = 9$ cm, $\angle BDA = 30°$. Pe laturile BC și AD sunt notate respectiv punctele M și K astfel, că s-a obținut rombul $AMCK$. Aflați latura acestui romb.

158.•• Construiți rombul după diagonală și unghiul, vârful căruia aparține acestei diagonale.

159.•• Construiți rombul după diagonală și unghiul rombului, opus ei.

160.* Construiți rombul:
1) după suma diagonalelor și unghiul făcut de diagonală cu latura;
2) după unghiul ascuțit și diferența diagonalelor;
3) după unghiul ascuțit și suma laturii și a înălțimii;
4) după latură și suma diagonalelor;
5) după unghiul obtuz și suma diagonalelor;
6) după latura și diferența diagonalelor.

161.* Sunt date punctele M, N și K. Construiți rombul $ABCD$ astfel, ca punctul M să fie mijlocul laturii AB, iar punctele N și K — bazele înălțimilor, duse din vârful B la latura AD și din vârful D la latura BC corespunzător.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

162. Pe laturile unghiului cu vârful în punctul A sunt depuse segmentele egale AB și AC. Prin punctele B și C sunt duse drepte, care sunt perpendiculare la laturile AB și AC corespunzător, și care se intersectează în punctul D. Demonstrați, că semidreapta AD este bisectoarea unghiului BAC.

163. Pe prelungirea laturii AC a triunghiului ABC după punctul A au notat punctul D în așa fel, că $AD = AB$, iar pe prelungirea acestei laturi după punctul C — un așa punct E s-a însemnat, că $CE = BC$. Aflați unghiurile și perimetrul triunghiului ABC, dacă $DE = 18$ cm, $\angle BDA = 15°$, $\angle BEC = 36°$.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

164. Pe o foaie de hârtie în pătrățele au ales la întâmplare 100 de pătrățele. Demonstrați că printre ele se pot găsi nu mai puțin de 25 de pătrățele, care n-au puncte comune.

6. Pătratul

Definiție. Pătrat se numește dreptunghiul, în care toate laturile sunt egale.

În figura 50 este reprezentat pătratul $ABCD$.

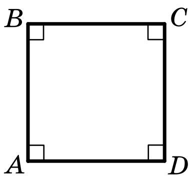


Fig. 50

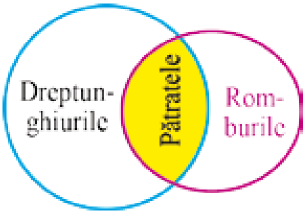


Fig. 51

Din definiția adusă rezultă, că pătratul — acesta-i rombul, în care toate unghiurile sunt egale. Deci, pătratul este un tip aparte și de dreptunghi, și de romb. Aceasta ilustrează figura 51. De aceea pătratul are toate proprietățile dreptunghiului și ale rombului. De aici reiese că:

- *toate unghiurile pătratului sunt egale;*
- *diagonalele pătratului sunt egale, perpendiculare și sunt bisectoarele unghiurilor lui.*

1. Ce figură se numește pătrat?
2. Care romb este pătrat?
3. Ce proprietăți are pătratul?

EXERCIȚII

165.° Demonstrați că dacă unul din unghiurile rombului este drept, atunci acest romb este pătrat.

166.° Demonstrați că dacă două laturi alăturate ale dreptunghiului sunt egale, atunci acest dreptunghi este pătrat.

167.° Diagonala BD a pătratului $ABCD$ este egală cu 5 cm. Ce lungime are diagonala AC? Cu ce sunt egale unghiurile triunghiului AOB, unde O — punctul de intersecție al diagonalelor pătratului?

168.° Pe latura BC a pătratului $ABCD$ (fig. 52) au însemnat astfel punctul K, că $\angle AKB = 74°$. Aflați unghiul CAK.

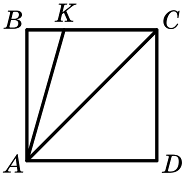


Fig. 52

169.° Pe latura BC a pătratului $ABCD$ au notat punctul K astfel, că $AK = 2BK$. Aflați unghiul KAD.

170.° Oare este adevărată afirmația:
1) orice pătrat este paralelogram;
2) orice romb este pătrat;
3) orice dreptunghi este pătrat;
4) orice pătrat este dreptunghi;
5) orice pătrat este romb;
6) dacă diagonalele patrulaterului sunt egale, atunci el este dreptunghi;
7) dacă diagonalele patrulaterului sunt perpendiculare atunci el este romb;
8) există romb, care este dreptunghi;
9) există pătrat, care nu este romb;
10) dacă diagonalele patrulaterului nu sunt perpendiculare, atunci el nu este romb;
11) dacă diagonalele paralelogramului nu-s egale, atunci el nu-i dreptunghi;
12) dacă diagonala dreptunghiului împarte unghiul lui în jumătate, atunci acest dreptunghi este pătrat?

171.• Prin vârfurile pătratului sunt duse drepte, paralele cu diagonalele lui. Demonstrați că punctele de intersecție ale acestor drepte sunt vârfurile unui pătrat.

172.• Într-un triunghi dreptunghic prin punctul de intersecție a bisectoarei unghiului drept și a ipotenuzei sunt duse drepte, paralele cu catetele triunghiului. Demonstrați că patrulaterul ce s-a format, este pătrat.

173.• Punctele M, K, N, P sunt corespunzător mijlocurile laturilor AB, BC, CD și AD ale pătratului $ABCD$. Demonstrați că patrulaterul $MKNP$ — pătrat.

174.• În triunghiul ABC se știe că $\angle C = 90°$, $AC = BC = 14$ cm. Două laturi ale pătratului $CDEF$ aparțin catetelor triunghiului ABC, iar vârful E aparține ipotenuzei AB. Aflați perimetrul pătratului $CDEF$.

175.• În pătratul $ABCD$ este notat punctul M astfel, că triunghiul AMB este echilateral. Demonstrați că triunghiul CMD este isoscel.

176.• Demonstrați că dacă diagonalele paralelogramului sunt egale și perpendiculare, atunci acest paralelogram este pătrat.

177.• Patrulaterele $ABCD$, $DEFM$, $MNKL$, $LPOS$, $SQTV$ — pătrate (fig. 53). Aflați suma lungimilor a acestor laturi a pătratelor, care nu sunt situate pe dreapta AV, dacă lungimea segmentului AV este egală cu 16 cm.

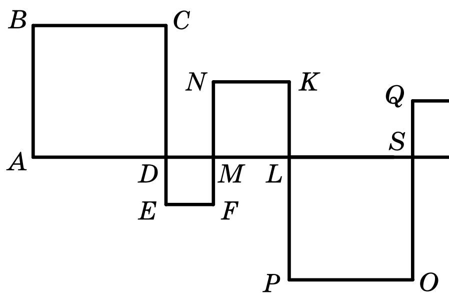


Fig. 53

178.• Construiți pătratul, dacă se dă latura lui.

179.•• Demonstrați că punctele de intersecție ale bisectoarelor unghiurilor unui dreptunghi, care nu este pătrat, sunt vârfuri ale pătratului.

180.•• Vârfurile M și K ale triunghiului echilateral AMK aparțin laturilor BC și CD ale pătratului $ABCD$. Demonstrați că $MK \parallel BD$.

181.•• Sunt date punctele M și K. Construiți pătratul $ABCD$ astfel, ca punctul M să fie mijlocul laturii AB, iar punctul K — mijlocul laturii BC.

182.* Printr-un punct arbitrar, care aparține pătratului, sunt duse două drepte perpendiculare, fiecare din ele intersectează două laturi opuse ale pătratului. Demonstrați că segmentele acestor drepte, care aparțin pătratului, sunt egale.

183.* Construiți pătratul:

1) după suma diagonalei și a laturii;

2) după diferența diagonalei și a laturii.

184.* În pătratul $ABCD$ notăm punctul O astfel, că $\angle OAD = \angle ODA = 15°$. Demonstrați că triunghiul BOC este echilateral.

185.* Pe laturile BC și CD ale pătratului $ABCD$ sunt notate punctele M și E astfel, că unghiurile BAM și MAE sunt egale. Demonstrați, că $AE = BM + DE$.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

186. În figura 54 $AB \parallel CD$, $AB = AE$, $CD = CE$. Demonstrați, că $BE \perp DE$.

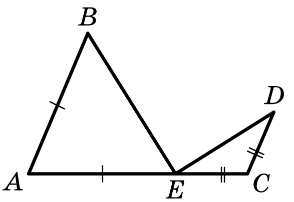


Fig. 54

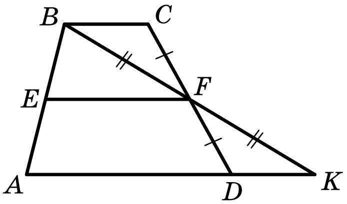


Fig. 55

187. În figura 55 $EF \parallel AD$, $BF = KF$, $CF = DF$. Demonstrați că $EF \parallel BC$.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

188. Repartizați pe plan opt puncte în așa un mod, ca pe mediatoarea a fiecărui segment cu extremitățile în aceste puncte să fie situate exact două din aceste puncte.

7. Linia media a triunghiului

Definiție. Linie medie a triunghiului se numește segmentul care unește mijlocurile a două laturi ale lui.

În figura 56 segmentele MN, NE, EM — liniile medii ale triunghiului ABC.

Teorema 7.1. ***Linia medie a unui triunghi care unește mijlocurile a două laturi ale lui este paralelă cu latura a treia și este egală cu jumătatea ei.***

Demonstrație. Fie MN — linia medie a triunghiului ABC (fig. 57). Să demonstrăm, că $MN \parallel AC$ i $MN = \frac{1}{2}AC$.

Pe dreapta MN notăm punctul E astfel, că $MN = NE$ (fig. 57). Unim cu un segment punctele E și C. Deoarece punctul N este mijlocul segmentului BC, avem $BN = NC$. Unghiurile 1 și 2 sunt egale ca verticale. Deci,

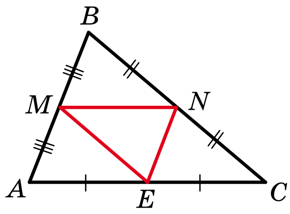


Fig. 56

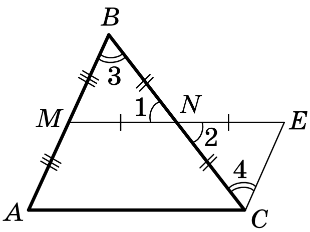


Fig. 57

triunghiurile MBN și ECN sunt egale pe baza primului criteriu de egalitate a triunghiurilor. De aici $MB = EC$ și $\angle 3 = \angle 4$. Ținând cont de faptul, că $AM = BM$, obținem: $EC = AM$. Unghiurile 3 și 4 sunt alterne interne la dreptele AB și EC, și secanta BC. Atunci $AB \parallel EC$.

Astfel, în patrulaterul $AMEC$ laturile AM și EC sunt paralele și egale. Deci pe baza teoremei 3.2 patrulaterul $AMEC$ este paralelogram. De aici, $ME \parallel AC$, adică $MN \parallel AC$.

De asemenea $ME = AC$. Deoarece $MN = \frac{1}{2}ME$, avem $MN = \frac{1}{2}AC$. ▲

Problemă. Demonstrați că mijlocurile laturilor unui patrulater sunt vârfuri ale paralelogramului.

Rezolvare. În patrulaterul $ABCD$ punctele M, N, K și P – mijlocurile laturilor AB, BC, CD și AD corespunzător (fig. 58).

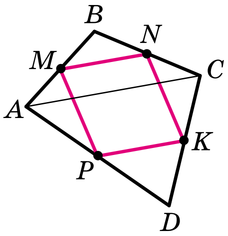


Fig. 58

Segmentul MN — linia medie a triunghiului ABC. Pe baza proprietății linii medii a triunghiului $MN \parallel AC$ și $MN = \frac{1}{2}AC$.

Segmentul PK — linia medie a triunghiului ADC. Pe baza proprietății linii medii a triunghiului $PK \parallel AC$, $PK = \frac{1}{2}AC$.

Deoarece $MN \parallel AC$ și $PK \parallel AC$, atunci $MN \parallel PK$.

Din egalitățile $MN = \frac{1}{2}AC$ și $PK = \frac{1}{2}AC$ obținem: $MN = PK = \frac{1}{2}AC$.

Așadar, în patrulaterul $MNKP$ laturile MN și PK sunt egale și paralele, de aceea patrulaterul $MNPK$ este paralelogram. ●

1. Ce numim linie medie a triunghiului?
2. Câte linii medii se pot duce într-un triunghi?
3. Ce proprietate are linia medie a triunghiului?

EXERCIȚII

189.° Oare este segmentul *MK* linia medie a triunghiului *ABC* (fig. 59)?
190.° Oare este segmentul *EF* linia medie a triunghiului *MKP* (fig. 60)?

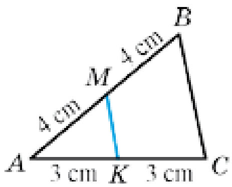


Fig. 59

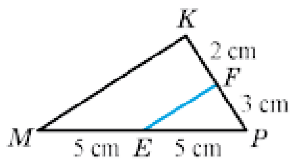


Fig. 60

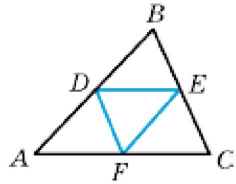


Fig. 61

191.° Segmentele *DE* și *DF* — linii medii ale triunghiului *ABC* (fig. 61). Oare este segmentul *EF* linie medie a acestui triunghi?
192.° Laturile triunghiului sunt de 6 cm, 8 cm și 12 cm. Aflați liniile medii ale triunghiului dat.
193.° Punctele *M* și *K* — mijlocurile laturilor *AB* și *AC* ale triunghiului *ABC* corespunzător. Aflați perimetrul triunghiului *ABC*, dacă perimetrul triunghiului *MAK* este egal cu 17 cm.
194.° Demonstrați că perimetrul triunghiului, ale cărui laturi sunt linii medii ale triunghiului *ABC*, este egal cu jumătate din perimetrul triunghiului *ABC*.
195.° Determinați tipul triunghiului, în care liniile medii sunt egale între ele.
196.° Demonstrați că liniile medii ale triunghiului îl împart în patru triunghiuri egale.
197.° Punctele *E* și *F* — respectiv, mijlocurile laturilor *AB* și *BC* ale triunghiului *ABC*. Aflați latura *AC*, dacă ea este cu 7 cm mai mare decât segmentul *EF*.
198.° Demonstrați că linia medie *DE* a triunghiului ABC (punctele *D* și E aparțin, corespunzător, laturilor *AB* și *BC*) și mediana lui *BM* sunt împărțite în jumătate de către punctul lor de intersecție.
199.° Demonstrați că înălțimea *AM* a triunghiului *ABC* este perpendiculară pe linia medie a lui, care unește mijlocurile laturilor *AB* și *AC*.
200.• Aflați unghiurile triunghiului, două linii medii ale căruia sunt egale și perpendiculare.
201.• Linia medie a triunghiului isoscel, paralelă la baza lui, este egală cu 6 cm. Aflați laturile triunghiului dat, dacă perimetrul lui este egal cu 46 cm.

202.• Suma diagonalelor unui patrulater este egală cu 28 cm. Aflați perimetrul patrulaterului, ale cărui vârfuri sunt mijlocurile laturilor acestui patrulater.

203.• Vârfuri ale patrulaterului sunt mijlocurile laturilor rombului cu diagonalele de 8 cm și 14 cm. Determinați tipul patrulaterului și aflați laturile lui.

204.• Vârfuri ale unui patrulater sunt mijlocurile laturilor dreptunghiului cu diagonala de 12 cm. Determinați tipul patrulaterului și aflați laturile lui.

205.• Demonstrați că vârfurile triunghiului sunt echidistante de la dreapta căreia îi aparține linia media a celui triunghi.

206.•• Pe laturile AB și BC ale triunghiului sunt notate, corespunzător, punctele M și K astfel, că $AM = 3BM$, $CK = 3BK$. Demonstrați că $MK \parallel AC$, și aflați segmentul MK, dacă $AC = 16$ cm.

207.•• Unghiurile BAD și BCE – unghiuri exterioare ale triunghiului ABC. Din vârful B sunt duse perpendiculare BM și BK pe bisectoarele unghiurilor BAD și BCE, corespunzător. Aflați segmentul MK, dacă perimetrul triunghiului ABC este egal cu 18 cm.

208.•• Construiți triunghiul după mijlocurile celor trei laturi ale lui.

209.•• Construiți paralelogramul dacă sunt cunoscute mijlocurile a trei laturi ale lui.

210.* Diagonalele patrulaterului convex $ABCD$ sunt perpendiculare. Prin mijlocurile laturilor AB și AD sunt duse drepte, perpendiculare, respectiv, pe laturile DC și BC. Demonstrați că punctul de intersecție al dreptelor duse aparține dreptei AC.

211.* Laturile AB și CD ale patrulaterului convex $ABCD$ sunt egale. Prin mijlocurile diagonalelor AC și BD este dusă dreapta care intersectează laturile AB și CD în punctele, corespunzător, M și N. Demonstrați că $\angle BMN = \angle CNM$.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

212. Prin punctul C sunt duse la circumferința cu centrul O tangentele CA și CB (A și B — punctele de tangență). Segmentul AD — diametrul circumferinței. Demonstrați, că $BD \parallel CO$.

213. În triunghiul ABC se știe că $AB = BC$, $\angle B = 32°$, AK — este bisectoarea triunghiului. Prin punctul K este dusă dreapta, paralelă cu latura AB și care intersectează latura AC în punctul M. Aflați unghiul AKM.

214. Diagonala BD a paralelogramului $ABCD$ este înălțimea lui și este egală cu latura BC. Aflați latura CD a paralelogramului, dacă punctul B este situat la distanța de 4 cm de la dreapta CD.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

215. Cinci puncte aparțin triunghiului echilateral, a cărui latură este egală cu 1 cm. Demonstrați, că din aceste puncte se pot alege două, distanța dintre ele fiind nu mai mare de 0,5 cm.

8. Trapezul

Definiție. **Trapez se numește patrulaterul, în care două laturi sunt paralele, iar altele două nu sunt paralele.**

Fiecare din patrulaterele, reprezentate în figura 62, este trapez.

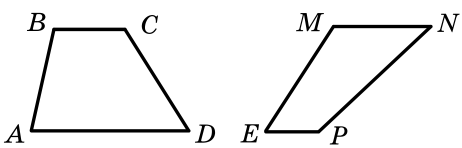


Fig. 62

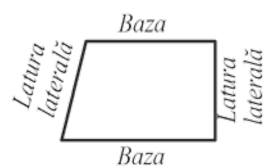


Fig. 63

Laturile paralele ale trapezului se numesc **baze**, iar cele neparalele – **laturi laterale** (fig. 63).

În trapezul $ABCD$ ($BC \parallel AD$) unghiurile A și D se numesc **unghiuri de la baza** AD, iar unghiurile B și C — unghiuri de la baza BC.

Definiție. **Înălțime a trapezului se numește perpendiculara, coborâtă din orice punct al dreptei, care conține una din baze, pe dreapta care conține a doua din baze.**

În figura 64 fiecare din segmentele BM, EF, DK, PQ este înălțime a trapezului $ABCD$. Lungimile acestor segmente sunt egale cu distanța dintre dreptele paralele BC și AD. De aceea $BM = EF = DK = PQ$.

În figura 65 este reprezentat trapezul $ABCD$, în care laturile AB și CD sunt egale. Așa un trapez se numește **isoscel**.

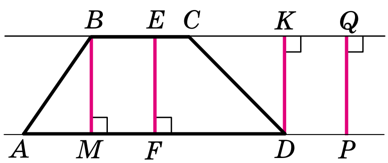


Fig. 64

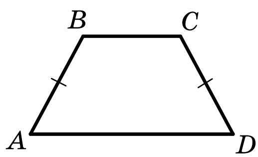


Fig. 65

Dacă latura laterală a trapezului este înălțimea lui, atunci așa un trapez se numește **dreptunghic** (fig. 66).

Trapezul este un tip particular de patrulater. Legătura dintre patrulaterele și tipurile lor particulare este arătată în figura 67.

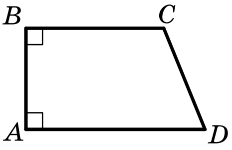


Fig. 66

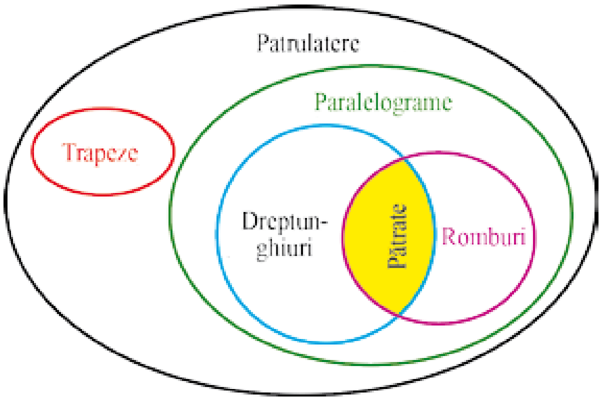


Fig. 67

Definiție. Linie medie a trapezului se numește segmentul, care unește mijlocurile laturilor laterale ale lui.

În figura 68 segmentul MN — linia medie a trapezului $ABCD$.

Teorema 8.1. ***Linia medie a trapezului este paralelă cu bazele și este egală cu jumătate din suma lor.***

Demonstrație. Fie MN — linia medie a trapezului $ABCD$ (fig. 69). Să demonstrăm, că $MN \parallel AD$ și $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Ducem dreapta BN și punctul de intersecție al ei cu dreapta AD îl notăm cu litera E.

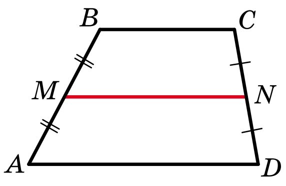


Fig. 68

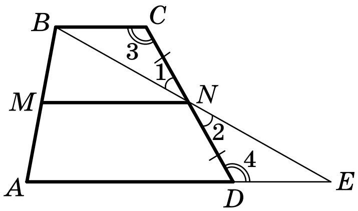


Fig. 69

Deoarece punctul N —mijlocul segmentului CD, reiese că $CN = ND$. Unghiurile 1 și 2 sunt egale cu unghiuri verticale, iar unghiurile 3 și 4 sunt egale ca unghiuri alterne interne la dreptele paralele BC și AE, și secanta CD. Deci triunghiurile BCN și EDN sunt egale pa baza celui de-al doilea criteriu de egalitate al triunghiurilor. De aici $BC = DE$ și $BN = NE$. Atunci segmentul MN — linie medie a triunghiului ABE. De aici rezultă, că $MN \parallel AE$, adică $MN \parallel AD$, și $MN = \frac{1}{2}AE$. Avem:

$$MN = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC).$$ ▲

Problemă (proprietățile trapezului isoscel). Demonstrați că în trapezul isoscel:

1) unghiurile de la fiecare bază sunt egale;

2) diagonalele sunt egale;

3) înălțimea trapezului, dusă din vârful unghiului obtuz, împarte baza trapezului în două segmente, cel mai mic din ele este egal cu jumătate din diferența bazelor, iar cel mai mare — cu jumătate din suma bazelor(cu linia medie a trapezului).

Rezolvare. Să considerăm trapezul isoscel $ABCD$ ($AB = CD$).

1) Ducem înălțimile BM și CK (fig. 70). Deoarece $AB = CD$ și $BM = CK$, rezultă că triunghiurile dreptunghice AMB și DKC sunt egale după catetă și ipotenuză. Atunci $\angle A = \angle D$.

Avem: $\angle A = \angle D$, $\angle A + \angle ABC = 180°$, $\angle D + \angle DCB = 180°$. Deci, $\angle ABC = \angle DCB$.

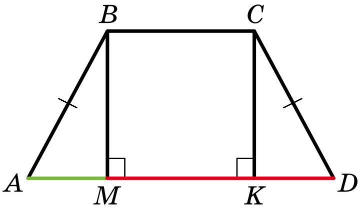


Fig. 70

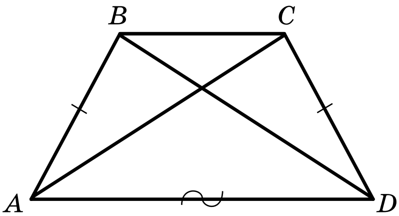


Fig. 71

2) Să examinăm triunghiurile ACD și DBA (fig. 71).

Avem: $AB = CD$, AD — latura comună, unghiurile BAD și CDA sunt egale ca unghiurile de la baza ale trapezului isoscel. Așadar, triunghiurile ACD și DBA sunt egale după două laturi și unghiul dintre ele. Atunci $AC = BD$.

3) În patrulaterul $BMKC$ (fig. 70) $BM \parallel CK$, $BC \parallel MK$, unghiul BMK drept. Deci, acest patrulater este dreptunghi. De aici $MK = BC$.

Din egalitatea triunghiurilor AMB și DKC rezultă, că $AM = KD$. Atunci

$$AM = \frac{AD - MK}{2} = \frac{AD - BC}{2};$$

$$MD = AD - AM = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{2AD - AD + BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

1. Care patrulater se numește trapez?
2. Care laturi ale trapezului se numesc baze? laturi naturale?
3. Ce se numește înălțime a trapezului?
4. Ce tipuri de trapeze există?
5. Care trapez se numește isoscel?
6. Ce trapez se numește dreptunghic?
7. Ce se numește linie media a trapezului?
8. Formulați teorema despre proprietățile liniei medii a trapezului.
9. Formulați proprietățile trapezului isoscel.

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

216.° Desenați, folosind pătrățelele caietului, trapezul:
1) isoscel;
2) dreptunghic;
3) care nu este nici isoscel, nici dreptunghic;
4) în care unul din unghiurile de la bază este ascuțit, iar al doilea unghi de la aceeași bază este obtuz.

217.° Copiați în caiet figura 72, duceți înălțimile trapezului, una din extremitățile cărora sunt corespunzător punctele B, M, K și D.

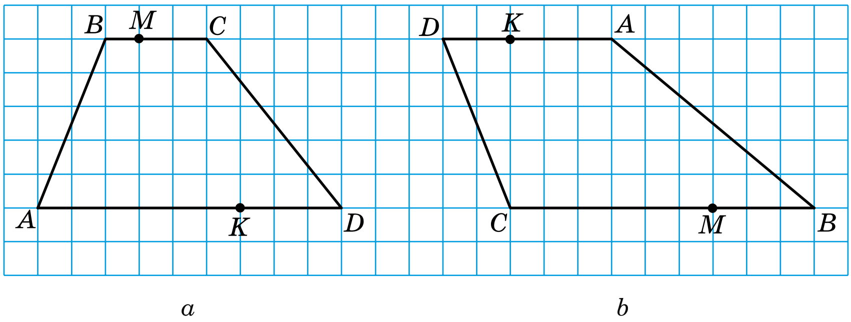


Fig. 72

EXERCIȚII

218.° Găsiți în figura 73 trapeze, indicați bazele și laturile ale lor.

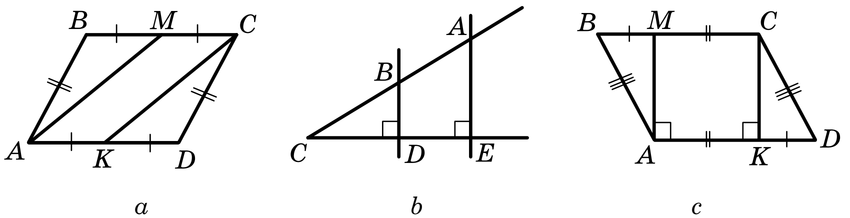


Fig. 73

219.° Oare este figura, reprezentată în desenul 74, trapez? În cazul răspunsului afirmativ indicați bazele și laturile laterale ale trapezului.

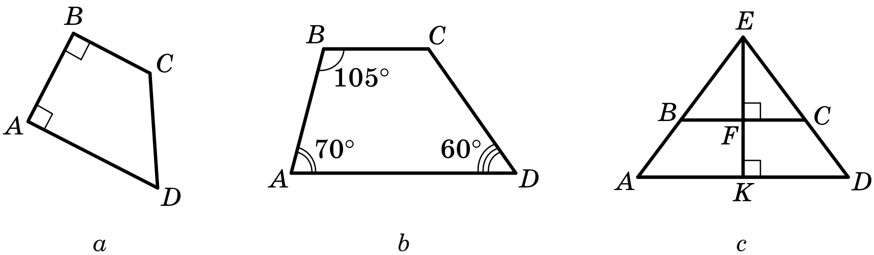


Fig. 74

220.° Perimetrul trapezului isoscel este egal cu 52 cm, bazele — 13 cm și 21 cm. Aflați latura laterală a trapezului.

221.° Perimetrul trapezului este egal 49 cm, laturile laterale — cu 5,6 cm și 7,8 cm. Aflați bazele trapezului, dacă una din ele este cu 7,4 cm mai mare decât cealaltă.

222.° Demonstrați, că suma unghiurilor trapezului, alăturate laturii laterale a lui, este egală cu 180°.

223.° 1) Aflați unghiurile A și C ale trapezului $ABCD$ cu bazele AD și BC, dacă $\angle B = 132°$, $\angle D = 24°$.

2) Aflați unghiurile trapezului $ABCD$, alăturate laturii laterale AB, dacă unghiul A este mai mic, decât unghiul B cu 38°.

224.° Aflați unghiurile trapezului $ABCD$, alăturate laturii laterale CD, dacă $\angle C : \angle D = 8 : 7$.

225.° Unul din unghiurile trapezului isoscel este egal cu 46°. Aflați restul unghiurilor ale lui.

226.° Aflați unghiurile trapezului isoscel, dacă diferența unghiurilor opuse ale lui este egală cu 20°.

227.° În trapezul isoscel unghiul făcut de latura laterală și înălțimea, dusă din vârful unghiului obtuz, este egal cu 23°. Aflați unghiurile trapezului.

228.° Oare pot fi în trapez:
1) trei unghiuri drepte;
2) trei unghiuri ascuțite;
3) două unghiuri opuse obtuze;
4) două unghiuri opuse drepte;
5) două unghiuri opuse egale?

229.° Oare pot:
1) bazele trapezului să fie egale;
2) diagonalele trapezului să fie împărțite în jumătate de către punctul lor de intersecție?

230.° Demonstrați că dacă unghiurile de la una din bazele trapezului sunt egale, atunci trapezul dat este isoscel.

231.° Demonstrați că suma unghiurilor opuse ale trapezului isoscel este egală cu 180°. Oare este justă afirmația inversă: dacă suma unghiurilor opuse ale trapezului este egală cu 180°, atunci trapezul dat este isoscel?

232.° Linia medie a triunghiului echilateral cu latura de 6 cm îl împarte într-un triunghi și un patrulater. Determinați tipul patrulaterului și aflați perimetrul lui.

233.° Înălțimea unui trapez isoscel, dusă din extremitatea bazei mici împarte baza mare în segmente în segmente cu lungimile de 6 cm și 10 cm. Aflați bazele trapezului.

234.° Unul din unghiurile trapezului isoscel este egal cu 60°, latura laterală — 18 cm, iar suma bazelor — 50 cm. Aflați bazele trapezului.

235.° Bazele trapezului dreptunghic sunt egale cu 10 cm și 24 cm, iar unul din unghiuri — cu 45°. Aflați latura laterală mai mică a trapezului.

236.° Bazele trapezului dreptunghic sunt egale cu 7 cm și 15 cm, iar unul din unghiuri — cu 60°. Aflați latura laterală mai mare a trapezului.

237.° În trapezul ABCD se știe că $AB = CD$, $\angle BAC = 20°$, $\angle CAD = 50°$. Aflați unghiurile ACB și ACD.

238.° În trapezul ABCD se știe că $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $BC = CD$, $\angle ABD = 80°$. Aflați unghiurile trapezului.

239.° În trapezul $ABCD$ baza mai mică BC este egală cu 6 cm. Prin vârful B este dusă dreapta, paralelă cu latura CD și care intersectează latura AD în punctul M. Aflați perimetrul trapezului, dacă perimetrul triunghiului ABM este egal cu 16 cm.

240.° Prin vârful C al trapezului $ABCD$ este dusă dreapta care este paralelă la latura laterală AB și intersectează baza mai mare AD în punctul E. Aflați unghiurile trapezului, dacă $\angle D = 35°$, $\angle DCE = 65°$.

241.° Bazele trapezului sunt egale cu 9 cm și 15 cm. Cu ce este egală linia medie a lui?

242.° Linia medie a trapezului este egală cu 8 cm, iar una din baze — 5 cm. Aflați cealaltă bază a trapezului.

243.° Una din bazele trapezului este cu 8 cm mai mare decât cealaltă bază, iar linia medie este egală cu 17 cm. Aflați bazele trapezului.

244.° Bazele trapezului se raportă ca 3 : 4, iar linia medie este egală cu 14 cm. Aflați bazele trapezului.

245.° Fiecare din laturile laterale ale trapezului $ABCD$ (fig. 75) este împărțită în patru părți egale: $AE = EF = FK = KB$, $DN = NM = MP = PC$. Aflați segmentele EN, FM și KP, dacă $AD = 19$ cm, $BC = 11$ cm.

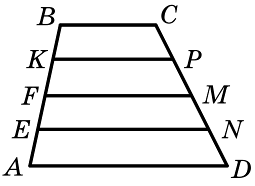


Fig. 75

246.° Înălțimea trapezului dreptunghic, dusă din vârful unghiului obtuz, împarte baza mai mare în segmente cu lungimile 7 cm și 5 cm, socotind de la vârful unghiului drept. Aflați linia medie a trapezului.

247.° Linia medie a trapezului dreptunghic este egală cu 9 cm, iar înălțimea, dusă din vârful unghiului obtuz, împarte baza mai mare în segmente, din care unul este de 2 ori mai mare, decât celălalt, socotind de la vârful unghiului drept. Aflați bazele trapezului.

248.• Diagonalele trapezului isoscel $ABCD$ ($AB = CD$) se intersectează în punctul O. Demonstrați, că $AO = OD$ și $BO = OC$.

249.• Înălțimea trapezului isoscel este egală cu h, iar latura laterală se vede din punctul de intersecție al diagonalelor sub unghiul[1] de 60°. Aflați diagonala trapezului.

250.• Bazele unui trapez isoscel se raportă ca 2 : 5, iar diagonala împarte unghiul obtuz al trapezului în jumătate. Aflați laturile trapezului, dacă perimetrul lui este egal cu 68 cm.

[1] Fie dați segmentul AB și punctul M în afara dreptei AB, care-i astfel că $\angle AMB = \alpha$. În acest caz se spune că segmentul AB se vede din punctul M sub unghiul α.

251.• În trapezul $ABCD$ se știe că $AB = CD$, $AD = 24$ cm, $\angle ADB = \angle CDB$, iar perimetrul este egal cu 60 cm. Aflați laturile necunoscute ale trapezului.

252.• Laturile trapezului sunt egale cu a, a, a și $2a$. Aflați unghiurile trapezului.

253.• În trapezul $ABCD$ diagonala AC este perpendiculară pe latura laterală CD și este bisectoarea unghiului BAD, $\angle D = 60°$, perimetrul trapezului este egal cu 40 cm. Aflați bazele trapezului.

254.• Diagonala trapezului isoscel este perpendiculară la latura laterală, iar baza mai mică este egală cu latura laterală. Aflați unghiurile trapezului.

255.• Pentru care condiție înălțimea trapezului isoscel este egală cu semidiferența bazelor?

256.• Construiți trapezul isoscel după baza, latura laterală și unghiul format de ele.

257.• Construiți trapezul dreptunghic, dacă se dau bazele și latura laterală mai mică.

258.• Construiți trapezul isoscel, dacă sunt date baza, latura laterală și diagonala.

259.• Latura laterală a trapezului isoscel este egală cu 6 cm, baza mai mare – cu 10 cm. Aflați linia medie a trapezului, dacă unul din unghiurile lui este egal cu 60°.

260.• Diagonala trapezului isoscel este egală cu 14 cm și formează cu baza unghiul de 60°. Aflați linia medie a trapezului.

261.• Linia medie a trapezului $ABCD$ îl împarte în două trapeze, ale căror linii medii sunt egale cu 15 cm și 19 cm. Aflați bazele trapezului $ABCD$.

262.•• Demonstrați, că dacă diagonalele trapezului isoscel sunt perpendiculare, atunci înălțimea lui este egală cu linia medie a trapezului.

263.•• Demonstrați că dacă înălțimea trapezului isoscel este egală cu linia medie a lui, atunci diagonalele trapezului sunt perpendiculare.

264.•• Diagonala trapezului dreptunghic îl împarte în două triunghiuri, din care unul este echilateral cu latura a. Aflați linia medie a trapezului.

265.•• Diagonala trapezului isoscel îl împarte în două triunghiuri isoscele. Aflați unghiurile trapezului.

266.•• În trapezul $ABCD$ ($BC \parallel AD$) se știe că $AC \perp BD$, $\angle CAD = 30°$, $BD = 8$ cm. Aflați linia medie a trapezului.

267.•• Demonstrați, că punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor, alăturate laturii laterale a trapezului, aparține dreptei, pe care se află linia medie a lui.

268.•• Construiți trapezul:
1) după bazele și laturile laterale ale lui;
2) după bază, înălțime și diagonale;
3) dacă se dă diferența bazelor, laturile laterale și diagonala.

269.•• Construiți trapezul isoscel după bază, înălțime și latura laterală.

270.•• Construiți trapezul:
1) fiind date bazele și diagonalele;
2) după laturile laterale, linia medie și înălțime;
3) după bază, unghiul alăturat ei și laturile laterale;
4) după laturile laterale, înălțime și una din diagonale.

271.* Prin vârful B al paralelogramului $ABCD$ este dusă dreapta, care n-are cu paralelogramul alte puncte comune. Vârfurile A și C se află de la această dreaptă la distanța, respectiv, a și b. Aflați distanța de la punctul D până la această dreaptă.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

272. Într-o circumferință sunt duse diametrele AB și CB. Demonstrați că $AC = BD$ și $AC \parallel BD$.

273. În circumferința cu centrul O este dus diametrul AB și coarda AC. Demonstrați că $\angle BOC = 2\ \angle BAC$.

274. Dreapta AB este tangentă la circumferința cu centrul O în punctu C, $AC = BC$. Demonstrați, că $OA = OB$.

275. Coarda AB a circumferinței cu centrul O este perpendiculară pe raza OC și o împarte în jumătate. Aflați: 1) unghiul AOB; 2) unghiul ACB.

276. Câte puncte comune au două circumferințe cu razele de 8 cm și 6 cm, dacă distanța dintre centrele lor este egală cu: 1) 15 cm; 2) 14 cm; 3) 10 cm; 4) 2 cm?

Repetați conținutul punctelor 19–22 de la pag.190–192.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

277. Poligonul este împărțit în triunghiuri, care sunt vopsite în culori albă și neagră astfel, că orice două triunghiuri, care au baza comună, sunt vopsite în culori diferite. Demonstrați că cantitatea triunghiurilor negre nu este mai mare, decât – întreitul numărului de triunghiuri albe.

9. Unghiuri la centru și înscrise

Definiție. Unghi la centru al circumferinței se numește unghiul cu vârful în centrul circumferinței.

În figura 76 unghiul AOB — unghi la centru. Laturile acestui unghi intersectează circumferința în punctele A și B. Aceste puncte împart circumferința în două **arce**, care sunt evidențiate pe desenul 76 cu culori diferite. Punctele A și B se numesc **extremitățile arcului**, ele aparțin fiecăreia din acele evidențiate. Fiecare din aceste arce poate fi notat astfel: $\cup AB$ (se citește: „arcul AB").

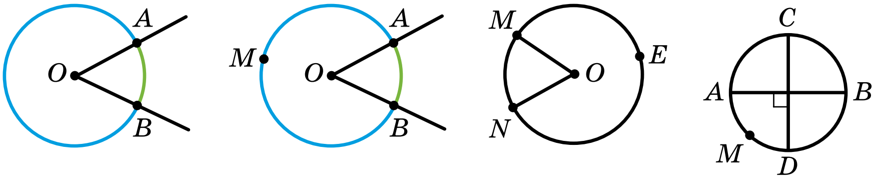


Fig. 76 **Fig. 77** **Fig. 78** **Fig. 79**

Însă scrierea $\cup AB$ nu permite distingerea arcului din figura 76. Dacă am nota un punct pe unul din două arce (în figura 77 aceasta-i punctul M), atunci este limpide, că notația $\cup AMB$ se referă la arcul „albastru". Dacă pe unul din două arce AB este notat un punct, atunci ne înțelegem, că notația $\cup AB$ se referă la arcul, cărui acest punct nu-i aparține (în figura 77 acesta-i arcul „verde").

Arcul AB aparține unghiului la centru AOB (fig. 77). În acest caz se spune că unghiul la centrul AB **se sprijină pe arcul** $\boldsymbol{AB}$.

Fiecare arc de circumferință, ca și însăși circumferința, are **măsură în grade**. *Măsura în grade a circumferinței întregi se consideră egală cu 360°*. Dacă unghiul la centrul MON se sprijină pe arcul MN (fig. 78), atunci măsura în grade a arcului MN se consideră egală cu măsura în grade a unghiului MON și se scrie: $\cup MN = \angle MON$ (se citește: "măsura în grade a arcului MN este egală cu măsura în grade a unghiului MON"). Măsura în grade a arcului MEN (fig. 78) se consideră egală cu $360° - \angle MON$.

În figura 79 este reprezentată circumferința, în care sunt duse două diametre perpendiculare AB și CD. Atunci $\cup AMD = 90°$, $\cup ACD = 360° - 90° = 270°$, $\cup ACB = \cup ADB = 180°$. Fiecare din arcele ACB și ADB se numește **semicircumferință**. În figura 79 semicircumferințe de asemenea sunt arcele CAD și CBD.

Despre coarda care unește extremitățile arcului se spune că coarda **subîntinde** arcul. În figura 80 coarda AB subîntinde fiecare din arcele AB și AKB.

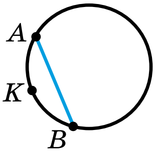


Fig. 80

Orice coardă subîntinde două arce, suma măsurilor în grade a cărora este egală cu 360°.

Definiție. Unghi înscris în circumferință se numește unghiul, a cărui vârf aparține circumferinței, iar laturile intersectează circumferința.

În figura 81 unghiul ABC este înscris. Arcul AC aparține acestui unghi, iar arcul ABC — nu-i aparține. În acest caz se spune, că unghiul înscris ABC se **sprijină pe arcul AC**. Tot se poate spune, că unghiul înscris ABC se **sprijină pe coarda AC.**

Teorema 9.1. ***Măsura în grade a unghiului înscris este egală cu jumătatea măsurii în grade a arcului, pe care el se sprijină.***

Demonstrație. În figura 81 unghiul ABC este înscris. Să demonstrăm, că $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Să considerăm trei cazuri ale amplasării centrului O al circumferinței față de unghiul înscris ABC.

Cazul 1. Centrul O aparține uneia din laturile unghiului, de exemplu, laturii BC (fig. 82).

Ducem raza OA. Unghiul la centrul AOC — unghiul exterior al triunghiului isoscel ABO (laturile OA și OB sunt egale ca raze). Atunci $\angle AOC = \angle A + \angle B$. Dar $\angle A = \angle B$. De aici $\angle ABC = = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2} \cup AC$.

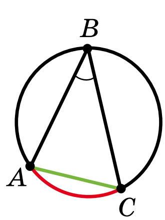


Fig. 81

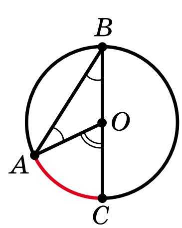


Fig. 82

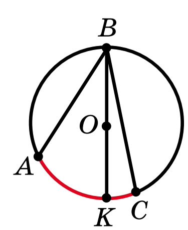


Fig. 83

Cazul 2. Centrul O aparține unghiului, dar nu aparține nici uneia din laturile lui (fig. 83).

Ducem diametrul BK. Pe baza celor demonstrate $\angle ABK = \frac{1}{2} \cup AK$, $\angle KBC = \frac{1}{2} \cup KC$. Dar: $\angle ABC = \angle ABK + \angle KBC = \frac{1}{2} \cup AK + \frac{1}{2} \cup KC = \frac{1}{2} \cup AKC$.

Cazul 3. Centrul O nu aparține unghiului (fig. 84).

Petru cazul al treilea demonstrați teorema de sine stătător. ▲

Consecința 1. ***Unghiurile înscrise, care se sprijină pe unul și același arc sunt egale*** (fig.85)**.**

Consecința 2. ***Unghiul înscris, care se sprijină pe diametrul (semicircumferință) este drept*** (fig.86)**.**

Demonstrați aceste proprietăți de sine stătător.

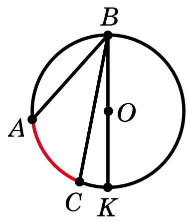


Fig. 84

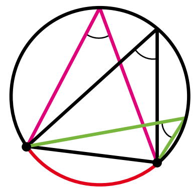


Fig. 85

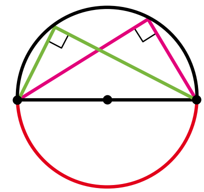


Fig. 86

Problema 1 (proprietatea unghiului făcut de tangentă și coardă). Segmentul AB — coarda circumferinței cu centrul O (fig. 87). Prin punctul A este dusă tangenta MN. Demonstrați, că $\angle MAB = \frac{1}{2} \cup AB$ și $\angle NAB = \frac{1}{2} \cup AKB$.

Rezolvare. Ducem diametrul AD (fig. 87). Atunci unghiul B este egal cu 90° ca înscris, ce se sprijină de diametrul AD. În triunghiul dreptunghic ABD $\angle 2 + \angle 3 = 90°$. Deoarece MN — tangentă, rezultă $\angle DAM = 90°$. Atunci $\angle 1 + \angle 3 = 90°$. Obținem, că $\angle 1 = \angle 2$.

Deci, $\angle MAB = \angle BDA = \frac{1}{2} \cup AB$.

Avem: $\angle NAB = 180° - \angle MAB = 180° - \frac{1}{2} \cup AB = 180° - \frac{1}{2}(360° - \cup AKB) = 180° - 180° + \frac{1}{2} \cup AKB = \frac{1}{2} \cup AKB$.

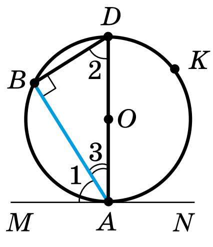


Fig. 87

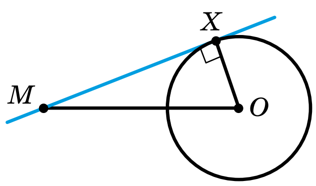


Fig. 88

Problema 2. Construiți tangenta la circumferința dată, care trece prin punctul dat, situat în afara circumferinței.

Rezolvare. În figura 88 este reprezentată circumferința cu centrul O și punctul M, care se află în afara acestei circumferințe.

Fie X — așa un punct al circumferinței, că dreapta MX este tangentă(fig.88). Atunci unghiul MXO este drept. Deci el poate fi considerat ca înscris în circumferința cu diametrul MO.

Analiză făcută arată cum trebuie realizată construcția.

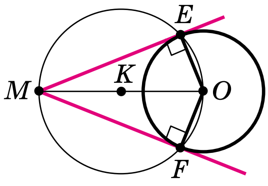


Fig. 89

Construim segmentul MO și îl împărțim în jumătate(fig.89). Fie punctul K — mijlocul lui. Construim circumferința cu raza KO și centru K. Notăm punctele de intersecție ale circumferințelor construite și cea dată cu literele E și F. Atunci fiecare din dreptele ME și MF este tangenta căutată.

Într-adevăr, unghiul MEO este egal cu 90°, ca unghi înscris ce se sprijină pe diametrul MO. Segmentul OE — raza circumferinței date. Atunci pe baza criteriului tangentei dreapta ME — tangenta căutată.

?

1. Care ungi se numește unghi la centru al circumferinței?
2. Cum se numesc părțile circumferinței, în care o împart două puncte?
3. Cu ce simbol se notează arcul circumferinței?
4. În care caz se spune că unghiul la centru se sprijină pe arc?
5. Cu ce se consideră că este egală măsura în grade a circumferinței?
6. Cum sunt legate măsurile în grade a unghiului la centru și a arcului, pe care acest unghi se sprijină?
7. Câte arce subîntinde fiecare coardă? Cu ce este egală suma măsurilor în grade a lor?
8. Care unghi se numește unghi înscris în circumferință?
9. În care caz se spune că unghiul înscris se sprijină pe arc?
10. Cu ce este egală măsura în grade a unghiului înscris?
11. Ce proprietate au unghiurile înscrise, care se sprijină pe unul și același arc?
12. Cum este unghiul înscris, care se sprijină pe diametru?

EXERCIȚII

278.° Cu ce este egală măsura în grade a unghiului la centru al circumferinței, care se sprijină pe arcul ce constituie: 1) $\frac{1}{6}$ din circumferință; 2) $\frac{1}{10}$ din circumferință; 3) $\frac{1}{2}$ din circumferință; 4) $\frac{2}{9}$ din circumferință?

279.° Aflați măsura în grade a două arce ale circumferinței, în care o împart două puncte, dacă măsura în grade a unui arc este cu 80° mai mare decât măsura în grade a celuilalt arc.

280.° Aflați măsurile în grade a două arce ale circumferinței în care o împart două puncte, dacă măsurile în grade ale acestor arce se raportă ca 7 : 11.

281.° Aflați măsura în grade a arcului, pa care îl descrie extremitatea acului orar: 1) în 2 ore; 2) în 5 ore; 3) în 8 ore; 4) în 30 min; 5) în 12 ore.

282.° Care din unghiurile, reprezentate în figura 90, sunt înscrise? Pe ce arc se sprijină fiecare din unghiurile înscrise?

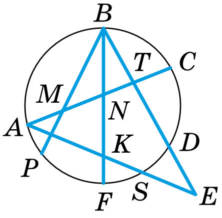


Fig. 90

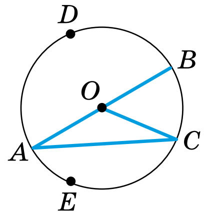


Fig. 91

283.° În figura 91 este reprezentată circumferința cu centrul O. Aflați:
1) unghiul BDC, dacă $\angle BAC = 40°$;
2) unghiul BEC, dacă $\angle BOC = 70°$;
3) arcul CE, dacă $\angle CDE = 80°$;
4) arcul DBA, dacă $\cup DBA = 300°$.

284.° Găsiți greșelile în figura 92.

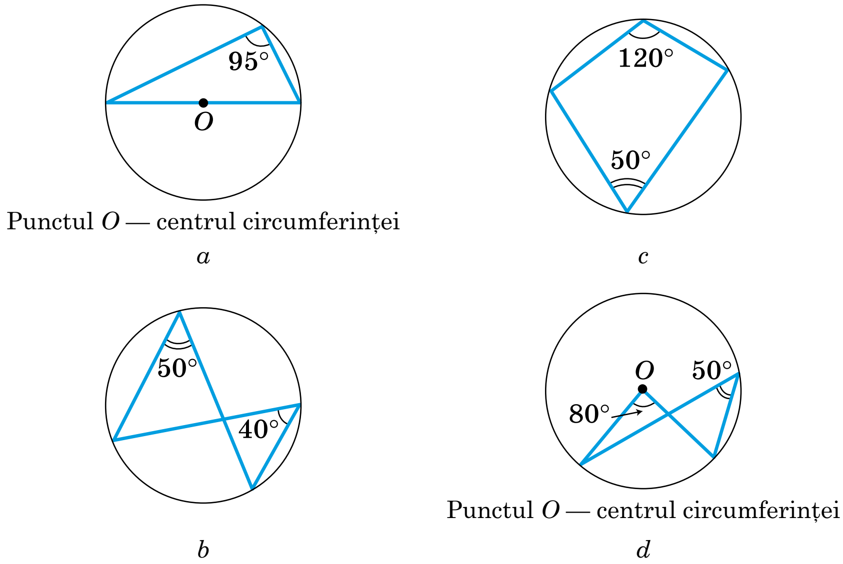


Fig. 92

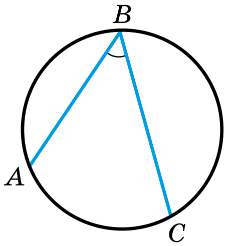


Fig. 93

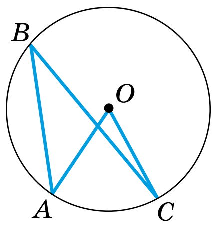


Fig. 94

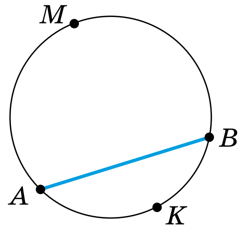


Fig. 95

285.° Aflați unghiul înscris, dacă măsura în grade a arcului, pe care el se sprijină, este egală cu: 1) 84°; 2) 110°; 3) 230°; 4) 340°.

286.° În figura 93 $\cup AB = 74°$, $\angle ABC = 68°$. Aflați arcul BC.

287.° În figura 93 $\cup AB = 64°$, $\cup BC = 92°$. Aflați unghiul ABC.

288.° Unghiul la centru AOC este cu 25° mai mare, decât unghiul înscris ABC, care se sprijină pe arcul AC (fig. 94). Aflați unghiurile AOC și ABC.

289.° Extremitățile coardei AB împart circumferința în două arce, ale căror măsuri în grade se raportă ca 3 : 7. Sub ce unghiuri se vede această coardă din punctele M și K (fig. 95)?

290.° În figura 96 coardele AB și CD sunt egale. Demonstrați, că $\cup AMB = \cup CND$.

291.° Demonstrați că dacă două arce ale circumferinței sunt egale, atunci sunt egale și coardele care le subîntind.

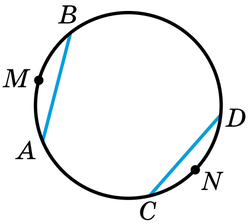


Fig. 96

292.° Punctele A, B și C împart circumferința în trei arce astfel, că $\cup AB : \cup BC : \cup AC = 1 : 2 : 3$. Aflați unghiurile triunghiului ABC.

293.° Vârfurile triunghiului isoscel ABC ($AB = BC$) împart circumferința circumscrisă lui în trei arce, totodată $\cup AB = 70°$. Aflați unghiurile triunghiului ABC.

294.° Extremitățile diametrelor AC și BD ale circumferinței le-au unit consecutiv astfel că s-a obținut patrulaterul $ABCD$.
1) Determinați tipul patrulaterului $ABCD$.
2) Aflați arcele AB, BC, CD și AD, dacă $\angle ABD = 80°$.

295.° Unghiul ascuțit al triunghiului dreptunghic este egal cu 32°. Aflați măsurile în grade ale arcelor, în care vârfurile triunghiului împart circumferința, circumscrisă lui, și raza circumferinței acesteia, dacă ipotenuza triunghiului dat este egală cu 12 cm.

296.• Demonstrați că dacă unghiul înscris este drept, atunci el se sprijină pe diametru.

297.• Coardele AB și CD ale circumferinței se intersectează în punctul M (fig. 97). Demonstrați, că $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$.

298.• Coardele AB și CD ale circumferinței nu se intersectează, iar dreptele AB și CD se intersectează în punctul M (fig. 98). Demonstrați că $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup BD)$.

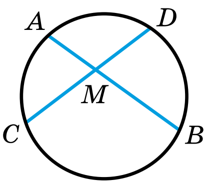


Fig. 97

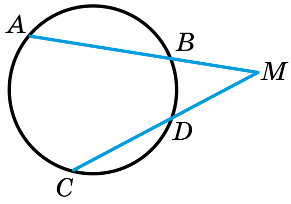


Fig. 98

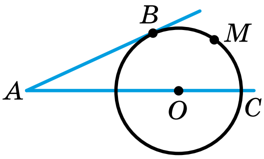


Fig. 99

299.• Prin punctul A, care este situat în afara circumferinței cu centrul O, sunt duse două drepte, din care una este tangentă la circumferință în punctul B, iar cealaltă trece prin centrul ei (fig. 99). Se știe, că $\cup BMC = 100°$. Aflați unghiul BAC.

300.• Bisectoarea unghiului B a triunghiului ABC intersectează circumferința, circumscrisă acestui triunghi, în punctul D. Aflați unghiurile triunghiului ABC, dacă $\angle ABC = 80°$.

301.• Pe arcul AC al circumferinței, circumscrise triunghiului echilateral ABC, este notat punctul M astfel, că $\cup AM = 2 \cup CM$. Aflați unghiurile triunghiului AMC.

302.• Circumferința, construită pe latura AB a triunghiului ABC ca pe diametru, intersectează laturile AC și BC în punctele M și K corespunzător. Demonstrați că segmentele AK și BM sunt înălțimile triunghiului ABC.

303.• Circumferința, construită pe latura AC a triunghiului ABC ca pe diametru, intersectează latura AB în punctul K astfel, că $\angle ACK = \angle BCK$. Demonstrați, că triunghiul ABC este isoscel.

304.• Demonstrați că măsurile în grade ale arcelor unei circumferințe, care se conțin între două coarde paralele, sunt egale.

305.• Vârfurile patrulaterului $ABCD$ aparțin circumferinței. Pe arcul AB este notat un punct M arbitrar. Demonstrați, că $\angle AMD = \angle CMD = \angle CMB$.

306.• Unghiul de la vârful triunghiului isoscel este egal cu 56°. Pe latura laterală a triunghiului, ca pe diametru, este construită o semicircumferință, pe care celelalte laturi ale triunghiului o împart în trei arce. Aflați măsurile în grade ale acestor obținute.

307.•• Cum, folosindu-se numai de echer de aflat centrul circumferinței date?

308.•• Este dată circumferința, în care este dus diametrul AB, și este notat punctul C în afara circumferinței (fig. 100). Cum, folosindu-se numai de riglă, de dus prin punctul C o dreaptă, care să fie perpendiculară pe dreapta AB?

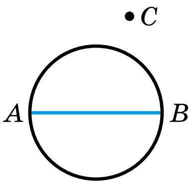


Fig. 100

309.•• Două circumferințe au un singur punct comun M. Prin punctul M sunt duse două drepte, care intersectează circumferințele date. Punctele lor de intersecție cu circumferințele, deosebire de punctul M, sunt unite cu coarde. Demonstrați că aceste coordonate sunt paralele.

310.•• La circumferința, circumscrisă triunghiului ABC, este dusă în punctul B tangenta, care intersectează dreapta AC în punctul D. Segmentul BM — bisectoarea triunghiului ABC. Demonstrați că $BD = MD$.

311.* Se dă segmentul AB și unghiul α. Aflați locul geometric al astfel de puncte X, pentru care $\angle AXB = \alpha$.

312.* Construiți triunghiul după latură, unghiul opus ei și înălțimea, dusă la latura dată.

313.* Construiți triunghiul după latură, unghiul opus ei și mediana, dusă la această latură.

314.* Construiți paralelogramul după două laturi și unghiul dintre diagonalele lui.

315.* Construiți paralelogramul după unghi și două diagonale.

316.* În triunghiul dreptunghic ABC pe cateta AC, ca pe diametru, este construită circumferința, care intersectează ipotenuza AB în punctul E. Prin punctul E este dusă tangenta la circumferință, care intersectează cateta CB în punctul D. Demonstrați că triunghiul BDE este isoscel.

317.* Se dă segmentul AB. Găsiți locul geometric al astfel de puncte X, ca triunghiul AXB să fie dreptunghic.

318.* Bisectoarea unghiului A a triunghiului ABC intersectează circumferința circumscrisă lui în punctul D. Punct O — centrul circumferinței înscrise în triunghiul ABC. Demonstrați că $DO = DB = DC$.

319.* Bisectoarele unghiurilor A, B și C ale triunghiului ABC intersectează circumferința circumscrisă lui respectiv în punctele A_1, B_1 și C_1 Demonstrați că $A_1B_1 \perp CC_1$.

320.* În figura 101 sunt reprezentate două circumferințe cu centrele O_1 și O_2. Construiți dreapta l, care este tangentă la aceste circumferințe astfel, că punctele de tangență se află în același semiplan în raport cu dreapta O_1O_2 (așa o dreaptă se numește **tangentă comună exterioară** dusă la două circumferințe date).

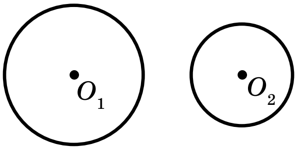


Fig. 101

321.* Construiți triunghiul:
1) după latură, unghiul opus ei și raza circumferinței înscrise;
2) după latură, unghiul opus ei și mediana, dusă la altă latură.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

322. Perimetrul triunghiului ABC este egal cu 30 cm. Punctul de tangență al circumferinței înscrise cu latura AB o împarte în raportul 3 : 2, socotind de la vârful A, iar punctul de tangență cu latura BC se află de la vârful C la distanța de 5 cm. Aflați laturile triunghiului.

323. La circumferința, înscrisă în triunghiul ABC, sunt duse trei tangente (fig. 102). Perimetrele triunghiurilor, pe care le decupează aceste tangente de la triunghiul dat, sunt egale cu P_1, P_2 și P_3. Aflați perimetrul triunghiului ABC.

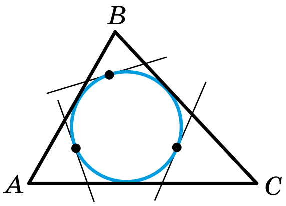


Fig. 102

324. Determinați tipul triunghiului, în care centrul circumferinței circumscrise aparține medianei.

Repetați conținutul punctului 22 de la pag.192.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

325. Pătrățelele pătratului de dimensiunile 100 x 100 pătrățele sunt vopsite în ordine de șah. Pătratul a fost tăiat în pătrate, ale căror laturi conțin o cantitate impară de pătrățele, și în fiecare un astfel de pătrat au însemnat pătrățica din centru. Demonstrați că pătrățelele albe și negre care au fost notate sunt în cantități egale.

PRIMA PROBLEMĂ A PRIMEI OLIMPIADE A TINERILOR MATEMATICIENI DIN TOATĂ

Sperăm că problema 316 v-a plăcut și ați simțit bucuria succesului, după ce ați rezolvat-o. Această problemă merită atenție încă și de aceea, că în anul 1961 anume cu a ei condiție se începea textul primei olimpiade a tinerilor matematicieni din toată Ucraina.

În general, olimpiadele matematice în Ucraina au o tradiție veche. Prima olimpiadă orășenească a tinerilor matematicieni a avut loc în anul 1935 în orașul Kiyev. De atunci au trecut mai mult de 80 de ani și în acești ani olimpiadele matematice au devenit pentru mulți elevi talentați primul pas pe calea activității științifice. La ora actuală așa nume ca O.V. Pogorelov, S.G. Krein, M.O. Krasnoselskui, V.G. Drinfelid, sunt cunoscute în toată lumea științifică. Toți ei în diferiți ani au fost învingătorii olimpiadelor matematice din Ucraina.

Vrem să menționăm cu satisfacție, că și acum olimpiadele matematice în Ucraina sunt foarte populare. Zeci de mii de elevi ai țării noastre participă în cadrul diferitelor etape în această întrecere matematică. În organizarea și derularea olimpiadelor sunt angrenați cei mai buni savanți, metodiști, profesori. Anume datorită entuziasmului și profesionalismului lor echipa Ucrainei reprezintă cu demnitate țara noastră în olimpiadele matematice internaționale.

Vă sfătuim și pe voi, dragi elevi din clasa a 8-a, să participați la olimpiadele matematice. Mai jos noi aducem textul primei olimpiade a tinerilor matematicieni din toată Ucraina. Încercați-vă puterile.

1. În triunghiul dreptunghic ABC pe cateta AC ca pe diametru a fost construită circumferința care intersectează ipotenuza AB în punctul E. Prin punctul E este dusă tangenta la circumferință, care intersectează cateta CB în punctul D. Demonstrați că triunghiul BDE este isoscel.
2. Într-un plan sunt repartizate n roticele dințate astfel că prima este angrenată cu a doua, a doua cu a treia ș.a.m.d., iar ultima – cu prima. În ce cazuri se pot mișca roticelele a unei astfel de sisteme?
3. Calculați unghiurile triunghiului isoscel, în care centrele circumferințelor înscrisă și circumscrisă sunt simetrice în raport cu dreapta, care conține baza triunghiului.
4. Demonstrați că pentru fiecare n întreg expresia $\frac{n^5}{120}-\frac{n^3}{24}+\frac{n}{30}$ tot primește valori întregi.
5. Construiți triunghiul după două puncte date, care sunt picioarele înălțimilor, coborâte pe două laturi ale acestui triunghi, și dreapta, pe care este situată latura a treia a lui.

10. Circumferințe circumscrisă și înscrisă patrulaterului

Definiție. Circumferința se numește circumscrisă patrulaterului, dacă ea trece prin toate vârfurile lui.

În figura 103 este reprezentată circumferința, circumscrisă patrulaterului $ABCD$. În acest caz de asemenea se spune, că patrulaterul este **înscris** în circumferință.

Teorema 10.1. ***Dacă patrulaterul este înscris în circumferință, atunci suma unghiurilor opuse ale lui este egală cu* 180°.**

Demonstrație. Fie că patrulaterul $ABCD$ este înscris în circumferință (fig. 103). Să demonstrăm că $\angle A + \angle C = 180°$ și $\angle B + \angle D = 180°$.

Deoarece unghiurile A și C sunt înscrise, rezultă că $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$ și $\angle C = \frac{1}{2} \cup DAB$. Avem: $\cup BCD + \cup DAB = 360°$. Atunci $\angle A + \angle C = 180°$.

Analogic se poate arăta că $\angle B + \angle D = 180°$. ▲

Știți că oricărui triunghi i se poate circumscrie o circumferință. Dar nu orice patrulater are această proprietate. De exemplu, este imposibil de-i circumscris o circumferință paralelogramului, diferit de dreptunghi. A recunoaște patrulaterele cărora li se poate circumscrie o circumferință ne permite așa o teoremă.

Teorema 10.2 (inversă teoremei 10.1). ***Dacă într-un patrulater suma unghiurilor opuse este egală cu* 180°, *atunci lui i se poate circumscrie o circumferință.***

Demonstrație. Să examinăm patrulaterul $ABCD$, în care $\angle A + \angle C = 180°$. Să demonstrăm, că lui i se poate circumscrie o circumferință.

Presupunem, că acestui patrulater nu i se poate circumscrie o circumferință. Să-i circumscriem triunghiului ABD o circumferință. Pe baza presupunerii punctul C nu-i aparține acestei circumferințe. De aceea sunt două posibilități.

Cazul 1. Punctul C este situat în afara circumferinței circumscrise triunghiului ABD (fig. 104).

Fie că latura BC intersectează circumferința în punctul C_1. Patrulaterul ABC_1D este înscris în circumferință. Atunci pe baza teoremei 10.1

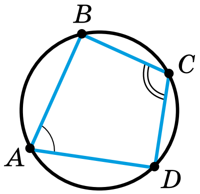


Fig. 103

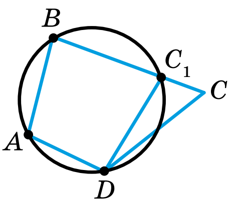


Fig. 104

obținem, că $\angle A + \angle BC_1D = 180°$. Însă conform condiției $\angle A + \angle C = 180°$. De aici $\angle BC_1D = \angle C$. Însă această egalitate nu se poate realiza, deoarece pe baza proprietății unghiului exterior al triunghiului $\angle BC_1D = \angle C + \angle CDC_1$.

Așadar, punctul C nu poate fi situat în afara circumferinței, circumscrise triunghiului ABD.

C a z u l 2. Punctul C se află în interiorul circumferinței circumscrise triunghiului ABD (fig. 105). Judecând analogic ca în cazul 1, se poate arăta că punctul C nu se poate afla în interiorul circumferinței considerate. Convingeți-vă în aceasta de sine stătător.

Deci, presupunând, că punctul C nu aparține circumferinței, circumscrise triunghiului ABD, noi am obținut contradicție. ▲

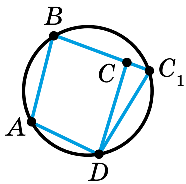


Fig. 105

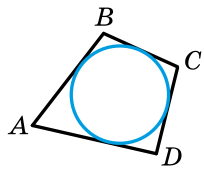


Fig. 106

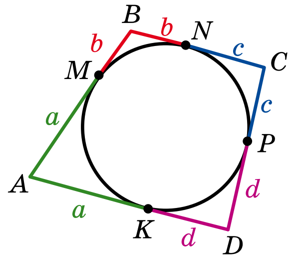


Fig. 107

Teorema 10.2 poate fi considerată ca criteriu de apartenență a patru puncte unei circumferințe.

Dacă patrulaterul este înscris în circumferință, atunci există un punct, egal depărtat de toate vârfurile lui (centrul circumferinței circumscrise). Pentru a afla acest punct, este suficient de aflat punctul de intersecție a mediatoarelor a două laturi alăturate ale patrulaterului.

Definiție. Circumferința se numește înscrisă în patrulater, dacă toate laturile lui sunt tangente la ea.

În figura 106 este reprezentată circumferința, înscrisă în patrulaterul $ABCD$. În acest caz de asemenea se spune că patrulaterul este **circumscris** circumferinței.

Teorema 10.3. ***Dacă patrulaterul este circumscris unei circumferințe, atunci sumele laturilor opuse ale lui sunt egale.***

Demonstrație. Fie patrulaterul $ABCD$ este circumscris circumferinței (fig. 107). Să demonstrăm, că $AB + CD = BC + AD$.

Punctele M, N, K, P — punctele de tangență ale circumferinței cu laturile patrulaterului.

Deoarece segmentele tangentelor, duse la circumferință printr-un punct, sunt egale, avem că $AK = AM$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DK$. Fie $AK = a$, $BM = b$, $CN = c$, $DP = d$.

Atunci $AB + CD = a + b + c + d$,

$BC + AD = b + c + a + d$.

Deci, $AB + CD = BC + AD$. ▲

Știți că în orice triunghi se poate înscrie o circumferință. Însă nu orice patrulater are această proprietate. De exemplu, este imposibil de-a înscrie o circumferință într-un dreptunghi, diferit de pătrat. A recunoaște patrulaterele, în care poți fi înscrise circumferințe, ne permite așa o teoremă.

Teorema 10.4. ***Dacă în patrulaterul convex sumele laturilor opuse sunt egale, atunci în el se poate înscrie o circumferință.***

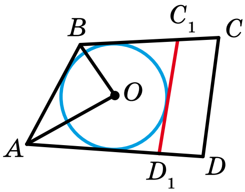


Fig. 108

Demonstrație. Să considerăm patrulaterul convex $ABCD$, în care $AB + CD = BC + AD$. Să demonstrăm că în el se poate înscrie o circumferință.

Fie că bisectoarele unghiurilor A și B se intersectează în punctul O (fig. 108). Atunci punctul O este egal depărtat de la laturile AB, BC și AD. Deci, există o circumferință cu centrul în punctul O, care are puncte de tangență cu aceste trei laturi.

Admitem că latura CD nu este tangentă la această circumferință. Atunci sunt posibile două cazuri.

Cazul 1. Latura CD n-are puncte comune cu circumferința construită.

Ducem tangenta C_1D_1 paralel cu latura CD (fig. 108). Patrulaterul ABC_1D_1 este circumscris circumferinței. Atunci pe baza teoremei 10.3 obținem, că

$$AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1. \quad (1)$$

Dar după condiție

$$AB + CD = BC + AD. \quad (2)$$

Scădem din egalitatea (2) egalitatea (1):

$$CD - C_1D_1 = BC - BC_1 + AD - AD_1.$$

De aici obținem: $CD - C_1D_1 = C_1C + D_1D$; $CD = C_1C + D_1D + C_1D_1$.

Această egalitate contrazice afirmația, demonstrată în problema – cheie din p.1.

Deci, latura CD trebuie să aibă puncte comune cu circumferința construită.

Cazul 2. Latura CD are două puncte comune cu circumferința construită.

Raționând analogic, se poate arăta, că latura CD nu poate să aibă două puncte comune cu circumferința construită. Convingeți-vă în aceasta singuri.

Așadar, admițând că latura CD nu este tangentă la circumferința construită, noi obținem contradicție. ▲

Dacă patrulaterul este circumscris circumferinței, atunci există un punct, echidistant de toate laturile lui(centrul circumferinței înscrise). Pentru a găsi acest punct, este suficient de găsit punctul de intersecție al bisectoarelor a două unghiuri vecine ale acestui patrulater.

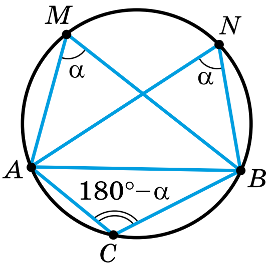


Fig. 109

Problemă (criteriul de apartenență a patru puncte unei circumferințe). Punctele A, M, N, B șunt astfel, că $\angle AMB = \angle ANB$, totodată punctele M și N sunt situate în același semiplan în raport cu dreapta AB. Demonstrați, că punctele A, M, N, B se află pe aceeași circumferință.

Rezolvare. Fie că $\angle AMB = \angle ANB = \alpha$. Circumscriem triunghiului AMB o circumferință (fig. 109). Fie C — un punct arbitrar al circumferinței, care nu aparține arcului AMB. Atunci patrulaterul $ACBM$ este înscris în circumferință. De aici $\angle C = 180° - \alpha$. Avem: $\angle C + \angle N = 180°$. Deci, pe baza teoremei 10.2 patrulaterul $ACBN$ este înscris într-o circumferință. Deoarece triunghiului ABC i se poate circumscrie numai o singură circumferință, rezultă că acestei circumferințe îi aparțin atât punctul M, cât și punctul N. ●

1. Care circumferință se numește circumscrisă patrulaterului?
2. În care caz se spune că patrulaterul este înscris în circumferință?
3. Ce proprietate au unghiurile patrulaterului, înscris în circumferință?
4. Care este condiția ca să se poată circumscrie unui patrulater o circumferință?
5. Care circumferință se numește înscrisă în patrulater?
6. În care caz se spune că patrulaterul este circumscris unei circumferințe?
7. Ce proprietate au laturile patrulaterului, circumscris unei circumferințe?
8. Care este condiția ca într-un patrulater să se poate înscrie o circumferință?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

326.° Desenați un dreptunghi cu laturile de 2 cm și 3 cm. Circumscrieți-i o circumferință.

327.° Desenați un trapez isoscel arbitrar. Înscrieți-l într-o circumferință.

328.° Desenați un tapez isoscel cu baza mare de 6 cm, latura laterală de 4 cm și unghiurile de 60°. Înscrieți în el o circumferință.

329.° Desenați un pătrat arbitrar. Înscrieți în el o circumferință și circumscrieți-i o circumferință.

EXERCIȚII

330.° Oare i se poate circumscrie o circumferință patrulaterului $ABCD$, dacă unghiurile lui A, B, C, D sunt respectiv egale cu:
1) 90°, 90°, 80°, 100°;
2) 90°, 80°, 90°, 100°;
3) 50°, 70°, 130°, 110°?

331.° Oare se poate circumscrie o circumferință patrulaterului $ABCD$, dacă unghiurile lui A, B, C și D sunt respectiv egale cu numerele:
1) 3, 8, 11, 6;
2) 4, 5, 4, 2?

332.° Demonstrați că se poate circumscrie o circumferință:
1) oricărui dreptunghi;
2) oricărui trapez isoscel?

333.° Care punct este centrul circumferinței, circumscrise dreptunghiului?

334.° Oare se poate de-i circumscris o circumferință rombului, care nu este pătrat?

335.° În dreptunghiul $ABCD$ se știe că $AB = 12$ cm, $\angle CAD = 30°$. Aflați raza circumferinței , circumscrise acestui dreptunghi.

336.° Oare se poate de înscris în patrulaterul $ABCD$ o circumferință, dacă laturile lui AB, BC, CD, AD sunt, corespunzător, proporționale cu numerele:
1) 7, 8, 12, 11;
2) 7, 12, 8, 11?

337.° Suma a două laturi opuse ale patrulaterului, circumscris unei circumferințe, este egală cu 18 cm. Aflați perimetrul acestui patrulater.

338.° Latura laterală a trapezului isoscel este egală cu 7 cm. Cu ce este egal perimetrul trapezului dat, dacă în el se poate înscrie o circumferință?

339.° În patrulaterul $CDEF$, în care se poate înscrie o circumferință, $CD = 6$ cm, $DE = 8$ cm, $EF = 12$ cm. Aflați latura CF.

340.° Demonstrați că în orice romb se poate înscrie o circumferință. Care punct este centrul circumferinței, înscrise în romb?

341.° Oare se poate înscrie o circumferință într-un paralelogram care nu este romb?

342.° Sub ce unghi se vede latura laterală a trapezului din centrul circumferinței înscrise?

343.° Unul din unghiurile rombului este egal cu 60°, iar diagonala mare — cu 24 cm. Aflați raza circumferinței, înscrise în rombul dat.

344.• Demonstrați că dacă într-un dreptunghi se poate înscrie o circumferință, atunci acest dreptunghi este pătrat.

345.$^\bullet$ Demonstrați că dacă unui romb i se poate circumscrie o circumferință, atunci acest romb este pătrat.

346.$^\bullet$ Latura *AD* a patrulaterului *ABCD* este diametrul circumferinței circumscrie lui, $\angle ABC = 108°$, $\angle BCD = 132°$. Aflați unghiurile *BAD*, *ADC*, *CAD*, *BDA*.

347.$^\bullet$ Aflați unghiurile patrulaterului *MNKP*, înscris în circumferință, dacă $\angle MKP = 58°$, $\angle MPN = 34°$, $\angle KMP = 16°$.

348.$^\bullet$ Trapezul isoscel este înscris în circumferință, centrul căreia aparține uneia din baze. Unghiul, format de diagonalele trapezului, opus laturii laterale a lui, este egal cu 56°. Aflați unghiurile trapezului.

349.$^\bullet$ Înălțimile *BM* și *CK* ale triunghiului ascuțitunghic *ABC* se intersectează în punctul *H*. Demonstrați că punctele *A*, *K*, *H* și *M* aparțin unei circumferințe.

350.$^\bullet$ Într-un trapez dreptunghic este înscrisă o circumferință. Punctul de tangență împarte latura laterală mai mare în segmente cu lungimile de 8 cm și 50 cm. Aflați perimetrul trapezului dat, dacă raza circumferinței înscrise este egală cu 20 cm.

351.$^\bullet$ Într-un trapez dreptunghiular este înscrisă o circumferință. Punctul de tangență împarte latura laterală mai mare în segmente cu lungimile de 3 cm și 12 cm. Aflați raza circumferinței înscrise, dacă perimetrul trapezului este egal cu 54 cm.

352.$^{\bullet\bullet}$ Centrul circumferinței, circumscris trapezului, aparține bazei mari, iar latura laterală este egală cu baza mai mică. Aflați unghiurile trapezului.

353.$^{\bullet\bullet}$ Diagonala trapezului, înscris în circumferință, este egală du *d*. Latura laterală se vede din centrul circumferinței circumscrise sub unghiul de 120°. Aflați linia medie a trapezului.

354.$^{\bullet\bullet}$ Laturile laterale și baza mai mică a trapezului isoscel sunt egale cu 6 cm, iar unul din unghiurile lui este egal cu 60°. Aflați raza circumferinței, circumscrise trapezului dat.

355.$^{\bullet\bullet}$ Din punctul arbitrar *M* al catetei *AC* a triunghiului dreptunghic ABC este coborâtă perpendiculara *MK* pe ipotenuza *AB*. Demonstrați că $\angle MKC = \angle MBC$.

356.$^{\bullet\bullet}$ Din punctul arbitrar *O*, care aparține unghiului ascuțit *A*, dar nu aparține laturilor lui, sunt coborâte perpendicularele *OB* și *OC* pe laturile lui. Demonstrați că $\angle OAB = \angle OCB$.

357.* Bisectoarele *BK* și *CM* ale triunghiului *ABC* se intersectează în punctul *O*, $\angle A = 60°$. Aflați unghiul *CMK*.

358.* Bisectoarele *MA* și *KB* ale triunghiului *MNK* se intersectează în punctul *O*, punctele *A*, *N*, *B* și *O* se află pe aceeași circumferință. Aflați unghiul *N*.

359.* În afara triunghiului dreptunghic ABC pe ipotenuza lui AB este construit pătratul $ABFD$. Demonstrați, că $\angle ACO = \angle OCB$, unde O – punctul de intersecție a diagonalelor pătratului.

360.* Vârfurile A și B ale triunghiului ABC cu unghiul drept C alunecă pe laturile unghiului drept cu vârful P (fig. 110). Demonstrați că punctul C în același timp se deplasează de-a lungul unui segment.

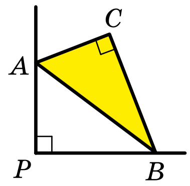


Fig. 110

361.* Dintr-un punct arbitrar M, care aparține unghiului cu vârful A, însă nu aparține laturilor lui, sunt duse perpendicularele MP și MQ pe laturile unghiului. Din punctul A este dusă perpendiculara AK pe segmentul PQ. Demonstrați că $\angle PAK = \angle MAQ$.

362.* În triunghiul ascuțitunghic ABC segmentele CC_1 și AA_1 — sunt înălțimi. Demonstrați că mediatoarea segmentului C_1A_1 trece prin mijlocul laturii AC.

363.* Pe laturile laterale ale trapezului, în care poate fi înscrisă o circumferință, ca pe diametre sunt construite două circumferințe. Demonstrați că aceste circumferințe au un punct comun.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

364. Prin mijlocul diagonalei AC a paralelogramului $ABCD$ este dusă o dreaptă, care intersectează laturile BC și AD. Această dreaptă intersectează dreptele AB și CD în punctele M și K respectiv. Determinați tipul patrulaterului.

365. În triunghiul ABC segmentul AD — bisectoare. Prin punctul D este dusă o dreaptă, care este paralelă cu latura AC și intersectează latura AB în punctul E. Prin punctul E este dusă dreapta, care este paralelă cu latura BC și intersectează latura AC în punctul F. Demonstrați că $AE = CF$.

366. Înălțimea BM a rombului $ABCD$, coborâtă din vârful unghiului obtuz pe latura AD, intersectează diagonala AC în punctul K, $\angle BKC = 64°$. Aflați unghiul ABC.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

367. Oare poate fi un pătrat tăiat într-un poligon cu o mie de unghiuri și în 199 de pentagoane?

ÎNSĂRCINAREA NR 1 „VERIFICAȚI-VĂ” ÎN FORMĂ DE TEST

1. Cu care din procedeele prezentate poate fi însemnat patrulaterul, reprezentat în figura 111?

A) *MPQN*; C) *NPMQ*;
B) *QMNP*; D) *QNPM*.

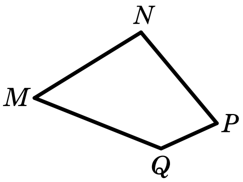


Fig. 111

2. Ce unghiuri poate avea patrulaterul?

A) Patru unghiuri obtuze;
B) patru unghiuri ascuțite;
C) două unghiuri obtuze și două unghiuri drepte;
D) două unghiuri drepte, un unghi ascuțit și un unghi obtuz.

3. Într-un patrulater fiecare latură a lui este egală cu una și aceeași diagonală a lui. Cu ce sunt egale unghiurile patrulaterului?

A) 60°, 60°, 120°, 120°;
B) 60°, 120°, 90°, 90°;
C) 90°, 90°, 90°, 90°;
D) 150°, 30°, 150°, 30°.

4. Bisectoarea unghiului unui paralelogram împarte latura lui în jumătate. Cu ce sunt egale laturile paralelogramului, dacă perimetrul lui este egal cu 30 cm?

A) 5 cm, 10 cm; C) 7 cm, 8 cm;
B) 6 cm, 4 cm; D) 3 cm, 12 cm.

5. Patrulaterul este paralelogram, dacă:

A) el are două perechi de laturi egale;
B) el are două perechi de unghiuri egale;
C) fiecare diagonală îl împarte în două triunghiuri egale;
D) în el trei laturi sunt egale.

6. Care din afirmațiile date nu este justă?

A) Patrulaterul care concomitent este și romb, și dreptunghi, — pătrat;
B) paralelogramul, în care diagonalele sunt egale și perpendiculare, — pătrat;
C) paralelogramul, în care toate unghiurile sunt drepte și diagonalele egale – pătrat;
D) rombul în care diagonalele sunt egale – pătrat.

7. În triunghiul ABC punctele M și N aparțin respectiv laturilor AB și BC. Segmentul MN este linie medie, dacă:

A) $MN \parallel AC$;

B) $MN = \frac{1}{2}AC$;

C) $MN = \frac{1}{2}AC$, $\angle BNM = \angle BAC$;

D) $MN = \frac{1}{2}AC$, $\angle BNM = \angle BCA$.

8. Care din următoarele proprietăți nu le poate avea trapezul?

A) Unghiurile opuse sunt egale;
B) diagonalele sunt egale și perpendiculare;
C) unul din unghiurile, alăturate bazei mai mari este mai mare decât unul din unghiurile alăturate bazei mai mici;
D) linia medie a trapezului este egală cu înălțimea lui.

9. Unghiurile înscrise într-o circumferință sunt egale, dacă ele:

A) se sprijină pe una și aceeași coardă;
B) au vârf comun;
C) se sprijină pe unul și același arc;
D) au o latură comună.

10. Patrulaterului $CDEF$ îi este circumscrisă o circumferință, $\angle CDF = 80°$, $\angle DEC = 30°$. Cu ce este egal unghiul DCF?

A) 50°; C) 70°;
B) 110°; D) 90°.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 1

Suma unghiurilor patrulaterului

Suma unghiurilor patrulaterului este egală cu 360°.

Paralelogramul

Se numește paralelogram patrulaterul, în care fiecare două laturi opuse sunt paralele.

Proprietățile paralelogramului

- Laturile opuse ale paralelogramului sunt egale.
- Unghiurile opuse ale paralelogramului sunt egale.
- Diagonalele paralelogramului sunt împărțite în jumătate de către punctul lor de intersecție.

Înălțimea paralelogramului

Înălțime a paralelogramului se numește perpendiculara, coborâtă în orice punct al dreptei, care conține latura paralelogramului, pe dreapta, care conține latura opusă.

Criteriile paralelogramului

- Dacă într-un patrulater fiecare două laturi opuse sunt egale, atunci acest patrulater este paralelogram.
- Dacă într-un patrulater două laturi opuse sunt egale și paralele, atunci acest patrulater este paralelogram.
- Dacă diagonalele unui patrulater sunt împărțite în jumătate de punctul lor de intersecție, atunci acest patrulater este paralelogram.

Dreptunghiul

Dreptunghi se numește paralelogramul, în care toate unghiurile sunt drepte.

Proprietatea specifică a dreptunghiului

Diagonalele dreptunghiului sunt egale.

Criteriile dreptunghiului

- Dacă unul din unghiurile paralelogramului este drept, atunci acest paralelogram este dreptunghi.
- Dacă diagonalele paralelogramului sunt egale, atunci acest paralelogram este dreptunghi.

Rombul

Romb se numește paralelogramul, în care toate laturile sunt egale.

Proprietatea caracteristică a rombului

Diagonalele rombului sunt perpendiculare și sunt bisectoarele unghiurilor lui.

Criteriile rombului

- Dacă diagonalele paralelogramului sunt perpendiculare, atunci acest paralelogram este romb.
- Dacă diagonala paralelogramului este bisectoarea unghiului lui, atunci acest paralelogram — romb.

Pătratul

Pătrat se numește dreptunghiul, în care toate laturile sunt egale.

Linia medie a triunghiului

Linia medie a triunghiului se numește segmentul, care unește mijlocurile a două laturi ale lui.

Proprietatea linii medii a triunghiului

Linia medie a triunghiului, care unește mijlocurile a două laturi ale lui, este paralelă cu latura a treia și este egală cu jumătatea ei.

Trapezul

Trapez se numește patrulaterul, în care două laturi sunt paralele, iar altele două nu sunt paralele.

Înălțimea trapezului

Înălțimea a trapezului se numește perpendiculara, coborâte din orice punct al dreptei, care conține una din baze, pe dreapta ce conține cealaltă bază.

Linia media a trapezului

Linie medie a trapezului se numește segmentul, care unește mijlocurile laturilor laterale ale lui.

Proprietatea linii medii a trapezului

Linia medie a trapezului este paralelă cu bazele și este egală cu jumătate din suma lor.

Unghiul la centru al circumferinței

Unghi la centru al circumferinței se numește unghiul cu vârful în centrul circumferinței.

Unghiul înscris în circumferință

Unghi înscris în circumferință se numește unghiul, a cărui vârf aparține circumferinței, iar laturile intersectează circumferința.

Măsura în grade a unghiului înscris în circumferință

Măsura în grade a unghiului înscris este egală cu jumătate din măsura în grade a arcului pe care el se sprijină.

Proprietățile unghiurilor înscrise

- Unghiurile înscrise, care se sprijină pe unul și același arc, sunt egale.
- Unghiul înscris care se sprijină pe diametru (semicircumferință) este drept.

Circumferință circumscrisă patrulaterului

Circumferință se numește circumscrisă unui patrulater, dacă ea trece prin toate vârfurile lui.

Proprietatea patrulaterului înscris într-o circumferință

Dacă un patrulater este înscris într-o circumferință, atunci suma unghiurilor opuse ale lui este egală cu 180°

Criteriul patrulaterului căruia i se poate circumscrie o circumferință

Dacă într-un patrulater suma unghiurilor opuse este egală cu 180°, atunci lui i se poate circumscrie o circumferință.

Circumferința înscrisă în patrulater

Circumferința se numește înscrisă într-un patrulater dacă ea are punct de tangență cu toate laturile lui.

Proprietatea patrulaterului circumscris unei circumferințe

Dacă patrulaterul este circumscris unei circumferințe, atunci sumele laturilor opuse ale lui sunt egale.

Criteriul patrulaterului, în care poate fi înscrisă o circumferință

Dacă într-un patrulater convex sumele laturilor opuse ale lui sunt egale, atunci în el poate fi înscrisă o circumferință.

ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

§2

Însușind materialul acestui paragraf, voi veți afla proprietățile segmentelor, pe care dreptele paralele le taie pe laturile unghiului.

Printre triunghiuri o să vă învățați a găsi astfel de triunghiuri, care au aceeași formă, însă diferite dimensiuni.

Veți face cunoștință cu proprietatea coardelor ce se intersectează, și cu proprietatea tangentei și a secantei, duse la o circumferință printr-un punct.

Veți afla care triunghiuri se numesc asemenea, și o să vă învățați a folosi proprietățile lor.

11. Teorema lui Tales. Teorema despre segmentele proporționale

Teorema 11.1 (Teorema lui Tales). ***Dacă dreptele paralele, care intersectează laturile unui unghi, taie pe una din laturile lui segmente egale, atunci aceste drepte taie segmente egale și pe altă latură a lui.***

Demonstrație. Fie că este dat unghiul AOB (fig. 112). Se știe că $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_3B_3 \parallel A_4B_4$, ... Să demonstrăm că $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \ldots$.

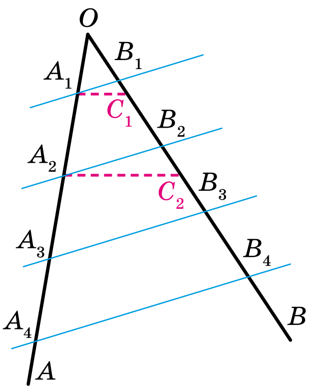


Fig. 112

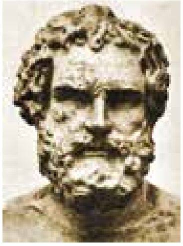
Admitem că $OB_1 \neq B_1B_2$. Fie că mijlocul OB_2 segmentului este un punct oarecare C_1. Atunci segmentu A_1C_1 — clinia medie a triunghiului A_2OB_2. De aici $A_1C_1 \parallel A_2B_2$. Deci prin punctul A_1 trec două drepte paralele cu dreapta A_2B_2, ceea ce contrazice axiomei dreptelor paralele. Noi am obținut contradicție. Așadar, $OB_1 = B_1B_2$.

Admitem că $B_1B_2 \neq B_2B_3$. Fie că mijlocul segmentului B_1B_3 este un oarecare punct C_2. Atunci segmentul A_2C_2 — linia media a trapezului $A_3A_1B_1B_3$. De aici $A_2C_2 \parallel A_3B_3$. Așadar, prin punctul A_2 trec două drepte, paralele cu dreapta A_3B_3. Noi am obținut contradicție. Deci, $B_1B_2 = B_2B_3$.

Analogic demonstrăm, că $B_2B_3 = B_3B_4$ ș.a.m.d. ▲

Definiție. Raport a două segmente se numește raportul lungimilor lor, exprimate în unele și aceleași unități de măsură.

Dacă, de exemplu, $AB = 8$ cm, $CD = 6$ cm, atunci raportul segmentului AB către segmentul CD este egal cu $\frac{8}{6}$. Se scrie: $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{6}$, adică $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$.



Tales din Milet
(ap.625 — ap. 547 î.e.n.)

Filozof, savant, negustor și om politic din Grecia Antică. Își trăgea originea din Miletport din Asia Mică, de pe țărmul mării Egee.

Dacă $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}$, atunci se spune că segmentele AB și CD sunt **proporționale** respectiv segmentelor A_1B_1 și C_1D_1.

Analogic se poate spune despre proporționalitatea a unei cantități mari de segmente. De exemplu, dacă $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{MN}{M_1N_1}$, atunci se spune că segmentele AB, CD, MN sunt proporționale respectiv cu segmentele A_1B_1, C_1D_1, M_1N_1.

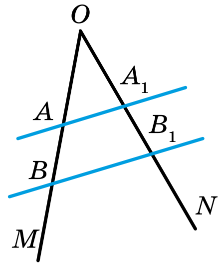


Fig. 113

Teorema 11.2 (teorema despre segmentele proporționale). ***Dacă dreptele paralele intersectează laturile unui unghi, atunci segmentele ce s-au obținut pe una din laturile unghiului, sunt proporționale cu segmentele corespunzătoare, ce s-au obținut pe cealaltă latură a unghiului.***

Demonstrația acestei teoreme iese în afara limitelor cursului de geometrie școlar. Vom aduce demonstrația pentru un caz particular.

Fie că laturile unghiului MON sunt intersectate de dreptele paralele AA_1 și BB_1 (fig. 113). Vom demonstra, că:

1) $\frac{OA}{OA_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$; 2) $\frac{OA}{OA_1}=\frac{OB}{OB_1}$; 3) $\frac{OB}{OB_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$.

Să demonstrăm prima din egalitățile expuse (altele două se demonstrează analogic).

Fie că pentru segmentele OA și OB există un astfel de segment cu lungimea l, care se cuprinde de un număr întreg de ori în fiecare din ele. Avem: $OA = ml$, $AB = nl$, unde m și n — niște numere naturale.

Atunci segmentele OA și AB pot fi împărțite corespunzător în m și n segmente egale, fiecare din ele egal cu l.

Prin extremitățile segmentelor obținute ducem drepte paralele cu dreapta BB_1 (fig. 114). Pe baza teoremei lui Tales aceste drepte împart segmentele OA_1 și A_1B_1 corespunzător în m și n segmente egale. Fie ca fiecare din aceste segmente este egal cu l_1. De aici $OA_1 = ml_1$, $A_1B_1 = nl_1$.

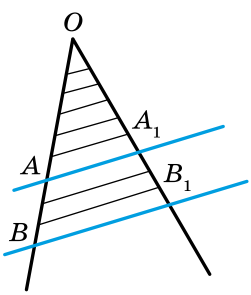


Fig. 114

Avem: $\frac{OA}{AB}=\frac{ml}{nl}=\frac{m}{n}$, $\frac{OA_1}{A_1B_1}=\frac{ml_1}{nl_1}=\frac{m}{n}$. De aici $\frac{OA}{AB}=\frac{OA_1}{A_1B_1}$. Atunci $\frac{OA}{OA_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$.

De ce raționamentele aduse nu pot fi considerate ca demonstrație deplină a teoremei? Chestia constă în aceea, că nu pentru orice două segmente există un segment, care se conține în fiecare din

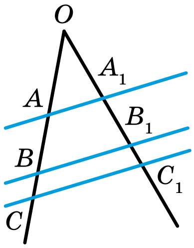


Fig. 115

ele de un număr întreg de ori. În particular, pentru segmentele OA și AB un astfel de segment poate să nu existe. Demonstrația acestui caz iese în afara limitelor cursului considerat. ▲

Dacă completăm figura 113 cu dreapta CC_1, paralelă cu dreapta BB_1 (fig. 115), atunci, judecând analogic, obținem, de exemplu, că $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

Teorema 11.2 rămâne justă, dacă în loc de laturile unui unghi de luat oricare drepte.

Teorema 11.3. ***Toate trei mediane ale triunghiului se intersectează într-un punct, care o împarte pe fiecare din ele în raportul*** $2:1$***, socotind de la vârful triunghiului.***

Demonstrație. În figura 116 medianele AA_1 și BB_1 ale triunghiului ABC se intersectează în punctul M. Să demonstrăm că mediana CC_1 tot trece prin punctul M și $\frac{BM}{MB_1} = \frac{AM}{MA_1} = \frac{CM}{MC_1} = \frac{2}{1}$.

Ducem $B_1K \parallel AA_1$. Deoarece $AB_1 = B_1C$, conform teoremei lui Tales $A_1K = KC$, adică $\frac{A_1C}{A_1K} = \frac{2}{1}$. Dacă $BA_1 = A_1C$, atunci rezultă $\frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$. Pe baza teoremei despre segmentele proporționale $\frac{BM}{MB_1} = \frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$.

Deci, mediana AA_1, intersectând mediana BB_1, o împarte în raportul 2 : 1, socotind de la vârful B.

Analogic se poate demonstra(faceți aceasta de sine stătător) că mediana CC_1 tot împarte mediana BB_1 în raportul 2 : 1, socotind de la vârful B (fig. 117).

Iar aceasta înseamnă, că toate trei mediane ale triunghiului ABC trec printr-un singur punct. Noi am demonstrat că acest punct împarte media în raportul 2 : 1. Analogic se poate demonstra că acest punct împarte în raportul 2 : 1 de asemenea medianele AA_1 și CC_1. ▲

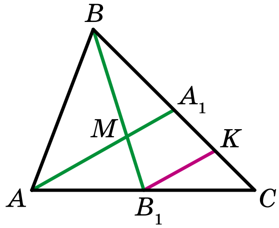


Fig. 116

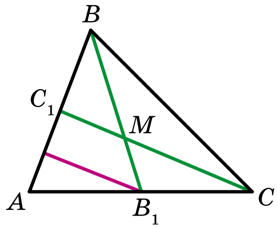


Fig. 117

În figura 118 este reprezentat triunghiul ABC. Punctul D aparține laturii AC. În acest caz se spune că laturile AB și BC sunt **alăturate** respectiv segmentelor AD și DC.

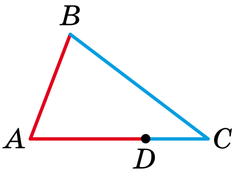


Fig. 118

Teorema 11.4 (proprietatea bisectoarei triunghiului). ***Bisectoarea triunghiului împarte latura lui în segmente, proporționale cu laturile alăturate lor.***

Demonstrație. În figura 119 segmentul BD — bisectoarea triunghiului ABC. Să demonstrăm că $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$.

Prin punctul C ducem o dreaptă paralelă cu dreapta BD. Fie că dreapta dusă intersectează dreapta AB în punctul E. Unghiurile 1 și 2 sunt egale ca unghiuri alterne interne pentru dreptele paralele BD și CE și secanta BC; unghiurile 3 și 4 sunt egale ca unghiuri de aceeași parte a secantei AE pentru dreptele paralele BD și CE. Deoarece BD este bisectoarea triunghiului ABC, avem că $\angle 4 = \angle 1$. De aici $\angle 2 = \angle 3$. Atunci triunghiul CBE este isoscel cu laturile egale BC și BE. Pe baza teoremei despre segmentele proporționale $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BE}$. Deoarece $BE = BC$, avem că $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$. ▲

Problemă. Împărțiți segmentul dat în trei segmente egale.

Rezolvare. Prin extremitatea A a segmentului dat AB ducem semidreapta AC, care nu aparține dreptei AB (fig. 120). Notăm pe semidreapta AC un punct arbitrar A_1. Apoi notăm punctele A_2 și A_3 astfel ca $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$. Ducem segmentul A_3B. Prin punctele A_1 și A_2 ducem drepte paralele la dreapta A_3B. Ele vor intersecta segmentul AB în punctele B_1 și B_2 respectiv. Pe baza teoremei lui Tales $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$. ●

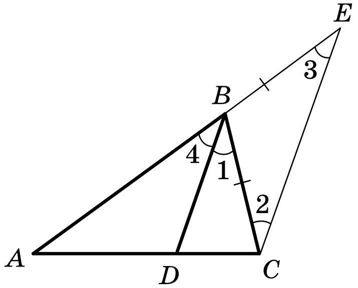


Fig. 119

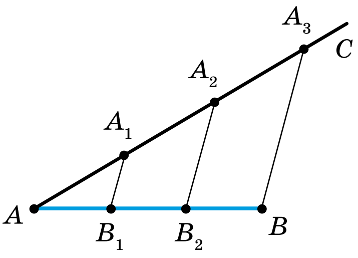


Fig. 120

1. Formulați teorema lui Tales.
2. Ce se numește raportul a două segmente?
3. În care caz se spune că segmentele AB și CD sunt proporționale cu segmentele A_1B_1 și C_1D_1?
4. Formulați teorema despre segmentele proporționale.
5. Formulați teorema despre intersecția medianelor a unui triunghi.
6. Formulați proprietatea bisectoarei triunghiului.

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

368.° Desenați un segment arbitrar și împărțiți-l în cinci părți egale.

369.° Desenați un segment oarecare și împărțiți-l în șapte părți egale.

370.° Desenați un segment oarecare AB și construiți pe el un astfel de punct C, ca $AC : CB = 2 : 7$.

371.° Desenați un segment arbitrar CD și construiți pe el un astfel de punct E, că $CE : ED = 1 : 5$.

EXERCIȚII

372.° În figura 121 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OB_1 = 3$ cm. Aflați segmentele B_1B_2, OB_3, B_1B_4.

373.° În figura 122 $AB = BC$, $EF = 5$ cm. Aflați segmentul ED.

374.° Aflați raportul segmentelor AB și CD, dacă lungimile lor sunt egale respectiv cu 12 cm și 18 cm. Oare se va modifica acest raport, dacă lungimile segmentelor date le vom exprima în decimetri? în milimetri?

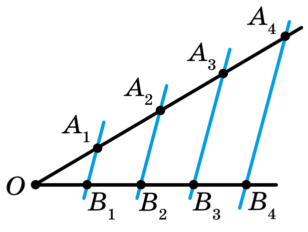


Fig. 121

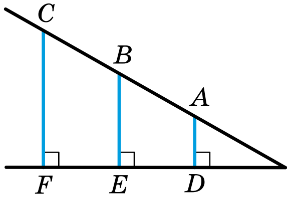


Fig. 122

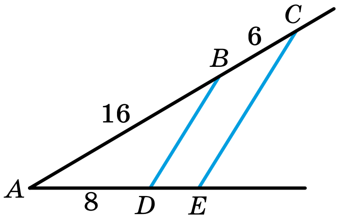


Fig. 123

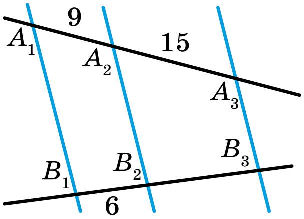


Fig. 124

375.° Oare sunt proporționale segmentele AB și CD respectiv segmentelor EF și MK, dacă:
1) $AB = 16$ cm, $CD = 6$ cm, $EF = 24$ cm, $MK = 9$ cm;
2) $AB = 8$ cm, $CD = 20$ cm, $EF = 10$ cm, $MK = 35$ cm?

376.° Dintre segmentele AB, CD, EF, MK, PS alegeți patru segmente astfel, ca două din ele să fie proporționale cu celelalte două segmente, dacă $AB = 3$ cm, $CD = 16$ cm, $EF = 18$ cm, $MK = 36$ cm, $PS = 6$ cm.

377.° În figura 123 $BD \parallel CE$, $AB = 16$ cm, $BC = 6$ cm, $AD = 8$ cm. Aflați segmentul DE.

378.° În figura 124 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = 9$ cm, $A_2A_3 = 15$ cm, $B_1B_2 = 6$ cm. Aflați segmentul B_2B_3.

379.° În figura $DE \parallel AC$, $BE = 10$ cm, segmentul BD este de două ori mai mare decât segmentul AD. Aflați segmentul BC.

380.° Dreapta, paralelă cu latura BC a triunghiului ABC, intersectează latura lui AB în punctul M, iar latura AC — în punctul K, $AM = 9$ cm, $BM = 6$ cm, $KC = 8$ cm. Aflați segmentul AK.

381.° Demonstrați că linia medie a triunghiului ABC, paralelă cu latura AC, împarte în jumătate orice segment, care unește vârful B cu un punct oarecare al laturii AC.

382.° Distanța de la punctul de intersecție al diagonalelor unui dreptunghi până la latura lui mai mare este egală cu 7 cm. Aflați lungimea laturii mai mici a dreptunghiului.

383.° Înălțimea triunghiului echilateral este egală cu 12 cm. La ce distanță de la laturile triunghiului se găsește punctul de intersecție al bisectoarelor lui?

384.° Mediana CD a triunghiului ABC este egală cu 9 cm. Aflați segmentele CO și OD, unde OD — punctul de intersecție al medianelor triunghiului ABC.

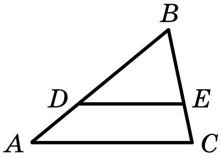


Fig. 125

385.° Segmentul BD este bisectoarea triunghiului ABC, $AB = 40$ cm, $AD = 30$ cm, $CD = 12$ cm. Aflați latura BC.

386.° Segmentul AM — bisectoarea triunghiului ABC, $AB = 48$ cm, $AC = 32$ cm, $BM = 18$ cm. Aflați latura BC.

387.• Extremitățile segmentului, care nu intersectează dreapta dată, se află de la această dreaptă la distanța de 8 cm și 14 cm. Aflați distanța de la mijlocul acestui segment până la dreapta dată.

388.• Distanța de la mijlocul coardei BC până la diametrul AC este egală cu 3 cm, $\angle BAC = 30°$. Aflați coarda AB.

389.• Segmentul BM — înălțimea rombului $ABCD$, dusă la latura AD, $\angle A = 45°$, $AM = 8$ cm. Aflați distanța de la punctul de intersecție al diagonalelor rombului până la latura AD.

390.• În triunghiul ABC se știe, că $AB = BC$, $AC = 8$ cm, AD — mediană, BE — înălțime, $BE = 12$ cm. Din punctul D este coborâtă perpendiculara DF pe latura AC. Aflați segmentul DF și unghiul ADF.

391.• Latura AC a triunghiul ABC este egală cu 24 cm. Latura AB a fost împărțită în 4 segmente egale, și prin punctele de divizare s-au dus drepte, paralele cu latura AC. Aflați segmentele acestor drepte, care aparțin triunghiului.

392.• Bazele trapezului sunt egale cu 16 cm și 28 cm. Una din laturile laterale a fost împărțită în trei segmente egale, și prin punctele de divizare au fost duse drepte, paralele cu bazele. Aflați segmentele acestor drepte care aparțin trapezului.

393.• Latura DE a triunghiului DEF a fost împărțită în trei segmente egale și prin punctele de împărțire au fost duse drepte paralele cu latura DF. Aflați segmentele acestor drepte, care aparțin triunghiului DEF, dacă $DF = 15$ см.

394.• Demonstrați că linia medie a trapezului împarte diagonalele lui în jumătate.

395.• Linia medie MK a trapezului $ABCD$ intersectează diagonala AC în punctul E, $ME = 4$ cm, $EK = 6$ cm. Aflați bazele trapezului.

396.• Diagonalele trapezului intersectează linia medie a lui MK în punctele E și F. Demonstrați, că $ME = KF$.

397.• Bazele unui trapez sunt egale cu 12 cm și 22 cm. Aflați segmentele în care diagonalele trapezului împart linia medie a lui.

398.• În figura 126 $AE \parallel BF \parallel CM \parallel DK$, $AB = 25$ cm, $BC = 20$ cm, $CD = 35$ cm, $EK = 48$ cm. Aflați segmentele EF, FM și MK.

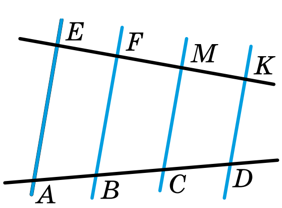


Fig. 126

399.$^{\bullet}$ Prin punctul D, notat pe latura AC a triunghiului ABC, este dusă o dreaptă care este paralelă cu latura AB și intersectează latura BC în punctul E. Aflați segmentul BE, dacă $AD : DC = 5 : 7$, $BC = 36$ cm.

400.$^{\bullet}$ Punctele M și K sunt mijlocurile laturilor AB și AD ale paralelogramului $ABCD$, corespunzător. Demonstrați că punctul de intersecție a dreptelor BK și DM aparține diagonalei AC.

401.$^{\bullet}$ Demonstrați că dacă două mediane ale triunghiului sunt egale, atunci acest triunghi este isoscel.

402.$^{\bullet}$ În triunghiul ABC ($AB = BC$) este dusă mediana AM și înălțimea BH. Aflați înălțimea BH, dacă $AM = 45$ cm, $\angle CAM = 30°$.

403.$^{\bullet}$ Se dă segmentul AB și punctul O, care nu aparține dreptei AB. Construiți triunghiul, pentru care segmentul AB este latură, iar punctul O — punctul de intersecție al medianelor.

404.$^{\bullet}$ Segmentul BD — bisectoarea triunghiului ABC, $AB = 28$ cm, $BC = 20$ cm, $AC = 36$ cm. Aflați segmentele AD și CD.

405.$^{\bullet}$ În triunghiul ABC este înscris rombul $CDEF$ astfel, că unghiul C este la ei comun, iar vârfurile D, E și F ale rombului aparțin corespunzător laturilor AC, AB și BC ale triunghiului. Aflați laturile AC și BC, dacă $AE = 30$ cm, $BE = 12$ cm, iar perimetrul triunghiului este egal cu 105 cm.

406.$^{\bullet}$ Laturile triunghiului sunt egale cu 39 cm, 65 cm și 80 cm. Circumferința, centrul căreia aparține laturii mai mari a triunghiului, are puncte de tangență cu celelalte două laturi ale lui. În ce segmente centrul acestei circumferințe împarte latura triunghiului?

407.$^{\bullet}$ Punctul D — mijlocul bazei AC a triunghiului isoscel ABC. Pe latura AB au notat punctul M astfel, că $AM : MB = 2 : 7$. În ce raport dreapta BD împarte segmentul CM?

408.$^{\bullet}$ În triunghiul isoscel DEF au dus înălțimea EC pe baza lui și au notat pe latura laterală a lui EF punctul A. Segmentele EC și DA se intersectează în punctul O, iar $AO : OD = 3 : 8$. Aflați raportul $EA : AF$.

409.$^{\bullet}$ În triunghiul isoscel înălțimea, dusă la bază, este egală cu 42 cm, iar baza se raportă la latura laterală ca 6 : 11. Aflați raza circumferinței, înscrise în acest triunghi.

410.$^{\bullet}$ Latura laterală a triunghiului isoscel are 60 cm, iar centrul circumferinței înscrise împarte mediana, dusă la bază, în raportul 12 : 5. Aflați baza triunghiului.

411.$^{\bullet\bullet}$ Pe latura BC a triunghiului ABC este notat punctul M astfel, că $BM : MC = 3 : 10$. În ce raport segmentul AM împarte mediana BK a triunghiului ABC?

412.•• Pe latura AB a triunghiului ABC este notat punctul M astfel că $AM : MB = 4 : 3$. În care raport mediana BK: 1) împarte segmentul CM; 2) este împărțită de segmentul CM?

413.•• Demonstrați că segmentul care unește mijlocurile diagonalelor trapezului, este paralel cu bazele lui și este egal cu semidiferența lor.

414.•• Se dau segmentele a, b, c. Construiți așa un segment x ca să aibă loc egalitatea $a : x = b : c$.

415.•• Prin punctul O, care aparține unghiului dat, duceți segmentul, extremitățile căruia aparțin laturilor acestui unghi și care este împărțit de punctul O în: 1) jumătate; 2) raportul 2 : 3.

416.•• Construiți triunghiul:

1) după o latură și unghiurile, pe care această latură le formează cu medianele, duse la celelalte două laturi;
2) după două mediane și unghiul făcut de ele;
3) după înălțimea și mediana, duse la una din laturi și unghiul dintre această latură și mediana, dusă la altă latură;
4) după trei mediane.

417.•• Construiți triunghiul:

1) după o latură și medianele, duse alte două laturi;
2) după înălțimea, dusă la una din laturi, și medianele, duse la altele două laturi.

418.•• Pe laturile unghiului A sunt notate punctele B_1, B_2, C_1, C_2 astfel, că $\dfrac{AB_1}{B_1B_2} = \dfrac{AC_1}{C_1C_2}$ (fig. 127). Demonstrați, că $B_1C_1 \parallel B_2C_2$.

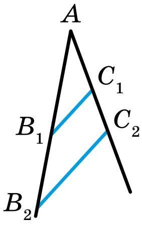


Fig. 127

419.* Bisectoarea unghiului exterior de la vârful B a triunghiului ABC intersectează semidreapta AC în punctul D. Demonstrați că $AB : BC = AD : CD$.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

420. Latura pătratului $ABCD$ este egală cu a. Pe arcul AC al circumferinței cu centrul B, raza căreia este egală cu a, este notat punctul E astfel, că $\angle BEC = 75°$. Aflați segmentul AE.

421. Diagonala trapezului este perpendiculară pe bazele lui, unghiul obtuz, alăturat bazei mai mari, este egal cu 120°, latura laterală, alăturată acestui unghi are 12 cm, iar baza cea mai mare — 16 cm. Aflați linia medie a trapezului.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

422. Un triunghi echilateral este acoperit cu cinci triunghiuri echilaterale mai mici, egale între ele. Demonstrați, că pentru acoperire sunt suficiente și patru astfel de triunghiuri.

12. Triunghiuri asemenea

În figura 128 voi vedeți imaginea micșorată a copertei manualului de geometrie. În general, în viața de toate zilele voi deseori vă întâlniți cu obiecte, care au aceeași formă, însă dimensiuni diferite (fig. 129).

Fig. 128

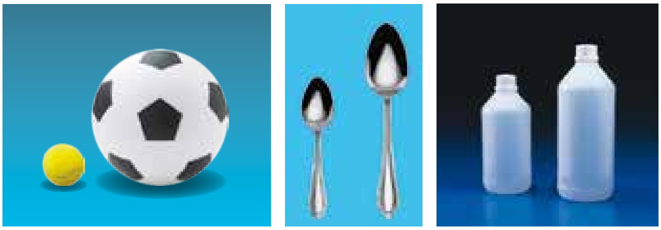


Fig. 129

Figurile geometrice care au aceeași formă se numesc **asemenea**. De exemplu, asemenea sunt oricare două circumferințe, două pătrate, două triunghiuri isoscele (fig. 130).

În figura 131 sunt reprezentate triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, în care sunt egale unghiurile: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Laturile AB și A_1B_1 sunt opuse unghiurilor egale C și C_1. Așa laturi se numesc **omoloage(corespondente)**. De asemenea sunt omoloage laturile BC și B_1C_1, CA și C_1A_1.

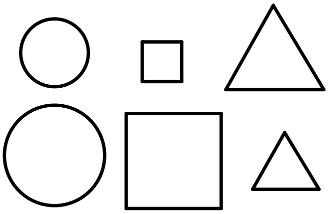


Fig. 130

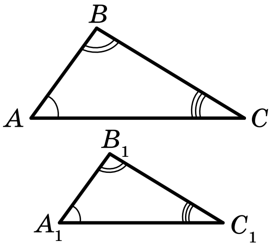


Fig. 131

Definiție. Două triunghiuri se numesc asemenea, dacă unghiurile lor sunt respectiv egale și laturile unui triunghi sunt proporționale cu laturile corespunzătoare ale celuilalt triunghi.

De exemplu, în figura 132 sunt reprezentate triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, în care $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ și $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = 2$. Pe baza definiției aceste triunghiuri sunt asemenea. Se scrie: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ (se citește: „triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul $A_1B_1C_1$").

Numărul 2, cu care este egal raportul laturilor omoloage, se numește **coeficient de asemănare**. Se spune, că triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul $A_1B_1C_1$ cu coeficientul de asemănare, egal cu 2. Se scrie: $\Delta ABC \overset{2}{\backsim} \Delta A_1B_1C_1$.

Deoarece $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{1}{2}$, reiese că se poate afirma că triunghiul $A_1B_1C_1$ este asemenea cu triunghiul ABC cu coeficientul de asemănare $\frac{1}{2}$. Se scrie: $\Delta A_1B_1C_1 \overset{1/2}{\backsim} \Delta ABC$.

Din definiția egalității triunghiurilor rezultă, că oricare două triunghiuri egale sunt asemenea cu coeficientul de asemănare egal cu 1.

Dacă $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ și $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$, atunci $\Delta ABC \backsim \Delta A_2B_2C_2$. Demonstrați această proprietate de sine stătător.

Lema[1] despre triunghiurile asemenea. ***Dreapta, care este paralelă cu o latură a triunghiului și intersectează alte două laturi ale lui, taie de la unghiul dat un triunghi asemenea cu el.***

Demonstrație. În figura 133 este reprezentat triunghiul ABC, segmentul A_1C_1 este paralel cu latura AC. Să demonstrăm că $\Delta A_1BC_1 \backsim \Delta ABC$.

Unghiurile A și A_1, C și C_1 sunt egale ca unghiuri corespondente pentru dreptele paralele A_1C_1 și AC și secantele AB și CB respectiv. Deci, unghiurile triunghiurilor, care se cercetează sunt corespunzător egale.

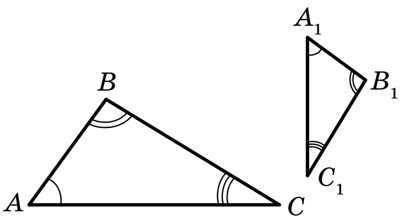


Fig. 132

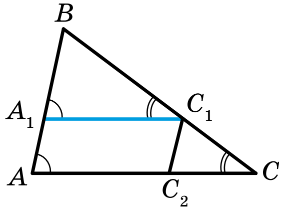


Fig. 133

[1] **Lema** se numește teorema ajutătoare, care se folosește pentru demonstrarea altor teoreme.

Să arătăm, că laturile BA și BC sunt proporționale laturilor BA_1 și BC_1.

Din teorema despre segmentele proporționale(teorema 11.2) reiese, că $\frac{BA}{BC}=\frac{BA_1}{BC_1}$. De aici $\frac{BA}{BA_1}=\frac{BC}{BC_1}$.

Ducem $C_1C_2 \parallel AB$. Obținem: $\frac{BC}{BC_1}=\frac{AC}{AC_2}$. Conform definiției patrulaterul $AA_1C_1C_2$ — paralelogram. $AC_2 = A_1C_1$. Atunci $\frac{BC}{BC_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$.

Așadar, noi am demonstrat, că $\frac{BA}{BA_1}=\frac{BC}{BC_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$.

Deci în triunghiurile A_1BC_1 și ABC unghiurile corespunzătoare sunt egale și laturile omoloage sunt proporționale. De aceea pe baza definiției aceste triunghiuri sunt asemenea. ▲

Problemă. Demonstrați că raportul perimetrelor ale triunghiurilor asemenea este egal cu coeficientul de asemănare.

Rezolvare. Fie dat triunghiul $A_1B_1C_1$ asemenea cu triunghiul ABC cu coeficientul de asemănare k. Atunci $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{A_1C_1}{AC}=k$, de unde $A_1B_1 = k \cdot AB$, $B_1C_1 = k \cdot BC$, $A_1C_1 = k \cdot AC$.

Notăm cu litera P_1 perimetrul triunghiului $A_1B_1C_1$, cu litera P — perimetrul triunghiului ABC. Avem:

$P_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = k \cdot AB + k \cdot BC + k \cdot AC = k\ (AB + BC + AC) = kP$, adică $\frac{P_1}{P}=k$. ●

1. Care două triunghiuri se numesc asemenea?
2. Cum de aflat coeficientul de asemănare a două triunghiuri asemenea?
3. Formulați lema despre triunghiurile asemenea.

EXERCIȚII

423.° În figura 134 sunt reprezentate triunghiurile asemenea ABC și DEF, ale căror unghiuri egale sunt notate cu același număr de paranteze. Care laturi ale acestor triunghiuri sunt proporționale? Scrieți egalitățile corespunzătoare.

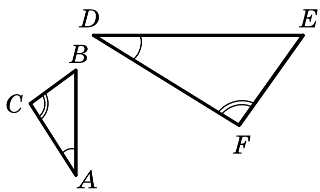


Fig. 134

424.° Oare sunt asemenea triunghiurile ABC și MNK, dacă $\angle A = 40°$, $\angle B = 82°$, $\angle M = 40°$, $\angle K = 58°$, $AB = 2{,}4$ см, $BC = 2{,}1$ cm, $AC = 3{,}9$ cm, $MN = 3{,}2$ cm, $NK = 2{,}8$ cm, $MK = 5{,}2$ cm?

425.° Se știe că $\Delta DEF \overset{0,3}{\sim} \Delta MCP$, totodată laturii DE îi corespunde latura MC, laturii DF — latura MP, $MC = 12$ cm, $MP = 8$ cm, $EF = 4{,}5$ cm. Aflați laturile necunoscute ale acestor triunghiuri.

426.° Se știe că $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, totodată $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 10$ cm, $A_1B_1 = 9$ cm. Aflați laturile B_1C_1 și A_1C_1.

427.° Aflați unghiurile triunghiului $A_1B_1C_1$, dacă $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, totodată laturii AB îi corespunde latura A_1B_1, laturii BC — latura B_1C_1, $\angle A = 25°$, $\angle B = 70°$.

428.° Laturile MK și DE, KT și EF — laturile corespunzătoare ale triunghiurilor asemenea MKT și DEF, $MK = 18$ cm, $KT = 16$ cm, $MT = 28$ cm, $MK : DE = 4 : 5$. Aflați laturile triunghiului DEF.

429.° În figura 135 $AB \parallel CD$. Găsiți în această figură triunghiuri asemenea. Scrieți proporțiile care încep cu raportul: 1) $\frac{AE}{CE}$; 2) $\frac{CD}{AB}$; 3) $\frac{AB}{AE}$.

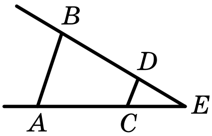


Fig. 135

430.° Dreapta, paralelă cu latura AC a triunghiului ABC, intersectează latura AB în punctul D, iar latura BC — în punctul E. Aflați:

1) segmentul BD, dacă $AB = 16$ cm, $AC = 20$ cm, $DE = 15$ cm;

2) segmentul AD, dacă $AB = 28$ cm, $BC = 63$ cm, $BE = 27$ cm.

431.° În triunghiul ABC se știe că $AB = 6$ cm. Prin punctul M al laturii AB este dusă o dreaptă care este paralelă cu latura BC și intersectează latura AC în punctul K. Aflați laturile necunoscute ale triunghiului ABC, dacă $AM = 4$ cm, $MK = 8$ cm, $AK = 9$ cm.

432.° Aflați înălțimea turnului (fig. 136), dacă distanțele de la observator până la prăjină și până la turn sunt egale respectiv 1,5 m și 39 m, înălțimea prăjinii — 3 m, iar înălțimea observatorului — 1,8 m.

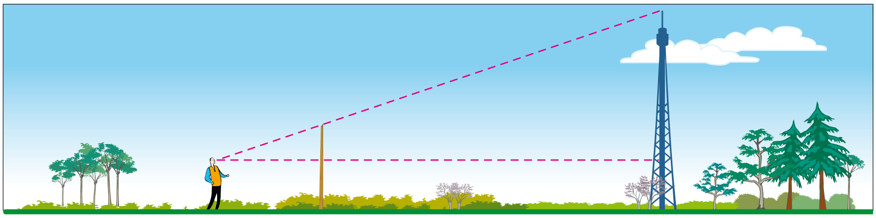


Fig. 136

433.° Prelungirile laturilor laterale AB și CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul E. Aflați segmentul CE, dacă $DE = 40$ cm, $BC : AD = 4 : 5$.

434.° Prelungirile laturilor laterale AB și CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul M. Aflați baza mai mică a trapezului, dacă baza mai mare AD este egală cu 42 cm, $AB = 9$ cm, $BM = 54$ cm.

435.° Aplicând definiția triunghiurilor asemenea, demonstrați că două triunghiuri echilaterale arbitrare sunt asemenea.

436.• Punctele M și K — mijlocurile laturilor CD și AD ale pătratului $ABCD$, respectiv. Folosindu-se de definiția triunghiurilor asemenea demonstrați, că $\Delta MDK \sim \Delta BCD$.

437.• Laturile triunghiului se raportă ca 5 : 4 : 7. Aflați laturile triunghiului asemenea lui, în care: 1) perimetrul este egal cu 64 cm; 2) latura mai mică este egală cu 24 cm.

438.• Laturile triunghiului dat sunt egale cu 15 cm, 25 cm și 35 cm. Aflați laturile triunghiului asemenea cu el, în care: 1) perimetrul este egal cu 45 cm; 2) diferența dintre latura cea mai mare și cea mai mică constituie16 cm.

439.• În figura 137 este reprezentat triunghiul ABC și rombul $BDEK$, înscris în el. Aflați latura rombului, dacă $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm.

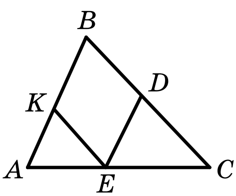


Fig. 137

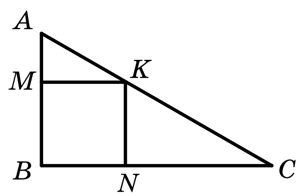


Fig. 138

440.• În figura 138 este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC ($\angle B = 90°$) și pătratul $BMKN$, înscris în el. Aflați segmentul CN, dacă $BM = 6$ cm, $AB = 10$ cm.

441.• Două circumferințe cu centrele O_1 și O_2 razele de 8 cm și 12 cm respectiv au numai un singur punct comun A (punctul A se află între punctele O_1 și O_2). Tangenta comună exterioară a lor intersectează dreapta O_1O_2 în punctul B. Aflați distanțele de la punctul B până la centrele circumferințelor date.

442.•• Perimetrul triunghiului isoscel este egal cu 48 cm. Prin mijlocul înălțimii triunghiului, coborâtă pe baza lui, este dusă o dreaptă, paralelă cu latura laterală. Aflați perimetrul triunghiului pe care această dreaptă îl taie de la triunghiul dat.

443.•• În triunghiul isoscel, baza căruia este egală cu 12 cm, iar latura laterală — cu 18 cm, este înscrisă o circumferință. Aflați distanța dintre punctele de tangență ale acestei circumferințe cu laturile laterale ale triunghiului.

444.* În triunghiul ABC se știe, că $AB = 8$ cm, $BC = 12$ cm, $\angle ABC = 120°$, BD — bisectoare. Aflați segmentul BD.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

445. Latura BC a paralelogramului $ABCD$ este de 2 ori mai mare, decât latura AB. Bisectoarele unghiurilor A și B ale paralelogramului intersectează dreapta CD în punctele M și K respectiv (fig. 139). Aflați laturile paralelogramului, dacă $MK = 18$ cm.

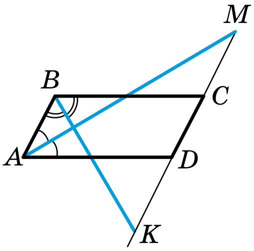


Fig. 139

446. Diagonalele dreptunghiului $ABCD$ se intersectează în punctul O, unghiul AOD este cu 60° mai mare decât unghiul AOB, $AC = 24$ cm. Aflați perimetrul triunghiului COD.

447. Circumferința, centrul căreia aparține laturii AB a triunghiului ABC, trece prin punctul B, are punctul de tangență C cu latura AC și intersectează latura AB în punctul D, totodată $AD : BD = 1 : 2$. Aflați unghiurile: 1) ale triunghiului ABC; 2) ale triunghiului BCD.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

448. Pe plan au notat 25 puncte în așa un mod, că printre oricare trei din ele se vor găsi două puncte, distanța dintre care este mai mică decât unitatea. Demonstrați că există o circumferință cu raza de o unitate care conține nu mai puțin, decât 13 din punctele date.

13. Primul criteriu de asemănare al triunghiurilor

Dacă pentru triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt satisfăcute condițiile $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$, atunci pe baza definiției aceste triunghiuri sunt asemenea.

Oare se poate după o cantitate mai mică de condiții de determinat asemănarea triunghiurilor? La această întrebare răspund criteriile de asemănare ale triunghiurilor.

Teorema 13.1 (primul criteriu de asemănare al triunghiurilor: după două unghiuri). ***Dacă două unghiuri ale unui triunghi sunt egale cu două unghiuri ale altui triunghi, atunci așa triunghi sunt asemenea.***

Demonstrație. Să considerăm triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, în care $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Să demonstrăm că $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Dacă $AB = A_1B_1$, atunci triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt egale conform celui de-al doilea criteriu de egalitate al triunghiurilor, și deci, aceste triunghiuri sunt asemenea.

Fie, de exemplu, $AB > A_1B_1$. Depunem pe latura BA segmentul BA_2, care este egal cu latura B_1A_1. Prin punctul A_2 ducem dreapta A_2C_2, paralelă cu latura AC (fig. 140).

Unghiurile A și BA_2C_2 sunt corespondente pentru dreptele paralele A_2C_2 și AC та secanta AA_2. De aici $\angle A = \angle BA_2C_2$. Însă $\angle A = \angle A_1$. Obținem că $\angle A_1 = \angle BA_2C_2$. Așadar triunghiurile A_2BC_2 și $A_1B_1C_1$ sunt egale pe baza criteriului al doilea a egalității triunghiurilor. În virtutea lemei despre triunghiurile asemenea $\Delta A_2BC_2 \backsim \Delta ABC$. Deci, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ▲

Problema 1. Linia medie a trapezului $ABCD$ ($BC \parallel AD$) este egală cu 24 cm, iar diagonalele lui se intersectează în punctul O. Aflați bazele trapezului, dacă $AO : OC = 5 : 3$.

Rezolvare. Să considerăm triunghiurile AOD și COB (fig. 141). Unghiurile AOD și BOC sunt egale ca verticale, unghiurile CAD și ACB șunt egale ca unghiuri alterne interne pentru dreptele paralele BC și AD, și secanta AC. Deci, triunghiurile AOD și COB sunt asemenea după două unghiuri.

Atunci $\frac{AD}{BC} = \frac{AO}{CO} = \frac{5}{3}$.

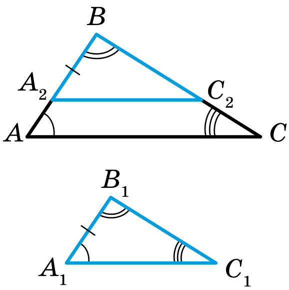


Fig. 140

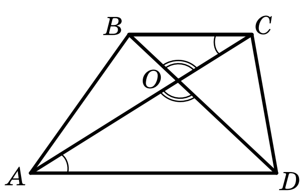


Fig. 141

Fie $BC = 3x$ cm, atunci $AD = 5x$ cm.

Deoarece linia medie a trapezului este egală cu 24 cm, reiese că $BC + AD = 48$ cm.

Avem: $3x + 5x = 48$. De aici $x = 6$.

Așadar, $BC = 18$ cm, $AD = 30$ cm.

Răspuns: 18 cm, 30 cm.

Problem 2 (proprietatea coardelor, care se intersectează). Demonstrați că dacă coardele AB și CD ale circumferinței se intersectează în punctul M, atunci $AM \cdot MB = DM \cdot MC$ (fig. 142).

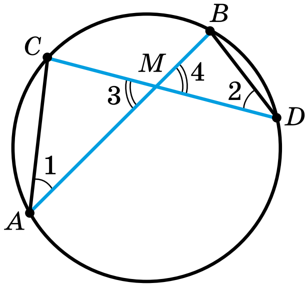


Fig. 142

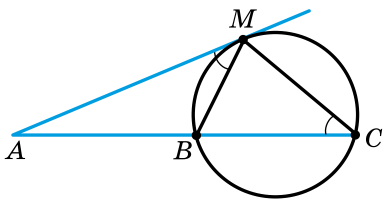


Fig. 143

Rezolvare. Să examinăm triunghiurile ACM și DBM. Unghiurile 3 și 4 sunt egale ca unghiuri verticale, unghiurile 1 și 2 sunt egale ca unghiuri înscrise, care se sprijină pe unul și același arc. Deci, triunghiurile ACM și DBM sunt asemenea pe baza primului criteriu al asemănării triunghiurilor. Atunci $\frac{AM}{DM} = \frac{MC}{MB}$. De aici $AM \cdot MB = DM \cdot MC$.

Problema 3 (proprietatea tangentei și a secantei). Demonstrați, că dacă prin punctul A sunt duse la circumferință tangenta AM (M — punctul de tangență) și dreapta (secanta), care intersectează circumferința în punctele B și C (fig. 143), atunci $AM^2 = AC \cdot AB$.

Rezolvare. Să considerăm triunghiurile AMB și ACM. Ele au unghiul A comun. Pe baza proprietății unghiului, format de tangentă și coardă (vezi problema — cheie 1 p.9), $\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MB$. Unghiul MCB este înscris. El se sprijină pe arcul MB, de aceea $\angle MCB = \frac{1}{2} \cup MB$. Așadar, triunghiurile AMB și ACM sunt asemenea pe baza primului criteriu de asemănare al triunghiurilor. De aici $\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM}$. De aici $AM^2 = AC \cdot AB$.

1. Formulați primul criteriu de asemănare a triunghiurilor.
2. Formulați proprietatea coardelor care se intersectează.
3. Formulați proprietatea tangentei și a secantei, duse la circumferință printr-un punct.

EXERCIȚII

449.° În figura 144 $\angle BAC = \angle BED$. Oare sunt asemenea triunghiurile ABC și EDB? În cazul răspunsului afirmativ indicați perechile laturilor omoloage.

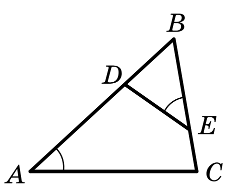


Fig. 144

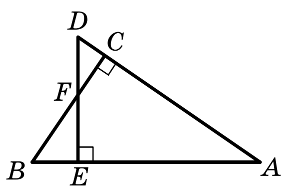


Fig. 145

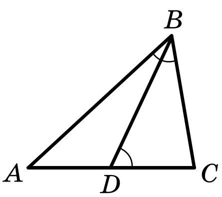


Fig. 146

450.° În figura 145 $DE \perp AB$, $BC \perp AD$. Indicați toate perechile de triunghiuri asemenea, care sunt reprezentate pe acest desen.

451.° În figura 146 $\angle ABC = \angle BDC$. Care triunghiuri din această figură sunt asemenea? Scrieți egalitatea rapoartelor a laturilor lor corespunzătoare.

452.° Indicați perechile triunghiurilor asemenea, reprezentate în figura 147, aflați lungimea segmentului x (dimensiunile sunt date un centimetri).

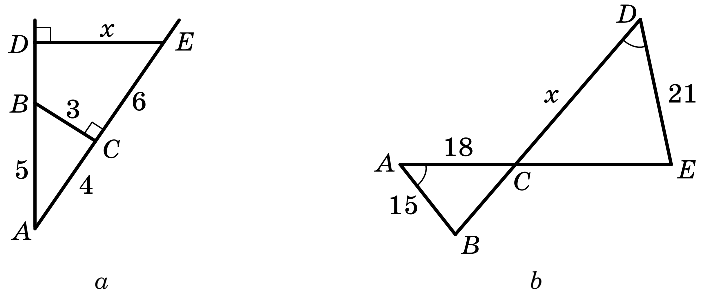


Fig. 147

453.° În triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ se știe, că $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $A_1B_1 = 9$ cm, $A_1C_1 = 18$ cm. Aflați laturile necunoscute ale triunghiurilor date.

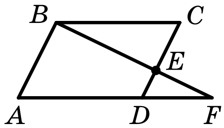


Fig. 148

454.° Pe latura AC a paralelogramului $ABCD$ (fig. 148) este notat punctul E, dreptele BE și AD se intersectează în punctul F, $CE = 8$ cm, $DE = 4$ cm, $BE = 10$ cm, $AD = 9$ cm. Aflați segmentele EF și FD.

455.° În trapezul $ABCD$ ($BC \parallel AD$) se știe că $AD = 20$ cm, $BC = 15$ cm, O — punctul de intersecție a diagonalelor, $AO = 16$ cm. Aflați OC.

456.° Diagonalele trapezului $ABCD$ cu bazele BC și AD se intersectează în punctul O. Aflați baza AD, dacă $BO : OD = 3 : 7$, $BC = 18$ cm.

457.° Oare sunt asemenea două triunghiuri dreptunghice, dacă printre unghiurile unuia din ele este unghiul, care este egal cu 38°, iar printre unghiurile celuilalt — unghiul, care este egal cu 52°?

458.° Demonstrați că două triunghiuri isoscele sunt asemenea, dacă unghiurile, opuse bazelor lor, sunt egale.

459.° Oare se poate afirma că două triunghiuri isoscele sunt asemenea, dacă ele au: 1) câte un unghi ascuțit egal; 2) câte un unghi drept; 3) câte un unghi obtuz egal?

460.° Unghiul între latura laterală și baza unui triunghi isoscel este egal cu unghiul format de latura laterală și baza altui triunghi isoscel. Latura laterală și baza primului triunghi sunt respectiv egale cu 18 cm și 10 cm, iar baza celuilalt triunghi — cu 8 cm. Aflați latura laterală al celuilalt triunghi.

461.° Din vârful unghiului drept al triunghiului este coborâtă înălțimea pe ipotenuză. Câte triunghiuri asemenea s-au obținut totodată?

462.° Laturile unui paralelogram sunt egale cu 20 cm și 14 cm, înălțimea dusă la latura mai mare este egală cu 7 cm. Aflați înălțimea paralelogramului, dusă la latura mai mică.

463.• În trapezul $ABCD$ cu bazele BC și AD diagonalele se intersectează în punctul O, $BO = 4$ cm, $OD = 20$ cm, $AC = 36$ cm. Aflați segmentele AO și OC.

464.• În trapezul $ABCD$ ($BC \parallel AD$) se știe că $AD = 18$ cm, $BC = 14$ cm, $AC = 24$ cm. Aflați segmentele, în care punctul de intersecție al diagonalelor, împarte diagonala AC.

465.• Demonstrați că în triunghiurile asemenea bisectoarele, duse din unghiurile corespunzătoare, se raportă ca laturile omoloage.

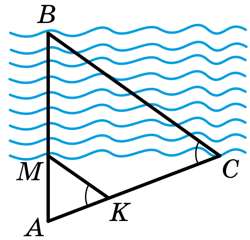


Fig. 149

466.• Demonstrați că în triunghiurile asemenea înălțimile, duse din vârfurile unghiurilor corespunzătoare, se raportă ca laturile omoloage.

467.• Bazele BC și AD ale trapezului $ABCD$ sunt respectiv egale cu 28 cm și 63 cm, $\angle ABC = \angle ACD$. Aflați diagonala AC.

468.• Pe latura AC a triunghiului ABC au notat așa un punct D, că $\angle ABD = \angle C$, $AB = 20$ cm, $BC = 28$ cm, $AC = 40$ cm. Aflați laturile necunoscute ale triunghiului ABD.

469.• Ipotenuza triunghiului dreptunghic este egală cu 20 cm, iar cateta mai mare — cu 16 cm. Aflați segmentele, în care mediatoarea ipotenuzei împarte cateta mai mare.

470.• Explicați cu ajutorul figuri 149 cum se poate afla lățimea BM a râului, aplicând asemănarea triunghiurilor.

471.• Imaginea copacului, situat la distanța de 60 de metri de la obiectivul fotoaparatului, are pe peliculă înălțimea egală cu 8 mm (fig. 150). Distanța de la obiectiv până la imagine este egală cu 40 mm. Care este înălțimea reală a copacului?

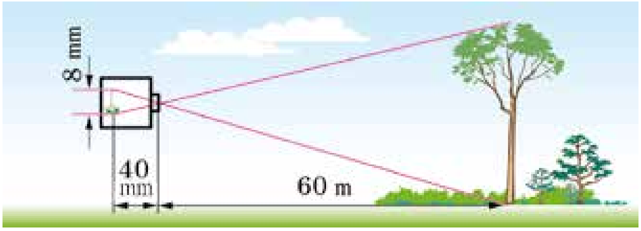


Fig. 150

472.• Aflați înălțimea copacului, dacă lungimea umbrei lui este egală cu 8,4 m, iar lungimea umbrei unui stâlp, cu înălțimea de 2 m tot în același timp al zilei, este egală cu 2,4 m (fig. 151).

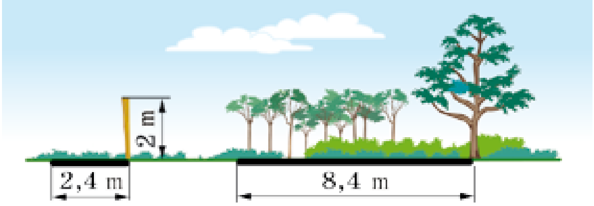


Fig. 151

473.• Oare poate o dreaptă să intersecteze două laturi ale unui triunghi isoscel, tăind din el un triunghi, asemenea cu el, și să nu fie paralelă cu a tria latură?

474.• Coardele *AB* și *CD* ale circumferinței se intersectează în punctul *M*, $AM = 6$ cm, $BM = 14$ cm, $CM = 12$ cm. Aflați segmentul *DM*.

475.• Coardele *MK* și *NP* ale circumferinței se intersectează în punctul *F*, $MF = 9$ cm, $KF = 12$ cm, ar segmentul *NF* este de 3 ori mai lung decât segmentul *PF*. Aflați lungimea coardei *NP*.

476.• Punctul *K* împarte coarda *AC* a circumferinței în jumătate, iar coarda *DE* — în segmente cu lungimile de 2 cm și 32 cm. Aflați lungimea coardei *AC*.

477.•• Punctul *E* împarte coarda *CD* a circumferinței în segmente cu lungimile de 15 cm și 16 cm. Aflați raza circumferinței, dacă distanța de la punctul *E* până la centrul circumferinței este egală cu 4 cm.

478.•• Punctul *P* împarte coarda *MK* a circumferinței în două segmente cu lungimile de 8 cm și 12 cm. Aflați distanța de la punctul *P* până la centrul circumferinței, dacă raza ei este egală cu 11 cm.

479.•• Prin punctul *A* este dusă la circumferință tangenta *AM* (*M* — punctul de tangență) și o secantă, care intersectează circumferința în punctele *K* și *P* (punctul *K* se află între punctele *A* și *P*). Aflați segmentul *KP*, dacă $AM = 12$ cm, $AP = 18$ cm.

480.•• Prin punctul *A* care este situat în exteriorul circumferinței, sunt duse două drepte, din care una este tangentă la circumferință în punctul *B*, iar a doua intersectează circumferința în punctele *C* și *D* (punctul *C* este situat între punctele *A* și *D*), $AB = 18$ cm, $AC : CD = 4 : 5$. Aflați segmentul *AD*.

481.•• Prin punctul *A*, situat în exteriorul circumferinței (fig. 152), sunt duse două drepte, una din ele intersectează circumferința în punctele *B* și *C* (punctul *B* se află între punctele *A* și *C*), iar a doua — în punctele *D* și *E* (punctul *D* se află între punctele *A* și *E*).

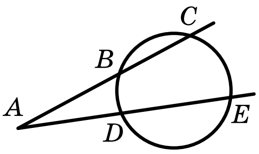


Fig. 152

1) Demonstrați, că $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

2) Aflați segmentul *AE*, dacă $AB = 18$ cm, $BC = 12$ cm și $AD : DE = 5 : 7$.

482.•• În circumferința cu raza de 8 cm, este dusă coarda *AB*. Pe dreapta *AB* în afara segmentului *AB* au notat punctul *C* astfel, că $AC : BC = 1 : 4$. Aflați distanța de la punctul *C* până la centrul circumferinței, dacă $AB = 9$ cm.

483.•• În triunghiul *ABC* este înscris un pătrat astfel, că două vârfuri vecine ale lui aparțin laturii *AC*, iar altele două — laturilor *AB* și *BC* respectiv. Aflați latura pătratului, dacă $AC = a$, iar înălțimea, dusă la latura *AC*, este egală cu *h*.

484.•• În triunghiul ABC se știe că $BC = 72$ cm, AD — înălțimea, $AD = 24$ cm. În acest triunghi este înscris dreptunghiul $MNKP$ astfel, că vârfurile M și P aparțin laturii BC, iar vârfurile N și K, laturilor AB și AC corespunzător. Aflați laturile dreptunghiului, dacă $MP : MN = 9 : 5$.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

485. Aflați unghiurile paralelogramului, dacă unghiul, făcut de înălțimile, duse din același vârf, este egal cu: 1) 20°; 2) 130°.

486. Două circumferințe cu centrele O_1 și O_2, razele cărora sint egale, se intersectează în punctele A și B. Segmentul O_1O_2 intersectează circumferințele date în punctele C și D. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este romb.

487. Unul din unghiurile trapezului dreptunghiular este egal cu 135°, linia medie — cu 21 cm, iar bazele se raportă ca 5 : 2. Aflați latura laterală mai mică a trapezului.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

488. Cum de tăiat în părți două patrulatere convexe egale, din care să se poată compune un paralelogram?

TEOREMA LUI MENELAI

Punctele, care aparțin aceleiași drepte, se numesc **colineare**. Două puncte totdeauna sunt colineare.

În această povestire voi veți afla despre o renumită teoremă, care servește ca criteriul coliniarității a trei puncte. Această teoremă poartă numele matematicului și astronomului grec din antichitate Menelai din Alexandria (secolele I–II e.n.).

Teorema Lui Menelai. ***Pe laturile AB și BC a triunghiului ABC sunt notate respectiv punctele C_1 și A_1, iar pe prelungirea laturii AC — punctul B_1. Pentru ca punctele A_1, B_1, C_1 să fie situate pe o dreaptă este necesar și suficient să se îndeplinească egalitatea***

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$

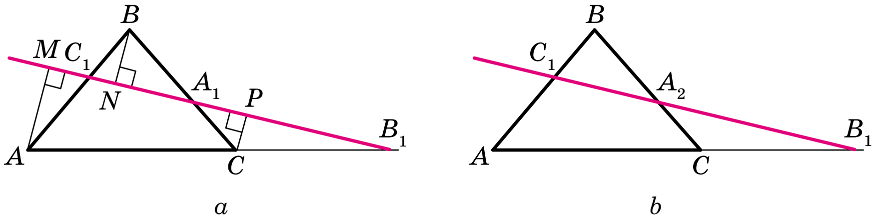


Fig. 153

Demonstrație. La început vom demonstra condiția necesară a coliniarității: dacă punctele A_1, B_1, C_1 sunt amplasate pe o dreaptă, atunci se realizează egalitatea (*).

Din vârfurile triunghiului ABC coborâm perpendicularele AM, BN și CP pe dreapta C_1B_1 (fig. 153, *a*). Deoarece $\angle MC_1A = \angle NC_1B$, rezultă că triunghiurile AMC_1 și BNC_1 sunt asemenea pe baza primului criteriu de asemănare a triunghiurilor. De aici $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AM}{BN}$. Din asemănarea triunghiurilor BNA_1 și CPA_1 obținem: $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BN}{CP}$. Din asemănarea triunghiurilor B_1CP și B_1AM rezultă egalitatea $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CP}{AM}$. Înmulțind termen cu termen părțile stângi și drepte ale proporțiilor $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AM}{BN}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BN}{CP}$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CP}{AM}$, obținem egalitatea $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AM}{BN} \cdot \frac{BN}{CP} \cdot \frac{CP}{AM} = 1.$

Acum să demonstrăm condiția suficientă a coliniarității: dacă este justă egalitatea (*), atunci punctele A_1, B_1, C_1 aparțin unei drepte.

Admitem că, dreapta C_1B_1 intersectează latura BC a triunghiului ABC într-un oarecare punct (fig.153, *b*). Deoarece punctele C_1, A_2, B_1 se află pe o dreaptă, atunci pe baza celor demonstrate mai sus se poate scrie: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$ Confruntând această egalitate cu egalitatea (*) ajungem la concluzia, că $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA_2}{A_2C}$, adică punctele A_2 și A_1 împart segmentul BC în unul și același raport, deci, aceste puncte coincid. De aici urmează, că dreapta C_1B_1 intersectează latura BC în punctul A_1. ▲

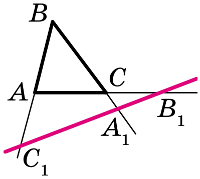


Fig. 154

Menționăm că teorema rămâne justă și atunci, când punctele A_1, B_1, C_1 se află nu pe laturile triunghiului ABC, ci pe prelungirile lor (fig. 154).

EXERCIȚII

1. Tangentele comune, duse la trei circumferințe, se intersectează în punctele A, B și C (fig. 155). Demonstrați că aceste puncte sunt coliniare.
   Indicație. Aplicați teorema lui Menelai la triunghiul $O_1O_2O_3$ și punctele A, B, C, care se află pe prelungirile laturilor lui.

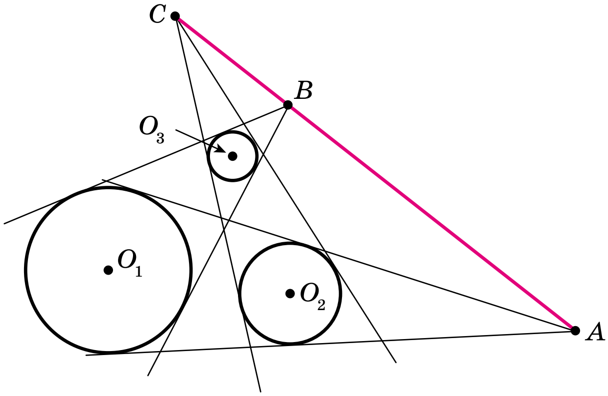


Fig. 155

2. Circumferința cu centrul O_1 este tangentă la două circumferințe cu centrele O_2 și O_3 în punctele B și A respectiv (fig. 156). Demonstrați, că punctul C — punctul de intersecție al tangentelor comune, duse la circumferințele cu centrele O_2 și O_3 — aparține dreptei AB.
3. În punctele A, B, C sunt duse tangente la circumferință (fig. 157). Demonstrați, că punctele M, N și P sunt coliniare.
   Indicație. Folosind teorema lui Menelai la triunghiul ABC, aplicați problema-cheie 3 p.13.

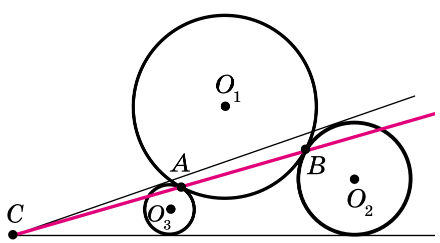


Fig. 156

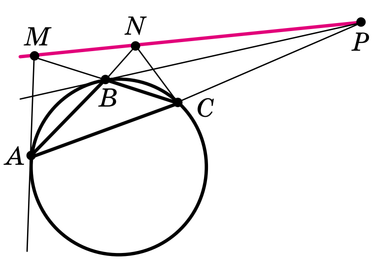


Fig. 157

4. Dreapta intersectează laturile AB, BC și prelungirea laturii AC ale triunghiului ABC corespunzător în punctele D, E, F. Demonstrați că mijlocurile segmentelor DC, AE, BF aparțin unei drepte (această dreaptă se numește *dreapta lui Gauss*).

   Indicație. Folosiți teorema lui Menelai la triunghiul, ale cărui vârfuri sunt mijlocurile laturilor ale triunghiului ABC.

Carl Friedrich Gauss
(1777 — 1855)

Ilustru matematician, astronom, fizic, geodez german. În creația lui s-au unit organic cercetările din matematica teoretică și cea aplicată. Lucrările lui Gauss au exercitat o influență considerabilă asupra dezvoltării de mai departe a algebrei, teoriei numerelor, geometriei, teoriei electricității și magnetismului.

TEOREMA LUI PTOLEMEU

Teorema lui Ptolemeu. ***Produsul diagonalelor patrulaterului, înscris într-o circumferință, este egal cu suma produselor a laturilor opuse ale lui.***

Demonstrație. În figura 158 este reprezentat patrulaterul $ABCD$, înscris în circumferință. Să demonstrăm, că $AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AC$.

Claudius Ptolemeu
(ap. 100 — ap. 178)

Matematician și astronom antic grec. Autorul modelului geocentral al Universului. A elaborat teoria matematică a mișcării planetelor, care permite calcularea poziției lor. A creat prototipul sistemului de coordonate actual.

Pe diagonala AC notăm punctul K astfel, ca $\angle 1 = \angle 2$. Unghiurile 3 și 4 sunt egale ca unghiuri înscrise, care se sprijină pe unul și același arc. Deci, triunghiurile ABK și DBC sunt asemenea pe baza primului criteriu de asemănare a triunghiurilor (unghiurile 3 și 4 sunt egale ca înscrise, care se sprijină pe unul și același arc). De aici $\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{DC}$, adică

$$AB \cdot DC = BD \cdot AK. \quad (1)$$

Deoarece $\angle 1 = \angle 2$, avem că $\angle ABD = \angle KBC$. Unghiurile 5 și 6 sunt egale ca unghiuri înscrise, care se sprijină pe unul și același arc. Dea ceea $\Delta KBC \sim \Delta ABD$. De aici $\frac{BC}{BD} = \frac{KC}{AD}$, adică

$$BC \cdot AD = BD \cdot KC. \quad (2)$$

Adunând egalitățile (1) și (2) obținem:

$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AK + BD \cdot KC$, adică

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD\,(AK + KC) = BD \cdot AC. \blacktriangle$$

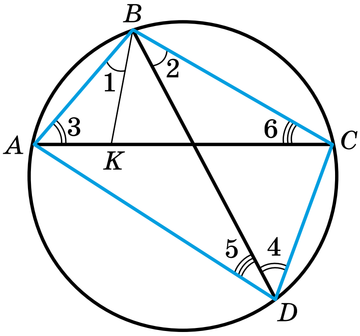


Fig. 158

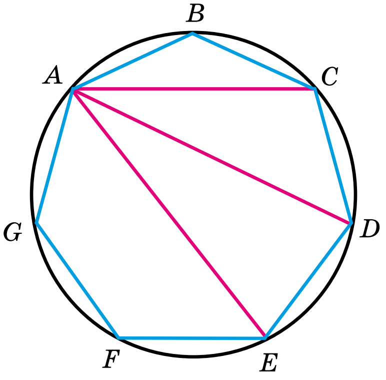


Fig. 159

EXERCIȚII

1. Fie M — un punct arbitrar al circumferinței, circumscrise triunghiului echilateral ABC. Demonstrați că unul din segmentele MA, MB, MC este egal cu suma celorlalte două.
2. Pe o circumferință sunt notate punctele A, B, C, D astfel, că $\cup AB = \cup BC = \cup CD$. Demonstrați, că $AC^2 = AB \cdot (BC + AD)$.
3. În figura 159 este reprezentat poligonul regulat cu șapte unghiuri $ABCDEFG$, înscris într-o circumferință. Demonstrați că $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$.

14. Criteriile al doilea și al treilea de asemănare ale triunghiurilor

Teorema 14.1 (al doilea criteriu de asemănare al triunghiurilor): după două laturi și unghiul dintre ele. ***Dacă două laturi ale unui triunghi sunt proporționale cu două laturi ale altui triunghi și unghiurile, făcute de aceste laturi, sunt egale, atunci așa triunghiuri sunt asemenea.***

Demonstrație. Să considerăm triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, în care $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$ și $\angle B = \angle B_1$. Să demonstrăm că $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Dacă $k = 1$, atunci $AB = A_1B_1$ și $BC = B_1C_1$, deci, triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt egale pe baza primului criteriu de egalitate al triunghiurilor, de aceea aceste triunghiuri sunt asemenea.

Fie, de exemplu, $k > 1$, adică $AB > A_1B_1$ și $BC > B_1C_1$. Pe laturile BA și BC notăm respectiv punctele A_2 și C_2 astfel, că $BA_2 = A_1B_1$ și $BC_2 = B_1C_1$ (fig. 160). Atunci $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$.

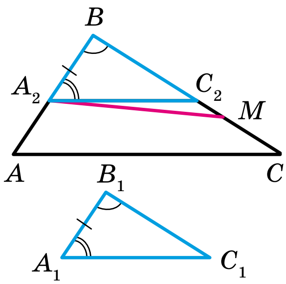


Fig. 160

Să arătăm $A_2C_2 \parallel AC$. Admitem că aceasta nu este adevărat. Atunci pe latura BC notăm punctul M astfel, că $A_2M \parallel AC$. Avem: $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BM}$. Dar $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$, si atunci $\frac{BC}{BC_2} = \frac{BC}{BM}$, adică $BC_2 = BM$. Deci, cu literele M și C_2 este notat unul și același punct. Atunci $A_2C_2 \parallel AC$.

Pe baza lemei despre triunghiurile asemenea obținem că $\Delta ABC \backsim \Delta A_2BC_2$. Triunghiurile A_2BC_2 și $A_1B_1C_1$ sunt egale pe baza primului criteriu de egalitate al triunghiurilor. De aici $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ▲

Teorema 14.2 (al treilea criteriu de asemănare al triunghiurilor: după trei laturi). ***Dacă trei laturi ale unui triunghi sunt proporționale cu trei laturi ale altui triunghi, atunci așa triunghiuri sunt asemenea.***

Demonstrație. Să considerăm triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, în care $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$. Să demonstrăm, că $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Dacă $k = 1$, atunci triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt egale pe baza criteriului al treilea al egalității triunghiurilor, deci, aceste triunghiuri sunt asemenea.

Fie, de exemplu, $k > 1$. Pe laturile BA și BC notăm respectiv punctele A_2 și C_2 care sunt așa, că $BA_2 = A_1B_1$, $BC_2 = B_1C_1$ (fig. 161). Atunci $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2} = k$. Triunghiurile ABC și A_2BC_2 au unghiul B comun, laturile alăturate lui sunt proporționale. Deci, pe baza celui de-al doilea criteriu de asemănare al triunghiurilor, aceste triunghiuri sunt asemenea, totodată coeficientul de asemănare este egal cu k. Atunci $\frac{CA}{C_2A_2} = k$. Ținând cont de aceea că conform condiției $\frac{CA}{C_1A_1} = k$, obținem: $A_1C_1 = A_2C_2$. Așadar, triunghiurile A_2BC_2 și $A_1B_1C_1$ unt egale pe baza criteriului al treilea de egalitate a triunghiurilor. Luând în seamă că $\Delta ABC \backsim \Delta A_2BC_2$, obținem: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ▲

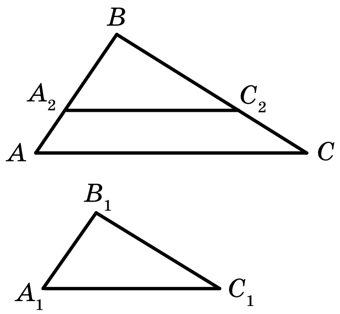


Fig. 161

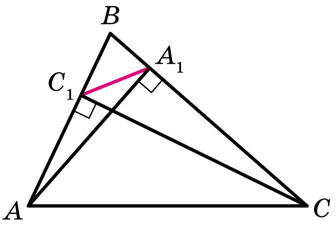


Fig. 162

Problemă. Demonstrați, că segmentul care unește bazele a două înălțimi ale unui triunghi ascuțitunghic, taie un triunghi, asemenea celui dat.

Rezolvare. În figura 162 segmentele AA_1 și CC_1 — înălțimile triunghiului ABC. Să demonstrăm că $\Delta A_1BC_1 \backsim \Delta ABC$.

În triunghiurile dreptunghice ABA_1 și CBC_1 unghiul ascuțit B este comun. Așadar, triunghiurile ABA_1 și CBC_1 sunt asemenea pe baza primului criteriu de asemănare al triunghiurilor. De aici $\frac{AB}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$. Atunci $\frac{AB}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$. Unghiul B este comun pentru triunghiurile ABC și A_1BC_1. Deci, triunghiurile ABC și A_1BC_1 sunt asemenea pe baza celui de-al doilea criteriu de asemănare al triunghiurilor. ●

1. Formulați al doilea criteriu de asemănare al triunghiurilor.
2. Formulați al treilea criteriu de asemănare al triunghiurilor.

EXERCIȚII

489.° Pe una din laturile unghiului A sunt depuse segmentele AB și AD, iar pe a doua — segmentele AC și AE. Oare sunt asemenea triunghiurile ABC și ADE, dacă $AB = 4$ cm, $AD = 20$ cm, $AC = 10$ cm, $AE = 8$ cm?

490.° Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC (fig. 163) au notat respectiv punctele D și E astfel, că $AD = \frac{4}{7} AC$, $AE = \frac{4}{7} AB$. Aflați segmentul DE, dacă $BC = 21$ cm.

491.° În triunghiul ABC se știe că $AB = 21$ cm, $AC = 42$ cm, $BC = 28$ cm (fig. 164). Pe prelungirile segmentelor AB și BC după punctul B sunt depuse respectiv segmentele BM și BK, $BM = 8$ cm, $BK = 6$ cm. Aflați segmentul KM.

492.° Segmentele AB și CD se intersectează în punctul O (fig. 165), $AO = 24$ cm, $BO = 16$ cm, $CO = 15$ cm, $OD = 10$ cm, $\angle ACO = 72°$. Aflați unghiul BDO.

493.° Pe laturile AC și BC ale triunghiului ABC au notat respectiv punctele M și K astfel, că $CM = 15$ cm, $CK = 12$ см. Aflați segmentul MK, dacă $AC = 20$ cm, $BC = 25$ cm, $AB = 30$ cm.

494.° Oare sunt asemenea triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, dacă:
1) $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm, $AC = 14$ cm, $A_1B_1 = 9$ cm, $B_1C_1 = 15$ cm, $A_1C_1 = 21$ cm;
2) $AB = 1{,}3$ cm, $BC = 2{,}5$ cm, $AC = 3{,}2$ cm, $A_1B_1 = 26$ cm, $B_1C_1 = 50$ cm, $A_1C_1 = 60$ cm?

495.° Oare sunt asemenea două triunghiuri, dacă laturile unuia se raportă ca 3 : 8 : 9, iar laturile celuilalt sunt egale cu 24 cm, 9 cm, 27 cm?

496.• În triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ se știe că $\angle A = \angle A_1$, fiecare din laturile AB și AC constituie 0,6 din laturile A_1B_1 și A_1C_1 corespunzător. Aflați laturile BC și B_1C_1, dacă suma lor este egală cu 48 cm.

497.• În triunghiurile DEF și MKN se știe că $\angle E = \angle K$, iar fiecare din laturile DE și EF este de 2,5 ori mai mare decât laturile MK și KN respectiv. Aflați laturile DF și MN, dacă diferența lor este egală cu 30 cm.

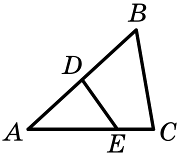


Fig. 163

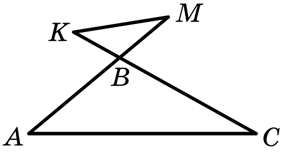


Fig. 164

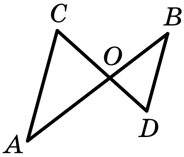


Fig. 165

498.• Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC au notat respectiv punctele D și E astfel, că $AD : DB = AE : EC = 3 : 5$. Aflați segmentul DE, dacă $BC = 16$ cm.

499.• Din bețișoare de lemn au confecționat trei triunghiuri scalene asemenea. În fiecare din ele latura mai mare au vopsit-o în albastru, iar cea mai mică — în galben. Din bețișoarele galbene au montat un triunghi, din cele albastre — altul. Oare să fie asemenea aceste triunghiuri?

500.•• În triunghiul ABC se știe că $AC = a$, $AB = BC = b$, AM și CK — bisectoarele triunghiului. Aflați segmentul MK.

501.•• În triunghiul ABC se știe că $AB = 8$ cm, $BC = 12$ cm, $AC = 16$ cm. Pe latura AC este notat punctul D astfel, că $CD = 9$ cm. Aflați segmentul BD.

502.* Din punctul A sunt duse două semidrepte AM și AN. Pe semidreapta AM sunt notate punctele H și B, iar pe semidreapta AN — punctele C și D astfel, că $AH \cdot AB = AC \cdot AD$. Demonstrați că punctele H, B, C și D sunt situate pe aceiași circumferință.

503.* Pe mediana BM a triunghiului ABC au notat punctul K astfel, că $\angle MKC = \angle BCM$. Demonstrați, că $\angle AKM = \angle BAM$.

504.* Segmentele AB și CD se intersectează în punctul M. Se știe că $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Demonstrați, că punctele A, B, C și D aparțin aceleiași circumferințe.

505.* Pe coarda comună a două circumferințe care se intersectează, au notat punctul M și prin el au dus coardele AB și CD (fig. 166). Demonstrați, că $\angle DAB = \angle BCD$.

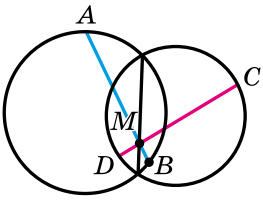


Fig. 166

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

506. Perimetrul paralelogramului $ABCD$ este egal cu 46 cm, $\angle BAD = \angle ADB$. Aflați laturile paralelogramului, dacă perimetrul triunghiului BCD este egal cu 32 cm.

507. Pe diagonala BD a pătratului $ABCD$ au notat punctul E astfel, că $DE = AD$. Prin punctul E este dusă dreapta, care este perpendiculară la dreapta BD și intersectează latura AB în punctul F. Demonstrați, că $AF = FE = BE$.

508. În trapezul $ABCD$ se știe, că $\angle B = 90°$, $\angle C = 150°$, $BC = 5$ cm. Aflați latura CD, dacă înălțimea trapezului, dusă din vârful C, împarte trapezul dat într-un triunghi și un pătrat.

Repetați conținutul punctului 7 de la pag. 186 și punctul 17 de la pag. 190.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

509. Pe circumferință sunt notate 999 de puncte cu creionul albastru și un punct cu creion roșu. Care poligoane cu vârfurile în punctele notate sunt mai multe: acele care conțin punctul roșu, sau acelea care nu-l conțin?

DREAPTA LUI EULER

Punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor ale unui triunghi — acesta-i centrul circumferinței, circumscrise triunghiului. Notăm acest punct cu litera O.

Punctul de intersecție al bisectoarelor triunghiului — acesta-i centrul circumferinței înscrise în triunghiul dat. Notăm acest punct cu litera J.

Punctul de intersecție al dreptelor, care conțin înălțimile triunghiului se numește **ortocentrul** triunghiului. Notăm acest punct cu litera H.

Punctul de intersecție al medianelor triunghiului se numește **centroidul** triunghiului. Notăm acest punct cu litera M.

Punctele O, J, H, M sunt numite **puncte minunate** ale triunghiului. Folosirea unui astfel de epitet emoțional este pe deplin argumentată. Doar acestor puncte le este specifică o serie întreagă de proprietăți frumoase. Oare nu este minunat deja aceea, că ele sunt în orice triunghi?

Să considerăm una din multiplele teoreme despre punctele minunate ale triunghiului.

Teoremă. ***În orice triunghi centrul circumferinței circumscrise, centroidul și ortocentrul sunt situate pe o dreaptă.***

Această dreaptă se numește **dreapta lui Euler**.

Demonstrație. Pentru triunghiul isoscel afirmația care se demonstrează este evidentă.

Leonard Euler
(1701 — 1783)

Ilustru matematician, fizician, mecanic, astronom.

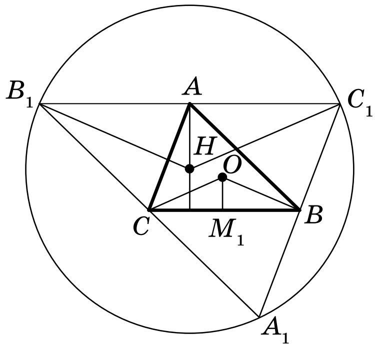


Fig. 167

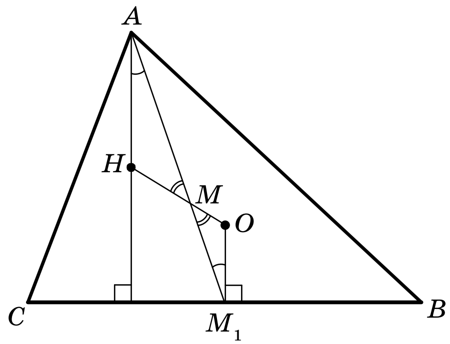


Fig. 168

Dacă triunghiul ABC dat este dreptunghic ($\angle C = 90°$), atunci ortocentrul lui — acesta-i punctul C, centrul circumferinței circumscrise — mijlocul ipotenuzei AB. Atunci se înțelege că toate trei puncte, despre care se spune în teoremă, aparțin medianei, duse la ipotenuză.

Să demonstrăm teorema pentru triunghiul ascuțitunghic scalen.

Lemă. ***Dacă H — ortocentrul triunghiului ABC, OM_1 — perpendiculara, coborâtă din centrul O a circumferinței circuscrise pe latura BC, atunci $AH = 2OM_1$*** (fig. 167).

Demonstrație. Să executăm o construcție suplimentară, deja cunoscută vouă din rezolvarea problemei-cheie a p. 2: prin fiecare vârf al triunghiului ABC ducem o dreaptă paralelă cu latura opusă. Obținem triunghiul $A_1B_1C_1$ ((fig. 167). În problema-cheie menționată s-a arătat, că ortocentrul H al triunghiului ABC este centrul circumferinței circumscrise triunghiului $A_1B_1C_1$. Pentru această circumferință unghiul B_1HC_1 este unghi la centru, iar unghiul $B_1A_1C_1$ — înscris. Deoarece ambele unghiuri se sprijină pe același arc, reiese că $\angle B_1HC_1 = 2\angle B_1A_1C_1$. Unghiurile BAC și $B_1A_1C_1$ sunt egale ca unghiuri opuse ale paralelogramului ABA_1C, de aceea $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1HC_1$. Deoarece $B_1C_1 = 2BC$, rezultă că triunghiurile isoscele B_1HC_1 și COB sunt asemenea cu coeficientul de asemănare egal cu 2. Deoarece segmentele AH și OM_1 — sunt înălțimile corespunzătoare ale triunghiurilor asemenea obținem că $AH = 2OM_1$.

Să demonstrăm acuma teorema principală.

Deoarece punctul M_1 — mijlocul laturii BC, urmează că segmentul AM_1 — mediana triunghiului ABC (fig. 168). Fie M — punctul de intersecție al segmentelor AM_1 și HO. Deoarece $AH \parallel OM_1$, atunci $\angle HAM = \angle OM_1M$. Unghiurile AMH și M_1MO sunt egale ca unghiuri verticale. Așadar, triunghiurile HAM și OM_1M sunt asemenea pe baza primului criteriu de asemănare al triunghiurilor. De aici $\frac{AM}{MM_1} = \frac{AH}{OM_1} = 2.$ Deci, punctul M împarte mediana AM_1 în raportul 2 : 1, socotind de la vârful A. De aici punctul M — centroidul triunghiului ABC.

Demonstrația pentru cazul triunghiului obtuzunghic este analoagă. ▲

Atragem atenția la aceea, că noi nu numai am stabilit faptul de apartenență a punctelor O, M, H aceleiași drepte, dar am demonstrat egalitatea

$$HM = 2MO,$$

care este încă o proprietate a punctelor minunate ale triunghiului.

EXERCIȚII

1. Sunt date două puncte, care sunt situate în același semiplan față de dreapta dată. Construiți triunghiul, una din laturile căruia este situată pe dreapta dată, iar centrul circumferinței circumscrise și ortocentrul sunt cele două puncte date.
2. Construiți triunghiul ABC după trei puncte date: vârful A, ortocentrul H și centrul O al circumferinței circumscrise.
3. Bisectoarea unghiului A a triunghiului ascuțitunghic ABC este perpendiculară pe dreapta lui Euler a acestui triunghi. Demonstrați că $\angle A = 60°$.

   Indicație. Demonstrați că $HA = OA$.

ÎNSĂRCINAREA NR. 2 „VERIFICAȚI-VĂ” ÎN FORMĂ DE TEST

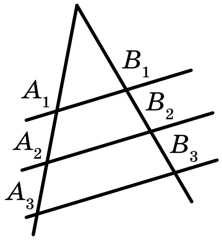


Fig. 169

1. În figura 169 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = \frac{1}{2}A_1A_3$. De aici rezultă, că:

A) $A_1A_2 = B_1B_2$; C) $A_1A_3 = B_1B_3$;
B) $B_1B_3 = 2B_2B_3$; D) $A_1A_2 = B_2B_3$.

2. Dacă medianele AA_1 și BB_1 ale triunghiului ABC se inteesectează în punctul M, atunci care din egalitățile date este justă pentru orice triunghi ABC?

A) $AM : MB_1 = BM : MA_1$;

B) $MA_1 = \frac{1}{3}MB$;

C) $MA_1 = \frac{1}{2}AM$;

D) $MB_1 = \frac{1}{2}BB_1$.

3. În figura 170 $A_1C_1 \parallel AC$. Atunci:

A) $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BA_1}{A_1A}$; C) $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$;

B) $\frac{BA_1}{AB} = \frac{CB}{BC_1}$; D) $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BA_1}{AB}$.

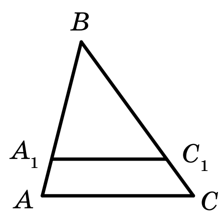


Fig. 170

4. În triunghiul ABC se știe că $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 9$ cm. În care raport centru circumferinței înscrise împarte bisectoarea BB_1, socotind de la vârful B?

A) 2 : 3; C) 4 : 3;
B) 2 : 1; D) 3 : 4.

5. Prin punctul M al laturii BC a paralelogramului $ABCD$ este dusă o dreaptă, paralelă cu latura CD. Această dreaptă intersectează segmentele BD și AD în punctele K și F respectiv. Se știe că$BM : FD = 2 : 1$. Cu ce este egal raportul $KD : BK$?

A) 2 : 1; C) 1 : 3;
B) 1 : 2; D) 4 : 1.

6. În triunghiul ABC se știe că $AB = 14$ cm, $BC = 21$ cm. Pe latura AB la distanța de 4 cm de la vârful A este însemnat punctul D, prin care este dusă o dreaptă paralelă cu latura AC. Aflați segmentele, în care această dreaptă împarte latura BC.

A) 12 cm, 9 cm; C) 15 cm, 6 cm;
B) 18 cm, 3 cm; D) 14 cm, 7 cm.

7. Segmentul MN este dus prin punctul de intersecție al diagonalelor trapezului neisoscel $ABCD$ paralel cu bazele lui (fig. 171). Câte perechi de triunghiuri asemenea sunt reprezentate în figură?
A) 4; B) 6; C) 3; D) 5.

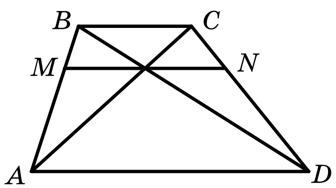


Fig. 171

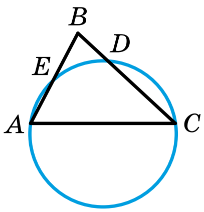


Fig. 172

8. Prin vârfurile A și C ale triunghiului neisoscel ABC este dusă o circumferință, care intersectează laturile BA și BC în punctele E și D respectiv (fig. 172). Care din egalitățile date este justă?
A) $\frac{BC}{BD}=\frac{BA}{BC}$; B) $\frac{BE}{BC}=\frac{BD}{BA}$; C) $\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{BC}$; D) $\frac{BD}{DE}=\frac{BC}{AC}$.

9. Coarda AB intersectează coarda CD în mijlocul ei și este împărțită de acest punct în segmentele care sunt egale cu 4 cm și 25 cm. Aflați coarda CD.
A) 10 cm; C) 100 cm;
B) 5 cm; D) 20 cm.

10. În triunghiul ABC se știe că $AB = 10$ cm, $BC = 4$ cm, $CA = 8$ cm. Pe latura AC este notat punctul D astfel, că $AD = 6$ cm. Aflați segmentul BD.
A) 5 cm; C) 6 cm;
B) 4 cm; D) 7 cm.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 2

Teorema lui Tales

Dacă dreptele paralele, care intersectează laturile unghiului, taie pe una din laturile lui segmente egale, atunci ele taie segmente egale și pe cealaltă latură a lui.

Teorema despre segmentele proporționale

Dacă dreptele paralele intersectează laturile unui unghi, atunci segmentele, care s-au obținut pe una din laturile unghiului, sunt proporționale cu segmentele corespunzătoare, care s-au format pe cealaltă latură a unghiului.

Proprietatea medianelor triunghiului

Toate trei mediane ale triunghiului se intersectează într-un singur punct, care împarte fiecare din ele în raportul 2 : 1, socotind de la vârful triunghiului.

Proprietatea bisectoarei triunghiului

Bisectoarea triunghiului împarte latura lui în segmente proporționale cu laturile alăturate lor.

Triunghiuri asemenea

Două triunghiuri se numesc asemenea dacă unghiurile corespunzătoare ale lor sunt egale și laturile omoloage ale lor sunt proporționale.

Lema despre triunghiurile asemenea

Dreapta care este paralelă cu latura triunghiului și intersectează celelalte două laturi ale lui, taie din triunghiul dat un triunghi asemenea cu el.

Primul criteriu de asemănare al triunghiurilor: după două unghiuri

Dacă două unghiuri ale unui triunghi sunt egale cu două unghiuri ale altui triunghi, atunci așa triunghiuri sunt asemenea.

Al doilea criteriu de asemănare al triunghiurilor: după două laturi și unghiul dintre ele

Dacă două laturi ale unui triunghi sunt proporționale cu două laturi ale altui triunghi și unghiurile, făcute de aceste laturi sunt egale, atunci așa triunghiuri sunt asemenea.

Al treilea criteriu de asemănare al triunghiurilor: după trei laturi

Dacă trei laturi ale uni triunghi sunt proporționale cu trei laturi ale altui triunghi, atunci așa triunghiuri sunt asemenea.

§3 REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR DREPTUNGHICE

În acest paragraf veți lua cunoștință cu renumita teoremă a lui Pitagora.

O să vă învățați a afla laturile și unghiurile necunoscute ale triunghiului dreptunghic, dacă sunt cunoscute unele laturi și unghiuri ale lui.

15. Relații metrice în triunghiul dreptunghic

În figura 173 segmentul CD — înălțimea triunghiului dreptunghic ABC ($\angle ACB = 90°$).

Segmentele AD și DB se numesc **proiecțiile** catetelor AC și CB respectiv pe ipotenuză.

Lemă. ***Înălțimea triunghiului dreptunghic, dusă la ipotenuză, împarte triunghiul în două triunghiuri dreptunghice asemenea, fiecare din ele este asemenea cu triunghiul dat.***

Demonstrați de sine stătător lema.

Teorema 15.1. ***Pătratul înălțimii triunghiului dreptunghic, dusă pe ipotenuză, este egal cu produsul proiecțiilor catetelor pe ipotenuză. Pătratul catetei este egal cu produsul ipotenuzei cu proiecția acestei catete pe ipotenuză.***

Demonstrație. În figura 173 segmentul CD — înălțimea triunghiului dreptunghic ABC ($\angle ACB = 90°$). Să demonstrăm, că:

$$CD^2 = AD \cdot DB,\; AC^2 = AB \cdot AD,\; BC^2 = AB \cdot DB.$$

Deoarece $\Delta CBD \sim \Delta ACD$, atunci $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$. De aici $CD^2 = AD \cdot DB$.

Deoarece $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, atunci $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$. De aici $AC^2 = AB \cdot AD$.

Deoarece $\Delta ABC \sim \Delta CBD$, atunci $\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BC}$. De aici $BC^2 = AB \cdot DB$. ▲

Dacă lungimea segmentelor din figura 173 le-am nota astfel: $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $CD = h_c$, $AD = b_c$, $DB = a_c$, atunci relațiile demonstrate capătă înfățișarea:

$$\boxed{h_c^2 = a_c b_c,\; a^2 = a_c c,\; b^2 = b_c c}$$

Aceste egalități poartă denumirea de **relații metrice** în triunghiul dreptunghic.

Exemplu. Sunt date două segmente, ale căror lungimi sunt egale cu și (fig. 174). Construiți al treilea segment a cărui lungime să fie egală cu $\sqrt{ab}$.

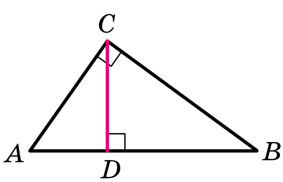


Fig. 173

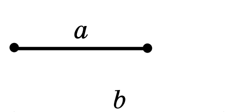


Fig. 174

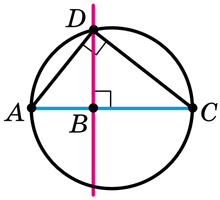


Fig. 175

Rezolvare. Să considerăm triunghiul ADC ($\angle ADC = 90°$), în care segmentul DB este înălțime (fig. 175). Avem: $DB = \sqrt{AB \cdot BC}$. Dacă notăm $AB = a$, $BC = b$, atunci $DB = \sqrt{ab}$.

Analiza, făcută arată cum de executat construcția.

Pe o dreaptă arbitrară notăm punctul A și depunem consecutiv segmentele AB și BC astfel, ca $AB = a$, $BC = b$. Construim circumferința cu diametrul AC. Prin punctul B ducem o dreaptă perpendiculară pe dreapta AC (fig. 175). Fie D — unul din punctele de intersecție al dreptei cu circumferința.

Să demonstrăm că segmentul DB este cel căutat. Într-adevăr, $\angle ADC = 90°$ ca unghi înscris, care se sprijină pe diametrul AC. Atunci pe baza teoremei 15.1 $DB^2 = AB \cdot BC$, adică $DB = \sqrt{ab}$.

1. Care formulă leagă înălțimea triunghiului dreptunghic, coborâtă pe ipotenuză, cu proiecțiile catetelor pe ipotenuză?
2. Care formulă leagă cateta, ipotenuza și proiecția acestei catete pe ipotenuză?

EXERCIȚII

510.° Aflați înălțimea triunghiului dreptunghic, dusă din vârful unghiului drept, dacă ea împarte ipotenuza în segmentele cu lungimile de 2 cm și 18 cm.

511.° Cateta triunghiului dreptunghic este egală cu 6 cm, iar proiecția ei pe ipotenuză — cu 4 cm. Aflați ipotenuza.

512.° Înălțimea triunghiului dreptunghic, dusă la ipotenuză, o împarte în segmentele cu lungimile de 5 cm și 20 cm. Aflați catetele triunghiului.

513.° Înălțimea triunghiului dreptunghic, dusă din vârful unghiului drept, este egală cu 48 cm, iar proiecția unei catete pe ipotenuză — cu 36 cm. Aflați laturile acestui triunghi.

514.• Aflați catetele triunghiului dreptunghic, a cărui înălțime împarte ipotenuza în segmentele, din care unul este cu 3 cm mai mic, decât această înălțime, iar altul — cu 4 cm mai mare decât înălțimea triunghiului.

515.• Aflați cateta mai mică a triunghiului dreptunghic și înălțimea lui, coborâtă pe ipotenuză, dacă cateta mai mare este mai mică decât ipotenuza cu 10 cm și mai mare decât proiecția sa pe ipotenuză cu 8 cm.

516.• Perpendiculara, coborâtă din punctul de intersecție al diagonalelor rombului pe latura lui este egală cu 2 cm și împarte această latură în segmente care se raportă ca 1 : 4. Aflați diagonalele rombului

517.• Perpendiculara, coborâtă din punctul circumferinței pe diametru, îl împarte în două segmente, unul din ei este egal cu 4 cm. Aflați raza circumferinței, dacă lungimea perpendicularei este egală cu 10 cm.

518.• Aflați perimetrul trapezului isoscel, ale cărui baze sunt egale cu 7 cm și 25 cm, iar diagonalele sunt perpendiculare pe laturile laterale.

519.•• Centrul circumferinței, circumscrise trapezului isoscel, aparține bazei mai mari. Aflați raza acestei circumferințe, dacă diagonala trapezului este egală cu 20 cm, iar proiecția diagonalei pe baza mai mare este egală cu 16 cm.

520.•• Diagonala trapezului isoscel este perpendiculară la latura laterală, care este egală cu 12 cm. Aflați linia medie a trapezului, dacă raza circumferinței, circumscrise trapezului, este egală cu 10 cm.

521.•• Aflați înălțimea trapezului isoscel, dacă diagonala lui este perpendiculară la latura laterală, iar diferența pătratelor bazelor este egală cu 25 cm.

522.•• Într-un trapez dreptunghic este înscrisă o circumferință. Punctul de tangență împarte latura laterală mai mare în segmente cu lungimile de 8 cm și 50 cm. Aflați perimetrul trapezului.

523.•• În trapezul isoscel este înscrisă o circumferință. Punctul de tangență împarte latura laterală în segmente cu lungimile de 3 cm și 27 cm. Aflați înălțimea trapezului.

524.•• Sunt date două segmente, lungimile cărora sunt egale cu a și b. Construiți segmentul cu lungimea $\sqrt{\frac{ab}{2}}$.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

525. Perimetrul paralelogramului este mai mare decât una din laturi cu 35 cm și este mai mare decât a doua latură cu 28 cm. Aflați laturile paralelogramului.

526. Pe laturile AB, BC, CD și AD ale pătratului $ABCD$ au fost notate punctele M, N, K și E astfel, că patrulaterul $MNKE$ este dreptunghi, ale cărui laturi sunt paralele cu diagonalele pătratului. Aflați perimetrul dreptunghiului $MNKE$, dacă diagonala pătratului $ABCD$ este egală cu 7 cm.

527. Într-o circumferință este înscris un trapez, al cărui diagonală împarte unghiul alăturat bazei mari în jumătate. Aflați arcele, în care împart circumferința vârfurile trapezului, dacă unul din unghiurile lui este egal cu 74°.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

528. Într-un poligon, înscris în circumferință, au ales un vârf și au dus toate diagonalele cărora le aparține acest vârf. Demonstrați că printre triunghiurile, care s-au format nu mai mult de unul este ascuțitunghic.

16. Teorema lui Pitagora

Teorema 16.1. (Teorema lui Pitagora). ***În triunghiul dreptunghic pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor.***

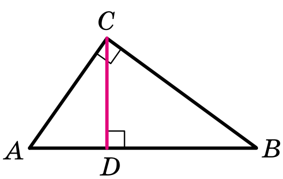


Fig. 176

Demonstrație. ⊙ În figura 176 este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC ($\angle ACB = 90°$). Să demonstrăm că $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Ducem înălțimea CD. Aplicând teorema 15.1 pentru catetele AC și BC, obținem: $AC^2 = AB \cdot AD$ și $BC^2 = AB \cdot DB$. Adunând termen cu termen aceste egalități, obținem: $AC^2 + + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB$.

Mai departe avem: $AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB) = AB^2$. ▲

Dacă în triunghiul dreptunghic lungimile catetelor sunt egale cu a și b, iar lungimea ipotenuzei este egală cu c, atunci teorema lui Pitagora poate fi exprimată cu formula următoare:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Teorema lui Pitagora ne dă posibilitate să aflăm a treia latură a triunghiului dreptunghic, dacă cunoaștem două laturi ale lui:

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2};\; a = \sqrt{c^2 - b^2};\; b = \sqrt{c^2 - a^2}}$$

Din egalitatea $c^2 = a^2 + b^2$ de asemenea urmează, că $c^2 > a^2$ și $c^2 > b^2$, de aici $c > a$ și $c > b$, adică ***ipotenuza este mai mare ca oricare din catete***[1].

[1] Cu alt procedeu acest fapt a fost stabilit în cursul de geometrie clasa a 7-a

Din cursul de geometrie de clasa a 7-a vă sunt cunoscute așa noțiuni ca **perpendiculara, oblica**, și **proiecția oblicii**. De exemplu, în figura 176 din punctul C sunt duse la dreapta AB perpendiculara CD și oblicele CA și CB. Segmentele AD și DB sunt proiecțiile corespunzătoare ale oblicelor AC și AB pe dreapta AB.

Din teorema 16.1 reiese că, dacă dintr-un punct sunt duse la o dreaptă o perpendiculară și o oblică, atunci oblica este mai mare decât perpendiculara.

?

1. Formulați teorema lui Pitagora.
2. Scrieți teorema lui Pitagora, dacă catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu a și b, iar ipotenuza este egală cu c.
3. Cum, știind două laturi ale triunghiului dreptunghic, de aflat a treia latură a lui?
4. Care din laturile triunghiului dreptunghic este cea mai mare?

EXERCIȚII

529.° Aflați ipotenuza triunghiului dreptunghic, dacă catetele lui sunt egale cu: 1) 3 cm și 4 cm; 2) 6 cm și 9 cm.

530.° Aflați cateta triunghiului dreptunghic, dacă ipotenuza și a doua catetă a lui sunt respectiv egale cu: 1) 15 cm și 12 cm; 2) 7 cm și $\sqrt{13}$ cm.

531.° Fie a și b — catetele triunghiului dreptunghic, c — ipotenuza lui. Aflați latura necunoscută a lui, dacă: 1) a = 5 cm, b = 12 cm; 2) a = 1 cm, c = 2 cm; 3) b = 3 cm, $c = \sqrt{90}$ cm.

532.° Laturile dreptunghiului sunt egale cu 9 cm și 40 cm. Cu ce este egală diagonala lui?

533.° Una din laturile dreptunghiului este egală cu 7 cm, iar diagonala — cu 25 cm. Aflați latura alăturată laturii date a dreptunghiului.

534.° Latura laterală a triunghiului isoscel este egală cu 29 cm, iar înălțimea, coborâtă pe bază — cu 21 cm. Cu ce este egală baza triunghiului?

535.° Înălțimea triunghiului isoscel, dusă la bază, este egală cu 35 cm, iar baza lui — cu 24 cm. Cu ce este egală latura laterală a triunghiului?

536.° În circumferința de raza 10 cm, este dusă o coardă cu lungimea de 16 cm. Aflați distanța de la centrul circumferinței până la coarda dată.

537.° Aflați perimetrul rombului, ale cărui diagonale sunt egale cu 24 cm și 32 cm.

538.° Latura rombului este egală cu 26 cm, iar una din diagonale — cu 48 cm. Aflați cealaltă diagonală a rombului.

539.° Una din catetele triunghiului dreptunghic este egală cu 21 cm, iar a doua catetă este cu 7 cm mai mică decât ipotenuza. Aflați perimetrul triunghiului.

540.° Ipotenuza triunghiului dreptunghic este egală cu 26 cm, iar catetele se raportă ca 5 : 12. Aflați catetele acestui triunghi.

541.• Cateta triunghiului dreptunghic este egală cu 6 cm, iar mediana, dusă la ea, — cu 5 cm. Aflați ipotenuza triunghiului.

542.• În triunghiul ABC se știe că $BC = 20$ cm, înălțimea BD împarte latura AC în segmentele $AD = 5$ cm și $CD = 16$ cm. Aflați latura AB.

543.• În triunghiul ABC se știe că $AB = 17$ cm, $BC = 9$ cm, unghiul C este obtuz, înălțimea AD este egală cu 8 cm. Aflați latura AC.

544.• Aflați înălțimea triunghiului echilateral cu latura a.

545.• Aflați diagonala pătratului cu latura a.

546.• Aflați latura triunghiului echilateral a cărui înălțime este h.

547.• Aflați catetele triunghiului dreptunghic isoscel, a cărui ipotenuză este egală cu c.

548.• Aflați lungimea segmentului necunoscut x fin figura 177 (dimensiunile sunt date în centimetri).

549.• Aflați lungimea segmentului necunoscut x din figura 178 (dimensiunile sunt date în centimetri).

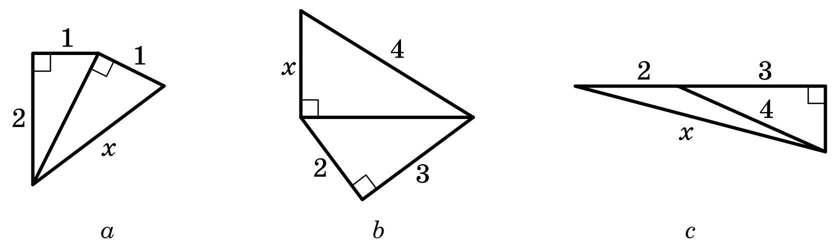


Fig. 177

Fig. 178

550.• În triunghiul isoscel înălțimea, coborâtă pe latura laterală, este egală cu 8 cm. Ea împarte latura laterală în două segmente, unul din ele, alăturat la vârful triunghiului isoscel, este egal cu 6 cm. Aflați baza triunghiului.

551.• Înălțimea triunghiului isoscel, coborâtă pe latura laterală, o împarte în segmentele cu lungimile de 4 cm și 16 cm, socotind de la vârful unghiului de la bază. Aflați baza triunghiului isoscel.

552.• Baza triunghiului obtuzunghic isoscel este egală cu 24 cm, iar raza circumferinței, circumscrise lui, — 13 cm. Aflați latura laterală a triunghiului.

553.• Înălțimea triunghiului isoscel, dusă pe baza lui, este egală cu 8 cm, iar raza circumferinței circumscrise lui, — 5 cm. Aflați latura laterală a triunghiului.

554.• Baza triunghiului isoscel este cu 3 cm mai mare decât latura laterală. Aflați laturile triunghiului, dacă înălțimea, dusă la bază, este egală cu 8 cm.

555.• Perimetrul triunghiului isoscel este egal cu 90 cm, iar înălțimea dusă pe bază, — 15 cm. Aflați laturile triunghiului.

556.• Laturile triunghiului obtuzunghic sunt egale cu 29 cm, 25 cm și 6 cm. Aflați înălțimea triunghiului, dusă pe latura mai mică.

557.• Laturile triunghiului sunt egale cu 36 cm, 29 cm și 25 cm. Aflați înălțimea triunghiului, coborâtă pe latura mai mare.

558.• Dintr-un punct sunt duse pe o dreaptă două oblice, ale căror lungimi se raportă ca 5 : 6, iar proiecțiile acestor oblice pe dreaptă sunt egale cu 7 cm și 18 cm. Aflați distanța de la punctul dat până la această dreaptă.

559.• Dintr-un punct la o dreaptă sunt duse două oblice cu lungimile de 15 cm și 27 cm. Suma lungimilor proiecțiilor a acestor oblice pe dreaptă este egală cu 24 cm. Aflați proiecția fiecărei oblice.

560.• Punctul de tangență al circumferinței, înscrise în triunghiul dreptunghic, împarte una din catetele lui în segmente de 2 cm și 6 cm. Aflați laturile triunghiului.

561.• Aflați laturile paralelogramului, ale cărui diagonale sunt egale cu 16 cm și 20 cm, dacă una din diagonale este perpendiculară pe latura lui.

562.• Aflați perimetrul triunghiului dreptunghic, dacă bisectoarea unghiului drept împarte ipotenuza în segmente cu lungimile de 30 cm și 40 cm.

563.• Aflați perimetrul triunghiului dreptunghic, dacă bisectoarea unghiului ascuțit împarte cateta opusă în segmente cu lungimile de 24 cm și 51 cm.

564.• *(Problemă arabă străveche).* Pe malurile opuse ale unui râu cresc unul în fața altuia doi palmieri. Înălțimea unuia din ei este de 30 de coți[1], iar înălțimea celuilalt este egală cu 20 coți, distanța dintre părțile de lângă rădăcină a tulpinilor palmierilor este egală cu 50 coți. În vârful fiecărui palmier stă câte o pasăre. Deodată ambele păsări au văzut peștele, care a apărut la suprafața apei dintre palmieri. Ele și-au luat zborul simultan și, mișcându-se cu aceeași viteză, au apucat în același timp peștele. La ce distanță de la partea de lângă rădăcina a tulpinii palmierului mai înalt, a apărut peștele?

565.•• Bazele unui trapez isoscel sunt egale cu 12 cm și 20 cm, iar diagonala este bisectoarea unghiului obtuz al trapezului. Aflați această diagonală.

566.•• Bazele trapezului dreptunghic sunt egale cu 18 cm și 12 cm, iar diagonala este bisectoarea unghiului ascuțit al trapezului. Aflați această diagonală.

567.•• Într-o circumferință de părți diferite ale centrului ei sunt duse două coarde paralele cu lungimile de 16 cm și 32 cm. Distanța dintre coarde este egală cu 16 cm. Aflați raza circumferinței.

568.•• Într-o circumferință de aceiași parte a centrului ei sunt duse două coarde paralele cu lungimile egale cu 48 și 24 cm. Distanța dintre coarde este egală cu 12 cm. Aflați raza circumferinței.

569.•• Raza circumferinței, înscrise într-un triunghi isoscel, este egală cu 12 cm, iar distanța de la vârful triunghiului isoscel până la centrul circumferinței este 20 cm. Aflați perimetrul acestui triunghi.

570.•• Punctul de tangență al circumferinței, înscrise în trapezul dreptunghic, împarte baza mai mare a lui în segmente cu lungimile de 20 cm și 25 cm, socotind de la vârful unghiului drept. Calculați perimetrul trapezului.

[1] 1 cot = 0,637 m (n.t.).

571.•• Punctul de tangență al circumferinței, înscrise într-un trapez dreptunghic împarte baza mai mică a lui în segmente cu lungimile de 6 cm și 13 cm, socotind de la vârful unghiului drept. Calculați perimetrul trapezului.

572.•• Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu 18 cm și 24 cm. Aflați bisectoarea triunghiului, dusă din vârful celui mai mic unghi ascuțit.

573.•• Medianele AM și CK ale triunghiului ABC sunt perpendiculare. Aflați laturile triunghiului, dacă $AM = 9$ cm și $CK = 12$ cm.

574.•• În triunghiul ABC medianele BM și CK sunt perpendiculare și se intersectează în punctul O. Aflați segmentul AO, dacă $BM = 36$ cm și $CK = 15$ cm.

575.•• (*Problema lui Bhaskara*[1].) Deasupra lacului liniștit la înălțimea de jumătate de picior[2]

S-a ridicat floarea lotusului.
Și odată rafalele vântului
Au mutat-o brusc într-o parte.
Nu mai este deasupra apei floarea.
A nimerit peste ea un pescar pasionat
La două picioare de la locul unde ea creștea.
Așadar îți propun întrebarea:
Ce adâncime avea acel lac?

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

576. În triunghiul ABC se știe că $\angle C = 90°$, $AB = 13$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 12$ cm. Aflați raportul:

1) a catetei, alăturate unghiului A, și a ipotenuzei;
2) a catetei, opuse unghiului A, și s ipotenuzei;
3) a catetei, alăturate unghiului B și a ipotenuzei;
4) a catetei, alăturate unghiului B, și a catetei, opuse acestui unghi.

577. Pe o latură a unghiului A au notat punctele B, C și D astfel, că $AB = BC = 5$ cm, $CD = 10$ cm (fig. 179). Din punctele B, C și D sunt coborâte perpendicularele BE, CF și DM pe cealaltă latură a unghiului A, totodată $AE = 4$ cm. Aflați raportul catetei, alăturate unghiului A, și a ipotenuzei:

1) în triunghiul AEB;
2) în triunghiul AFC;
3) în triunghiul AMD.

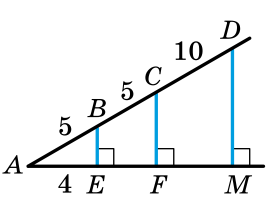


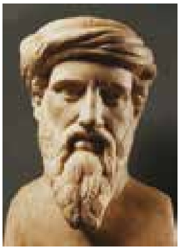
Fig. 179

[1] Bhaskara (11140 — 1185) — matematician și astronom indian.
[2] 1 picior = 30,48 cm.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

578. În pătratul cu latura de 1 m au notat în mod arbitrar 51 de puncte. Demonstrați că printre aceste puncte există trei, care pot fi acoperite cu un pătrat, a cărui latură are 20 cm.

PITAGORA



Pitagora (se. VI î.e.n.)

Voi ați învățat renumita teoremă, care poartă numele ilustrului savant grec din antichitate Pitagora.

Investigarea textelor din antichitate mărturisește, că afirmația acestei teoreme era cunoscută cu mult timp până la Pitagora. De ce o atribuie lui Pitagora? Probabil de aceea, că anume Pitagora a născocit demonstrația acestei afirmații.

Despre viața lui Pitagora puțin ce se știe cu certitudine. El s-a născut pe insula greacă Samos. Legenda spune că el mult a călătorit, acumulând cunoștințe și înțelepciuni.

După ce Pitagora s-a statornicit cu traiul în colonia greacă Kroton (la sudul Italiei), în jurul lui s-a întemeiat un cerc numeros de elevi credincioși și tovarăși de idei. Astfel a apărut alianța pitgoreană (sau fraternitatea corotonă). Influența acestei alianțe a fost într-atât de considerabilă, că chiar câteva secole după moartea lui Pitagora mulți matematicieni mari ai Lumii Antice se numeau pitagoreni.

17. Funcțiile trigonometrice ale unghiului ascuțit ale triunghiului dreptunghic

În figura 180 este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC ($\angle C = 90°$). Amintim, că cateta BC se numește **opusă** unghiului A, iar cateta AC — **alăturată** acestui unghi.

Definiție. **Sinus al unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic se numește raportul catetei opuse către ipotenuză.**

Sinusul unghiului A se notează astfel sin A (se citește: „sinus A”). Pentru unghiurile ascuțite A și B ale triunghiului dreptunghic ABC avem:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \ \sin B = \frac{AC}{AB}.$$

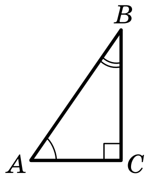


Fig. 180

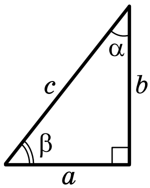


Fig. 181

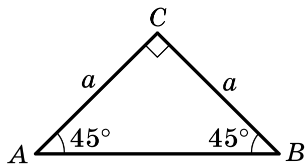


Fig. 182

Pentru triunghiul dreptunghic, reprezentat în figura 181 se poate scrie: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$.

Să considerăm triunghiul isoscel dreptunghic ABC ($\angle C = 90°$), în care $AC = BC = a$ (fig. 182).

Avem: $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Pe baza definiției $\sin A = \frac{BC}{AB}$, de aici $\sin A = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vedem, că sinusul unghiului ascuțit a triunghiului isoscel dreptunghic nu depinde de dimensiunile triunghiului, fiindcă valoarea obținută a lui sinus este aceeași pentru toate valorile lui a. Deoarece $\angle A = 45°$, atunci $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Această scriere nu este legată cu un triunghi dreptunghic isoscel concret.

În general, *dacă unghiul ascuțit al unui triunghi dreptunghic este egal cu unghiul ascuțit al altui triunghi dreptunghic, atunci sinusurile acestor unghiuri sunt egale.*

Într-adevăr, aceste triunghiuri dreptunghice sunt asemenea pe baza primului criteriu de asemănare a triunghiurilor. De aceea raportul catetei către ipotenuză a unui triunghi este egal cu raportul catetei corespunzătoare către ipotenuza celuilalt triunghi.

De exemplu, scrierea sin 17° poate fi atribuită tuturor unghiurilor, măsura în grade a cărora este egală cu 17°. Valoarea acestui sinus poate fi calculată o dată, alegând un triunghi dreptunghic arbitrar cu unghiul ascuțit 17°.

Așadar, *sinusul unghiului ascuțit depinde numai de mărimea acestui unghi.*

Definiție. Cosinus al unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic se numește raportul catetei alăturate către ipotenuză.

Cosinusul unghiului se notează astfel: $\cos A$ (se citește: „cosinus A”).

Pentru unghiurile ascuțite A și B ale triunghiului dreptunghic ABC (fig. 180) se poate scrie:

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \ \cos B = \frac{BC}{AB}.$$

Menționăm, că cateta triunghiului dreptunghic este mai mică decât ipotenuza, de aceea *sinusul și cosinusul unghiului ascuțit este mai mic decât* 1.

Definiție. Tangentă a unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic se numește raportul catetei opuse către cateta alăturată.

Tangenta unghiului A se notează astfel: $\operatorname{tg} A$ (se citește: „tangenta A”).

Pentru unghiurile ascuțite A și B ale triunghiului dreptunghic ABC (fig. 180) se poate scrie:

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}, \ \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}.$$

Pentru triunghiul dreptunghic, reprezentat în figura 181 se scrie:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \ \cos\beta = \frac{a}{c},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \ \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}.$$

După cum s-a stabilit, sinusul unghiului depinde numai de mărimea unghiului. Judecând analogic se poate ajunge la concluzia:

cosinusul și tangenta unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic depinde numai de mărimea acestui unghi.

În general, fiecărui unghi ascuțit α îi corespunde un singur număr – valoarea sinusului (cosinusului, tangentei, cotangentei) acestui unghi. De aceea dependența valorii sinusului (cosinusului, tangentei, cotangentei) unghiului ascuțit de mărimea acestui unghi este funcțională. Funcția, care corespunde acestei dependențe se numește **trigonometrică**. Astfel, $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, $y = \operatorname{tg}\alpha$ — funcții trigonometrice, ale căror argumente sunt unghiurile ascuțite.

Din timpurile străvechi oamenii alcătuiau tabelele valorilor aproximative ale funcțiilor trigonometrice cu un oarecare pas, o dată calculând valorile funcțiilor trigonometrice pentru argumentul concret. După aceea aceste tabele se foloseau pe larg în multe ramuri ale științei și tehnicii.

La ora actuală valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor ascuțite este comod de le găsit cu ajutorul microcalculatorului.

Tangenta unghiului ascuțit se poate de exprimat prin sinusul și cosinusul acestui unghi ascuțit. Să considerăm triunghiul dreptunghic (fig. 181). Scriem:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Deci vom obține următoarele formule:

$$\boxed{\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Pe baza teoremei lui Pitagora $a^2 + b^2 = c^2$. Împărțim ambele părți ale acestei egalități la c^2. Obținem: $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Ținând cont de faptul, că $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, obținem:

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

Este primit de scris: $(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$, $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$. De aici avem:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Această formulă se numește **identitatea trigonometrică fundamentală**.

Menționăm, că $\cos\beta = \sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \cos\alpha = \frac{b}{c}$. Deoarece $\beta = 90° - \alpha$, atunci obținem așa formule:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(90° - \alpha) &= \sin\alpha \\ \sin(90° - \alpha) &= \cos\alpha \end{aligned}}$$

Noi deja știm, că $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Să aflăm acum cos 45° și tg 45°. Avem:

$$\cos 45° = \sin(90° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\mathrm{tg}\,45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

Să aflăm sinusul, cosinusul, tangenta unghiurilor de 30° și 60°.

Să examinăm triunghiul dreptunghic ABC, în care $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (fig. 183).

Fie $BC = a$. Atunci pe baza proprietății catetei, care este opusă unghiului de 30°, obținem, că $AB = 2a$. Din teorema lui Pitagora rezultă, că $AC^2 = AB^2 - BC^2$. Avem: $AC^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$; $AC = a\sqrt{3}$.

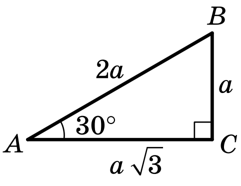


Fig. 183

De aici aflăm:

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Deoarece $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$, obținem:

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Valorile sinusului, cosinusului, tangentei pentru unghiurile egale cu 30°, 45° si 60° este util de le memorizat.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

?

1. Ce se numește sinus al unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic?
2. Ce se numește cosinus al unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic?
3. Ce se numește tangentă a unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic?
4. De ce depind sinusul, cosinusul, tangenta unghiului?
5. Ce relație există între $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\alpha$ și $\cos\alpha$?
6. Cum sunt legate între ele $\sin\alpha$ și $\cos\alpha$?
7. Cu ce este egal $\sin(90^\circ - \alpha)$? $\cos(90^\circ - \alpha)$?
8. Cu ce este egal $\sin 45^\circ$? $\cos 45^\circ$? $\operatorname{tg} 45^\circ$?
9. Cu ce este egal $\sin 30^\circ$? $\cos 30^\circ$? $\operatorname{tg} 30^\circ$?
10. Cu ce este egal $\sin 60^\circ$? $\cos 60^\circ$? $\operatorname{tg} 60^\circ$?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

579.• Construiți unghiul:

1) a cărui tangentă este egală cu $\frac{4}{5}$; 2) al cărui sinus este egal cu $\frac{2}{3}$.

580.• Construiți unghiul:

1) cosinusul căruia este egal cu $\frac{1}{4}$; 2) a cărui tangentă este egală cu $\frac{1}{2}$.

EXERCIȚII

581.° O catetă și ipotenuza triunghiului dreptunghic sunt egale respectiv cu 8 cm și 10 cm. Aflați:
1) sinusul unghiului, care este opus catetei mai mici;
2) cosinusul unghiului care este alăturat catetei mai mari;
3) tangenta unghiului, opus catetei mai mici.

582.° Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu 3 cm și 2 cm. Aflați:
1) tangenta unghiului, alăturat catetei mai mari;
2) sinusul unghiului, opus catetei mai mici;
3) cosinus unghiului, alăturat catetei mai mari.

583.° Aflați valoarea expresiei:
1) $\cos^2 45° + \text{tg}^2\, 60°$; 2) $2\cos^2 60° - \sin^2 30° + \sin 60°\, \text{tg}\, 30°$.

584.° Aflați valoarea expresiei:
1) $\cos^2 30° - \sin^2 45°$; 2) $3\,\text{tg}^2\, 30° + 4\,\text{tg}\, 45° + \cos 30°\, \text{tg}\, 60°$.

585.° În triunghiul ABC se știe, că $\angle C = 90°$, $BC = 77$ cm, $AB = 125$ cm. Aflați sinusurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului.

586.° În triunghiul ABC se știe, că $\angle C = 90°$, $BC = 41$ cm, $AC = 20$ cm. Aflați cosinusurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului.

587.• Aflați $\sin \alpha$ și $\text{tg}\, \alpha$, dacă $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

588.• Aflați $\cos \beta$ și $\text{tg}\, \beta$, dacă $\sin \beta = \frac{4}{5}$.

589.• Sinusul unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic este egal cu $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Aflați sinusul, cosinusul, tangenta altui unghi ascuțit al acestui triunghi.

590.• Baza triunghiului isoscel este egală cu 24 cm, iar latura laterală — cu 13 cm. Aflați sinusul, cosinusul, tangenta unghiului, făcut de latura laterală a triunghiului și înălțimea, dusă la baza lui.

591.• Latura laterală a triunghiului isoscel este egală cu 17 cm, iar înălțimea, coborâtă pe bază – cu 8 cm. Aflați sinusul, cosinusul, tangenta unghiului de la baza triunghiului.

592.• Aflați unghiurile rombului, ale cărui diagonale sunt egale cu 4 cm și $4\sqrt{3}$ cm.

593.• Aflați unghiurile formate de diagonala dreptunghiului cu laturile lui, ale căror lungimi sunt egale cu $\sqrt{3}$ cm și 3 cm.

594.• În trapezul $ABCD$ se știe, că $AB = CD = 9$ cm, $BC = 10$ cm, $AD = 14$ cm. Aflați sinusul, cosinusul, tangenta unghiului A al trapezului.

595.• În trapezul dreptunghic $ABCD$ se știe că $BC \parallel AD$, $\angle A = 90°$, $AB = 4$ cm, $BC = 8$ cm, $AD = 12$ cm. Aflați unghiurile trapezului.

596.• Demonstrați, că tangentele unghiurilor ascuțite ale triunghiului dreptunghic sunt numere reciproc inverse.

597.• Demonstrați identitatea $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

598.• Aflați valoarea expresiei:
1) $\sin^2 18° + \sin^2 72°$;
2) $\cos^3 36° - \sin^3 54°$.

599.•• Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu 30 cm și 40 cm. Aflați sinusul, cosinusul, tangenta unghiului format de mediana și înălțimea duse la ipotenuză.

600.•• În triunghiul ABC se știe că $AB = BC$, BD și AM — înălțimile triunghiului, $BD : AM = 3 : 1$. Aflați $\cos C$.

601.•• În triunghiul ABC se știe că $AB = BC$, BD și CK — înălțimile triunghiului, $\cos A = \dfrac{3}{7}$. Aflați raportul $CK : BD$.

602.* Demonstrați că unghiurile ABC și DEF, reprezentate în figura 184, sunt egale.

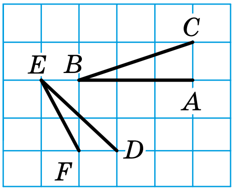


Fig. 184

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

603. Bisectoarele unghiurilor A și B ale paralelogramului $ABCD$ se intersectează în punctul M, $AB = 6$ cm. Aflați raza circumferinței care trece prin punctele A, B și M.

604. Coardele AB și BC ale circumferinței sunt perpendiculare, iar distanța dintre mijlocurile lor este egală cu 12 cm. Aflați raza circumferinței.

605. În triunghiul $ABCD$ se știe că BK — înălțime, AM — bisectoare, $BK = 26$ cm, $AB : AC = 6 : 7$. Din punctul M este coborâtă perpendicular MD pe latura AC. Aflați segmentul MD.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

606. Sunt date două cercuri, care nu au puncte comune. Oare există așa un punct, care nu aparține nici unuia din cercurile date, că orice dreaptă, care trece prin acest punct, intersectează măcar unul din aceste cecuri?

18. Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice

În figura 185 este reprezentat triunghiul dreptunghic cu unghiurile ascuțite α și β, ale cărui catete sunt egale cu a și b, iar ipotenuza este egală cu c.

Pe baza definiției a sinusului unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$. De aici $a = c\sin\alpha$, $b = c\sin\beta$.

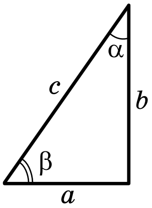


Fig. 185

Deci, ***cateta triunghiului dreptunghic este egală cu produsul ipotenuzei prin sinusul unghiului, opus acestei catete.***

Ca urmare a definiției cosinusului a unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$. De aici $b = c\cos\alpha$, $a = c\cos\beta$.

Așadar, ***cateta triunghiului dreptunghic este egală cu produsul ipotenuzei prin cosinusul unghiului, alăturat acestei catete.***

Conform definiției tangentei a unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$. De aici $a = b\operatorname{tg}\alpha$, $b = a\operatorname{tg}\beta$.

Deci, ***cateta triunghiului dreptunghic este egală cu produsul celeilalte catete prin tangenta unghiului, opus primei catete.***

Deoarece $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, rezultă că $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Deci, ***cateta triunghiului dreptunghic este egală cu câtul de la împărțirea celei de-a doua catetă la tangenta unghiului, alăturat la prima catetă.***

Din egalitățile $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ și $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ obținem: $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ și $c = \frac{b}{\cos\alpha}$.

Deci, ***ipotenuza triunghiului dreptunghic este egală cu câtul de la împărțirea catetei la sinusul unghiului, opus ei***;

ipotenuza triunghiului dreptunghic este egală cu câtul de la împărțirea catetei la sinusul unghiului, alăturat ei.

A rezolva triunghiul dreptunghic înseamnă a afla laturile și unghiurile lui, dacă sunt date laturi și unghiuri.

Regulile, aduse mai sus, permit rezolvarea triunghiului dreptunghic, fiind cunoscută o latură și un unghi ascuțit.

În problemele la rezolvarea triunghiurilor dreptunghice, dacă nu este condiționat altceva, sunt primite următoarele notații (vezi fig. 185): c — ipotenuza, a și b — catete, α și β — unghiurile, opuse catetelor a și b respectiv.

Problema 1. Rezolvați triunghiul dreptunghic dacă sunt date cateta și unghiul ascuțit: a = 14 см, $\alpha = 38°$. (Valorile funcțiilor trigonometrice aflațile cu ajutorul microcalculatorului și rotunjițile până la sutimi. Valorile laturilor rotunjiți-le până la zecimi.)

Rezolvare. Avem:

$\beta = 90° - \alpha = 90° - 38° = 52°$;

$b = a \operatorname{tg} \beta = 14 \operatorname{tg} 52° \approx 14 \cdot 1{,}28 \approx 17{,}9$ (cm);

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{14}{\sin 38°} \approx \frac{14}{0{,}62} \approx 22{,}6 \text{ (cm)}.$$

Răspuns: $c \approx 22{,}6$ cm, $b \approx 17{,}9$ cm, $\beta = 52°$.

Atragem atenția că această problemă putea fi rezolvată și cu alt procedeu: de exemplu, de aflat ipotenuza, aplicând teorema lui Pitagora.

Problema 2. Rezolvați triunghiul dreptunghic, fiind date cateta și ipotenuza: $a = 26$ cm, $c = 34$ cm.

Rezolvare. Avem: $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{26}{34} = 0{,}7647\ldots$.

Calculăm unghiul α cu ajutorul microcalculatorului: $\alpha \approx 50°$. Atunci $\beta \approx 40°$.

$$b = c \sin\beta \approx 34 \sin 40° \approx 34 \cdot 0{,}643 \approx$$
$$\approx 21{,}862 \approx 21{,}9 \text{ (cm)}.$$

Răspuns: $b \approx 21{,}9$ cm, $\alpha \approx 50°$, $\beta \approx 40°$.

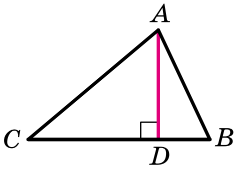


Fig. 186

Problema 3. Înălțimea AD a triunghiului ABC (fig. 186) împarte latura lui BC în segmentele BD și CD care sunt așa, că $BD = 2\sqrt{3}$ cm, $CD = 8$ cm. Aflați laturile AB și AC, dacă $\angle B = 60°$.

Rezolvare. Din triunghiul ADB ($\angle ADB = 90°$) obținem:

$$AD = BD \text{ tg } B = 2\sqrt{3} \text{ tg } 60° = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 \text{ (cm)};$$

$$AB = \frac{BD}{\cos B} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 60°} = 2\sqrt{3} : \frac{1}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Din triunghiul ADC ($\angle ADC = 90°$) obținem:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (cm)}.$$

Răspuns: $4\sqrt{3}$ cm, 10 cm.

Problema 4. Latura laterală a triunghiului isoscel este egală cu b, unghiul de la bază este egal cu α. Aflați raza circumferinței înscrise în triunghi.

Rezolvare. În triunghiul ABC (fig. 187) $AB = BC = b$, $\angle BAC = \alpha$. Ducem înălțimea BD.

Din triunghiul ADB ($\angle ADB = 90°$) obținem: $AD = AB \cos \angle BAD = b \cos \alpha$.

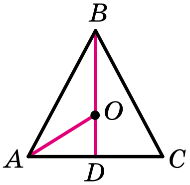


Fig. 187

Punctul O — centrul circumferinței, înscrise în triunghiul ABC. Deci, punctul O aparține înălțimii BD și bisectoarei AO a unghiului BAC. Deoarece $OD \perp AC$, rezultă că circumferința înscrisă este tangentă la latura AC în punctul D. Astfel, OD — raza circumferinței înscrise. Segmentul AO — bisectoarea unghiului BAD, de aceea $\angle OAD = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{\alpha}{2}$.

Din triunghiul ADO ($\angle ADO = 90°$) obținem:

$$OD = AD \text{ tg } \angle OAD = b \cos \alpha \text{ tg } \frac{\alpha}{2}.$$

Răspuns: $b \cos \alpha \text{ tg } \frac{\alpha}{2}$.

?

1. Cum se poate afla cateta triunghiului dreptunghic, dacă se știu ipotenuza și unghiul, opus acestei catete?
2. Cum se poate afla cateta triunghiului dreptunghic, dacă se știe ipotenuza și unghiul, alăturat acestei catete?
3. Cum se poate afla cateta triunghiului dreptunghic, dacă se știe a doua catetă și unghiul, opus catetei necunoscute?
4. Cum se poate afla cateta triunghiului dreptunghic dacă se știe a doua catetă și unghiul, alăturat catetei căutate?
5. Cum se poate afla ipotenuza triunghiului dreptunghic, dacă se știe cateta și unghiul opus acestei catete?
6. Cum se poate afla ipotenuza triunghiului dreptunghic, dacă se știe cateta și unghiul alăturat acestei catete?

EXERCIȚII

607.° În triunghiul ABC se știe, că $\angle C = 90°$. Aflați latura:

1) BC, dacă $AB = 12$ cm, $\sin A = \frac{3}{4}$;
2) AC, dacă $AB = 21$ cm, $\cos A = 0,4$;
3) AC, dacă $BC = 4$ cm, $\operatorname{tg} A = 1,6$;
4) AB, dacă $BC = 14$ cm, $\cos B = \frac{7}{9}$;
5) AB, dacă $AC = 3,2$ cm, $\sin B = 0,16$;
6) BC, dacă $AC = 2,3$ cm, $\operatorname{tg} B = \frac{1}{2}$.

608.° În triunghiul DEF se știe, că $\angle E = 90°$. Aflați latura:

1) DE, dacă $DF = 18$ cm, $\cos D = \frac{2}{9}$;
2) DF, dacă $EF = 3,5$ cm, $\cos F = 0,7$;
3) EF, dacă $DE = 2,4$ cm, $\operatorname{tg} D = \frac{11}{12}$.

609.° În triunghiul dreptunghic ipotenuza este egală cu 17 cm, iar sinusul a unuia din unghiurile ascuțite — $\frac{8}{17}$. Aflați catetele triunghiului.

610.° Ipotenuza triunghiului dreptunghic este egală cu 10 cm, iar cosinusul a unuia din unghiurile ascuțite — 0,8. Aflați catetele triunghiului.

611.° Cateta triunghiului dreptunghic este egală cu 48 cm, iar tangenta unghiului opus — cu $3\frac{3}{7}$. Aflați a doua catetă și ipotenuza triunghiului.

612.° Într-un triunghi dreptunghic una din catete este egală cu 12 cm, iar tangenta unghiului alăturat — 0,75. Aflați a doua catetă și ipotenuza.

613.° Rezolvați triunghiul dreptunghic:

1) se dă ipotenuza și unghiul ascuțit: $c = 28$ cm, $\alpha = 48°$;
2) se dă cateta și unghiul ascuțit: $a = 56$ cm, $\beta = 74°$;
3) se dă cateta și ipotenuza: $a = 5$ cm, $c = 9$ cm;
4) se dau două catete: $a = 3$ cm, $b = 7$ cm.

614.° Rezolvați triunghiul dreptunghic, având cunoscute elementele:

1) $a = 34$ cm, $\alpha = 55°$;
2) $c = 16$ cm, $\beta = 18°$;
3) $b = 12$ cm, $c = 13$ cm;
4) $a = 4$ cm, $b = 14$ cm.

615.° Folosind datele din figura 188 aflați înălțimea bradului.

616.° Ce lungime trebuie să aibă scara de incendiu, pentru ca să se poată urca pe ea acoperișul unei clădiri cu înălțimea de 9 m, dacă de-o instalat sub un unghi de 70° față de suprafața pământului?

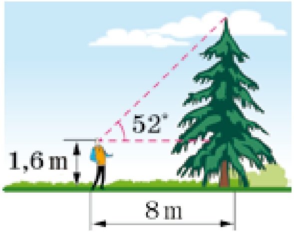


Fig. 188

617.° Parcurgând de la start porțiunea rectilinie de 300 m a șoselei, biciclistul s-a aflat într-un punct, situat cu 11 m mai sus, decât punctul startului. Aflați tangenta unghiului urcușului al șoselei pe această porțiune a ei.

618.° Sub ce unghi cade raza solară pe pământ, dacă lungimea umbrei unei prăjini verticale este egală cu lungimea a însăși prăjinii?

619.• Unghiul de la vârful triunghiului isoscel este egal cu 120°, iar înălțimea dusă la bază, — cu $3\sqrt{3}$ cm. Aflați laturile triunghiului.

620.• Bazele trapezului isoscel sunt egale cu 8 cm și 12 cm, iar unghiul de la bază — cu 45°. Aflați înălțimea și latura laterală a trapezului.

621.• Diagonala paralelogramului este perpendiculară pe latura lui și este egală cu a. Aflați laturile paralelogramului, dacă unul din unghiurile lui este egal cu 30°.

622.• Latura rombului este egală cu a, iar unul din unghiurile lui — cu 60°. Aflați diagonalele rombului.

623.• Tranșeea în secțiune are forma unui trapez isoscel (fig. 189). Aflați unghiul, pe care îl formează pereții tranșeei cu fundul ei.

624.• Lățimea terasamentului unei șosele în partea lui de jos este egală cu 80 m (fig. 190), înălțimea terasamentului — 5 m, iar taluzurile sunt înclinate față de orizont sun unghiul de 20°. Aflați lățimea terasamentului în partea lui de sus.

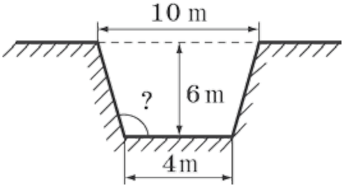


Fig. 189

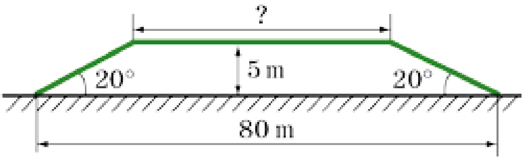


Fig. 190

625.• Înălțimea BD a triunghiului ABC împarte latura AC în segmentele AD și CD astfel, că $AD = 12$ cm, $CD = 4$ cm. Aflați latura BC, dacă $\angle A = 30°$.

626.• Înălțimea AE împarte latura BC a triunghiului ABC în segmentele BE și CE. Aflați latura AC, dacă $CF = \sqrt{13}$ cm, $\angle B = 60°$, iar latura AB este egală cu 18 cm.

627.• Din punctul D, care se află în afara dreptei n, sunt duse la această dreaptă oblicele DL și DB, care formează cu ea unghiurile de 45° și 60° corespunzător. Aflați lungimea proiecției a oblicei DK de dreapta n, dacă $DB = 10\sqrt{3}$ cm.

628.• Din punctul M, care este situat în afara dreptei l, sunt duse la această dreaptă oblicele MN și MK, care fac cu ea unghiurile de 30° și 45 ° corespunzător. Aflați oblica MK, dacă proiecția oblicii MN pe dreapta l este egală cu $4\sqrt{3}$ cm.

629.• Unghiul de la vârful triunghiului isoscel este egal cu β, înălțimea dusă la latura laterală — h. Aflați baza triunghiului.

630.• Înălțimea dusă din vârful unghiului drept al triunghiului, este egală cu h, unghiul ascuțit — cu α. Aflați laturile triunghiului.

631.• Una din catetele triunghiului dreptunghic este egală cu a. Unghiul dintre a doua catetă și înălțimea, dusă din vârful unghiului drept, este egal cu φ. Aflați laturile necunoscute ale triunghiului și înălțimea dusă la ipotenuză.

632.• Diagonala mai mare a rombului este egală cu d, iar unghiul ascuțit cu α. Aflați latura și diagonala mai mică a rombului.

633.• Unghiul ascuțit al rombului este egal cu α, raza circumferinței înscrise – cu r. Aflați latura și diagonalele rombului.

634.•• Diagonala trapezului isoscel este perpendiculară pe latura laterală și face cu baza trapezului unghiul de 30°. Aflați înălțimea trapezului, dacă raza circumferinței, circumscrise trapezului, este egală cu R.

635.•• Una din laturile triunghiului este egală cu a, unghiurile alăturate ei sunt egale cu 45° și 60°. Aflați înălțimea triunghiului, dusă la această latură.

636.•• Bazele trapezului sunt egale cu 7 cm și 15 cm, iar unghiurile de la baza mai mare cu 30° și 60°. Aflați înălțimea și diagonalele trapezului.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

637. Perimetrul paralelogramului este egal cu 48 cm. Bisectoarea unghiului obtuz împarte latura lui în raportul 2 : 1, socotind de la vârful unghiului ascuțit. Oare poate latura mai mică a paralelogramului să fie egală cu 7 cm?

638. Patrulaterul $ABCD$ este înscris în circumferință, $\angle BAC = 52°$, $\angle DBC = 34°$, $\angle ADB = 17°$. Aflați unghiurile patrulaterului.

639. Se știe că O — punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD ale trapezului $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Aflați segmentele BO și OD, dacă $AO : OC = 7 : 6$ și $BD = 39$ cm.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

640. Tăiați rombul în patru patrulatere astfel, ca fiecare din ele să fie înscris în circumferință și circumscris circumferinței.

ЗАВДАННЯ № 3 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Diametrul AB al circumferinței cu centrul O este perpendicular la coarda CD (fig. 191). Care din egalitățile aduse este neadevărată?

A) $AC^2 = AM \cdot AB$; C) $AD^2 = MB \cdot AB$;

B) $CM^2 = AM \cdot MB$; D) $DM^2 = AM \cdot MB$.

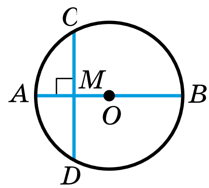
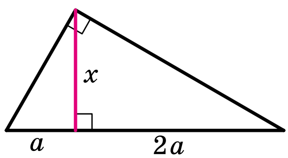
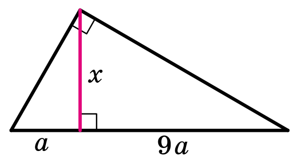
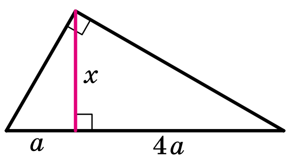


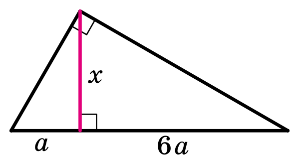
Fig. 191

2. În care figură lungimea segmentului x este egală cu $2a$?

A)


C)


B)


D)


3. Din teorema lui Pitagora reiese, că ipotenuza:

A) este egală cu suma catetelor;

B) este egală cu suma pătratelor catetelor;

C) este mai mare decât catetele;

D) este egală cu pătratul sumei catetelor.

4. Lungimea segmentului x din figura 192 este egal cu:

A) 4; B) 3; C) 5; D) $3\sqrt{2}$.

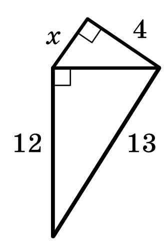


Fig. 192

5. Bisectoarea triunghiului echilateral cu latura a este egal cu:

A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; B) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

6. Raza circumferinței, circumscrise pătratului cu latura a, este egală cu:

A) $\frac{a}{2}$; B) $a\sqrt{2}$; C) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; D) $2a$.

7. Înălțimea triunghiului dreptunghic isoscel, dusă la ipotenuză, este egală cu a. Atunci cateta lui este egală cu:

A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; B) $a\sqrt{2}$; C) $2a$; D) $\frac{a}{2}$.

8. Fie α și β — unghiurile triunghiului dreptunghic neisoscel. Care din egalitățile următoare este justă?

A) $\sin\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = \cos\alpha$; C) $\sin\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta = \sin\beta$;

B) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\beta$; D) $\cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta = \sin\beta$.

9. Fie α — unghiul ascuțit al triunghiului dreptunghic. Care din următoarele egalități nu poate fi îndeplinită?

A) $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$; C) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

B) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$; D) $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

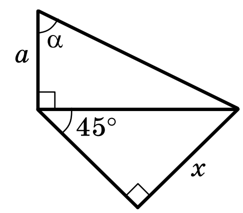


Fig. 193

10. Lungimea segmentului x din figura 193 este egală cu:

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\sin\alpha$; C) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$;

B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$; D) $a\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 3

Relațiile metrice în triunghiul dreptunghic

Pătratul înălțimii triunghiului dreptunghic, dusă la ipotenuză, este egal cu produsul proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

Pătratul catetei este egal cu produsul ipotenuzei cu proiecția acestei catete pe ipotenuză.

Teorema lui Pitagora

În triunghiul dreptunghic pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor.

Sinusul unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic

Se numește sinus al unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic raportul catetei opuse către ipotenuză.

Cosinusul unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic

Cosinus a unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic se numește raportul catetei alăturate către ipotenuză.

Tangenta unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic

Tangentă a unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic se numește raportul catetei opuse către cea alăturată.

Formulele trigonometrice

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \mathbf{1}$ — identitatea trigonometrică fundamentală

$\cos (90° - \alpha) = \sin \alpha$

$\sin (90° - \alpha) = \cos \alpha$

Relațiile dintre laturile și valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi dreptunghic

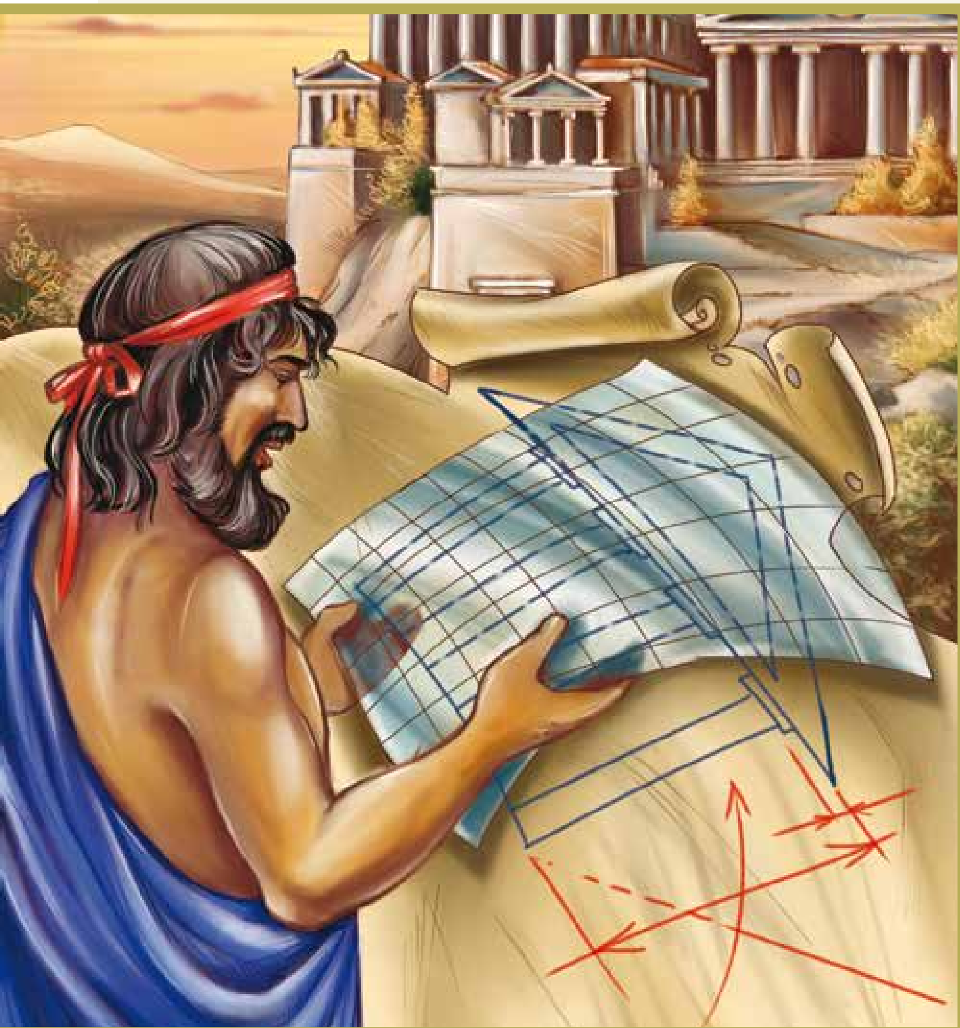
- Cateta triunghiului dreptunghic este egală cu produsul ipotenuzei prin sinusul unghiului, opus acestei catete.
- Cateta triunghiului dreptunghic este egală cu produsul ipotenuzei prin cosinusul unghiului, alăturat acestei catete.
- Cateta triunghiului dreptunghic este egală cu produsul catetei a doua prin tangenta unghiului, opus primei catete.
- Cateta triunghiului dreptunghic este egală cu câtul de la împărțirea celeilalte catete la tangenta unghiului, alăturat la prima catetă.
- Ipotenuza triunghiului dreptunghic este egală cu câtul de la împărțirea catetei la sinusul unghiului opus ei.
- Ipotenuza triunghiului dreptunghic este egală cu câtul de la împărțirea catetei la cosinusul unghiului, alăturat acestei catete.

POLIGOANE. ARIA POLIGONULUI §4

După studierea acestui paragraf, voi veți știe formula cu ajutorul căreia se poate afla suma unghiurilor a poligonului convex.

Veți extinde imaginațiile sale și cunoștințele despre atât de cunoscuta vouă mărime ca aria.

Veți putea afla aria paralelogramului, triunghiului, trapezului.



19. Poligoane

Să considerăm figura care constă din punctele A_1, A_2, A_3, ..., A_n și segmentele A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 astfel că oricare două segmente alăturate (vecine) nu se află pe o dreaptă și oricare două segmente nealăturate (nevecine) n-au puncte comune. (fig. 194).

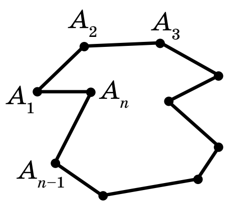


Fig. 194

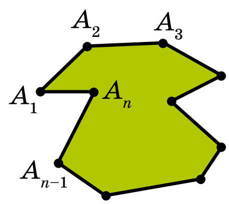


Fig. 195

Figura, formată de aceste segmente, mărginește o porțiune a planului, evidențiată în figura 195 cu culoare verde. Această parte a planului împreună cu segmentele A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 se numește **poligon**. Punctele A_1, A_2, A_3, ..., A_n se numesc **vârfurile** poligonului, iar segmentele, indicate mai sus — **laturile** poligonului.

Laturile, care sunt **segmente vecine** se numesc laturi alăturate ale poligonului. Vârfurile, care sunt extremitățile unei laturi se numesc **vârfuri vecine** ale poligonului.

Două laturi alăturate ale poligonului formează unghiul poligonului. De exemplu , în figura 196 α, β, γ, δ sunt unghiuri ale poligonului, iar φ nu este unghi al poligonului.

Poligonul este numit conform cantității de laturi ale lui: patrulater, pentagon, hexagon ș.a.m.d. Excepție face triunghiul: se arată cantitatea de unghiuri, dar nu de laturi.

Poligonul se notează după vârfurile lui. De exemplu în figura 197 este reprezentat pentagonul *ABCDE*. În notarea poligonului literele, care se află alături, corespund vârfurilor vecine, de exemplu, pentagonul, reprezentat în figura 197, se poate nota și astfel: *CDEAB*, *EABCD*, *EDCBA* etc.

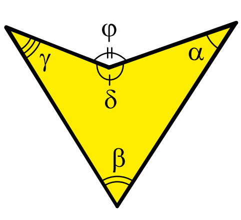


Fig. 196

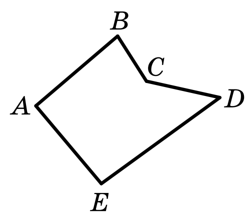


Fig. 197

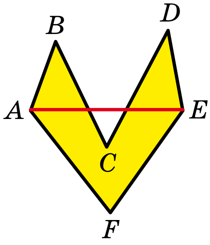


Fig. 198

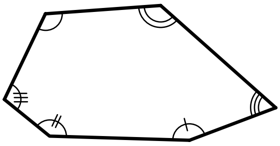


Fig. 199

Perimetru al poligonului se numește suma lungimilor a tuturor laturilor lui.

Segmentul care unește vârfurile nevecine ale poligonului se numește **diagonală**. De exemplu, în figura 198 segmentul *AE* — diagonala hexagonului *ABCDEF*.

În figura 199 este reprezentat poligonul, ale cărui toate unghiuri sunt mai mici decât cel desfășurat. Așa un poligon se numește **convex**. Din cele spuse urmează că orice triunghi este poligon convex. Menționăm că poligoanele, reprezentate în figurile 196–198, nu sunt convexe.

Poligonul convex posedă următoarele proprietăți.

1) poligonul convex este situat în același semiplan față de orice dreaptă, care conține latura lui (fig. 200);

2) poligonul convex, diferit de triunghi, conține orice diagonală a lui (fig. 201).

Dacă poligonul nu este convex, atunci el așa proprietăți n-are (fig.198, 202).

Teorema 19.1. ***Suma unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este egală cu 180° (n – 2).***

Demonstrație. Pentru cazul $n = 3$ teorema a fost demonstrată în clasa a 7-a (teorema 16.1).

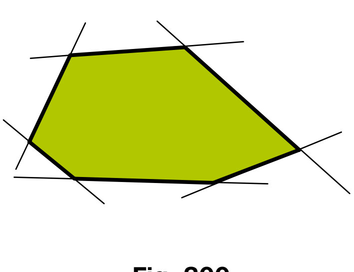


Fig. 200

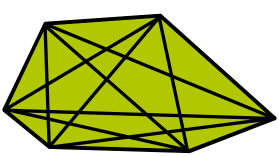


Fig. 201

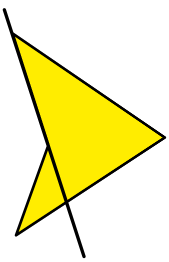


Fig. 202

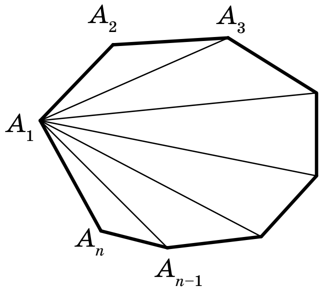


Fig. 203

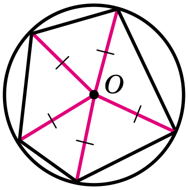


Fig. 204

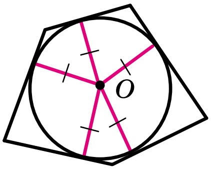


Fig. 205

Fie $n > 3$. În figura 203 este reprezentat poligonul convex cu n laturi $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$. Să demonstrăm, că suma tuturor unghiurilor lui este egală cu180° $(n - 2)$.

Ducem toate diagonalele lui, care ies din vârful A_1. Aceste diagonale împart poligonul în $(n - 2)$ triunghiuri. Suma tuturor unghiurilor ale acestor triunghiuri este egală cu suma unghiurilor poligonului cu n laturi. Deoarece suma unghiurilor a fiecărui triunghi este egală cu 180°, reiese că suma căutată este egală cu 180° $(n - 2)$. ▲

Menționăm că teorema adusă este justă și pentru orice poligon, care nu este convex.

Definiție. Circumferința se numește circumscrisă poligonului, dacă ea trece prin toate vârfurile lui.

În figura 204 este reprezentată circumferința, circumscrisă poligonului. În acest caz de asemenea se mai spune, că poligonul este înscris în circumferință.

Centrul circumferinței, circumscrise poligonului, este egal depărtat de la toate vârfurile lui. Deci, acest centru aparține mediatoarelor ale tuturor laturilor poligonului, înscris în circumferință.

Unui poligon i se poate circumscrie o circumferință, dacă există un punct, egal depărtat de toate vârfurile lui. Deci, dacă mediatoarele tuturor laturilor poligonului se intersectează într-un punct, atunci acestui poligon i se poate circumscrie o circumferință.

Definiție. Circumferința se numește înscrisă în poligon, dacă ea este tangentă la toate laturile lui.

În figura 205 este reprezentată circumferința, înscrisă în poligon. În acest caz de asemenea se mai spune, că poligonul este **circumscris** circumferinței.

Centrul circumferinței, înscrise în poligon este echidistant de la toate laturile lui. Deci, acest centru aparține bisectoarelor tuturor unghiurilor poligonului, circumscris circumferinței.

1. Explicați care figură se numește poligon.
2. Ce se numește perimetrul unui poligon?
3. Ce se numește diagonală a poligonului?
4. Care poligon se numește convex?
5. Cum este situat poligonul convex în raport cu orice dreaptă, care conține latura lui?
6. Cu ce este egală suma unghiurilor unui poligon convex cu *n* laturi?
7. Care circumferință se numește circumscrisă unui poligon?
8. Care punct este centrul circumferinței, circumscrise poligonului?
9. Care circumferință se numește înscrisă în poligon?
10. Care punct este centrul circumferinței, înscrise în poligon?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

641.° Desenați și notați un heptagon convex arbitrar, numiți toate vârfurile și laturile lui. Duceți dintr-un vârf toate diagonalele, numițile. În câte triunghiuri au împărțit diagonalele heptagonul?

642.° Desenați hexagonul, dacă fiecare unghi al lui este egal cu 120°, iar fiecare latură — cu 4 cm. Circumscrieți-i acestui hexagon o circumferință și înscrieți în el o circumferință.

643.° Desenați un pentagon, fiecare unghi al căruia este egal cu 108°, iar fiecare latură — cu 3 cm. Circumscrieți acestui pentagon o circumferință și înscrieți-i o circumferință.

644.° Desenați o circumferință cu rază arbitrară, împărțiți-o în 8 arce egale. Folosind punctele de divizare construiți octagonul, înscris în circumferință.

645.° Desenați o circumferință cu rază arbitrară, împărțiți-o în 12 arce egale. Folosind punctele de divizare construiți un dodecagon, înscris în circumferință.

EXERCIȚII

646.° Aflați laturile pentagonului *ABCDE*, dacă latura *BC* este cu 1 cm mai mare, decât latura *AB*, *CD* este cu 2 cm mai mare, decât *AB*, *DE* este cu 3 cm mai mare decât *AB*, *AE* este cu 4 cm mai mare, decât *AB*, iar perimetrul pentagonului este egal cu 100 cm.

647.° Aflați suma unghiurilor a poligoanelor convexe: 1) pentagonului; 2) octogonului; 3) poligonului cu 24 de laturi.

648.° Aflați suma unghiurilor poligonului convex cu: 1) nouă laturi; 2) șaisprezece laturi.

649.° Oare există poligon convex suma unghiurilor a căruia este egală cu: 1) 1800°; 2) 720°; 3) 1600°?

650.° Oare există poligon, fiecare unghi al căruia este egal cu: 1) 150°; 2) 100°?

651.• În procesul ridicării planului a unei parcele de pământ, care are forma unui pentagon (fig. 206), au obținut următoarele mărimi ale unghiurilor: $\angle A = 116°$, $\angle B = 98°$, $\angle C = 124°$, $\angle D = 102°$, $\angle E = 130°$. Oare corect au fost făcute măsurările?

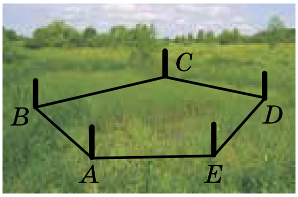


Fig. 206

652.• Aflați unghiurile hexagonului convex, dacă ele se raportă ca 3 : 3 : 4 : 4 : 5 : 5.

653.• Aflați unghiurile poligonului convex cu șapte laturi, dacă ele se raportă ca 6 : 7 : 8 : 9 : 9 : 10 : 11.

654.• Câte diagonale se pot duce în poligonul cu: 1) nouă laturi; 2) douăzeci de laturi; 3) n laturi?

655.• În poligonul convex sunt 54 diagonale. Aflați cantitatea laturilor și suma unghiurilor lui.

656.• Demonstrați, că dacă toate laturile poligonului, înscris în circumferință, sunt egale, atunci și toate unghiurile lui tot sunt egale.

657.• Demonstrați că, dacă toate unghiurile poligonului, circumscris unei circumferințe, sunt egale, atunci și toate laturile lui tot sunt egale.

658.•• Toate laturile pentagonului convex sunt egale, iar unghiurile, alăturate uneia din laturi, — drepte. Aflați restul unghiurilor ale pentagonului.

659.•• Trei unghiuri ale unui poligon au câte 100°, iar restul — câte 120°. Determinați tipul poligonului.

660.•• Demonstrați că, dacă unghiurile hexagonului convex sunt egale, atunci laturile lui formează trei perechi de laturi paralele.

661.•• Demonstrați, că dacă unghiurile pentagonului convex sunt egale, atunci el n-are laturi paralele.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

662. În trapezul isoscel diagonala este bisectoarea unghiului obtuz și împarte linia medie a trapezului în segmente cu lungimile de 7 cm și 11 cm. Aflați perimetrul trapezului.

663. Mediana și înălțimea triunghiului dreptunghic, duse la ipotenuză, sunt respectiv egale cu 13 cm și 12 cm. Aflați perimetrul triunghiului dat.

664. Bisectoarea unghiului A al triunghiului ABC ($\angle C = 90°$) împarte cateta BC în segmentele cu lungimile de 6 cm și 10 cm. Aflați raza circumferinței, care trece prin punctul A, punctul C și punctul de intersecție al bisectoarei date cu cateta BC.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

665. Pe circumferința cu raza 1 au notat 1000 de puncte. Demonstrați că se va găsi un punct, care aparține circumferinței date, suma distanțelor de la care până la punctele notate este mai mare decât 1000.

20. Noțiunea de arie a poligonului. Aria dreptunghiului

Cu așa o mărime, ca aria, voi v-ați întâlnit frecvent în viața cotidiană: aria apartamentului, aria parcelei de la casa de grădină, aria câmpului ș.a.

Experiența vă sugerează că parcelele egale au arii egale, că aria locuinței este egală cu suma ariilor a tuturor încăperilor (camere, bucătărie, coridor, cămară altele).

Știți că ariile parcelelor de pământ se măsoară în ari și hectare; ariile ținuturilor și ale statelor în kilometri pătrați; aria locuinței — în metri pătrați.

Pe aceste cunoștințe practice despre arie se bazează definiția ariei poligonului.

Definiție. **Arie a poligonului se numește mărimea pozitivă, care are următoarele proprietăți:**

1) **poligoanele egale au arii egale;**
2) **dacă poligonul este compus din câteva poligoane, atunci aria lui este egală cu suma ariilor acestor poligoane;**
3) **drept unitate de măsură a ariei se ia pătratul unitar, adică pătratul cu latura, care este egală cu unitatea de măsură a lungimii.**

A măsura aria poligonului — aceasta înseamnă a compara aria lui cu aria pătratului unitar. În rezultat se obține **valoarea numerică a ariei poligonului** dat. Acest număr arată de câte ori aria poligonului dat se deosebește de aria pătratului unitar.

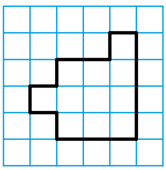


Fig. 207

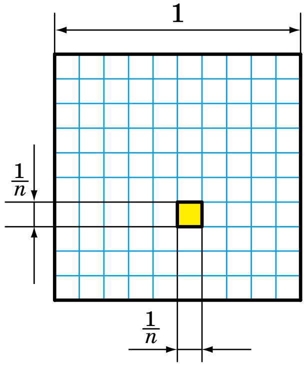


Fig. 208

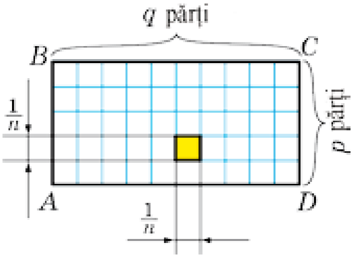


Fig. 209

De exemplu, dacă pătrățica din caietul vostru de o considerat ca pătrat unitar, atunci aria poligonului, reprezentat în figura 207, va fi egală cu 11 unități pătrate (se scrie prescurtat 11 un^2).

De obicei pentru aflarea ariei se folosesc formule, adică se calculează aria poligonului, având cunoscute anumite elemente ale lui (laturi, diagonale, înălțimi altele). Unele formule voi deja le știți. De exemplu, voi nu o dată ați folosit formula $S = ab$, unde S — aria dreptunghiului, a și b — lungimile laturilor alăturate ale lui.

Pentru demonstrarea acestei formule va fi necesară așa o lemă.

Lemă. ***Aria pătratului cu latura egală cu $\frac{1}{n}$ un. (n — număr natural) este egală cu $\frac{1}{n^2}$ un.^{2}.***

Demonstrație. Să considerăm pătratul unitar și să-l împărțim în n^2 pătrate egale cu latura de $\frac{1}{n}$ (fig. 208).

Din definiția ariei poligonului (proprietatea 1) urmează că toate aceste pătrate au arii egale. Pe baza proprietății 2 suma ariilor acestor pătrate este egală cu aria pătratului unitar, adică 1 un.^{2}. De aceea aria fiecărui pătrat mic este egală cu $\frac{1}{n^2}$ un.^{2}. ▲

Teorema 20.1. ***Aria dreptunghiului este egală cu produsul lungimilor laturilor lui alăturate.***

Demonstrație. În figura 209 este reprezentat dreptunghiul $ABCD$, lungimile laturilor alăturate ale căruia sunt egale cu a și b: $AB = a$, $BC = b$. Să demonstrăm că aria S a dreptunghiului se calculează cu formula $S = ab$ pentru cazul când a și b sunt numere raționale.

Numerele a și b le reprezentăm în formă de fracții ordinare cu aceiași numitori:

$$a=\frac{p}{n},\ b=\frac{q}{n},$$

unde p, q, n — numere naturale.

Împărțim latura AB în p părți egale, iar latura BC — în q părți egale. Prin punctele de divizare ducem drepte paralele cu laturile dreptunghiului. Atunci dreptunghiul va fi împărțit în pq pătrate egale cu latura de $\frac{1}{n}$.

Pe baza lemei aria fiecărui pătrat este egală cu $\frac{1}{n^2}$. Din definiția ariei (proprietatea a 2-a) urmează, că aria dreptunghiului este egală cu suma ariilor a tuturor pătratelor, adică

$$S=\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}_{pq\ \text{termeni}}=pq\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{p}{n}\cdot\frac{q}{n}=ab.$$

Examinarea cazului când măcar unul din numerele a sau b este irațional, iese în afara limitelor cursului de geometrie școlar. ▲

Definiție. Poligoanele, care au arii egale se numesc echivalente.

Pe baza definiției ariei (proprietatea 1) rezultă că toate figurile egale sunt echivalente. Dar nu toate figurile, care au arii egale, sunt egale. De exemplu, în figura 210 sunt reprezentate două poligoane, fiecare din ele este compus din șape pătrate unitare. Aceste poligoane sunt echivalente, însă nu sunt egale

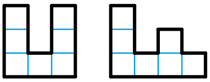


Fig. 210

1. Ce se numește aria poligonului?
2. Ce înseamnă a măsura aria poligonului?
3. Ce arată valoarea numerică a ariei?
4. Cu ce este egală aria pătratului cu latura $\frac{1}{n}$ un., unde n – număr natural?
5. Cu ce este egală aria dreptunghiului?
6. Care poligoane se numesc echivalente?
7. Oare se poate afirma că dacă două figuri sunt egale, atunci ele sunt echivalente?
8. Oare se poate afirma că dacă două figuri sunt echivalente, atunci ele sunt egale?

EXERCIȚII

666.° Aflați laturile dreptunghiului, dacă una din ele este cu 5 cm mai mare decât cealaltă, iar aria dreptunghiului este egală cu 36 cm^2.

667.° Aria dreptunghiului este egală cu 270 cm^2, iar laturile lui se raportă ca 5 : 6. Cu ce sunt egale laturile dreptunghiului?

668.° Care din dreptunghiurile, reprezentate în figura 211, sunt echivalente?

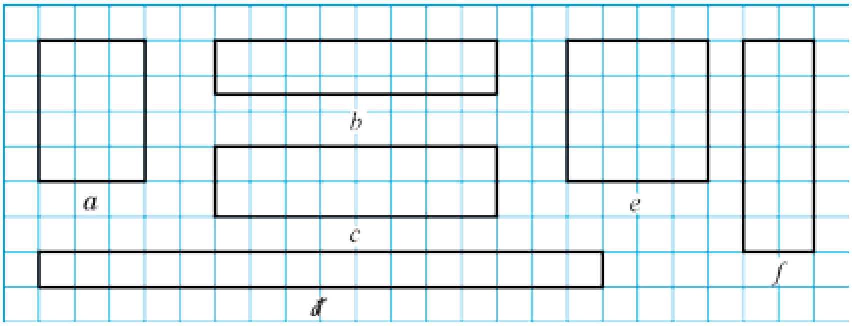


Fig. 211

669.° Pătratul cu latura de 12 cm și dreptunghiul, o latură a căruia este egală cu 8 cm, sunt echivalenți. Aflați perimetrul acestui dreptunghi.

670.° Aflați perimetrul pătratului care este echivalent cu dreptunghiul cu laturile de 2 cm și 32 cm.

671.° Oare vor fi suficiente 5 t de mazăre pentru a însămânța cu el un câmp, care are forma dreptunghiului cu laturile de 500 m și 400 m, dacă pentru a însămânța 1 ha trebuie 260 kg de mazăre?

672.° Lungimea peretelui este egală cu 6 m, iar înălțimea — cu 3 m. Oare vor fi suficiente cinci containere de teracotă, pentru a căptuși cu ea acest perete, dacă o placă de faianță are forma unui pătrat cu latura de 15 cm, iar într-un container încap 160 de plăci?

673.° Consumul vopselei email pentru acoperirea cu un strat constituie 180 g la 1 m^2. Oare vor ajunge 3 kg de email pentru a vopsi peretele cu lungimea de 6 m și înălțimea de 3 m?

674.° Presiunea a unui oarecare gaz într-o butelie constituie 0,0015 N/ m^2. Cu ce forță apasă acest gaz asupra peretelui buteliei de formă dreptunghiulară cu dimensiunile 35 × 24 cm?

675.° Limita rezistenței a unui oțel de oarecare calitate constituie 60 N/mm^2. Pentru care solicitare se va rupe bara, a cărei secțiune transversală este dreptunghiul cu laturile de 20 mm și 10 mm?

676.• Diagonala dreptunghiului este egală cu d și formează cu una din laturi unghiul α. Aflați aria dreptunghiului.

677.• Latura dreptunghiului este egală cu 15 cm și formează cu diagonala unghiul de 30°. Aflați aria dreptunghiului.

678.• Aflați raportul ariilor a două pătrate, ale căror laturi se raportă ca: 1) 3 : 4; 2) $2 : \sqrt{5}$.

679.• Cum se raportă laturile a două pătrate, dacă ariile lor se raportă ca: 1) 25 : 36; 2) 3 : 49?

680.• Una din laturile dreptunghiului este egală cu 28 cm. Cum se va schimba aria dreptunghiului, dacă vom micșora cu 5 cm latura alăturată ei?

681.• Cum se va schimba aria dreptunghiului, dacă:
1) două laturi opuse ale lui de le mărit de 3 ori;
2) toate laturile lui de le mărit de 3 ori;
3) două laturi opuse ale lui de le mărit de 6 ori, iar altele două de le micșorat de 3 ori?

682.• Cum se va schimba aria dreptunghiului, dacă:
1) două laturi opuse ale lui de le micșorat de 4 ori, iar altele două — de 2 ori;
2) două laturi opuse ale lui de le mărit de 4 ori, iar altele două — de le micșorat de 4 ori?

683.• Pe prelungirea laturii AD a paralelogramului $ABCD$ după punctul D este notat punctul M astfel, că $AD = MD$. Demonstrați că paralelogramul $ABCD$ și triunghiul ABM sunt echivalenți

684.• Aria pătratului $ABCD$ este egală cu 10 cm^2 (fig. 212). Cu ce este egală aria dreptunghiului $BMKD$?

685.• Demonstrați, că dacă punctul E este mijlocul segmentului AK (fig. 213), atunci triunghiul AKD și dreptunghiul $ABCD$ sunt echivalenți.

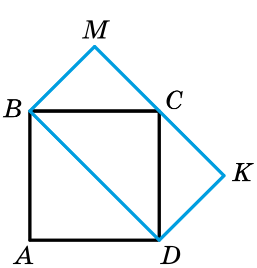


Fig. 212

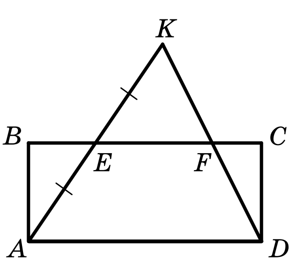


Fig. 213

686.• De câte ori aria pătratului, circumscris circumferinței, este mai mare decât aria pătratului, înscris în această circumferință??

687.• Aria unei foi de hârtie dreptunghiulare, lungimile laturilor ale căreia sunt exprimate prin numere întregi de centimetri, este egală cu 12 cm^2. Câte pătrate cu aria de 4 cm^2 pot fi decupate din această foaie?

688.• Aria unei foi de hârtie dreptunghiulare, ale cărei laturi au lungimi, ce se exprimă prin numere întregi de centimetri, este egală cu 18 cm^2. Câte pătrate cu latura de 3 cm pot fi tăiate din această foaie?

689.• Bisectoarea unghiului dreptunghiului împarte diagonala lui în raportul 2 : 7. Aflați aria dreptunghiului, dacă perimetrul lui este egal cu 108 cm.

690.• Bisectoarea unghiului dreptunghiului împarte diagonala lui în raportul 1 : 4. Aflați perimetrul dreptunghiului, dacă aria lui este egală cu 36 cm^2.

691.* Construiți pătratul, aria căruia este egală cu suma ariilor a două pătrate date.

692.* Laturile dreptunghiului sunt egale cu a și b. Construiți pătratul, aria căruia să fie egală cu aria dreptunghiului dat.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

693. Mediatoarea diagonalei BD a paralelogramului $ABCD$ intersectează laturile AB și CD. Prelungirile laturilor AD și BC ea le intersectează în punctele M și K respectiv. Determinați tipul patrulaterului $MBKD$.

694. Prelungirile laturilor laterale AB și CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul M. Aflați segmentul AM, dacă $AB = 6$ cm și $BC : AD = 3 : 4$.

695. Aflați distanța de la punctul de intersecție al diagonalelor rombului până la latura lui, dacă unghiul ascuțit al rombului este egal cu 30°, iar latura – cu 8 cm.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

696. Pe fiecare din două triunghiuri asemenea le-au tăiat în două triunghiuri astfel, că una din părțile obținute ale unui triunghi este asemenea cu una din părțile obținute din al doilea triunghi. Se poate oare afirma că celelalte părți tot sunt asemenea?

21. Aria paralelogramului

Teorema 21.1. ***Aria paralelogramului este egală cu produsul laturii lui cu înălțimea, dusă la această latură..***

Demonstrație. În figura 214 este reprezentat paralelogramul $ABCD$, aria căruia este egală cu S, și înălțimea lui BM. Să demonstrăm, că $S = BC \cdot BM$.

Ducem înălțimea CN. E ușor de arătat (faceți aceasta de sine stătător), că patrulaterul $MBCN$ — dreptunghi. Să arătăm că el este echivalent cu paralelogramul dat.

Aria paralelogramului este egală cu suma ariilor triunghiului ABM și a trapezului $MBCD$. Aria dreptunghiului este egală cu suma ariilor a trapezului menționat și a triunghiului DCN. Dar triunghiurile ABM și DCN sunt egale după ipotenuza și unghiul ascuțit (segmentele AB și CD sunt egale ca laturi opuse ale paralelogramului, unghiurile 1 și 2 sunt egale ca corespondente la dreptele paralele AB și DC și secanta AD). Așadar, aceste triunghiuri sunt echivalente. De aici urmează că paralelogramul $ABCD$ și dreptunghiul $MBCN$ sunt echivalenți.

Pe baza teoremei 20.1 aria dreptunghiului este egală cu produsul lungimilor laturilor BC și BM. De aici $S = BC \cdot BM$, unde S — aria paralelogramului $ABCD$.

Pentru a termina demonstrația trebuie de examinat cazurile când baza M a înălțimii BM nu va aparține laturii AD (fig. 215) sau va coincide cu vârful D (fig. 216). Și în acest caz paralelogramul $ABCD$ va fi echivalent cu dreptunghiul $MBCN$. Demonstrați acest fapt de sine stătător. ▲

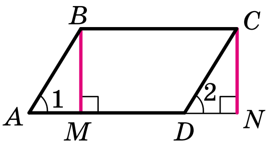


Fig. 214

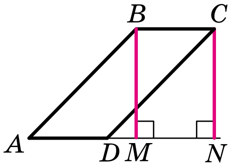


Fig. 215

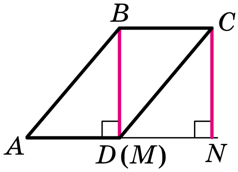


Fig. 216

Dacă notăm lungimile laturii paralelogramului și înălțimea dusă la ea respectiv cu literele a și h, atunci aria S a paralelogramului se va calcula cu formula

$$\boxed{S = ah}$$

1. Cu ce este egală aria paralelogramului?
2. Cu care formula se calculează aria paralelogramului?

EXERCIȚII

697.° Aflați aria paralelogramului, a cărui latură este egală cu 14 cm, iar înălțimea, dusă la ea — cu 6 cm.

698.° Calculați aria paralelogramului, reprezentat în figura 217 (dimensiunile sunt date în centimetri).

Fig. 217

699.° Care din paralelogramele, reprezentate în fig. 218, sunt echivalente?

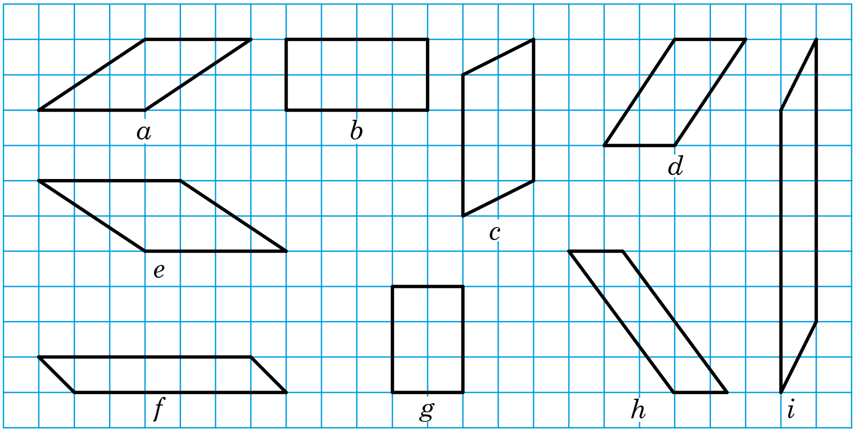


Fig. 218

700.° Aria paralelogramului *ABCD* (fig. 219) este egală cu *S*. Cu ce este egală aria figurii vopsite?

701.° Aria paralelogramului este egală cu 17 cm², iar una din laturile lui — cu 3,4 cm. Aflați înălțimea paralelogramului, dusă la această latură.

702.° Aria paralelogramului este egală cu 40 cm², iar înălțimile sunt egale cu 5 cm și 4 cm. Aflați laturile acestui paralelogram.

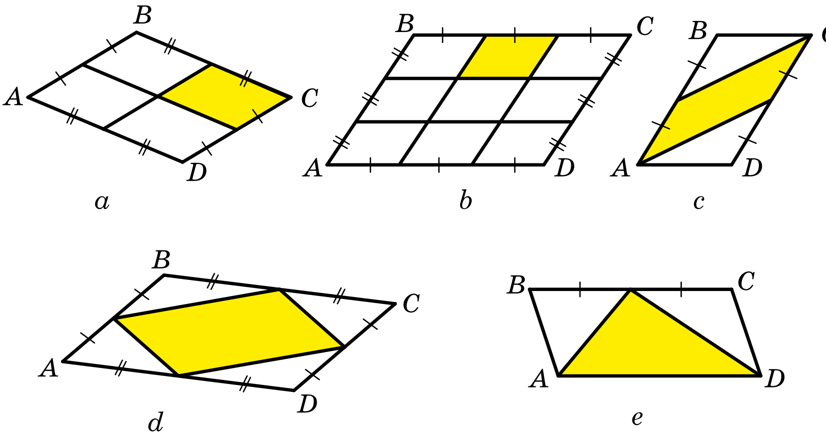


Fig. 219

703.° Completați tabelul, unde a — lungimea laturii paralelogramului, h — lungimea înălțimii, duse la această latură, S — aria paralelogramului:

a	6,2 cm	16 dm	
h	7 cm		0,9 m
S		64 dm^2	5,4 m^2

704.• Laturile paralelogramului sunt egale cu 10 cm și 15 cm, iar una din înălțimi este egală cu: 1) 6 cm; 2) 12 cm. Aflați cealaltă înălțime a paralelogramului. Câte soluții în fiecare caz are problema?

705.• Aflați aria paralelogramului, ale cărui laturi sunt egale cu 15 cm și 25 cm, iar una din diagonale este perpendiculară la latura mai mică.

706.• Aflați aria paralelogramului, ale cărui diagonale sunt egale cu 26 cm și 24 cm, iar una din diagonale este perpendiculară pe latura lui.

707.• Diagonala paralelogramului, care este egală cu 18 cm, este perpendiculară la una din laturi și face unghiul de 30° cu cealaltă latură. Aflați aria paralelogramului.

708.• Laturile paralelogramului sunt egale cu a și b, unghiul ascuțit al lui este egal cu α. Aflați aria paralelogramului.

709.• Unghiul, făcut de înălțimile paralelogramului, duse din vârful unghiului obtuz, este egal cu 60°. Aflați aria paralelogramului, dacă înălțimile lui sunt egale cu 8 cm și 12 cm.

710.• Laturile paralelogramului sunt egale cu 14 cm și 20 cm, iar unghiul, făcut de înălțimile lui, duse din vârful unghiului obtuz, — cu 45°. Aflați aria paralelogramului.

711.• Aflați aria rombului, dacă înălțimea lui este egală cu 6 cm, iar diagonala mai mare — cu 10 cm.

712.• Diagonala mai mică a rombului este egală cu a, iar unul din unghiuri — cu 60°. Aflați aria rombului.

713.• Demonstrați că înălțimile paralelogramului sunt invers proporționale cu laturile, la care ele sunt duse.

714.• Laturile paralelogramului sunt egale cu 9 cm și 12 cm, iar suma a două înălțimi neegale a lui este egală cu 14 cm. Aflați aria paralelogramului.

715.• Diferența a două laturi a paralelogramului este egală cu 12 cm, iar înălțimile, duse la ele sunt egale cu 15 cm și 10 cm. Aflați aria paralelogramului.

716.•• Demonstrați că din toate paralelogramele cu laturile a și b cea mai mare arie o are dreptunghiul.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

717. În triunghiul ABC se știe, că $\angle C = 90°$, $AC = 7$ cm, $BC = 24$ cm, AM — bisectoare. Aflați sinusul, cosinusul și tangenta unghiurilor BAC și AMC.

718. În triunghiul isoscel ABC cu baza AC medianele AM și CK se intersectează în punctul O. Demonstrați că triunghiul AOC este isoscel, și aflați laturile lui laterale, dacă $AM = 21$ cm.

719. Pe mediana AM a triunghiului ABC este notat punctul D astfel, că $AD : DM = 1 : 3$. Prin punctul D este dusă dreapta, paralelă cu latura AC. În ce raport această dreaptă împarte latura BC, socotind de la vârful C?

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

720. Demonstrați că în poligonul convex, cu nouă laturi, se vor găsi două diagonale, unghiul dintre care este mai mic decât 7°.

22. Aria triunghiului

Teorema 22.1. ***Aria triunghiului este egală cu semiprodusul unei laturi a lui prin înălțimea, dusă pe această latură.***

Demonstrație. În figura 220 este reprezentat triunghiul ABC, a cărui arie este egală cu S, și înălțimea lui BM. Să demonstrăm, că $S = \frac{1}{2}AC \cdot BM$.

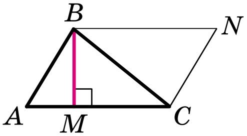


Fig. 220

Prin vârfurile B și C ale triunghiului ducem drepte, paralele cu laturile AC și AB respectiv (fig. 220). Fie că aceste drepte se intersectează în punctul N. Patrulaterul $ABNC$ este paralelogram pe baza definiției. Triunghiurile ABC și NCB sunt egale (demonstrați aceasta de sine stătător). Deci, ariile lor tot sunt egale. Atunci aria triunghiului ABC este egală cu jumătate din aria paralelogramului $ABNC$. Înălțimea BM a triunghiului ABC este de asemenea și înălțimea paralelogramului $ABNC$. De aici $S = \frac{1}{2}AC \cdot BM$. ▲

Dacă ne folosim de notațiile pentru înălțimile și laturile triunghiului ABC, atunci conform cu teorema demonstrată avem:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c,$$

unde S — aria triunghiului.

Consecință. ***Aria triunghiului dreptunghic este egală cu semiprodusul catetelor lui.***

Demonstrați de sine stătător această teoremă.

Problemă. Demonstrați că aria rombului este egală cu semiprodusul diagonalelor lui.

Rezolvare. În figura 221 este reprezentat rombul $ABCD$, a cărui arie este egală cu S. Diagonalele lui AC și BD se intersectează în punctul O. Să demonstrăm că $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.

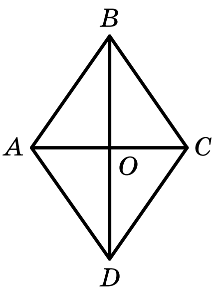


Fig. 221

Deoarece diagonalele rombului sunt perpendiculare, rezultă că segmentele AO și CO sunt înălțimile triunghiurilor BAD și BCD respectiv. Atunci urmează:

$$S = S_{BAD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot AO + \frac{1}{2}BD \cdot CO = \frac{1}{2}BD\,(AO + CO) = \frac{1}{2}BD \cdot AC.$$ ●

1. Cum de aflat aria triunghiului, dacă se știe latura lui și înălțimea, dusă la ea?
2. Cum de aflat aria triunghiului dreptunghic, dacă sunt cunoscute catetele lui?

EXERCIȚII

721.° Latura triunghiului este egală cu 12 cm, iar înălțimea, dusă la ea, — cu 2,5 cm. Aflați aria triunghiului.

722.° Aflați aria triunghiului dreptunghic, ale cărui catete sunt egale cu 10 cm și 18 cm.

723.° Care din triunghiurile, reprezentate în figura 222, sunt echivalente?

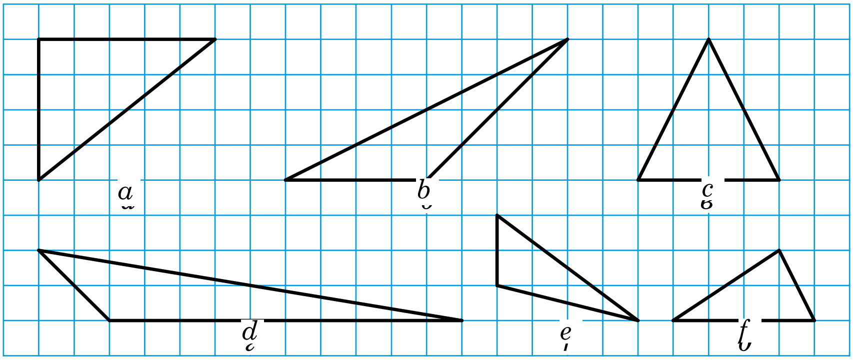


Fig. 222

724.° Calculați ariile triunghiurilor, reprezentate în figura 223, dacă lungimea laturii unei pătrățele este egală cu o unitate de lungime.

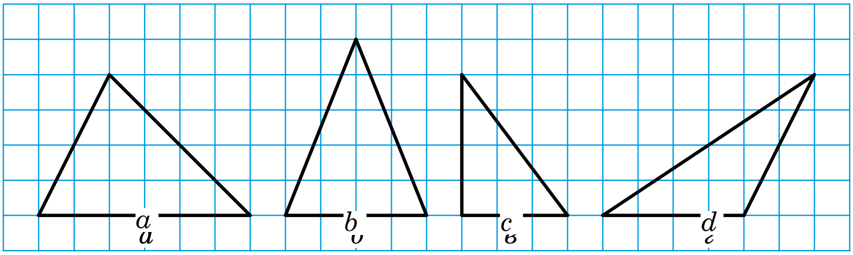


Fig. 223

725.° Aria triunghiului este egală cu 48 cm². Aflați latura triunghiului, dacă înălțimea, dusă la această latură, este egală cu 8 cm.

726.° Se știu două laturi ale triunghiului: 24 cm și 9 cm. Înălțimea, dusă la latura mai mare din laturile cunoscute, este egală cu 6 cm. Aflați înălțimea triunghiului, dusă la cea mai mică din laturile cunoscute.

727.° Completați tabelul, unde *a* — lungimea laturii triunghiului, *h* — înălțimea, dusă la ea, *S* — aria triunghiului:

a	2,4 cm	9 dm	
h	4 cm		5 m
S		81 dm²	65 m²

728.° Aflați aria triunghiului isoscel, a cărui bază este egală cu 24 cm, iar latura laterală — cu 13 cm.

729.° Latura laterală a triunghiului isoscel este egală cu 61 cm, iar înălțimea, dusă la bază, — cu 60 cm. Aflați aria triunghiului.

730.° Una din catetele triunghiului dreptunghic este egală cu 12 cm, iar mediana, dusă la ipotenuză, — cu 18,5 cm. Aflați aria triunghiului.

731.• Aflați aria triunghiului dreptunghic, dacă înălțimea, dusă la ipotenuză, o împarte în segmentele cu lungimile de 3 cm și 27 cm.

732.• Înălțimea triunghiului dreptunghic, dusă la ipotenuză, este egală cu 8 cm, iar proiecția unei din catete pe ipotenuză, — cu 6 cm. Aflați aria triunghiului.

733.• Înălțimea BD a triunghiului ABC împarte latura AC în segmentele AD și CD. Aflați aria triunghiului ABC, dacă $BC = \sqrt{37}$ см, $\angle A = 30°$, $CD = 5$ cm.

734.• Înălțimea AM a triunghiului ABC împarte latura lui BC în segemntele BM și MC. Aflați aria triunghiului ABC, dacă $AB = 10\sqrt{2}$ cm, $AC = 26$ cm, $\angle B = 45°$.

735.• Aflați aria triunghiului isoscel, a cărui latură laterală este egală b, iar unghiul de la bază este egal cu α.

736.• Înălțimea triunghiului isoscel, dusă la bază, este egală cu h, iar unghiul de la vârf este egal cu β. Aflați aria triunghiului.

737.• Aflați aria triunghiului echilateral, a cărui latură este egală cu a.

738.• Aflați aria triunghiului dreptunghic isoscel a cărui ipotenuză este egală cu c.

739.• Aflați înălțimea triunghiului dreptunghic, dusă la ipotenuză, dacă catetele lui sunt egale cu 10 cm și 24 cm.

740.• Punctul de tangență al circumferinței, înscrise în triunghiul dreptunghic, împarte ipotenuza lui în segmentele cu lungimile de 8 cm și 12 cm. Aflați aria triunghiului.

741.• Aflați aria triunghiului isoscel, dacă perimetrul lui este egal cu 54 cm, iar înălțimea, dusă la bază cu 9 cm.

742.• Baza triunghiului isoscel se raportă la înălțimea lui, coborâtă pe bază, ca 8 : 3, latura laterală a triunghiului este egală cu 40 cm. Aflați aria triunghiului.

743.• Demonstrați că aria patrulaterului convex, ale cărui diagonale sunt perpendiculare, este egală cu jumătate din produsul lor.

744.• Aria rombului este egală cu 120 cm^2, iar diagonalele lui se raportă ca 5 : 12. Aflați perimetrul rombului.

745.• Aflați aria rombului, a cărui latură este egală cu 25 cm, iar suma diagonalelor — cu 62 cm.

746.• Aflați aria rombului, a cărui latură este egală cu 39 cm, iar diferența diagonalelor — cu 42 cm.

747.• Se dă dreapta l și segmentul paralel cu ea AB. Demonstrați că toate triunghiurile AXB, unde X — punct arbitrar al dreptei l, sunt echivalente.

748.• Demonstrați că dacă înălțimea unui triunghi este egală cu înălțimea altui triunghi, atunci ariile acestor triunghiuri se raportă ca laturile lor, la care au fost duse aceste înălțimi.

749.• Demonstrați că mediana triunghiului îl împarte în două triunghiuri echivalente.

750.• Pe latura AC a triunghiului ABC este notat punctul M astfel, că $\frac{AM}{MC}=\frac{m}{n}$. Demonstrați, că $\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}}=\frac{m}{n}$.

751.• Într-un triunghi au dus toate trei mediane. Demonstrați că ele împart triunghiul în șase triunghiuri echivalente.

752.• Prin vârful B al triunghiului ABC duceți două drepte în așa fel, ca ele să împartă triunghiul dat în trei triunghiuri echivalente.

753.• Prin vârful paralelogramului duceți dreptele așa, ca ele să împartă paralelogramul dat: 1) în patru poligoane echivalente; 2) cinci poligoane echivalente.

754.• Prin vârful rombului duceți două drepte așa, ca ele să împartă rombul dat în trei poligoane echivalente.

755.• Construiți triunghiul, echivalent cu paralelogramul dat.

756.• Într-un triunghi sunt duse trei înălțimi. Demonstrați că la latura cea mai mare este dusă înălțimea cea mai mică.

757.•• Pe latura AC a triunghiului ABC este notat punctul M astfel, că $\frac{AM}{MC} = \frac{m}{n}$. Fie X — un punct interior arbitrar al segmentului BM. Demonstrați că $\frac{S_{ABX}}{S_{CBX}} = \frac{m}{n}$.

758.•• Punctul de tangență al circumferinței, înscrise în triunghiul dreptunghic, împarte ipotenuza lui în segmente, din care unul este cu 14 cm mai mare decât celălalt. Aflați aria triunghiului, dacă raza circumferinței înscrise este egală cu 4 cm.

759.•• În triunghiul dreptunghic ABC este dusă înălțimea AB la ipotenuza CM. Aria triunghiului ACM este egală cu 6 cm^2, iar aria triunghiului BCM — cu 54 cm^2. Aflați laturile triunghiului ABC.

760.•• Aflați aria triunghiului dreptunghic, dacă bisectoarea unghiului ascuțit a lui împarte cateta opusă în segmentele cu lungimile de 21 cm și 35 cm.

761.•• Aflați aria triunghiului dreptunghic, dacă bisectoarea unghiului drept împarte ipotenuza în segmentele cu lungimile de 2 cm și 6 cm.

762.•• Centrul circumferinței, înscrise în triunghiul isoscel, împarte înălțimea lui, dusă la bază, în segmente, ale căror lungimi sunt egale cu 34 cm și 16 cm. Aflați aria acestui triunghi.

763.•• Într-un triunghi isoscel este înscrisă o circumferință. Punctul de tangență împarte latura laterală a triunghiului în raportul 9 : 8, socotind de la vârful triunghiului isoscel. Aflați aria triunghiului, dacă raza circumferinței înscrise este egală cu 16 cm.

764.* Pe prelungirile laturilor AB, BC, AC ale triunghiului echilateral ABC după punctele B, C și A respectiv, sunt notate punctele D, E și F așa, că $BD = CE = AF = 2AB$. Aflați aria triunghiului DEF, dacă aria triunghiului ABC este egală cu 1 cm^2.

765.* În triunghiul ABC este notat punctul M așa, că ariile triunghiurilor AMB, BMC și AMC sunt egale. Demonstrați că punctul M este punctul de intersecție al medianelor triunghiului ABC.

766.* Pe latura AC a triunghiului ABC este notat punctul D. Duceți prin acest punct o dreaptă astfel, ca ea să împartă triunghiul dat în două poligoane echivalente.

767.* Demonstrați că suma distanțelor de la un punct arbitrar al triunghiului echilateral până la laturile lui este o mărime constantă pentru triunghiul dat.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

768. În triunghiul isoscel ABC ($AB = BC$) bisectoarea unghiului A intersectează latura BC în punctul M. Aflați unghiurile triunghiului ABC, dacă $\angle AMB = 117°$.

769. Într-un trapez isoscel bazele sunt egale cu 18 cm și 12 cm. Latura laterală face cu baza unghiul de 30°. Aflați diagonala trapezului.

770. Centrul circumferinței, înscrise într-un trapez isoscel se află de la extremitățile laturii laterale a lui la distanțele de 12 cm și 16 cm. Aflați perimetrul trapezului.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, PLĂSMUIȚI

771. Pe un plan sunt date n puncte ($n > 3$), fiecare trei din ele nu aparțin aceleiași drepte. Demonstrați că există un triunghi cu vârfurile în aceste puncte, care nu conține nici unul din restul ($n - 3$) punctelor.

23. Aria trapezului

Teorema 23.1. ***Aria trapezului este egală cu produsul semisumei bazelor lui prin înălțime.***

Demonstrație. În figura 224 este reprezentat trapezul $ABCD$ ($AD \parallel BC$), a cărui arie este egală cu S. Segmentul CN — înălțimea acestui trapez. Să demonstrăm că $S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CN$.

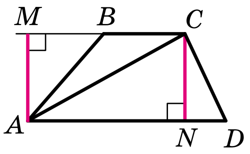


Fig. 224

Ducem diagonala AC și înălțimea AM a trapezului. Segmentele AM și CN sunt înălțimile triunghiurilor ABC și ACD corespunzător.

Avem:

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}BC \cdot AM + \frac{1}{2}AD \cdot CN =$$
$$= \frac{1}{2}BC \cdot CN + \frac{1}{2}AD \cdot CN = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CN. \blacktriangle$$

Dacă vom nota lungimile bazelor trapezului și a înălțimii lui respectiv cu literele a, b și h, atunci aria trapezului S se calculează cu formula

$$\boxed{S = \frac{a+b}{2} \cdot h}$$

Consecință. ***Aria trapezului este egală cu produsul liniei medii a lui cu înălțimea.***

1. Formulați teorema despre aria trapezului.
2. Cu ce formulă se calculează aria trapezului?

EXERCIȚII

772.° Aflați aria trapezului, ale cărui baze sunt egale cu 7 cm și 12 cm, iar înălțimea — cu 6 cm.

773.° Aflați aria trapezului, linia medie a căruia este egală cu 18 cm, iar înălțimea — cu 9 cm.

774.° Aria trapezului este egală cu 96 cm², iar înălțimea lui — cu 3 cm. Aflați bazele trapezului, dacă ele se raportă ca 3 : 5.

775.° Aria trapezului este egală cu 45 cm², una din baze — cu 8 cm, iar înălțimea — cu 6 cm. Aflați a doua bază a trapezului.

776.° Aflați aria trapezului isoscel, ale cărui baze sunt egale cu 14 cm și 16 cm, iar diagonala — cu 17 cm.

777.° Cu ce este egală aria trapezului dreptunghic, ale cărui baze sunt egale cu 9 cm și 16 cm, iar latura laterală mai mare cu — $\sqrt{65}$ cm?

778.° Aflați aria trapezului isoscel, ale cărui baze sunt egale cu 14 cm și 32 cm, iar latura laterală — cu 15 cm.

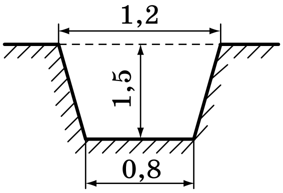


Fig. 225

779.° În figura 225 este reprezentată secțiunea transversală a tranșeei, care are forma trapezului. Calculați aria acestei secțiuni transversale (dimensiunile sunt date în metri).

780.° Aflați aria trapezului, reprezentat în figura 226 (dimensiunile sunt date în centimetri).

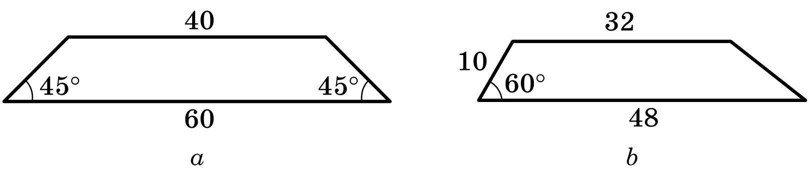


Fig. 226

781.° Aflați aria trapezului, reprezentat în figura 227 (dimensiunile sunt date în centimetri).

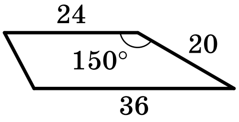


Fig. 227

782.• În triunghiul isoscel diagonala este bisectoarea unghiului ascuțit și împarte linia medie a trapezului în segmente cu lungimile egale cu 6 cm și 12 cm. Aflați aria trapezului.

783.• Bazele trapezului dreptunghic sunt egale cu 9 cm și 17 cm, iar diagonala este bisectoarea unghiului obtuz al lui. Calculați aria trapezului.

784.• Punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor ascuțite, alăturate bazei trapezului, aparține celei de-a doua baze. Aflați aria trapezului, dacă laturile laterale ale lui sunt egale cu 17 cm și 25 cm, iar înălțimea — cu 15 cm.

785.• Punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor obtuze, alăturate bazei trapezului, aparține celei de-a doua baze. Aflați aria trapezului, dacă laturile laterale ale lui sunt egale cu 10 cm și 17 cm, iar înălțimea — cu 8 cm.

786.• Latura laterală a trapezului isoscel este egală cu $20\sqrt{3}$ cm și face cu baza unghiul de 60°. Aflați aria trapezului, dacă în el poate fi înscrisă o circumferință.

787.• Bazele trapezului isoscel sunt egale cu 32 cm și 50 cm. Cu ce este egală aria acestui trapez, dacă în el poate fi înscrisă o circumferință?

788.• Latura laterală mai mică a unui trapez dreptunghic este egală cu 8 cm, iar unghiul ascuțit — cu 45°. Aflați aria trapezului, dacă în el poate fi înscrisă o circumferință.

789.• Latura laterală mai mare a trapezului dreptunghic este egală cu 28 cm, iar unghiul ascuțit — cu 30°. Aflați aria trapezului, dacă în el se poate înscrie o circumferință.

790.• Demonstrați că dreapta care trece prin mijlocul liniei medii a trapezului și intersectează bazele lui, împarte trapezul dat în două poligoane echivalente.

791.• Pentru trapezul dat construiți:
1) un paralelogram, diferit de dreptunghi, echivalent cu acest trapez;
2) un dreptunghi, echivalent lui.

792.• Construiți triunghiul, echivalent trapezului dat.

793.•• Aflați aria trapezului isoscel, ale cărui baze sunt egale cu 24 cm și 40 cm, iar diagonala este perpendiculară pe latura laterală.

794.•• Diagonala trapezului isoscel este perpendiculară pe latura laterală, care este egală cu 15 cm. Aflați aria trapezului, dacă raza circumferinței, circumscrise lui, este egală cu 12,5 cm.

795.•• Diagonalele unui trapez sunt perpendiculare, una din ele este egală cu 48 cm, iar linia medie a trapezului — cu 25 cm. Aflați aria trapezului.

796.•• Diagonala trapezului isoscel este bisectoarea unghiului ascuțit al lui și este perpendiculară la latura laterală. Aflați aria trapezului, dacă baza mai mică a lui este egală cu a.

797.•• În trapezul isoscel este înscrisă o circumferință. Una din laturile laterale ale lui este împărțită de către punctul de tangență în segmente cu lungimile de 4 cm și 9 cm. Aflați aria trapezului.

798.•• În trapezul dreptunghic este înscrisă circumferința de raza 12 cm. Latura laterală mai mare este împărțită de punctul de tangență în două segmente, cel mai mare din ele este egal cu 16 cm. Aflați aria trapezului.

799.•• Diagonala trapezului isoscel împarte înălțimea, dusă din vârful unghiului obtuz, în segmente cu lungimile de 15 cm și 12 cm, iar latura laterală a trapezului este egală cu baza mai mică. Aflați aria trapezului.

800.•• Diagonala mai mare a trapezului dreptunghic împarte înălțimea, dusă din vârful unghiului obtuz, în segmentele cu lungimile de 15 cm și 9 cm. Latura laterală mai mare a trapezului este egală cu baza mai mică a lui. Aflați aria trapezului.

801.•• În trapezul $ABCD$ se știe, că $BC \parallel AD$, punctul M — mijlocul laturii AB. Aflați aria triunghiului CMD, dacă aria trapezului dat este egală cu S.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

802. Perimetrul paralelogramului $ABCD$ este egal cu 50 cm, iar perimetrul triunghiului ABD — cu 40 cm. Aflați laturile paralelogramului, dacă $AD = BD$.

803. Circumferința, construită pe diagonala AC a rombului $ABCD$ ca pe diametru, trece prin mijlocul laturii AB. Aflați unghiurile rombului.

804. Pe laturile AB, BC și AC ale triunghiului ABC au fost notate respectiv punctele M, K și D astfel, ca $MK \parallel AC$, $DK \parallel AB$, $BK : KC = 3 : 2$. Aflați perimetrul patrulaterului $AMKD$, dacă $AC = 15$ cm, $AB = 25$ cm.

OBSERVAȚI, DESENAȘI, CONSTRUIȚI, PLĂNUIȚI

805. Oare poate fi acoperit pătratul cu latura 1,5 cm cu trei pătrate, fiecare având latura de 1 cm?

POLIGOANE ECHICOMPUSE ȘI ECHIVALENTE

Dacă un oarecare poligon poate fi tăiat în părți și din ele de compus alt poligon, atunci astfel de poligoane se numesc **echicompuse**.

De exemplu, dacă dreptunghiul de-l tăiat în lungul diagonalei lui (fig. 228), atunci obținem două triunghiuri dreptunghice egale, din care se poate compune un triunghi isoscel (fig. 229). Figurile din desenele 228 și 229 sunt echicompuse.

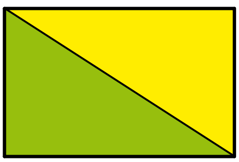


Fig. 228

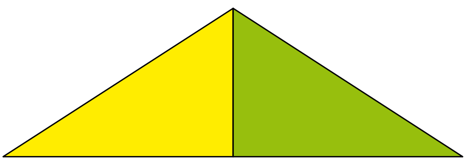


Fig. 229

Evident că figurile echicompuse sunt echivalente. Acest fapt se folosește în procesul demonstrării teoremelor și a rezolvării problemelor. De exemplu, demonstrând teorema 21.1, noi de fapt am tăiat paralelogramul în triunghiul *ABM* și trapezul *MBCD*, din care am compus dreptunghiul *MBCN* (vezi fig. 215).

Dacă am tăia triunghiul în lungul liniei medii, atunci din triunghiul și trapezul obținute poate fi compus un paralelogram (fig. 230).

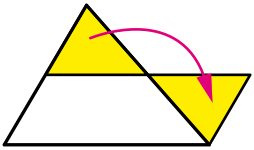


Fig. 230

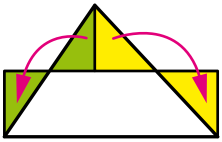


Fig. 231

E ușor de stabilit (demonstrați de sine stătător), că o astfel de tăiere a triunghiului aduce la încă o demonstrație a teoremei despre aria triunghiului (teorema 22.1). aceluiași scop servește tăierea triunghiului în părți, din care se poate compune dreptunghiul (fig. 231).

Euclid în cartea sa renumită „Începuturile” formulează teorema lui Pitagora astfel:

„Aria pătratului, construit pe ipotenuză, este egală cu suma ariilor pătratelor, construite pe catete”.

Dacă se va arăta că se pot tăia pătratele, construite pe catete, în părți și compune din aceste părți pătratul cu latura, care este egală cu ipotenuza, atunci astfel va fi demonstrată teorema lui Pitagora.

În figura 232 este arătat unul din procedeele posibile a unei astfel de tăieri. Pătratele, construite pe catete, sunt tăiate în părți, ale căror arii sunt egale cu S_1, S_2, S_3, S_4. Din aceste părți este compus pătratul, construit pe ipotenuză.

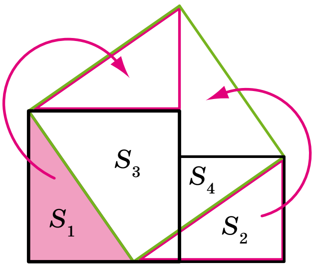


Fig. 232

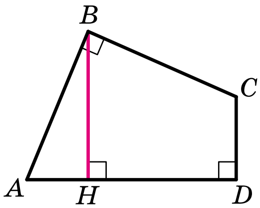


Fig. 233

Din definiția ariei poligonului reiese, că poligoanele echicompuse sunt echivalente. Dar deloc neevidentă este așa o teoremă.

Teoremă. ***Oricare două poligoane echivalente sunt echicompuse.***

Pentru prima dată acest fapt l-a demonstrat în anul 1832 matematicianul ungar Farcaș Bolyai. Puțin mai târziu matematicianul german Paul Ghervin a găsit altă demonstrație. De aceea această teoremă se numește teorema lui Bolyai-Ghervin.

EXERCIȚII

1. Demonstrați, că trapezul este echicompus cu paralelogramul, a cărui bază este egală cu linia medie a trapezului, iar înălțimea — cu înălțimea trapezului.

2. Demonstrați că aria trapezului este egală cu produsul dintre latura laterală și perpendiculara, coborâtă pe dreapta, căreia îi aparține această latură, din mijlocul celeilalte laturi laterale.

3. În patrulaterul $ABCD$ unghiurile ABC și ADC sunt drepte, iar laturile AB și BC egale (fig. 233). Se știe că $BH \perp AD$ și $BH = 1$. Aflați aria patrulaterului $ABCD$.

TEOREMA LUI CEVA

Pe laturile BC, CA și AB ale triunghiului ABC să notăm punctele arbitrare A_1, B_1, C_1 (рис. 234). Fiecare din segmentele AA_1, BB_1, CC_1 este numit **cevianul** triunghiului ABC. Așa o denumire este legată de numele inginerului și matematicianului italian Giovanni Ceva (1648 — 1734), care a descoperit o teoremă minunată..

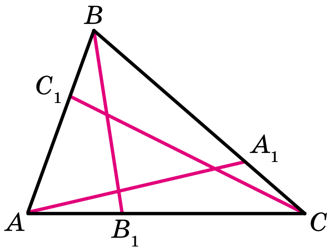


Fig. 234

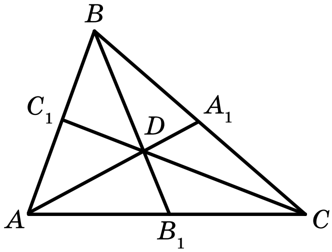


Fig. 235

Dacă punctele A_1, B_1 și C_1 sunt luate în așa mod, că cevianii sunt bisectoare sau mediane, sau înălțimi ale triunghiului ascuțitunghic, atunci acești ceviani se intersectează într-un singur punct.

Dacă trei drepte se intersectează într-un punct atunci ele se numesc **concurente**.

Teorema lui Ceva dă criteriul general al intersecției a trei ceviani arbitrari.

Teoremă. ***Pentru ca cevianii AA_1, BB_1 și CC_1 ai triunghiului ABC să se intersecteze într-un singur punct, este necesar și suficient, ca să aibă loc egalitatea***

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (*)$$

Demonstrație. Să demonstrăm mai întâi condiția necesară a intersecției: dacă cevianii AA_1, BB_1 și CC_1 se intersecteză într-un singur punct, atunci are loc egalitatea (*).

Folosindu-se de rezultatul problemei-cheie 757, se poate scrie (fig. 235):

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}},\quad \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}},\quad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{BDC}}{S_{ABD}}.$$

Înmulțind egalitățile scrise, obținem egalitatea (*).

Să demonstrăm acum condiția suficientă a intersecției: dacă se îndeplinește (*), atunci cevianii AA_1, BB_1 și CC_1 se intersectează într-un singur punct.

Fie că cevianii AA_1 și BB_1 se intersectează în punctul D, iar cevianul care trece prin vârful C și și punctul D, intersectează latura AB într-un oarecare punct C_2. Din cele demonstrate mai sus se poate scrie:

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Confruntând această egalitate cu egalitatea (*) ajungem la concluzia, că $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_2}{C_2B}$, adică punctele C_1 și C_2 împart segmentul AB în unul și același raport, și, deci aceste puncte coincid. Așadar, dreapta CD intersectează latura AB în punctul C_1. ▲

EXERCIȚII

1. Demonstrați, că:
1) medianele triunghiului sunt concurente;
2) bisectoarele triunghiului sunt concurente;
3) înălțimile triunghiului ascuțitunghic sunt concurente.

2. Fie A_1, B_1, C_1 — punctele de tangență ale circumferinței inscrise la, laturile BC, AC, AB respectiv, ale triunghiului ABC. Demonstrați că cevianii AA_1, BB_1 și CC_1 sunt concurenți.

3. Dreptele AP, BP și CP intersectează laturile triunghiului ABC în punctele A_1, B_1 și C_1 corespunzător. Demonstrați, că dreptele, care trec prin mijlocurile laturilor BC, CA și AB și sunt paralele cu dreptele AP, BP și CP corespunzător, sunt concurente.

Indicație. Folosiți teorema lui Ceva la triunghiul, ale cărui vârfuri sunt mijlocurile laturilor triunghiului ABC.

ÎNSĂRCINAREA NR. 4 „VERIFICAȚI-VĂ” ÎN FORMĂ DE TEST

1. Câte laturi are poligonul convex cu n laturi, dacă suma unghiurilor lui este egală cu 1260°?

A) 7; B) 9; C) 11; D) 13.

2. În poligonul convex cu n laturi sunt 14 diagonale. Cu ce este egală suma unghiurilor lui?

A) 1000°; B) 800°; C) 900°; D) 720°.

3. Cum se va modifica aria dreptunghiului, dacă vom micșora de 10 ori fiecare latură a lui?

A) Se va micșora de 100 de ori;
B) se va micșora de 20 de ori;
C) se va micșora de 10 ori;
D) se va micșora de 1000 de ori.

4. Aria paralelogramului este egală cu 80 cm^2, iar o latură a lui — cu 16 cm. Ce lungime poate avea latura alăturată a paralelogramului?

A) 2 cm; B) 3 cm; C) 4 cm; D) 6 cm.

5. Pe latura BC a paralelogramului $ABCD$ este însemnat punctul M astfel, că $BM : MC = 1 : 3$. Cu ce este egală aria triunghiului ABM, dacă aria paralelogramului este egală cu S?

A) $\frac{S}{8}$; B) $\frac{S}{4}$; C) $\frac{S}{16}$; D) $\frac{S}{2}$.

6. În figura 236 aria fiecărui pătrat mic este egală cu 4 cm^2. Cu ce este egală aria pătratului mare?

A) 16 cm^2; B) 20 cm^2; C) 32 cm^2; D) 40 cm^2.

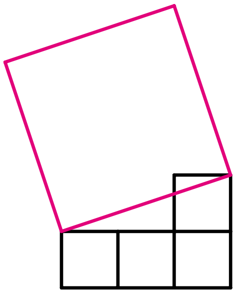


Fig. 236

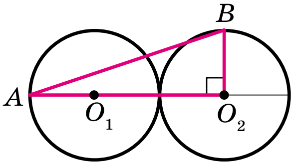


Fig. 237

7. Într-o circumferință de raza 1 cm este înscris un pătrat și un triunghi echilateral. Cu ce este egal raportul ariei triunghiului dat către aria pătratului?

A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; B) $3\sqrt{3}$; C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; D) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

8. Punctele O_1 și O_2 — centrele circumferințelor egale, care au numai un singur punct comun (fig. 237), $BO_2 \perp O_1O_2$, $AB = 10$ cm. Cu ce este egală aria triunghiului ABO_2?

A) 10 cm²; B) 15 cm²; C) 18 cm²; D) 20 cm².

9. Se dau două puncte A și B. Locul geometric al astfel de puncte X, că ariile triunghiurilor AXB sunt egale cu numărul dat S, este:
A) circumferința cu diametru AB;
B) mediatoarea segmentului AB;
C) dreapta, paralelă cu AB;
D) două drepte paralele cu AB.

10. Diagonalele trapezului isoscel sunt perpendiculare și împart linia lui medie în trei părți egale. Cu ce este egală aria trapezului, dacă baza mai mare a lui este egală cu 12 cm?

A) 50 cm²; B) 64 cm²; C) 81 cm²; D) 144 cm².

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 4

Suma unghiurilor poligonului convex cu *n* laturi.

Suma unghiurilor poligonului convex cu n laturi este egală cu $180°(n-2)$.

Circumferința, circumscrisă poligonului.

Circumferința se numește circumscrisă poligonului, dacă ea trece prin toate vârfurile lui.

Circumferința înscrisă în poligon.

Circumferința se numește înscrisă în poligon, dacă ea este tangentă la toate laturile lui.

Aria poligonului

Arie a poligonului se numește mărimea pozitivă, care are următoarele proprietăți:
1) poligoanele egale au arii egale;
2) dacă poligonul este compus din câteva poligoane, atunci aria lui este egală cu suma ariilor a acestor poligoane;

3) ca unitate de măsură a ariei se ia pătratul unitar, adică pătratul cu latura, care este egală cu unitatea de măsură a lungimii.

Aria dreptunghiului

Aria dreptunghiului este egală cu produsul laturilor alăturate ale lui.

Poligoane echivalente

Poligoanele care au arii egale se numesc echivalente.

Aria paralelogramului

Aria paralelogramului este egală cu produsul laturii lui prin înălțimea, dusă la această latură.

Aria triunghiului

Aria triunghiului este egală cu semiprodusul bazei prin înălțimea, dusă la ea.

Aria triunghiului dreptunghic

Aria triunghiului dreptunghic este egală cu semiprodusul catetelor lui.

Aria trapezului

- Aria trapezului este egală cu produsul semisumei bazelor lui prin înălțime.
- Aria trapezului este egală cu produsul liniei medii a lui prin înălțime.

EXERCIȚII PENTRU REPETAREA CURSULUI DE GEOMETRIE CLASA A 8-A

1. Patrulatere

806. Aflați perimetrul paralelogramului, dacă bisectoarea unuia din laturile lui împarte latura paralelogramului în segmente de 9 cm și 14 cm.

807. Bisectoarea unghiului BAD a paralelogramului $ABCD$ intersectează latura BC în punctul M astfel, că $BM : MC = 5 : 4$. Aflați laturile paralelogramului, dacă perimetrul triunghiului BOC este cu 8 cm mai mare decât perimetrul triunghiului COD, unde O — punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului.

808. În paralelogramul $ABCD$ se știe că $\angle ADB = \angle A + \angle BDC$. Aflați unghiul ADB.

809. În paralelogramul $ABCD$ se știe că $AB = a$, $BC = b$, $a > b$. Circumferințele, înscrise în triunghiurile ABD și CBD sunt tangente la diagonala BD în punctele M și K respectiv. Aflați segmentul MK.

810. Câte paralelograme diferite se pot compune din două triunghiuri egale, dacă ele: 1) sunt scalene; 2) isoscele; 3) echilaterale?

811. Oare este adevărată afirmația:

1) dacă diagonalele patrulaterului sunt egale, atunci acest patrulater este paralelogram;
2) dacă două laturi ale patrulaterului sunt paralele și punctul de intersecție al diagonalelor este egal depărat de aceste laturi, atunci acest patrulater este paralelogram;
3) dacă două laturi ale patrulaterului sunt paralele, iar altele două — egale, atunci acest patrulater este paralelogram;
4) dacă bisectoarele a două unghiuri opuse ale patrulaterului sunt perpendiculare la bisectoarea celui de-al treilea unghi al lui, atunci acest patrulater este paralelogram;
5) dacă diagonala patrulaterului îl împarte în două triunghiuri egale, atunci acest patrulater este paralelogram;
6) dacă fiecare diagonală a patrulaterului îl împarte în două triunghiuri egale, atunci acest patrulater este paralelogram;
7) dacă fiecare două vârfuri opuse ale patrulaterului sunt egale depărtate de la diagonala, care unește alte două vârfuri, atunci acest patrulater este paralelogram?

812. Oare este justă afirmația:

1) dacă două laturi ale patrulaterului sunt paralele, iar una din diagonale împarte patrulaterul în două triunghiuri egale, atunci acest patrulater este paralelogram;

2) dacă două laturi ale patrulaterului sunt paralele, iar punctul de intersecție al diagonalelor împarte una din ele în jumătate, atunci acest patrulater este paralelogram;
3) dacă două laturi opuse ale patrulaterului sunt egale și diagonalele lui sunt egale, atunci acest patrulater este paralelogram?

813. Perimetrul rombului este egal cu 8 cm, iar înălțimea lui — cu 1 cm. Aflați unghiurile rombului.

814. Unghiul de la vârful B al rombului $ABCD$ este egal cu 40°, punctele M și K — bazele perpendicularelor, coborâte din vârful A pe laturile BC și CD respectiv. Aflați unghiurile triunghiului AMK.

815. Perpendiculara, coborâtă din vârful B al dreptunghiului $ABCD$ la diagonala AC, împarte unghiul ABC în două unghiuri, ale căror mărimi se raportă ca 1 : 3. Aflați unghiul dintre perpendiculara dusă si diagonala BD.

816. Mediatoarea diagonalei dreptunghiului face cu latura mai mare a lui unghiul de 60°. Segmentul acestei drepte, care aparține dreptunghiului, este egal cu 12 cm. Aflați latura mai mare a dreptunghiului.

817. Pe diagonala AC a rombului $ABCD$ sunt notate punctele M și K în așa fel, că $AM = CK$. Demonstrați, că $\angle ABM = \angle CBK$.

818. Perimetrul rombului este cu 42 cm mai mare, decât latura rombului. Aflați perimetrul rombului.

819. Oare este adevărată afirmația:
1) dacă diagonalele patrulaterului sunt egale, atunci acest patrulater este dreptunghi;
2) dacă diagonalele patrulaterului sunt egale și perpendiculare, atunci acest patrulater este pătrat;
3) dacă diagonalele patrulaterului sunt perpendiculare și sunt împărțite în jumătate de către punctul lor de intersecție, atunci acest patrulater este pătrat;
4) dacă diagonalele patrulaterului sunt egale, perpendiculare și sunt împărțite de punctul de intersecție în jumătate, atunci acest patrulater este pătrat;
5) dacă trei laturi ale patrulaterului sunt egale, iar diagonala este bisectoarea unuia din unghiurile lui, atunci acest patrulater este romb?

În cazul răspunsului afirmativ argumentați-l, în cazul negării — desenați patrulaterul, care servește în calitate de contraexemplu.

820. Pe laturile AB, BC și AC ale triunghiului ABC sunt notate punctele D, F și E respectiv în așa mod, că $BD = BF = DE = EF$. Demonstrați că punctul F aparține bisectoarei unghiului BDE.

821. Distanța de la mijlocul coardei AC a circumferinței până la diametrul AB este egală cu 4 cm. Aflați coarda BC, dacă $\angle BAC = 30°$.

822. Construiți paralelogramul după vârful lui și mijlocurile laturilor, cărora acest vârf nu le aparține.

823. Latura laterală *AB* și baza mai mică *BC* ale trapezului *ABCD* sunt respectiv egale cu 16 cm și 15 cm. Care din segmente intersectează bisectoarea unghiului *BAD* — baza *BC* sau latura laterală *CD*?

824. Diagonala trapezului isoscel este egală cu baza mai mare si face cu ea unghiul de 40°. Aflați unghiurile trapezului.

825. Unghiul făcut de două secante, care trec printr-un punct din exteriorul circumferinței, este egal cu 35°. Măsura în grade a arcului mai mare al circumferinței, care se conține între laturile acestui unghi, este egală cu 100°. Aflați măsura în grade a arcului mai mic al circumferinței, care se conține între laturile unghiului dat.

826. Demonstrați că, dacă vârful unghiului este situat în exteriorul circumferinței, iar unghiul se sprijină pe diametrul circumferinței, atunci acest unghi este ascuțit.

827. Demonstrați că, dacă vârful unghiului se află în interiorul circumferinței, iar unghiul se sprijină pe diametrul circumferinței, atunci acest unghi este sau obtuz, sau desfășurat.

828. Diagonalele patrulaterului *ABCD*, înscris în circumferință, sunt perpendiculare, $\angle ACB = 10°$, $\angle BDC = 70°$. Aflați unghiurile acestui patrulater.

2. Asemănarea triunghiurilor

829. Două drepte paralele intersectează una din laturile unghiului cu vârful *M* în punctele *A* și *C*, iar pe a doua — respectiv în punctele *B* și *D*. Aflați segmentele *MA* și *MC*, dacă $MB : BD = 2 : 3$ și $MA + MC = 14$ cm.

830. Aflați raportul bazelor trapezului, dacă diagonalele lui împart linia medie a trapezului în trei părți egale.

831. Pe mediana *BD* a triunghiului *ABC* este notat punctul *M* astfel, că $BM : MD = 3 : 2$. Dreapta *AM* intersectează latura *BC* în punctul *E*. În care raport punctul *E* împarte latura *BC*, socotind de la vârful *B*?

832. Bisectoarea unghiului *A* a paralelogramului *ABCD* intersectează diagonala *BD* și latura *BC* în punctele *E* și *F* corespunzător, $BE : ED = 2 : 7$. Aflați raportul $BF : FC$.

833. Medianele *AD* și *BM* ale triunghiului *ABC* se intersectează în punctul *O*. Prin punctul *O* este dusă o dreaptă paralelă cu latura *AC* și care intersectează latura *BC* în punctul *K*. Aflați segmentele *BD*, *DK* și *KC*, dacă $BC = 18$ cm.

834. Bisectoarea *BD* a triunghiului *ABC* împarte latura *AC* în segmentele *AD* și *DC*, ale căror lungimi se raportă ca 3 : 5. Aflați laturile *AB* și *BC*, dacă suma lor este egală cu 56 cm.

835. Raza circumferinței, înscrise în triunghiul isoscel constituie $\frac{2}{9}$ din înălțimea, dusă la baza triunghiului. Aflați laturile triunghiului, dacă perimetrul lui este egal cu 72 cm.

836. Laturile triunghiului sunt egale cu 2,5 cm, 4,5 cm și 6 cm. Aflați laturile triunghiului asemenea cu el, dacă latura mai mare a triunghiului căutat este egală cu 24 cm.

837. În triunghiul ABC este înscris rombul $ADEF$ astfel, că unghiul A la ei este comun, iar vârful E aparține laturii BC. Aflați latura rombului, dacă $AB = a$, $AC = b$.

838. Perimetrul paralelogramului este egal cu 72 cm, iar înălțimile lui se raportă ca 5:7. Aflați laturile paralelogramului.

839. Sunt date trei puncte, care nu-s situate pe o singură dreaptă. Duceți o dreaptă, egal depărtată (echidistantă) de aceste puncte. Câte soluții are problema?

840. Dreapta MB intersectează circumferința în punctele A și B (punctul A este situat între punctele M și B), iar dreapta – în punctele C și D (punctul C se află între punctele M și D). Aflați segmentul AB, dacă $AB = MC$, $MA = 20$ cm, $CD = 11$ cm.

841. Dreapta AB este tangentă la circumferință în punctul B, iar dreapta AC intersectează circumferința în punctele C și D (punctul D se află între punctele A și C). Aflați segmentul CD, dacă $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm.

842. Coardele AB și CD ale circumferinței se intersectează în punctul M, $CM = 4$ cm, $DM = 6$ cm, segmentul AM este cu 2 cm mai lung, decât segmentul BM. Aflați coarda AB.

843. Pe o latură a unghiului cu vârful în punctul A au notat punctele B și C, iar pe alta punctele D și E, totodată $AB = 10$ cm, $AC = 18$ cm, $AD : AE = 5 : 9$. Aflați segmentul CE, dacă $BD = 20$ cm.

3. Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice

844. Mediana triunghiului dreptunghic, dusă la ipotenuză este egală cu 10 cm, iar distanța de la mijlocul ipotenuzei până la baza înălțimii triunghiului, dusă la ipotenuză, este egală cu 6 cm. Aflați perimetrul acestui triunghi.

845. Latura laterală a triunghiului isoscel este egală cu 15 cm, iar înălțimea, dusă la bază este cu 6 cm mai mică decât baza. Aflați baza triunghiului.

846. Din punctul K, situat în afara dreptei, sunt duse la această dreaptă oblicele KA și KB, care fac cu ea unghiurile de 45° și 30° corespunzător. Aflați proiecția oblicii KB pe dreapta a, dacă $KA = 8\sqrt{6}$ cm.

847. Perpendiculara, dusă din punctul de intersecție al diagonalelor rombului la latura lui, o împarte în segmentele cu lungimile de 4 cm și 25 cm. Aflați diagonalele rombului.

848. Circumferința, centrul căreia aparține ipotenuzei triunghiului dreptunghic, este tangentă la cateta mai mare și trece prin vârful unghiului ascuțit opus ei. Aflați raza circumferinței, dacă catetele sunt egale cu 5 cm și 12 cm.

849. Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu 6 cm și 8 cm. Aflați distanța de la vârful unghiului ascuțit mai mic al triunghiului până la centrul circumferinței înscrise.

850. Perpendiculara, coborâtă dintr-un punct al circumferinței pe diametrul ei, împarte diametrul în două segmente, din care unul este cu 27 cm mai mare decât celălalt. Aflați diametrul circumferinței, dacă lungimea perpendicularei este egală cu 18 cm.

4. Poligoane. Aria poligonului

851. Aria paralelogramului $ABCD$ este egală cu S. Aflați aria figurii vopsite (fig. 238).

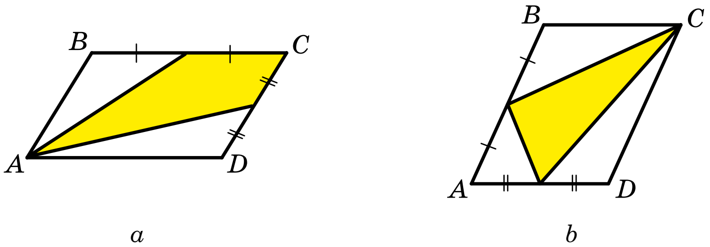


Fig. 238

852. Aflați aria paralelogramului $ABCD$, dacă $BD \perp AD$, $BD = 16$ cm, $\angle A = 45°$.

853. Aflați aria pătratului, a cărui diagonală este egală cu d.

854. Aflați aria triunghiului echilateral, dacă raza circumferinței circumscrise lui este egală cu R.

855. Cateta triunghiului dreptunghic este egală cu b, iar unghiul opus ei este egal cu β. Aflați aria triunghiului.

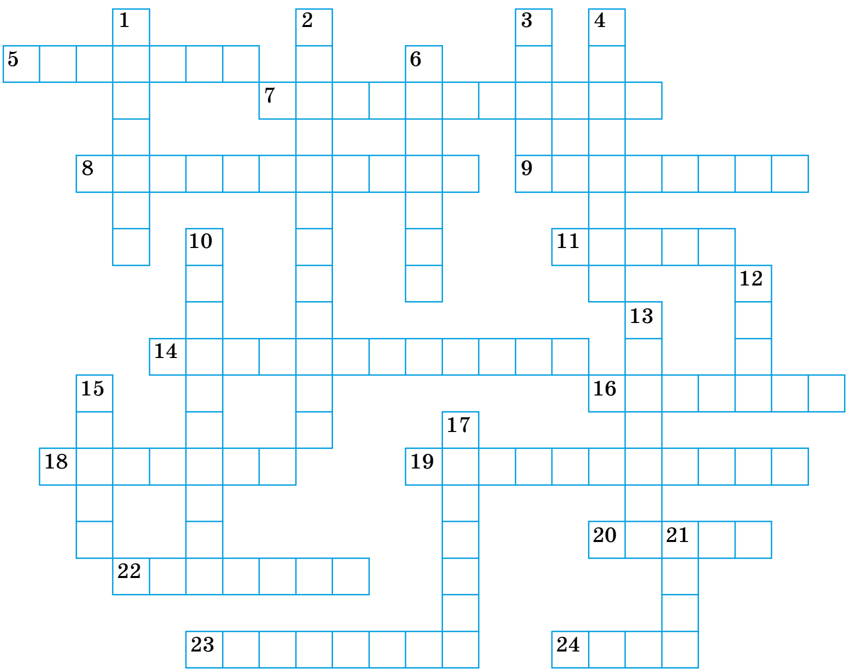
856. Unghiul ascuțit al triunghiului dreptunghic este egal cu α, iar ipotenuza este egală cu c. Aflați aria triunghiului.

857. Baza mai mică a trapezului isoscel este egală cu 15 cm, iar înălțimea — cu $3\sqrt{3}$ cm. Aflați aria trapezului, dacă unul din unghiurile lui este egal cu 150°.

858. Diagonalele trapezului isoscel sunt bisectoarele unghiurilor ascuțite ale lui și se împart de către punctul lor de intersecție în raportul 5 : 13. Aflați aria trapezului, dacă înălțimea lui este egală cu 90 cm

859. Aria trapezului isoscel este egală cu $36\sqrt{2}$ см², iar unghiul ascuțit – cu 45°. Aflați înălțimea trapezului, dacă în el poate fi înscrisă o circumferință.

860. Ghiciți cuvintele încrucișate.



Pe orizontală:

5. Savant antic grec.

7. Un tip de paralelogram.

8. Unghiul vârful căruia este centrul circumferinței.

9. Patrulaterul, la care este numai o pereche de laturi paralele.

11. Raportul catetei, opusă unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic, către ipotenuză.

14. Figură geometrică.

16. Triunghiurile, ale căror unghiuri sunt egale, iar laturile sunt proporționale.

18. Raportul catetei, alăturate unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic, către ipotenuză.
19. Poligoanele, care au arii egale.
20. Matematician al Greciei Antice.
22. Dreptunghiul, în care toate laturile sunt egale.
23. Suma laturilor patrulaterului.
24. Una din părțile circumferinței, în care o împart două puncte ale ei.

Pe verticală:

1. Raportul catetei, opuse unghiului ascuțit a triunghiului dreptunghic către cateta alăturată.
2. Tip de patrulater.
3. Latură a triunghiului dreptunghic.
4. Unghiul, a cărui vârf aparține circumferinței, iar laturile intersectează această circumferință.
6. Dreapta, care trece prin punctul circumferinței și este perpendiculară la raza, dusă în acest punct.
10. Latura triunghiului dreptunghic, al cărei pătrat este egal cu suma pătratelor ale altor două laturi.
12. Paralelogramul la care toate laturile sunt egale.
13. Afirmația, justețea căreia se stabilește cu ajutorul demonstrării.
15. Mărime.
17. Coarda circumferinței, care trece prin centrul ei.
21. Teoremă ajutătoare.

PRIETENIM CU CALCULATORUL

În clasa a 7-a voi deja v-ați folosit de computator în procesul studierii geometriei. În clasa a 8-a veți învăța figuri geometrice mai complicate, deci, o să puteți îmbunătăți deprinderile sale, stăpâni instrumente mai complicate ale pachetelor grafice.

Amintim, că, afară de însărcinările, expuse în acest capitol, voi veți putea folosi diverse programe, menite special pentru însușirea cursului de geometrie școlar. Vă puteți adresa la rețeaua globală Internet pentru căutarea acestor programe și altei informații necesare vouă.

În acest capitol sunt aduse însărcinări, pe care le puteți executa cu ajutorul computatorului pe măsura învățării temelor corespunzătoare. Majoritatea din ele – însărcinări pentru construirea figurilor geometrice, pentru care o să utilizați un anumit redactor grafic. Afară de aceste însărcinări voi puteți efectua însărcinările rubricii „Însărcinări practice” și să rezolvați probleme de construcție nu numai în caiete, dar și cu ajutorul computatorului. În clasa a 7-a ați aflat că în geometrie construcțiile se efectuează cu ajutorul riglei și compasului. De aceea voi trebuie să găsiți printre instrumentele redactorului grafic acele, care realizează funcțiile riglei și compasului.

1. Patrulaterul și elementele lui

1. Construiți patrulatere care să ilustreze cunoștințele teoretice ale acestui paragraf.

2. Paralelogramul. Proprietățile paralelogramului

2. Determinați de care proprietăți ale paralelogramului trebuie de se folosit pentru a reprezenta corect această figură. Care instrumente ale redactorului grafic trebuie pentru acesta de folosit? Desenați paralelogramul și construiți două înălțimi ale lui, care ies din același vârf. Ce instrument veți folosi pentru a duce înălțimea la latura dată?

3. Criteriile paralelogramului

3. Imaginați-vă că este reprezentat un patrulater. Cu care procedeu voi puteți verifica, dacă este el paralelogram? De care instrumente ale redactorului grafic se poate folosi pentru aceasta?

4. Dreptunghiul

4. Găsiți în redactorul grafic procedeul care oferă posibilitatea construirii rapide a diverselor dreptunghiuri.

5. Rombul

5. Care proprietate a rombului permite construirea rapidă și corectă a rombului?

6. Construiți două segmente perpendiculare care se intersectează. Imaginați-vă că ele sunt diagonalele patrulaterului, și construiți acest patrulater. Oare obligatoriu veți obține un romb? Cu care condiție trebuie de completat această însărcinare, ca patrulaterul obținut numaidecât să fie romb?

6. Pătratul

7. Găsiți în redactorul grafic un procedeu, care permite de-a construi repede diferite pătrate.

7. Linia media a triunghiului

8. Care instrument al redactorului grafic o să-l folosiți, pentru a afla mijlocul segmentului?

9. Desenați un patrulater arbitrar. Executați construcția, care va ilustra problema-cheie din p.7. Cum veți verifica că segmentele care unesc mijlocurile laturilor patrulaterului dat, au format un paralelogram?

8. Trapezul

10. Construiți un trapez. Care instrumente ale redactorului grafic le veți folosi pentru a asigura paralelismul laturilor trapezului? pentru a construi un trapez isoscel? pentru a construi un trapez dreptunghic?

9. Unghiuri la centru și înscrise

11. Desenați o circumferință și construiți câteva unghiuri înscrise, care se sprijină pe unul și același arc. Aplicați instrumentele redactorului grafic și determinați măsurile în grade ale lor.

12. Desenați o circumferință, construiți unghiurile la centru și înscris, care se sprijină pe unul și același arc. Verificați ce corelație este între mărimile acestor unghiuri.

10. Circumferințe circumscrise și înscrise patrulaterelor

13. Găsiți procedeul rațional de construire a figurilor, în care v-or fi reprezentate circumferința, patrulaterele înscrise în circumferință și circumscrise circumferinței. Care proprietate a tangentei, duse la circumferință, permite corect de reprezentat patrulaterul circumscris?

11. Teorema lui Tales. Teorema despre segmentele proporționale

14. Construiți figurile care ilustrează teorema lui Tales și teorema despre segmentele proporționale. Măsurați lungimile segmentelor necesare și controlați dacă se realizează pentru ele afirmațiile acestor teoreme. Cât de precis se pot măsura segmentele cu mijloacele redactorului grafic, pe care voi îl folosiți?

15. Închipuiţi-vă că în redactorul grafic al vostru lipseşte instrumentul, care dă posibilitatea de-a construi drepte paralele. Cum voi puteţi construi drepte paralele? Cum voi puteţi construi drepte paralele, bazându-vă pe teorema lui Tales?

12. Triunghiuri asemenea

16. Însuşiţi instrumentele redactorului grafic, care dau posibilitatea reprezentării figurilor, care au aceeaşi formă, dar dimensiuni diferite. Construiţi cu ajutorul acestor instrumente triunghiuri asemenea.
17. Construiţi ilustraţie grafică la lema despre triunghiurile asemenea. Folosindu-se de instrumentele menţionate, arătaţi, că triunghiurile reprezentate într-adevăr sunt asemenea.

13. Primul criteriu de asemănare al triunghiurilor

18. Construiţi două segmente de lungimi diferite. Imaginaţi-vă că ele sunt laturi omoloage ale triunghiurilor asemenea. Luând primul din aceste segmente în calitate de latură, construiţi un triunghi arbitrar. Construiţi un triunghi asemenea cu el, luând al doilea segment ca latură a lui; folosiţi pentru aceasta primul criteriu de asemănare a triunghiurilor.

14. Criteriul al doilea şi al treilea de asemănare al triunghiurilor

19. Născociţi de sine stătător şi efectuaţi însărcinarea care ar da posibilitatea cu ajutorul computatorului de demonstrat criteriile al doilea si al treilea de asemănare a triunghiurilor.

15. Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

20. Construiţi triunghiul dreptunghic şi coborâţi înălţimea pe ipotenuză. Convingeţi-vă că este justă lema din p. 15.

16. Teorema lui Pitagora

21. Deseori teorema lui Pitagora este ilustrată, construind pătrate pe laturile triunghiului dreptunghic. Multe generaţii de elevi numesc această figură „pantalonii lui Pitagora” şi formulează teorema în formă de şagă: „Pantalonii lui Pitagora în toate părţile sunt la fel”. Construiţi această figură.
22. Oare este în redactorul grafic instrument pentru tăierea figurii în părţi, cu care mai departe se poate de operat aparte?
23. Tăind în părţi pătratele, construite pe catete, se poate din aceste părţi compune un pătrat, construit pe ipotenuză. Pentru un triunghi arbitrar căutarea a astfel de părţi – însărcinare nu din cele uşoare. Dar iată pentru triunghiul isoscel a găsi aşa un procedeu de tăiere este uşor. Care-s aceste părţi? Construiţi un triunghi dreptunghic

isoscel. creați un astfel de set de figuri, că amestecându-le, să se poată compune sau un pătrat, construit pe ipotenuză, sau două pătrate construite pe catete.

17. Funcțiile trigonometrice ale unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic

24. Însușiți instrumentele calculatorului, care permit aflarea funcțiilor trigonometrice ale unghiului ascuțit al triunghiului.

25. Aflați instrumentele pentru aflarea funcțiilor trigonometrice în limbajul programării pe care voi îl învățați.

18. Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice

26. În procesul rezolvării problemelor din acest punct folosiți-vă de calculator pentru efectuarea calculelor.

19. Poligoane

27. Formulați o garnitură oarecare de proprietăți ale poligonului (cantitatea de laturi, convexitatea, înscris în circumferință, circumscris circumferinței, altele). Construiți poligonul care posedă această garnitură de proprietăți. De care instrumente ale redactorului grafic trebuie de se folosit, pentru a asigura îndeplinirea proprietăților date?

20. Noțiune de arie a poligonului. Aria dreptunghiului

28. Construiți un pătrat și primiți-l ca unitar. Copiați-l de câteva ori. Din pătratele unitare obținute compuneți câteva dreptunghiuri diferite, care să fie echivalente.

21. Aria paralelogramului

29. Creați un set de figuri, cu ajutorul cărora se poate ilustra demonstrația teoremei despre aria paralelogramului. De care proprietate a ariei poligonului noi, totodată, ne folosim?

30. Teorema 21.1 este justă independent de aceea, care din laturile paralelogramului cu înălțimea coborâtă pe ea alegem pentru calcularea ariei. Faceți un set de figuri, cu ajutorul cărora se poate ilustra această afirmație.

22. Aria triunghiului

31. Creați un set de figuri, cu ajutorul cărora se poate ilustra demonstrarea afirmațiilor a părții teoretice a acestui paragraf.

23. Aria trapezului

32. Construiți un trapez arbitrar. Tăiați-l în părți astfel ca să arătați că formula pentru calcularea ariei trapezului este justă.

LUCRUL ASUPRA PROIECTULUI DIDACTIC

Această rubrică este adresată în primul rând celora care doresc de stătător să dobândească cunoștințe, să gândească creativ, să formeze, să exprime și să apere punctul său de vedere, să înainteze ipoteze, să găsească cele mai raționale și ne standarde soluții.

Primul pas, care poate ajuta la atingerea acestor scopuri este participarea la lucrul asupra proiectului didactic.

Proiectul didactic este o cercetarea independentă a temei alese, care poate fi realizată atât de sine stătător, cât și în echipă.

Să dăm câteva sfaturi referitoare la organizarea lucrului asupra proiectului didactic și a perfectării rezultatelor cercetării.

1. În procesul alegerii temei trebuie de avut în vedere actualitatea ei, prezența izvoarelor de informație în literatură ți în resursele internet. Totodată este foarte importantă dorința voastră de a se evidenția personal ca cercetător în lucrul anume asupra temei alese.
2. Lucrul se începe cu alcătuirea planului anterior, în care se introduce conceptul și etapele realizării a cea ce s-a pus ca scop. După familiarizarea cu principalele izvoare de informație se alcătuiește planului definitiv cu ajutorul conducătorului proiectului didactic.
3. Este important de formulat exact scopurile investigației. Ele pot fi scrise, de pildă, în așa mod: de studiat, de descris, de analizat, de demonstrat, de comparat și altele.
4. Se termină lucrul efectuând totalurile cercetării, sunt făcute concluziile, se trasează perspectivele studierii ulterioare a temei.
5. Volumul aproximativ al lucrului constituie 10 – 15 pagini. Suplimentar se poate adăuga material ilustrativ.
6. Lucrul pate fi perfectat în formă de referat, raport, prezentarea pe calculator.

Mai jos este expusă lista temelor recomandate, care pot fi alese pentru lucrul asupra proiectului didactic.

1. **Tales și teorema lui renumită.**
2. **Metoda axiomatică în geometrie.**
3. **Pitagora și teorema lui renumită.**
4. **Geometria pe foaia cu pătrățele.**
5. **Graficul ca model geometric al problemei logice.**
6. **Punctele minunate ale triunghiului.**
7. **Proprietățile circumferinței exînscrise.**
8. **Metoda circumferinței ajutătoare.**
9. **Figuri echicompuse și echivalente.**

Cele mai simple figuri geometrice și proprietățile lor

1. Puncte și drepte

- ✓ *Proprietatea fundamentală a dreptei.* Prin orice două puncte se poate duce o dreaptă și numai una singură.
- ✓ Două drepte, care au un punct comun, se numesc drepte ce se intersectează.
- ✓ Oricare două drepte care se intersectează au numai un punct comun.

2. Segmentul și lungimea lui

- ✓ Punctele A și B ale dreptei a (fig. 248) mărginesc o parte a dreptei, care, luată împreună cu punctele A și B, se numește segment, iar punctele A și B – extremitățile acestui segment

Fig. 248

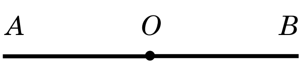


Fig. 249

- ✓ Două segmente se numesc egale dacă ele coincid prin suprapunere.
- ✓ Segmentele egale au lungimi egale, și invers, dacă lungimile segmentelor sunt egale, atunci sunt egale și însuși segmentele.
- ✓ *Proprietatea fundamentală a lungimii segmentului*. Dacă punctul C este punct interior al segmentului AB, atunci segmentul AB este egal cu suma segmentelor AC și CB, adică $AB = AC + CB$.
- ✓ Distanța între punctele A și B se numește lungimea segmentului AB. Dacă punctele A și B coincid, atunci se consideră că distanța dintre ele este egală cu zero.

3. Semidreapta. Unghiul

- ✓ Punctul O al dreptei AB (fig. 249) împarte dreapta în două părți, fiecare din ele împreună cu punctul O se numește semidreaptă. Punctul O se numește originea semidreptei.
- ✓ Două semidrepte, care au origine comună și sunt situate pe aceeași dreaptă se numesc complementare.

- Două semidrepte OA și OB, care au origine comună (fig. 250), împart planul în două părți, fiecare din ele împreună cu semidreptele OA și OB se numește unghi. Semidreptele OA și OB se numesc laturi ale unghiului, iar punctul O — vârful unghiului.

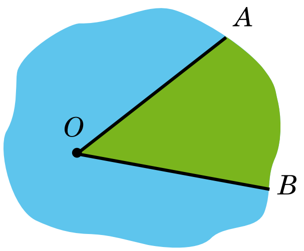


Fig. 250

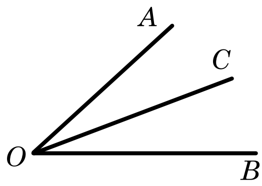


Fig. 251

- Unghiul, ale cărui laturi sunt semidrepte complementare, se numește desfășurat.
- Două unghiuri se numesc egale, dacă ele coincid la suprapunere.
- Bisectoare a unghiului se numește semidreapta cu originea în vârful unghiului, care împarte acest unghi în două unghiuri egale.

4. Măsurarea unghiurilor

- Fiecare unghi are o anumită mărime (măsură în grade).
- Unghiul, măsura în grade a căruia este egală cu 90°, se numește drept.
- Unghiul, măsura în grade a căruia este mai mică decât 90°, se numește ascuțit.
- Unghiul, măsura în grade a căruia este mai mare decât 90°, însă mai mică decât 180°, se numește obtuz.
- Unghiurile egale au mărimi egale, și invers, dacă mărimile unghiurilor sunt egale, atunci sunt egale și însuși unghiurile.
- *Proprietatea fundamentală a mărimii unghiului.* Dacă semidreapta OC împarte unghiul OAB în două unghiuri AOC și COB (fig. 251), atunci $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

5. Unghiuri adiacente suplimentare și opuse la vârf

- Două unghiuri se numesc adiacente suplimentare, dacă în ele o latură este comună, iar altele două sunt semidrepte complementare.
- Suma unghiurilor adiacente suplimentare este egală cu 180°.

- ✓ Două unghiuri se numesc opuse la vârf, dacă laturile unuia din unghiuri sunt semidrepte complementare ale laturilor celuilalt unghi.
- ✓ Unghiurile opuse la vârf sunt egale.

6. Drepte perpendiculare. Mediatoarea

- ✓ Două drepte se numesc perpendiculare dacă la intersecția lor se obține unghi drept.
- ✓ Dreptele neperpendiculare la intersecție formează o pereche de unghiuri ascuțite egale și o pereche de unghiuri obtuze egale. Mărimea unghiului ascuțit se numește unghiul dintre dreptele neperpendiculare.
- ✓ Dacă dreptele sunt perpendiculare, atunci se consideră, că unghiul dintre ele este egal cu 90°.
- ✓ Două segmente se numesc perpendiculare, dacă ele sunt situate pe drepte perpendiculare.
- ✓ În figura 252 este reprezentată dreapta a și segmentul perpendicular pe ea AB, a cărui extremitate B aparține dreptei A. În acest caz se spune, că din punctul A pe dreapta a este coborâtă perpendiculara AB. Punctul B se numește baza perpendicularei AB.

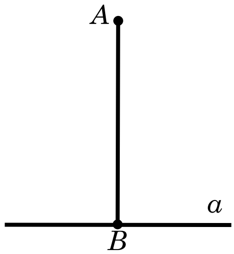


Fig. 252

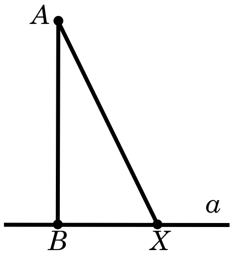


Fig. 253

- ✓ Lungimea perpendicularei AB se numește distanța de la punctul A pană la dreapta a. Dacă punctul A aparține dreptei a, atunci se consideră că distanța de la punctul A pană la dreapta a este egală cu zero.
- ✓ Să coborâm pin punctul A pe dreapta a perpendiculara AB (fig. 253). Fie X — un punct arbitrar al dreptei a, diferit de punctul B. Segmentul AX se numește oblica, dusă din punctul A la dreapta a.
- ✓ Prin punctul dat trece numai o singură dreaptă, perpendiculară pe cea dată.

- Dreapta care este perpendiculară la segment și trece prin mijlocul lui se numește mediatoarea segmentului.
- Fiecare punct al mediatoarei segmentului este egal depărat de la extremitățile acestui segment.
- Dacă punctul este egal depărtat de extremitățile segmentului, atunci el aparține mediatoarei acestui segment.

Triunghiuri

7. Triunghiul și elementele lui. Triunghiuri egale

- Trei puncte A, B și C, care nu aparțin unei drepte, sunt unite cu segmente (fig. 254). Figura obținută mărginește o porțiune de plan, care, luată împreună cu segmentele AB, BC și CA se numește triunghi. Punctele A, B, C sunt numite vârfurile, iar segmentele AB, BC, CA — laturile triunghiului. Triunghiul este numit și notat după vârfurile lui.

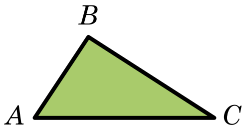


Fig. 254

- În triunghiul ABC unghiul B se numește unghiul opus laturii AC, iar unghiurile A și C — unghiuri alăturate laturii AC.
- Perimetru al triunghiului se numește suma lungimilor a tuturor laturilor lui.
- Triunghiul se numește ascuțitunghic, dacă toate unghiurile lui sunt ascuțite; dreptunghic, dacă unul din unghiurile lui este drept; obtuzunghic, dacă unul din unghiurile lui este obtuz.
- Latura triunghiului dreptunghic, opusă unghiului drept, se numește ipotenuză, iar laturile, alăturate unghiului drept – catete.
- *Inegalitatea triunghiului.* Fiecare latură a triunghiului este mai mică, decât suma altor două laturi ale lui.
- Două triunghiuri se numesc egale, dacă ele coincid la suprapunere. Acele perechi de laturi și unghiuri, care coincid la suprapunerea triunghiurilor egale, se numesc laturi omoloage (corespunzătoare) și unghiuri corespunzătoare.
- Într-un triunghi laturilor egale li se opun unghiuri egale.
- Într-un triunghi unghiurilor egale li se opun laturi egale.
- Într-un triunghi laturii mai mari i se opune unghiul mai mare, și invers, unghiului mai mare i se opune latura mai mare.

8. Înălțimea, mediana, bisectoarea triunghiului

- ✓ Perpendiculara, coborâtă din vârful triunghiului pe dreapta, care conține latura opusă, se numește înălțimea triunghiului.
- ✓ Segmentul, care unește vârful triunghiului cu mijlocul laturii opuse, se numește mediana triunghiului.
- ✓ Segmentul bisectoarei a unui unghi al triunghiului, care unește vârful triunghiului cu punctul laturii opuse se numește bisectoarea triunghiului.

9. Criteriile de egalitate ale triunghiurilor

- ✓ *Primul criteriu de egalitate a triunghiurilor: după două laturi și unghiul dintre ele.* Dacă două laturi și unghiul dintre ele ale unui triunghi sunt egale corespunzător cu două laturi și unghiul dintre ele ale altui triunghi, atunci astfel de triunghiuri sunt egale.
- ✓ *Al doilea criteriu de egalitate al triunghiurilor: după o latură și două unghiuri alăturate ei.* Dacă o latură și două unghiuri alăturate ei ale unui triunghi sunt egale corespunzător cu o latură și două unghiuri alăturate ei ale altui triunghi, atunci așa triunghiuri sunt egale.
- ✓ *Al treilea criteriu de egalitate al triunghiurilor: după trei laturi.* Dacă trei laturi ale unui triunghi sunt egale corespunzător cu trei laturi ale altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sunt egale.

10. Triunghiul isoscel și proprietățile lui. Triunghiul echilateral

- ✓ Triunghiul, în care două laturi sunt egale, se numește isoscel.
- ✓ Laturile egale ale triunghiului isoscel se numesc laturi laterale, iar a treia latură — bază a triunghiului isoscel.
- ✓ Vârf al triunghiului isoscel se numește punctul comun al laturilor laterale.
- ✓ Într-un triunghi isoscel:
  1) unghiurile de la bază sunt egale;
  2) bisectoarea triunghiului, dusă la baza lui, este mediana și înălțimea triunghiului.
- ✓ Triunghiul, în care toate laturile sunt egale, se numește echilateral.

- În triunghiul echilateral:
  1) toate unghiurile sunt egale;
  2) bisectoarea, înălțimea și mediana, duse din același vârf, coincid.

11. Criteriile triunghiului isoscel

- Dacă într-un triunghi două unghiuri sunt egale, atunci acest triunghi este isoscel.
- Dacă mediana triunghiului este înălțimea lui, atunci acest triunghi este isoscel.
- Dacă bisectoarea triunghiului este înălțimea lui, atunci acest triunghi este isoscel.
- Dacă mediana triunghiului este bisectoarea lui, atunci acest triunghi este isoscel.

Drepte paralele. Suma unghiurilor triunghiului

12. Drepte paralele

- Două drepte se numesc paralele dacă ele nu se intersectează.
- *Proprietatea fundamentală a dreptelor paralele (axioma de paralelism a dreptelor).* Prin punctul care nu-i aparține dreptei date, trece numai o dreaptă, paralelă cu cea dată.
- Două drepte, perpendiculare pe a treia dreaptă, sunt paralele.
- Dacă două drepte sunt paralele cu a treia dreaptă, atunci ele sunt paralele.
- Se numește distanță dintre două drepte paralele distanța de la orice punct al unei drepte până la a doua dreaptă.

13. Criteriile de paralelism ale două drepte

- Dacă două drepte a și b de le intersectat cu a treia dreaptă c, atunci se obțin opt unghiuri (fig. 255). Dreapta c se numește secanta dreptelor a și b.
  Unghiurile 3 și 6, 4 și 5 se numesc unghiuri de aceeași parte a secantei.
  Unghiurile 3 și 5, 4 și 6 se numesc unghiuri alterne.
  Unghiurile 6 și 2, 5 și 1, 3 și 7, 4 și 8 se numesc unghiuri corespondente.

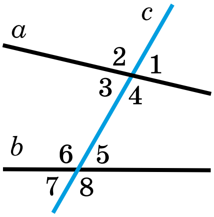


Fig. 255

- Dacă unghiurile alterne formate la intersecția a două drepte cu o secantă, sunt egale, atunci dreptele sunt paralele.

- ✓ Dacă suma unghiurilor de aceeași parte, obținute la intersecția a două drepte cu o secantă, este egală cu 180°, atunci dreptele sunt paralele.
- ✓ Dacă unghiurile corespondente, obținute la intersecția a două drepte cu o secantă, sunt egale, atunci dreptele sunt paralele.

14. Proprietățile dreptelor paralele

- ✓ Dacă două drepte paralele sunt intersectate de secantă, atunci:
  - unghiurile, care formează perechea de unghiuri alterne, sunt egale;
  - unghiurile, care formează perechea de unghiuri corespondente, sunt egale;
  - suma unghiurilor, care formează perechea de unghiuri de aceeași parte, este egală cu 180°.
- ✓ Dacă dreapta este perpendiculară pe una din două drepte paralele, atunci ea este perpendiculară și la a doua.

15. Suma unghiurilor triunghiului. Unghiul exterior al triunghiului

- ✓ Suma unghiurilor a unui triunghi este egală cu 180°.
- ✓ Printre unghiurile triunghiului cel puțin două unghiuri sunt ascuțite.
- ✓ Unghi exterior al triunghiului se numește unghiul adiacent suplimentar cu unghiul acestui triunghi.
- ✓ Unghiul exterior al triunghiului este egal cu suma a două unghiuri ale triunghiului, neadiacente suplimentare cu el.
- ✓ Unghiul exterior al triunghiului este mai mare, decât fiecare din unghiurile triunghiului, neadiacente cu el.

16. Criteriile egalității ale triunghiurilor dreptunghice

- ✓ *Criteriul de egalitate al triunghiurilor dreptunghice dacă se știe ipotenuza și o catetă.* Dacă ipotenuza și o catetă ale unui triunghi dreptunghic sunt corespunzător egale cu ipotenuza și cateta altui triunghi, atunci așa triunghiuri sunt egale.
- ✓ *Criteriul de egalitate al triunghiurilor dreptunghice după două catete.* Dacă catetele unui triunghi dreptunghic sunt respectiv egale cu două catete ale altui triunghi, atunci astfel de triunghiuri sunt egale.

- ✓ *Criteriul de egalitate al triunghiurilor dreptunghice după o catetă și unghiul ascuțit alăturat.* Dacă o catetă și unghiul ascuțit, alăturat ei al unui triunghi dreptunghic sunt respectiv egali cu cateta și unghiul alăturat ei al altui triunghi, atunci așa triunghiuri sunt egale.
- ✓ *Criteriul de egalitate al triunghiurilor dreptunghice după catetă și unghiul ascuțit opus ei.* Dacă, o catetă și unghiul ascuțit, opus ei, al unui triunghi dreptunghic sunt egale respectiv cu o catetă și unghiul ascuțit opus ei al altui triunghi, atunci așa triunghiuri sunt egale.
- ✓ *Criteriul de egalitate al triunghiurilor dreptunghice după ipotenuză și unghiul ascuțit.* Dacă ipotenuza și unghiul ascuțit al unui triunghi dreptunghic sunt respectiv egale cu ipotenuza și unghiul ascuțit al altui triunghi, atunci astfel de triunghiuri sunt egale.

17. Proprietățile triunghiului dreptunghic

- ✓ În triunghiul dreptunghic ipotenuza este mai mare, decât cateta.
- ✓ Cateta opusă unghiului de 30° este egală cu jumătate din ipotenuză.
- ✓ Dacă cateta este egală cu jumătate din ipotenuză, atunci unghiul, opus acestei catete, este egal cu 30°.

Circumferința și cercul

18. Locul geometric al punctelor

- ✓ Loc geometric al punctelor (LGP) se numește mulțimea tuturor punctelor, care au o anumită proprietate.
- ✓ Mediatoarea segmentului este locul geometric al punctelor, egal depărtate de la extremitățile acestui segment.
- ✓ Bisectoarea unghiului este locul geometric al punctelor, care aparțin unghiului și sunt egal depărate de la laturile lui.

19. Circumferința și cercul, elementele lor

- ✓ Se numește circumferință locul geometric al punctelor, distanțele de la care până la punctul dat sunt egale cu numărul pozitiv dat. Punctul dat se numește centrul circumferinței.
- ✓ Orice segment care unește punctul circumferinței cu centrul ei se numește raza circumferinței.
- ✓ Segmentul, care unește două puncte ale circumferinței se numește coarda circumferinței. Coarda care trece prin centrul circumferinței se numește diametru.

- ✓ Diametrul circumferinței este de două ori mai mare decât raza ei.
- ✓ Cerc se numește locul geometric al punctelor, ale căror distanțe până la punctul dat, nu sunt mai mari decât un număr pozitiv dat. Punctul dat se numește centrul cercului. Raza circumferinței ce mărginește cercul, se numește raza cercului. Dacă X este un punct arbitrar al cercului cu centrul O și raza R, atunci $OX \leqslant R$.
- ✓ Circumferința, care mărginește cercul îi aparține lui.
- ✓ Coarda și diametrul cercului – asta-i coarda și diametrul circumferinței, care mărginește cercul.

20. Proprietățile circumferinței

- ✓ Diametrul circumferinței, perpendicular la coardă, împarte această coardă în jumătate.
- ✓ Diametrul circumferinței, care împarte coarda, diferită de diametru, în jumătate este perpendicular pe această coardă.

**21. Poziția reciprocă a dreptei și a circumferinței.
Tangenta la circumferință.**

- ✓ Dreapta și circumferința pot să nu aibă puncte comune, să aibă două puncte comune sau să aibă un punct comun.
- ✓ Dreapta care are cu circumferința numai un singur punct comun, se numește tangentă la circumferință.
- ✓ Tangenta la circumferință este perpendiculară la raza, dusă în punctul de tangență.
- ✓ Dacă dreapta, care trece prin punctul circumferinței este perpendiculară la raza, dusă în acest punct, atunci această dreaptă este tangentă la circumferința dată.
- ✓ Dacă distanța de la centrul circumferinței până la o dreaptă oarecare este egală cu raza circumferinței, atunci această dreaptă este tangentă la circumferința dată.
- ✓ Dacă prin punctul dat sunt duse la circumferință două tangente, atunci segmentele tangentelor, care unesc, punctul dat cu punctele de tangență, sunt egale.

22. Circumferințele circumscrisă și înscrisă triunghiului

- Circumferința se numește circumscrisă triunghiului, dacă ea trece prin toate vârfurile lui.
  În figura 256 este reprezentată circumferința, circumscrisă triunghiului. În acest caz de asemenea se spune că triunghiul este înscris în circumferință.

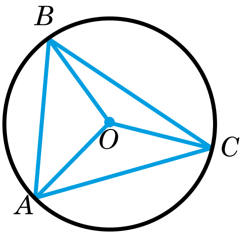


Fig. 256

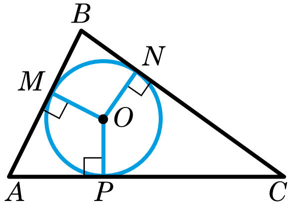


Fig. 257

- Centrul circumferinței circumscrise triunghiului este egal depărtat de toate vârfurile lui.
- Oricărui triunghi i se poate circumscrie o circumferință. Centrul circumferinței, circumscris triunghiului – aceasta-i punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor triunghiului.
- Mediatoarele laturilor triunghiului se intersectează într-un punct. Circumferința se numește înscrisă într-un triunghi, dacă ea este tangentă la toate laturile lui.
- În figura 257 este reprezentată circumferința, înscrisă într-un triunghi. În acest caz se mai spune că triunghiul este circumscris circumferinței.
- Centru circumferinței înscrise în triunghi este egal depărtat de toate laturile lui.
- În orice triunghi se poate înscrie o circumferință. Centrul circumferinței, înscrise în triunghi, — aceasta-i punctul de intersecție al bisectoarelor triunghiului.
- Bisectoarele triunghiului se intersectează într-un punct.
- Raza circumferinței, înscrise într-un triunghi dreptunghic, se calculează cu formula $r = \frac{a+b-c}{2}$, unde r – raza circumferinței înscrise, a și b – catetele, c – ipotenuza.

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII LA EXERCIȚII

§1. Patrulatere

1. Patrulaterul și elementele lui

14. 18 cm, 12 cm, 6 cm, 27 cm. **15.** 10 cm, 8 cm, 16 cm, 30 cm. **20.** 1) 72°, 130°, 78°, 80°; 2) 22°, 230°, 28°, 80°. **22.** 10 cm. **26.** *Indicație*. Construiți triunghiul după două laturi alăturate ale patrulaterului și unghiul cunoscut, făcut de ele. A treia latură a acestui triunghi este diagonala patrulaterului căutat. **29**. *Indicație*. Construiți triunghiul ABC după două laturi AB și BC și unghiul B dintre ele. În triunghiul ACD se știe latura AC, unghiul alăturat CAD ($\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC$) și suma laturilor AD și CD. Construirea triunghiului după latură, unghiul alăturat și suma altor două laturi ale lui a fost examinată în cursul de geometrie clasa a 7-a. **34.** 32°.

2. Paralelogramul. Proprietățile paralelogramului

49. 90°. **53.** 9 cm, 14 cm. **57.** $AB = BC = CD = AD = 6$ cm. **58.** 32 cm. **59.** 45°, 135°. **60.** 6 cm, 12 cm. **64.** 80 cm. **65.** 9 cm, 24 cm. **66.** 20 cm, 24 cm. **67.** 6 cm. **68.** 48°, 132°. **71.** 40 cm. **72.** 5 cm, 9 cm. **74.** 25 cm. **77.** 3. **78.** 2 : 1. **79.** 72°, 108°. **82.** *Indicație*. Punctul căutat este punctul de intersecție al înălțimilor triunghiului ABC. **84**. *Indicație*. Arătați că $\Delta MAD = \Delta DKC = \Delta MBK$. **85.** *Indicație*. Construiți paralelogramul, vârful căruia coincide cu vârful unghiului dat, altele două vârfuri se află pe laturile unghiului, iar punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului coincide cu punctul dat. **86**. 24 cm sau 14 cm.

3. Criteriile paralelogramului

108. 32°. **109.** 16 cm.

4. Dreptunghiul

119. 6 cm, 12 cm. **120.** 5 cm, 10 cm. **121.** 15 cm, 25 cm. **122.** 12 cm. **124**. *Indicație*. Fie CM – mediana triunghiului dreptunghic ABC, dusă la ipotenuza AB (fig. 239). Pe prelungirea segmentului CM după punctul M depuneți segmentul MD, care este egal cu CM. Determinați tipul patrulaterului $ABCD$ și folosiți-vă de proprietățile patrulaterelor de acest tip.

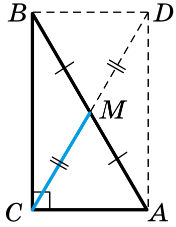


Fig. 239

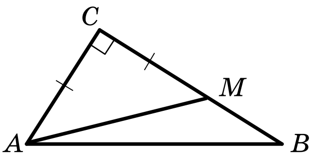


Fig. 240

127. 30°, 60°. *Indicație.* Arătați că în triunghiul dreptunghic ABM ipotenuza AM este de 2 ori mai mare decât cateta BM. **128.** 4,5 cm. **131.** 1) *Indicație*. Problema se reduce la construirea triunghiului dreptunghic, după ipotenuza și diferența catetelor. În figura 240 este reprezentat triunghiul dreptunghic ACB, în care se știe ipotenuza AB și diferența catetelor. Pe cateta BC este notat punctul M astfel, că $CM = AC$. Atunci $BM = BC - AC$. De aici $\angle AMB = 135°$. Deci, se poate construi triunghiul AMB după laturile AB și MB, și unghiul AMB. **132.** 48°. **133.** 90°. **134.** Triunghiul ACE este isoscel.

5. Rombul

157. 6 cm. **160**. 1) *Indicație*. Problema se reduce la construirea triunghiului dreptunghic după suma catetelor și unghiul ascuțit. În figura 241 este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC, în care se știe unghiul și suma catetelor AC și CB. Atunci $AM = AC + CB$, $\angle CMB = 45°$. Triunghiul AMB poate fi construit după latura AM și două unghiuri alăturate. **161**. *Indicație*. Mijlocul segmentului NK – punctul O este punctul de intersecție al diagonalelor rombului. Atunci dreapta MO este paralelă cu laturile BC și AD. Lungimea segmentului MO este egală cu jumătate din latura rombului. **163.** 30°, 72°, 78°; 18 cm.

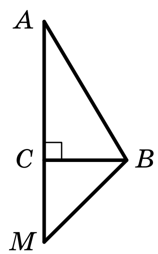


Fig. 241

6. Pătratul

174. 28 cm. **177.** 48 cm. **180**. *Indicație*. Demonstrați că $AC \perp MK$. **181**. *Indicație*. Construiți triunghiul dreptunghic isoscel cu ipotenuza MK. **182**. *Indicație*. Construiți două triunghiuri dreptunghice, în fiecare din ele o catetă este egală cu latura pătratului, iar ipotenuza – cu segmentele date. Demonstrați egalitatea acestor triunghiuri. **184**. *Indicație*. Construiți triunghiul echilateral BO_1C astfel, ca punctul O_1 să aparţină pătratului. Arătaţi că $\angle O_1AD = \angle O_1DA = 15°$. De aici rezultă că punctele O și O_1 coincid. **185**. *Indicație*. Pe prelungirea segmentului CD după punctul D notați punctul M_1 astfel, ca $DM_1 = BM$. Demonstrați, că $\angle EAM_1 = \angle EM_1A$.

6. Linia medie a triunghiului

202. 28 cm. **206**. $MK = 4$ cm. *Indicație*. Duceți linia medie a triunghiului ABC. **207**. 9 cm. *Indicație*. Cercetați triunghiul pentru care segmentul MK este linie medie. **210**. *Indicație*. Fie că punctele M, K și F — sunt mijlocurile segmentelor AB, AD și AC corespunzător. Determinați căror drepte aparțin înălțimile triunghiului MKF. **211**. *Indicație*. Fie că punctele E, F și K sunt mijlocurile segmentelor AC, BC și BD respectiv. Demonstrați, că triunghiul EFK este isoscel. **213.** 37°. **214.** 8 cm.

8. Trapezul

234. 16 cm, 34 cm. **236.** 16 cm. **237.** 50°, 60°. **239.** 28 cm. **247.** 7,2 cm, 10,8 cm. **249.** $2h$. **250.** 8 cm, 20 cm, 20 cm, 20 cm. **251.** 12 cm, 12 cm, 12 cm. **252.** 60°, 120°. **253.** 8 cm, 16 cm. **254.** 60°, 120°. **255**. Dacă unghiul ascuțit al trapezului este egal cu 45°. **260.** 7 cm. **261.** 13 cm, 21 cm. **264.** $\frac{3a}{4}$. **265.** 72°, 108°. **266.** 8 cm. *Indicație*. Duceți prin vârful C o dreaptă paralelă cu dreapta BD. Fie E — punctul de intersecție al dreptei duse cu dreapta AD. Examinați triunghiul ACE. **267**. *Indicație*. Punctul de intersecție al bisectoarelor este vârful triunghiului dreptunghic, a cărui ipotenuză este latura laterală a trapezului. Considerați mediana acestui triunghi, dusă la ipotenuză, și demonstrați că ea este paralelă cu bazele trapezului. **268**. 1) *Indicație*. Prin unul din vârfurile bazei mai mici duceți o dreaptă paralelă cu latura laterală a trapezului. Astfel problema s-a redus la construirea triunghiului după trei laturi cunoscute; 2) *Indicație*. Prin unul din vârfurile bazei mai mici duceți dreapta, paralelă cu diagonala trapezului. Problema s-a redus la construirea triunghiului după două laturi și înălțimea, dusă la latura a treia. **271.** $a + b$. *Indicație*. Fie O — punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului. Duceți perpendicularele AM, OK și CE la dreapta care trece prin punctul B, și arătați, că $OK = \frac{a+b}{2}$. **275.** 1) 120°; 2) 120°.

9. Unghiuri la centru și înscrise

297. *Indicație*. Duceți coarda BC și folosiți-vă de faptul, că unghiul AMC este unghi exterior al triunghiului BMC. **298**. *Indicație*. Duceți coarda și folosiți-vă de aceea, că unghiul — unghiul exterior al triunghiului BMC. **299.** 10°. **300.** 40°, 40°, 100°. **301.** 120°, 20°, 40°. **306.** 56°, 56°, 68°. **308**. *Indicație*. Coborâți din vârfurile A și B înălțimile triunghiului ABC. **309**. *Indicație*. Prin punctul comun al circumferințelor duceți tangenta lor comună. Aplicând problema-cheie din p.9, demonstrați, că coardele cercetate sunt paralele cu tangenta comună. **310.** *Indicație*. $\angle MBD = \angle MBC + \angle CBD = \angle MBA + \angle BAC = \angle BMD$. **311**. LGP căutat — două arce, reprezentate în figura 242, cu excepția punctelor A și B. *Indicație* Duceți două semidrepte AC și BC astfel, că $\angle BAC = \angle ABC = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Fie că aceste semidrepte se intersectează în punctul C. Evident că $\angle ACB = \alpha$. Circumscrieți-i triunghiului ABC o circumferință. Executând construcția analogă în alt semiplan față de dreapta AB, veți obține triunghiul ABC_1, căruia de asemenea circumscrieți-i o circumferință. Arcele ACB și AC_1B, afară de punctele A și B, este LGP căutat. **313**. *Indicație*. Folosiți-vă de rezultatele problemei. 311. **314**. *Indicație*. Fie O — punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului $ABCD$, punctul M — mijlocul laturii AD (fig. 243). Atunci $OM = \frac{1}{2}AB$. Triunghiul AOD poate fi construit (vezi problema 313). **316**. *Indicație*. Folosiți-vă de problema cheie 1 p. 9. 317. LGP căutat este evidențiat în figura 244 cu culoare albastră.

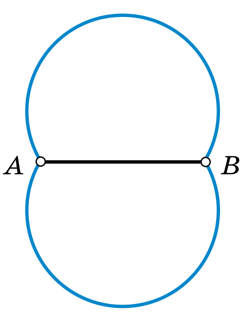


Fig. 242

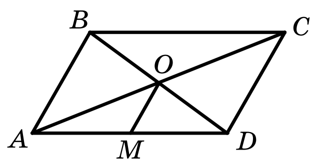


Fig. 243

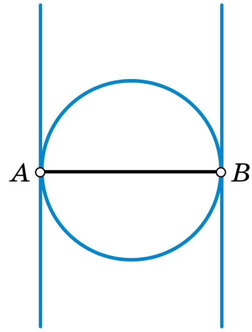


Fig. 244

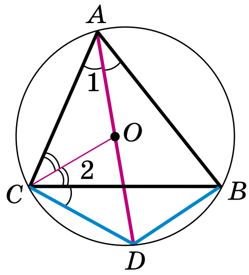


Рис. 245

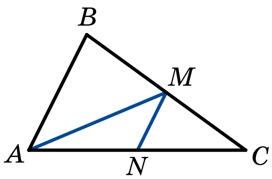


Рис. 246

318. *Indicație*. $\angle DCB = \angle DAB = \angle 1$ (fig. 245). Atunci $\angle OCD = \angle 1 + \angle 2$, $\angle COD = \angle 1 + \angle ACO$. Însă $\angle ACO = \angle 2$. Deci, $\angle OCD = \angle COD$. **319**. *Indicație*. Fie că segmentele AA_1 și CC_1 se intersectează într-un punct M. Calculați unghiul C_1MB_1, aplicând rezultatele problemei 297. **320**. *Indicație*. Construiți circumferința cu centrul în punctul O_1 și raza, egală cu diferența razelor a circumferințelor date. Duceți prin punctul O_2 o tangentă la circumferința construită. **321**. 1) *Indicație*. Fie punctul O — centrul circumferinței, înscrise în triunghiul ABC, în care se știe unghiul B și latura AC. Demonstrați, că $\angle AOC = 90° + \frac{1}{2}\angle B$. În triunghiul AOC se știe latura AC, unghiul AOC și înălțimea, dusă din vârful O (centrul circumferinței înscrise). Mai departe vezi problema 312; 2) *Indicație*. În figura 246 este reprezentat triunghiul ABC, în care se știe latura AC, unghiul B și mediana, dusă la latura BC. Duceți linia medie MN a triunghiului ABC. Atunci $\angle NMC = \angle B$. Construiți LGP al astfel de puncte X, că $\angle NXC = \angle B$. **322.** 9 cm, 10 cm, 11 cm. **323.** $P_1 + P_2 + P_3$. **324.** Dreptunghic sau isoscel.

10. Circumferințe circumscrise și înscrise patrulaterelor

342. 90°. **343.** 6 см. **347.** 88°, 74°, 92°, 106°. **348.** 62°, 118°. **350.** 196 cm. **351.** 6 cm. **352.** 60°, 120°. **353.** $\frac{d}{2}$. *Indicație*. Demonstrați că unghiul făcut de diagonala și baza mai mare a trapezului este egal cu 60°. Mai departe folosiți problema-cheie p.8. **354**. 6 cm. *Indicație*. Demonstrați că centrul circumferinței, circumscrise trapezului, este mijlocul bazei mai mari. **355**. *Indicație*. Circumscrieți o circumferință patrulaterului $CMKB$. **357**. 30°. *Indicație*. Demonstrați că patrulaterului $AMOK$ i se poate circumscrie o circumferință, și folosiți-vă de faptul, că bisectoarele triunghiului se intersectează într-un punct. **358**. 60°. *Indicație*. Notând

$\angle N = \alpha$, exprimați unghiul α prin AOB. **359**. *Indicație*. Demonstrați că patrulaterului $ACBO$ i se poate circumscrie o circumferință. **360**. *Indicație*. Demonstrați că unghiul CPB nu-și schimbă mărimea sa. **361**. *Indicație*. Folosiți-vă de aceea că în triunghiurile dreptunghice APK și AMQ unghiurile ascuțite, APQ ți AMQ sunt egale. **362**. *Indicație*. Punctele A, C, A_1 și C_1 se află pe circumferința cu diametrul AC. Folosiți-vă de aceea că mediatoarea coardei trece prin centrul circumferinței. **363**. *Indicație*. Demonstrați că linia medie a trapezului dat este egală cu suma razelor ale circumferințelor construite. **366**. 128°.

§2. Asemănarea triunghiurilor

11. Teorema lui Tales. Teorema despre segmentele proporționale

386. 30 cm. **388.** 12 cm. **389.** 4 cm. **390.** 6 cm, 45°. **392.** 20 cm, 24 cm. **393.** 5 cm, 10 cm. **395.** 8 cm, 12 cm. **397.** 6 cm, 5 cm, 6 cm. **398.** 15 cm, 12 cm, 21 cm. **399.** 15 cm. **402.** 45 cm. **404.** 21 cm, 15 cm. **405.** 45 cm, 18 cm. **406.** 30 cm, 50 cm. **407.** 7 : 9. **408.** 3 : 5. **409.** 9 cm. **410.** 50 cm. **411.** 3 : 5. *Indicație.* Duceți prin punctul K o dreaptă, paralelă cu dreapta AM. **412**. 1) 3 : 7. *Indicație*. Duceți prin punctul M o dreaptă, paralelă cu dreapta BK; 2) 2 : 3. *Indicație*. Duceți prin punctul K o dreaptă, paralelă cu dreapta CM. **413**. *Indicație*. Folosiți-vă de aceea că linia medie a trapezului împarte diagonala lui în jumătate. **415**. 2) *Indicație*. Fie dat unghiul ABC. Duceți dreapta OK, paralelă cu semidreapta BC (punctul K aparține laturii AB). Pe semidreapta KA notați punctul M astfel, că $MK : KB = 2 : 3$. **416**. 3) *Indicație*. Construiți triunghiul dreptunghic BDK, în care cateta BD este egală cu înălțimea dată, iar ipotenuza BK — medianei date. După unghiul dat și unghiul BKD aflați unghiul făcut de două mediane ale triunghiului; 4) *Indicație*. Fie ABC — triunghiul căutat, ale cărui mediane AA_1, BB_1 și CC_1 se intersectează în punctul M. Pe semidreapta MB_1 notați în așa mod punctul F, ca $MB_1 = B_1F$. Triunghiul MCF poate fi construit după trei laturi cunoscute. **417**. 2) *Indicație*. Fie ABC — triunghiul căutat, ale cărui mediane AA_1 și CC_1 se intersectează în punctul M. Triunghiul AMC se poate construi după două laturi și înălțimea, dusă la a treia latură. **419**. *Indicație*. Duceți prin punctul C o dreaptă paralelă cu latura BD. Fie că dreapta dusă intersectează latura AB în punctul E. Demonstrați, că $BC = BE$, și folosiți-vă de teorema despre segmentele proporționale. **420.** a. **421.** 11 cm.

12. Triunghiuri asemenea

432. 33 m. **439.** 6 cm. **440.** 9 cm. **441.** 40 cm, 60 cm. **442.** 36 cm. **443.** 8 cm. **444.** 4,8 cm. *Indicație*. Prin vârful A duceți o dreaptă paralelă cu dreapta BD. **445.** 6 cm, 12 cm. **446.** 36 cm. **447.** 1) 30°, 30°, 120°; 2) 30°, 60°, 90°.

13. Primul criteriu de asemănare a triunghiurilor

463. 6 cm, 30 cm. **464.** 10,5 cm, 13,5 cm. **467.** 42 cm. **468.** 10 cm, 14 cm. **469.** 12,5 cm, 3,5 cm. **471.** 12 m. **475.** 24 cm. **476.** 16 cm. **477.** 16 cm. **478.** 5 cm. *Indicație*. Duceți prin punctul P diametrul circumferinței și aplicați rezultatul problemei-cheie 2 p.13. **479.** 10 cm. **480.** 27 cm. **481.** 2) 36 cm. **482.** 10 cm. **483.** $\frac{ah}{a+h}$. **484.** 27 cm, 15 cm. **485.** 1) 20°, 160°; 2) 50°, 130°. **487.** 18 cm.

14. Criteriile al doilea și al treilea de asemănare a triunghiurilor

496. 18 cm, 30 cm. **497.** 50 cm, 20 cm. **498.** 6 cm. **500.** $\frac{ab}{a+b}$. *Indicație*. Demonstrați, că $\Delta KBM \sim \Delta ABC$ cu coeficientul de asemănare $\frac{b}{a+b}$. **501.** 6 cm. *Indicație*. Demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta BDC$. **502.** *Indicație*. Demonstrați, că $\Delta AHC \sim \Delta ABD$ în virtutea celui de-al doilea criteriu de asemănare al triunghiurilor. De aici $\angle ACH = \angle ABD$. **503.** *BIndicație*. Demonstrați că din asemănarea triunghiurilor BMC și CMK reiese asemănarea triunghiurilor ABM și KAM. **505.** *Indicație*. Fie că circumferințele se intersectează în punctele E și F. Pentru două perechi de coarde AB și EF, CD și EF folosiți problema cheie 2 p. 13. **506.** 9 cm, 14 cm. **508.** 10 cm.

§3. Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice

15. Relații metrice în triunghiul dreptunghic

514. 15 cm, 20 cm. **515.** 30 cm, 24 cm. **516.** $2\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm. **517.** 14,5 cm. **518.** 62 cm. **519.** 12,5 cm. **520.** 12,8 cm. **521.** 2,5 cm. **522.** 196 cm. *Indicație*. Demonstrați că extremitățile laturii laterale a trapezului și centrul circumferinței înscrise sunt vârfuri ale triunghiului dreptunghic. **523.** 18 cm. **525.** 7 cm, 14 cm. **526.** 14 cm. **527.** 74°, 74°, 74°, 138°.

16. Teorema lui Pitagora

542. 13 cm. **543.** 10 cm. **544.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **545.** $a\sqrt{2}$. **546.** $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. **547.** $\frac{c}{\sqrt{2}}$. **548.** *a*) $\sqrt{6}$ cm; *b*) $\sqrt{3}$ cm; *c*) $4\sqrt{2}$ cm. **549.** *a*) $\sqrt{2}$ cm; *b*) 1 cm. **550.** $4\sqrt{5}$ cm. **551.** $4\sqrt{10}$ cm. **552.** $4\sqrt{13}$ cm. **553.** $4\sqrt{5}$ cm. **554.** 10 cm, 10 cm, 12 cm. **555.** 40 cm, 25 cm, 25 cm. **556.** 20 cm. **557.** 20 cm. **558.** 24 cm. **559.** 1,5 cm, 22,5 cm. **560.** 8 cm, 6 cm, 10 cm. **561.** 6 cm, $2\sqrt{73}$ cm. **562.** 168 cm. **563.** 200 cm. **564.** 20 coți. **565.** $8\sqrt{10}$ cm. *Indicație*. Demonstrați că latura laterală a trapezului este egală cu baza mai mare a lui. **566.** $12\sqrt{3}$ cm. **567.** $2\sqrt{65}$ cm. **568.** $12\sqrt{5}$ cm. **569.** 128 cm. *Indicație*. Folosiți-vă de proprietatea bisectoarei unghiului triunghiului și aflați raportul laturii laterale către jumătatea bazei. **570.** 162 cm. **571.** 54 cm. **572.** $8\sqrt{10}$ cm. **573.** 10 cm, $4\sqrt{13}$ cm, $2\sqrt{73}$ cm. **574.** 26 cm. **575.** $3\frac{3}{4}$ picioare.

17. Funcțiile trigonometrice ale unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic

595. 45°, 135°. **598.** 1) 1; 2) 0. **599.** 0,28; 0,96; $\frac{7}{24}$. **600.** $\frac{1}{6}$. *Indicație*. Din asemănarea triunghiurilor *AMC* și *BDC* rezultă, că $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BD} = \frac{1}{3}$. **601.** $\frac{6}{7}$. *Indicație*. Folosiți-vă de aceea, că $\frac{KC}{AC} = \frac{BD}{AB}$. **602.** *Indicație*. Din punctul *F* coborâți perpendiculară pe segmentul *ED*. Aflați tangentele unghiurilor *E* și *B*. **603.** 3 cm. **604.** 12 cm. **605.** 14 cm.

18. Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice

618. 45°. **621.** $2a$, $a\sqrt{3}$. **622.** a, $a\sqrt{3}$. **625.** 8 cm. **626.** 16 cm. **627.** 15 cm. **628.** $4\sqrt{2}$ cm. **629.** $\frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **630.** $\frac{h}{\sin\alpha}$, $\frac{h}{\cos\alpha}$, $\frac{h}{\sin\alpha\cos\alpha}$. **631.** $a \operatorname{tg} \varphi$, $\frac{a}{\cos\varphi}$, $a \sin \varphi$. **632.** $\frac{d}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$, $d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. **633.** $\frac{2r}{\sin\alpha}$, $\frac{2r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{2r}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. **634.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **635.** $\frac{a(3-\sqrt{3})}{2}$. **636.** $2\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{93}$ cm, $\sqrt{181}$ cm. **638.** $\angle A = 86°$, $\angle B = 111°$, $\angle C = 94°$, $\angle D = 69°$. **639.** 18 cm, 21 cm.

§ 4. Poligoane. Aria poligonului

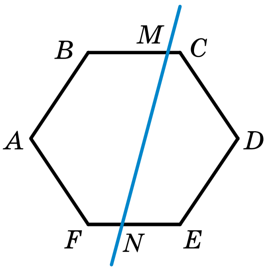


Fig. 247

19. Poligoane

654. 3) $\frac{n(n-3)}{2}$. **655.** 12 laturi, 1800°. **658.** 150°, 60°, 150°. **659**. Pentagon. **660**. *Indicație*. Fie *ABCDEF* — hexagon, al cărui fiecare ungi este egal cu 120°. Dacă am duce secanta *MN* (fig. 247), atunci suma unghiurilor a pentagonului *ABMNF* va fi egală cu 540°. Atunci suma unghiurilor *BMN* și *FNM* este egală cu 180°. **662.** 80 cm. **663.** $(26+10\sqrt{13})$ cm. **664.** $3\sqrt{5}$ cm.

20. Noțiunea de arie a poligonului. Aria dreptunghiului

674. 0,000126 N. **675.** 12 000 N. **676.** $d^2 \sin\alpha \cos\alpha$. **677.** $75\sqrt{3}$ cm². **686.** De 2 ori. **687**. Deloc, sau două, sau trei. **688**. Defel sau doi. **689.** 504 cm². **690**. 30 cm. **691**. *Indicație*. Construiți triunghiul dreptunghic, ale cărui catete sunt egale cu laturile pătratelor date. **692**. *Indicație*. Latura pătratului căutat $x=\sqrt{ab}$. **694.** 24 cm. **695.** 2 cm.

21. Aria paralelogramului

704. 1) Două soluții:4 cm și 9 cm; 2) o soluție; 8 cm. **705.** 300 cm². **706.** 120 cm². **707.** $108\sqrt{3}$ cm². **708.** $ab \sin\alpha$. **709.** $64\sqrt{3}$ cm². **710.** $140\sqrt{2}$ cm². **711.** 37,5 cm². **712.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **714.** 72 cm². **715.** 360 cm². **719.** 1 : 7.

22. Aria triunghiului

732. $\frac{200}{3}$ cm². **733.** $11\sqrt{3}$ cm². **734.** 170 cm². **735.** $b^2 \sin\alpha \cos\alpha$. **736.** $h^2 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. **737.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **738.** $\frac{c^2}{4}$. **739.** $\frac{120}{13}$ cm. **740.** 96 cm². **741.** 108 cm². **742.** 768 cm². **744.** 52 cm. **745.** 336 cm². **746.** 1080 cm². **757.** *Indicație*. Țineți seama de aceea că triunghiurile *ABX* și *AXM* au înălțime comună. Aceeași proprietate o au și triunghiurile *CBX* și *CXM*. **758.** 120 cm². **759.** 20 cm, $6\sqrt{10}$ cm, $2\sqrt{10}$ cm. **760.** 1176 cm². **761.** 9,6 cm². **762.** $\frac{4000}{3}$ cm². *Indicație*. Aplicând proprietatea bisectoarei triunghiului, aflați raportul laturii laterale către jumătatea bazei triunghiului. **763.** $\frac{4000}{3}$ cm². **764.** 19 cm². *Indicație*. Folosiți-vă de rezultatele problemelor 750 și 757. **765**. *Indicație*. Duceți dreptele *AM*, *BM* și *CM* și folosiți-vă de rezultatele problemei 757. **766.** *Indicație*. Fie *N* — un astfel de punct, situat pe latura *BC*, că $AN \parallel DM$. Demonstrați că dreapta *DN* — este cea căutată. **768.** 78°, 78°, 24°. **769.** $2\sqrt{57}$ cm. **770.** 80 cm.

23. Aria trapezului

782. $108\sqrt{3}$ cm². **783.** 195 cm². **784.** 840 cm². **785.** 132 cm². **786.** $600\sqrt{3}$ cm². **787.** 1640 cm². **788.** $(32+32\sqrt{2})$ cm². **789.** 294 cm². **793.** 512 cm². **794.** 192 cm². **795.** 336 cm². *Indicație*. În trapezul dat *ABCD* ($BC \parallel AD$) prin vârful *C* duceți dreapta *CF*, paralel cu diagonala *BD* (punctul *F* aparține lui *AD*), și considerați triunghiul *ACF*. **796.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. *Indicație*. Demonstrați că unghiul de la baza mai mare a trapezului este egal cu 60°. **797.** 156 cm². *Indicație*. Fie *O* — centrul circumferinței înscrise în trapezul *ABCD* ($BC \parallel AD$). Demonstrați că triunghiul *AOB* este dreptunghic, și aflați înălțimea lui, dusă din vârful *O*. **798.** 588 cm². **799.** 2187 cm². *Indicație*. Demonstrați că diagonala trapezului dat este bisectoarea unghiului de la bază. Mai departe folosiți-vă de proprietatea bisectoarei triunghiului. **800.** 936 cm². **801.** $\frac{S}{2}$. *Indicație*. Duceți linia medie *MN* a trapezului. Demonstrați că înălțimile triunghiurilor *MCN* și *MND*, duse din vârfurile *C* și *D* sunt egale cu jumătate din înălțimea trapezului. **802.** 15 cm, 10 cm. **803.** 60°, 120°. **804.** 38 cm.

Exerciții pentru repetarea cursului de geometrie clasa a 8-a

806. 64 cm sau 74 cm. **807.** 10 cm, 18 cm. **808.** 60°. **809.** $a - b$. **811.** 1) Nu; 2 Da; 3) nu; 4) da; 5) nu; 6) da; 7) da. *Indicație*. Demonstrați că punctul de intersecție al diagonalelor le împarte în jumătate pe fiecare din ele. **812.** 1) Da; 2) da; 3) nu. **813.** 30°, 150°. **814.** 40°, 70°, 70°. **815.** 45°. **816.** 18 cm. **818.** 56 cm. **821.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm. **823.** *CD*. **824.** 70°, 110°. **825.** 30°. **828.** 80°, 100°, 150°, 30°. **829.** 4 cm, 10 cm. **830.** 1 : 2. **831.** 3 : 4. **832.** 2 : 5. **833.** 9 cm, 3 cm, 6 cm. **834.** 21 cm, 35 cm. **835.** 28 cm, 28 cm, 16 cm. **837.** $\frac{ab}{a+b}$. **838.** 21 cm, 15 cm. **840.** 25 cm. **841.** 5 cm. **842.** 10 cm. **843.** 36 cm. **844.** $(12\sqrt{5}+20)$ cm. **845.** 18 cm. **846.** 24 cm. **847.** $4\sqrt{29}$ cm, $10\sqrt{29}$ cm.

848. $\frac{65}{18}$ cm. **849.** $2\sqrt{10}$ cm. **850.** 45 cm. **851.** *а*) $\frac{S}{2}$; *б*) $\frac{3S}{8}$. **852.** 256 cm^2. **853.** $\frac{1}{2}d^2$. **854.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **855.** $\frac{b^2}{2\operatorname{tg}\beta}$. **856.** $\frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha$. **857.** $72\sqrt{3}$ cm^2. **858.** 24 300 cm^2. **859.** 6 cm.

RĂSPUNSURI LA ÎNSĂRCINĂRILE „VERIFICAȚI-VĂ” ÎN FORMĂ DE TEST

Numărul însărcinării	Numărul problemei									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	B	D	A	A	C	C	D	A	C	C
2	B	C	C	C	B	C	D	B	D	A
3	C	B	C	B	D	C	B	C	D	D
4	B	B	A	D	A	D	D	B	D	C

VOCABULAR (СЛОВНИК)

CUPRINSUL

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ
Підручник для 8 класу з навчанням румунською/молдовською мовами закладів загальної середньої освіти

2-ге видання, перероблене

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам «Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

Переклад з української мови
Перекладач *Грінчешин Іван Миколайович*
Румунською/молдовською мовами

Редактор *М. В. Товарницький*
Обкладинка *Д. В. Висоцький*
Макет, художнє оформлення,
комп'ютерна обробка ілюстрацій *Д. В. Висоцький*
Коректор *М. С. Товарницька*

Формат 60×90/16.
Ум. друк. арк. 13,00. Обл.-вид. арк. 12,28.
Тираж 2854 пр. Зам. № 21-297

Державне підприємство
«Всеукраїнське спеціалізоване видавництво «Світ»
79008 Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua; e-mail: office@svit.gov.ua, svit_vydav@ukr.net

Друк ПрАТ «Білоцерківська книжкова фабрика»
09100, Київська обл., м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, буд. 4
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 5454 від 14.08.2017