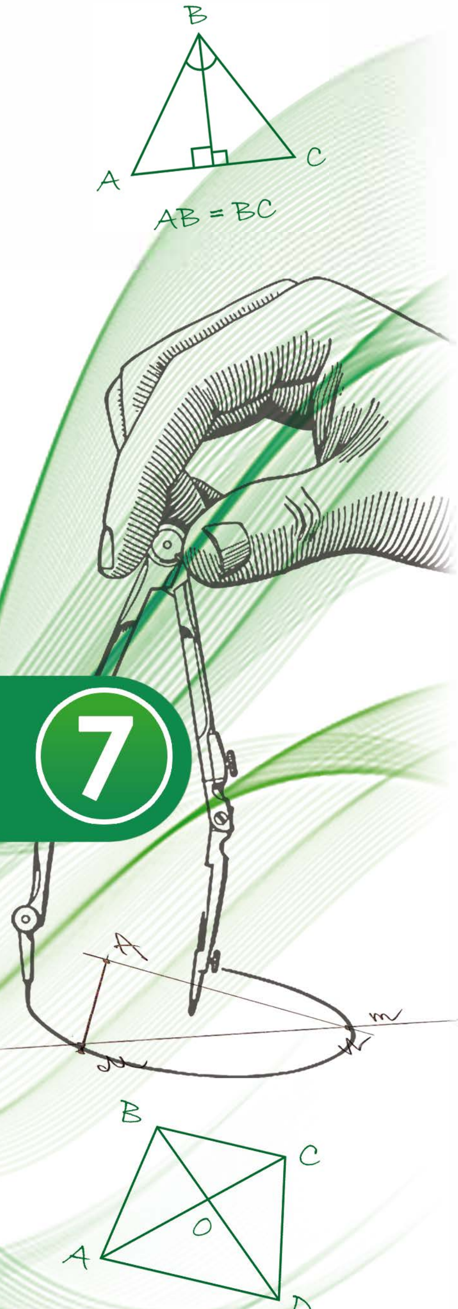
ARKAGYIJ **MERZLJAK**
MIHAJLO **JAKIR**

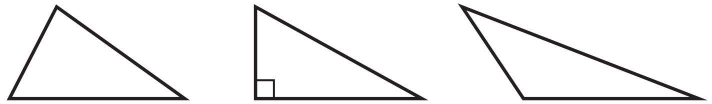
MÉRTAN 7



ВИДАВНИЦТВО «АТЛАНТ»

«Моя любов — Україна і математика» — викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві Михайлу Пилиповичу Кравчуку (1892–1942).

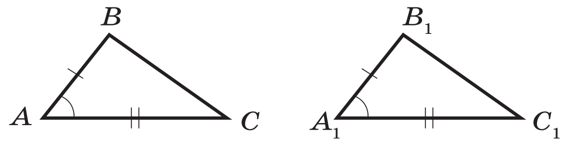
Ми сподіваємося, що це патріотичне висловлювання видатного українського математика стане для вас надійним дороговказом на шляху до професіоналізму.



Гострокутний трикутник — Прямокутний трикутник — Тупокутний трикутник

ПЕРША ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ:

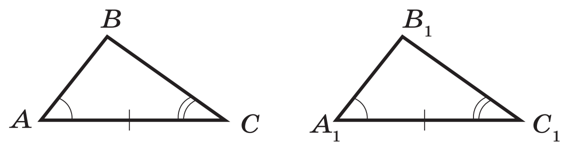
за двома сторонами та кутом між ними



Якщо $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

ДРУГА ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ:

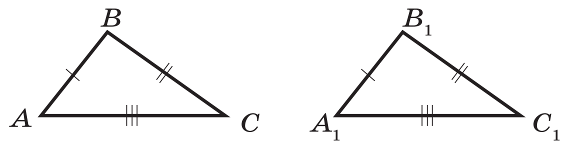
за стороною та двома прилеглими до неї кутами



Якщо $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

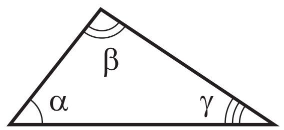
ТРЕТЯ ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ:

за трьома сторонами



Якщо $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Arkagyij Merzljak
Mihajlo Jakir

Mértan

Tankönyv az általános oktatási rendszerű tanintézetek 7. osztálya számára

Ajánlotta Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma

ВИДАВНИЦТВО АТЛАНТ
КИЇВ 2024

УДК 373.167.1:514
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 05.02.2024 № 124)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Підручник відповідає модельній навчальній програмі «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.)

Перекладено за виданням:

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрія : підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти /А. Г. Мерзляк, М. С. Якір.; переклад Поллої Д.Ф. – Київ. : ТОВ "ВИДАВНИЦТВО АТЛАНТ", 2024. – 272 с. : іл.

ISBN 978-966-474-376-8.(укр.)
ISBN 978-617-8159-39-9 (угорськ.)

УДК 373.167.1:514

ISBN 978-966-474-376-8.(укр.)
ISBN 978-617-8159-39-9 (угорськ.)

A SZERZŐKTŐL

Kedves Hetedikesek!

Most elkezditek egy új tantárgyl – a **mértan** (geometria) tanulmányozását. Figyeljétek meg, hogy a geográfia és a geometria szavakban közös a geo előtag, ami görögül földet jelent. Azonban amíg a 6. osztályban a földrajzórákon valóban a föld leírásával foglalkoztatok (grafia görögül leírást, rajzot jelent), úgy a mértanórákon nem kell földméréssel foglalkozni (metreo görögül – mérni).

A mértan az egyik legősibb tudomány. Az elnevezését azzal lehet magyarázni, hogy a mértan kialakulása és fejlődése szorosan összefügg az ember sokoldalú gyakorlati tevékenységével: a földterületek határainak kijelölésével, utak, öntözőcsatornák és egyéb létesítmények építésével, vagyis ahogyan ilyen esetben mondják, ***alkalmazott tudomány*** volt. Fokozatosan, lépésről-lépésre összegyűlt az emberi tudás és a mértan szép és tökéletes, szigorú és következetes matematikai elméletté vált. Ezzel a tudománnyal és a megszerzett tudásotok gyakorlati alkalmazásával fogtok foglalkozni a mértanórákon.

A mértan ismerete rendkívül fontos. Valóban, nézzetek körüll – mindenütt jelen van a mértan, pontosabban a **mértani alakzatok**: szakaszok, háromszögek, téglalapok, derékszögű paralelepipedonok (téglatestek), gömbök stb.

Elmélyült mértani ismeretek nélkül nem készülhettek volna bonyolult építészeti szerkezetek (1., 2. ábra), hajók és repülőgépek (3. ábra) még a gyerek-építőjátékok elemei és a hímzések mintái sem (4. ábra). A minták létrehozása megköveteli a népművésztől azt, hogy legyen elképzelése a szimmetria és a párhuzamos eltolás mértani fogalmakról. A mértan ismerete nélkül senkiből sem lehet tervezőmérnök, esztergályos, asztalos, tudós, építész, dizájner, divattervező, számítógépes grafikai szakember stb. Általánosságban a mértani ismeretekl – az emberi kultúra fontos összetevői.

a *b*

1.ábra
a – Szaljut Hotel (Kijev)
b – közigazgatási épület (London)

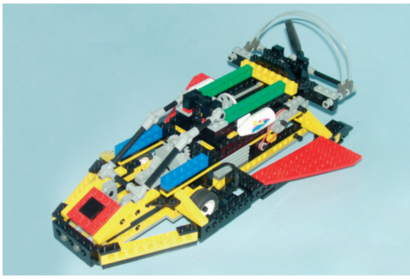
2. ábra
Szineci tv–torony Kijev

A mértan egy nagyon érdekes tantárgy. Reméljük, hogy erről rövidesen meggyőződtök, amiben segít majd ez a tankönyv is. Ismerkedjetek meg a szerkezetével.

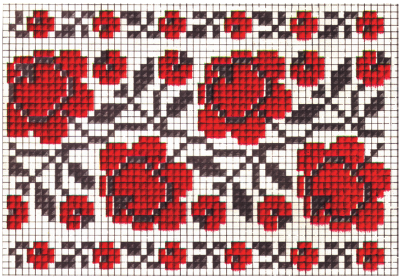
A tankönyv négy fejezetre van bontva, amelyek mindegyike leckékből áll. A leckékben található az elméleti anyag. Ezt tanulmányozva fordítsatok különös figyelmet a vastag **betűvel**, a ***vastag dőlt betűvel*** és *dőlt betűvel* szedett szövegre; a könyvben így jelölik a meghatározásokat, szabályokat és a legfontosabb matematikai állításokat.

a *b*

3.ábra Gépgyártási szerkezetek
al – hajó a mikolajivi hajógyár dokkjában;
bl – AN-225-ös (Mrija) repülőgép



a



b

4.ábra
Mértan a mindennapokban: a) – gyerek-építőjáték; b) – hímzésminta

Az elméleti anyag kifejtése általában mintafeladatok megoldásával zárul. Ezek a megoldások a feladatok egyik lehetséges kidolgozását adják meg.

A leckékhez kitűzött feladatokat önállóan oldd meg, az elméleti rész elsajátítása után. A feladatok között vannak könnyű és közepes nehézségi szintűek, illetve bonyolult feladatok is (különösen a csillaggal (*) jelzettek).

Minden lecke Figyeljétek meg, rajzoljatok, szerkesszetek, képzeljétek el rovattal zárul. Ide olyan feladatokat gyűjtöttünk össze, melyek megoldásához nincs szükség speciális geometriai ismeretekre, csak józan észre, találékonyságra és ötletességre. Ezek a feladatok olyan hasznosak, mint a vitaminok: fejlesztik a „mértani látást” és az intuíciót.

A Ukránul helyesen mondjuk és írjuk rész példákat tartalmaz a helyes ukrán matematikai kifejezésekre.

Ezenkívül a Ha elkészültél a házi feladattal részben érdekes történeteket olvashattok a mértan történetéből, különösen az ukrán tudósok hozzájárulásáról e tudomány fejlődéséhez.

Hajrá, előre! Sok sikert!

Tisztelt kollégák!

Az általános iskola keretein belül lehetetlen megvalósítani a geometria-tantárgy felépítésének formális-logikai elvét: axiómarendszert alapozni, majd deduktívan kifejteni, azaz axiómák és a korábban bizonyított tételek alapján szigorúan logikailag bizonyítani a tételeket. Ez azzal magyarázható, hogy korlátozott a deduktív gondolkodásra hajlamos tanulók száma. Valójában a legtöbb ember vizuális-figuratív gondolkodású. Ezért egy gyermek számára a nyilvánvalóságra való hivatkozás teljesen természetes és indokolt.

A fentiekre tekintettel ez a tankönyv **a vizuális-deduktív elvre épül, a részleges axiomatizálással kombinálva.**

Úgy gondoljuk, hogy az iskolai geometria tanulásának nem csak a logikus gondolkodás és a bizonyítási képesség fejlesztése a célja. A tankönyv szerzői szélesebb célt tűznek ki: pontosítani a tanulók elképzelését az elemi mértani alakzatokról (háromszög, körvonal, téglalap stb.), fejleszteni bennük a bizonyítás igényét, vagyis lerakni a deduktív és a heurisztikus gondolkodás alapjait, a legfőbb pedigl – **megtanítani a tanulókat a mértani alakzatok tulajdonságainak alkalmazására a gyakorlati és elméleti feladatok megoldása során**. Bízunk benne, hogy Önök úgy értékelik majd ezt a tankönyvet, mint olyat, amely elősegíti a kijelölt célok megvalósítását.

A könyvbe nagy és változatos didaktikai anyag került be. Azonban egy tanév alatt lehetetlen megoldani az összes feladatot, ez nem is szükséges. Ezzel együtt sokkal kényelmesebb a munka, amikor jelentős tartalék feladat áll rendelkezésre. Ez lehetővé teszi a szintek alapján történő differenciáció megvalósítását és az egyéni hozzáállást a tanulás során.

A házi feladathoz ajánlott feladatok **száma kékkel**, a szóbeli vizsgához ajánlott feladatok száma pedig **magentával van jelölve**.

Egyes bekezdésekben a szöveg egy része színes háttérre került. Ez azt az anyagot hivatott kiemelni, amelyet Ön választhatónak tekinthet.

Tehát alakítsuk át közösen a mértan iskolai tanfolyamát érthető és vonzó tantárggyá.

Alkotói ihletet és türelmet kívánunk Önöknek.

EGYEZMÉNYES JELEK

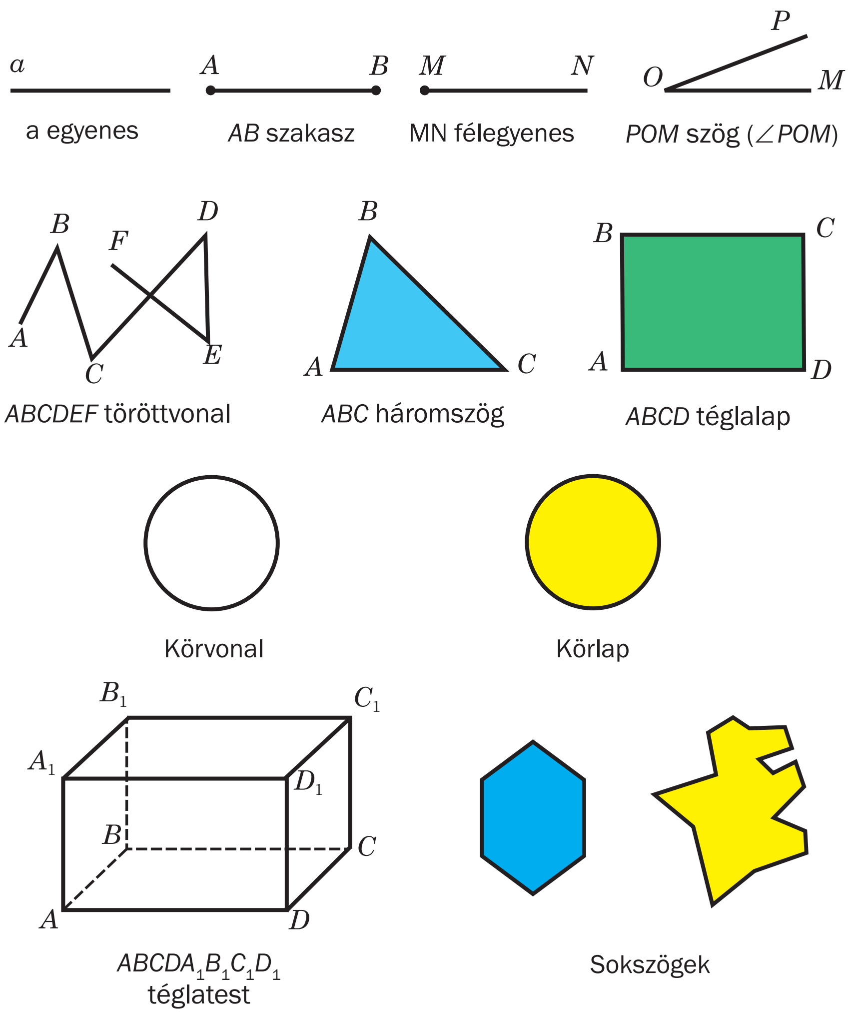
n°	az elemi és közepes tanulmányi eredményi szinteknek megfelelő feladatok;
$n^{\bullet}$	a megfelelő tanulmányi eredményi szintnek megfelelő feladatok;
$n^{\bullet\bullet}$	a magas tanulmányi eredményi szintnek megfelelő feladatok;
n^{*}	matematikai szakköröknek és fakultatív óráknak megfelelő feladatok;
	kulcsfontosságú feladatok, amelyek eredménye más feladatok megoldása során is felhasználható;
⊙	egy olyan tétel bizonyítása, amely megfelel a tudományos teljesítmény megfelelő szintjének;
	egy olyan tétel bizonyítása, amely megfelel a magas szintű tanulmányi eredménynek;
	egy olyan tétel bizonyítása, amely nem szükséges a tanuláshoz;
●	a tétel bizonyításának befejezése;
◀	a feladat megoldásának befejezése;
	az Ukránul helyesen mondjuk és írjuk rovat;
	Ha elkészültél a házi feladattal című rovat.

Az ábrákon az egyenlő szakaszok azonos számú vonalkákkal, az egyenlő szögek pedig azonos számú ívekkel vannak jelölve, kivételt képeznek azok a szakaszok és szögek, melyeket meg kell határozni.

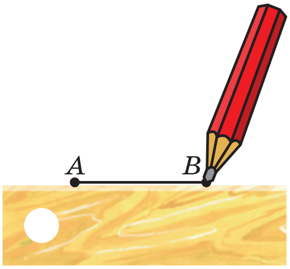
BEVEZETÉS

Mit tanulmányoz a mértan?

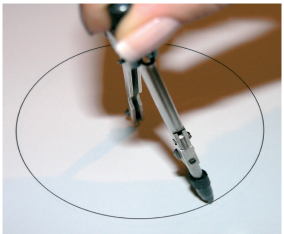
Habár a mértan új tantárgy a számotokra, azonban a matematikaórákon már megismerkedtetek ennek a bölcs tudománynak az alapjaival. így, az 5. ábrán látható összes mértani alakzat jól ismert a számotokra.



5.ábra

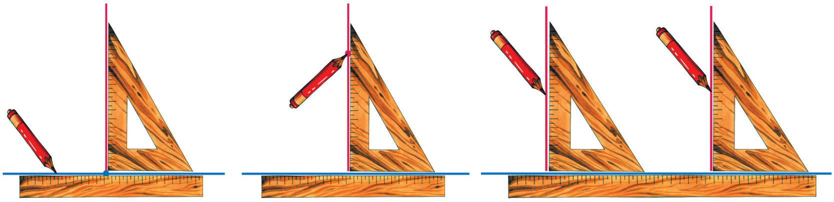


6.ábra

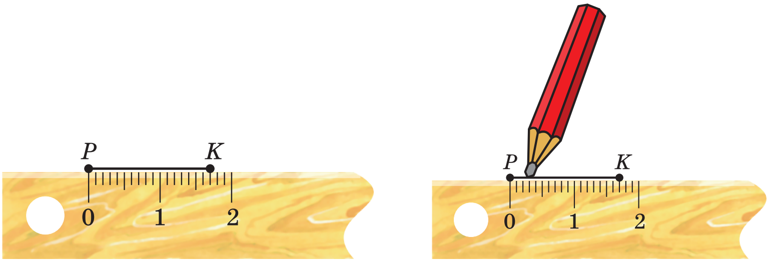


7.ábra

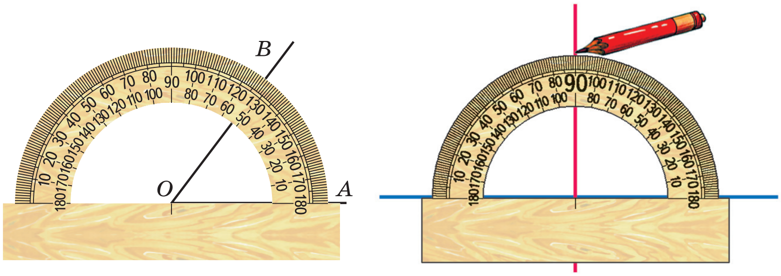
Vonalzó segítségével szakasszal tudtok összekötni két pontot (6. ábra), körző segítségével körvonalat tudtok szerkeszteni (7. ábra), egyenes és derékszögű vonalzó segítségével merőleges és párhuzamos egyeneseket tudtok rajzolni (8. ábra). Meg tudjátok mérni a szakasz hosszát és megadott hosszúságú szakaszt tudtok rajzolni milliméteres beosztású vonalzó segítségével (9. ábra), meg tudjátok határozni a szög mértékét és megadott mértékű szöget tudtak rajzolni szögmérő segítségével (10. ábra), osztályozni a háromszögeket (nézd az előzéklapot).



8.ábra



9.ábra



10.ábra

Azonban az alakzat „kinézetének” felismerése, vagy az egyszerű szerkesztések elvégzésének képességel – csupán a mértani alakzatok tulajdonságáról szóló tudomány, vagyis a *mértan alapismereteit jelentik*.

A mértan szisztematikus tanulmányozása során fokozatosan, bizonyos sorrendben fogjátok megismerni a mértani alakzatok tulajdonságait, a már ismertekét is és azokét is, melyekkel most fogtok megismerkedni.. Ez azt jelenti, hogy meg kell tanulnotok az alakzat egyes tulajdonságai alapján meghatározni, és ami a legfontosabb, **bebizonyítani** más tulajdonságait.

A mértan iskolai tanfolyamát hagyományosan **planimetriára** (síkmértanra) és **sztereometriára** (térmértanra) osztják. A planimetria síkbeli alakzatokat tanulmányozza (planum latinból fordítval – sík), a sztereometria pedig a térbeni alakzatokat (sztereosz görögből fordítval – térbeni).

Tehát elkezdjük a síkmértan tanulmányozását.

LEGEGYSZERŰBB MÉRTANI ALAKZATOK ÉS EZEK TULAJDONSÁGAIK

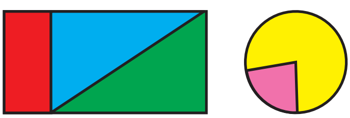
1§

Ebben a paragrafusban az előző osztályokból jól ismert alakzatokkal fogunk foglalkozni, mint például: pontok, egyenesek, szakaszok, félegyenesek és szögek.

Jobban megismerkedtek ezeknek az alakzatoknak a tulajdonságaival. Ezen tulajdonságok közül néhányat megtanultok be is **bizonyítani**. **A meghatározás, tétel, axióma szavak számotokra ismerőssé,** érthetővé és gyakran alkalmazottá válik.

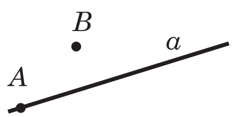
1. Pontok az egyenesek

A **pontl** – a legegyszerűbb mértani alakzat. Ez az egyetlen alakzat, amely nem bontható részekre. Például a 11. ábrán látható alakzatok részekre vannak bontva. Míg a 12. ábrán látható alakzatról, amely két pontból áll, elmondható, hogy két részből áll: az *A* és a *B* pontból.



11.ábra

12.ábra



13.ábra

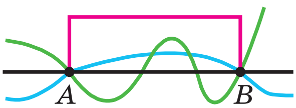
A 13. ábrán az a egyenes és két, A és *B* pont látható. Úgy mondják, *hogy az A pont az a egyeneshez tartozik, vagy az A pont az a egyenesen fekszik, vagy az a egyenes áthalad az A ponton, vagy az A pont illeszkedik az egyenesre és ennek megfelelően, a B pont nem tartozik az a egyeneshez, vagy a B pont nem fekszik az a egyenesen, vagy az a egyenes nem halad át a B ponton vagy a B pont nem illeszkedik az a egyenesre.*

Az egyenesl – meghatározott tulajdonságokkal rendelkező mértani alakzat.

Alapigazság az egyenesről. Bármely két ponton át egyenest lehet húzni, méghozzá csak is egyet.

Miért tartják úgy, hogy ez az egyenes alaptulajdonsága?

Legyen egy bizonyos vonalról csak az ismert, hogy átmegy az A és a B ponton. Ahhoz, hogy elképzeljük, hogyan is néz ki ez az alakzat, ez az információ szemmel láthatóan hiányos. Hiszen az A és a B pontokon át sok különböző vonalat lehet meghúzni (14. ábra). Az egyenest egyértelműen meghatározza ez a két pont. Éppen ebben rejlik az egyenes alapigazságának a lényege.



14.ábra

Ez az alapigazság lehetővé teszi az egyenes megjelölését két tetszőleges pontja által. Így az M és az N pontokon át meghúzott egyenest MN egyenesnek (vagy NM egyenesnek nevezik).

A mértani alakzat alapigazságát még axiómának (az axiómákról részletesebben a 6. pontban tanultok majd) is nevezik.

Ha meg kell magyarázni valamely fogalom (szakkifejezés) értelmét, akkor a **meghatározásokat** alkalmazzuk. Például:

1) *órának* nevezik az idő mérésére szolgáló műszert;

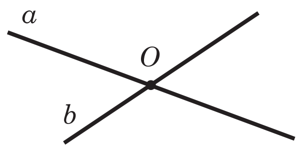
2) *a mértanl* – a matematika azon része, amely az alakzatok tulajdonságait tanulmányozza.

A meghatározásokat a mértanban is alkalmazzák.

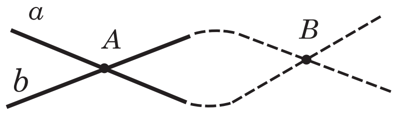
Meghatározás. A közös ponttal rendelkező két egyenest egymást metszőknek nevezik.

A 15. ábrán az a és b egyenes látható, amelyek az O pontban metszik egymást.

Gyakran egy tény igaz voltát *logikai megfontolások* segítségével állapítják meg.



15.ábra



16.ábra

Vizsgáljuk meg a következő feladatot. Ismert, hogy a Mértan utca összes lakójal – matematikus. Jenő a Mértan u. 5-ben lakik. Jenő matematikus?

A feladat feltétele szerint Jenő a Mértan utcában lakik. Mivel pedig ennek az utcának az összes lakója matematikus, így Jenől – matematikus.

A felhozott logikai megfontolásokat azon állítás **bizonyításának nevezzük**, miszerint Jenől – matematikus.

A matematikában az olyan állításokat, amelyeknek az igaz voltát bizonyítás segítségével állapítják meg, tételeknek nevezzük.

1.1. tétel. ***Bármely két egymást metsző egyenesnek, csak egy közös pontjuk van.***

Bizonyítás. ⊙ Legyen az egymást metsző a és b egyeneseknek a közös A pontjukon kívül még egy közös pontjuk, a B (16. ábra). Akkor az A és a B pontokon két egyenes megy át. Ez pedig ellentmond az egyenes alapigazságának. Tehát a feltételezés az a és b egyenesek másik metszéspontjának a létezéséről hibás.●

?

1. Melyik alakzatot nem lehet részekre bontani? **2.** Fogalmazzátok meg az egyenes alapigazságát! **3.** Az egyenes mely tulajdonsága teszi lehetővé azt, hogy két pontja megnevezésével jelöljük? **4.** Mi célból alkalmazzák a meghatározásokat? **5.** Milyen két egyenest neveznek egymást metszőnek? **6.** Hogyan nevezik azt az állítást, amelynek az igaz voltát bizonyítással állapítják meg? **7.** Fogalmazzátok meg a két egymást metsző egyenes tételét!

GYAKORLATI FELADATOK

1.° Húzzatok egy egyenest, jelöljétek m-el. Jelöljétek meg az *A* és *B* pontokat melyek illeszkednek az m egyenesre, illetve a *C,* D, *E* pontokat, amelyek nem illeszkednek rá!

2.° Jelöljétek meg az *M* és a *K* pontokat, és húzzatok rajtuk keresztül egyenest. Ezen az egyenesen jelöljétek meg az *E* pontot, írjátok le a kapott egyenes összes lehetséges megnevezését!

3.° Húzzátok meg az a és a b egyeneseket úgy, hogy metsszék egymást. Metszéspontjukat jelöljétek *C* betűvel. A *C* pont hozzátartozik-e az a egyeneshez?, a b egyeneshez?

4.° Vegyetek fel három pontot úgy, hogy azok ne illeszkedjenek egy egyenesre és minden egyes pontpáron át húzzatok egyenest! Hány egyenes keletkezett?

5.° Jelölj 4 pontot úgy, hogy semelyik 3 pont ne illeszkedjen egy egyenesre!

6.• Húzzatok három egyenest úgy, hogy közülük minden pár páronként metssze metsszék egymást! Jelöljétek meg ezeknek az egyeneseknek a metszéspontjait a metszéspontokat! Hány metszéspontot kaphatunk?

7.• Vegyetek fel négy pontot úgy, hogy bármely két ponton keresztül meghúzott egyenesek száma: 1) egy legyen; 2) négy legyen; 3) hat legyen! Húzzátok meg ezeket az egyeneseket!

GYAKORLATOK

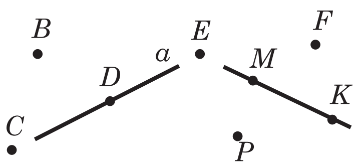
8.° A 17. ábra felhasználásával:

1) állapítsátok meg, hogy az a és az *MK* egyenesek metszik-e egymást;

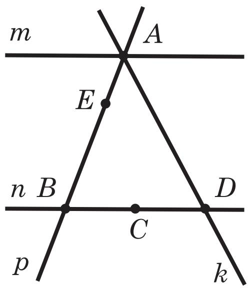
2) nevezd meg azokat a megjelölt pontokat, amelyek illeszkednek az a egyenesre; illeszkednek az *MK* egyenesre;

3) tüntessétek fel az összes megjelölt pontot, amely nem illeszkedik az a egyenesre; *MK* egyeneshez;

4) nevezzétek meg az összes megjelölt pontot, amely illeszkedik az a egyenesre, de nem illeszkedik az *MK* egyenesre!



17.ábra



18.ábra

9. A 114. ábra alapján nevezd meg:

1) a megjelölt pontok közül azokat amelyek illeszkedik a p egyenesre, és azokat amelyek nem;

2) mely egyenesekre illeszkedik az *A* pont; a *B* pont; a *C* pont; a *D* pont; az *E* pont;

3) mely egyenesek mennek át a *C* ponton; a *B* ponton; az *A* ponton;

4) mely pontban metszik egymást a k és p egyenesek; az m és n egyenesek;

5) mely pontban metszi egymást a négy ábrázolt egyenes közül három?

10.* A *C* pont az *AB* egyenesre illeszkedik. Különböznek-e az *AB* és az *AC* egyenesek? A választ indokoljátok meg!

11.• Meghúztak négy egyenest, amelyek páronként metszik egymást, méghozzá minden metszésponton át csak két egyenes megy át. Hány metszéspont keletkezett eközben?

12.•• Hogyan kell elhelyezni hat pontot úgy, hogy azok hat egyenest határozzanak meg?

13.•• Egy adott egyenest négy egyenes metszi. Hány metszéspontjuk keletkezhet ezeknek az egyeneseknek az adott egyenessel?

14.•• Négy egyenest húztak, amelyek közül mindegyik metsz egy másikat. Hány metszéspont keletkezhet?

15.•• Öt egyenest húztak, amelyek páronként metszik egymást. Mennyi ezen egyenesek metszéspontjainak legkisebb lehetséges száma? Maximálisan hány metszéspont keletkezhet?

16.* Fel lehet-e venni hat egyenesen 11 pontot úgy, hogy minden egyenesre 4 pont illeszkedjen?

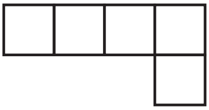
17.* A síkon három egyenest húztak. Az első egyenesen öt pontot jelöltek meg, a másodikonl – hét pontot, a harmadikon pedig három pontot. Mennyi a megjelölhető pontok legkisebb lehetséges száma?

18.* Meg lehet-e jelölni néhány pontot és meghúzni néhány egyenest úgy, hogy minden egyenesen pontosan három megjelölt pont illeszkedjen és minden ponton pontosan három egyenes menjen át?

MEGTANULJUK ALKAL*MAZNI* A MÉRTANT

19. A vonalzó egyik éle mentén húzzatok egy vonalat két ponton keresztül. Ezután fordítsátok meg a vonalzót, és húzzatok egy másik vonalat ugyan azokon a pontokon át a vonalzó ugyanazon éle mentén. Ha a vonalak egybeesnek, akkor a vonalzó jól van elkészítve. Mondd el miért!

FIGYELJÉT*EK* MEG, RAJZOLJAT*OK*, SZERKESSZET*EK*, KÉPZELJÉT*EK* EL



19.ábra

20. Rakjatok ki néhány, a 19. ábrán látható alakzatból, egy négyzetet!

2. A szakasz és a hossza

A 20. ábrán az a egyenes látható, amely átmegy az *A* és a *B* pontokon. Ezek a pontok határolják az a egyenes piros színnel jelölt részét. Az egyenesnek ezt a részét, beleértve az *A* és a *B* **pontokat is**, szakasznak nevezik, az *A* és *B* pontokat pedig e **szakasz végpontjainak**.

20.ábra

21.ábra

22.ábra

Bármely két pont esetében *egyetlen olyan szakasz létezik*, amelynek ezek a pontok a végpontjai, *vagyis a szakasz a végpontjai által egyértelműen meghatározott*. Ezért a szakaszt a végpontjai megnevezése által jelöljük. A 21. ábrán látható szakaszt például így jelölik: *MN* vagy *NM* (így olvassuk: *MN* szakasz vagy *NM* szakasz).

A 22. ábrán az *AB* szakasz és a szakaszra illeszkedő *X* pont látható, amely azonban nem esik egybe egyik végponttal sem. Az *X* pontot az *AB* **szakasz belső pontjának nevezik**. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az *X* pont az *A* és a *B* **pontok között fekszik**.

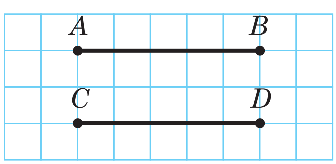
Így tehát az *AB* szakasz az *A* és a *B* pontokból, valamint az *AB* egyenes összes, *A* és *B* pontja között fekvő összes pontjából áll.

Meghatározás. Két szakaszt egybevágónak neveznek, ha egymásra helyezéssel fedésbe hozhatók.

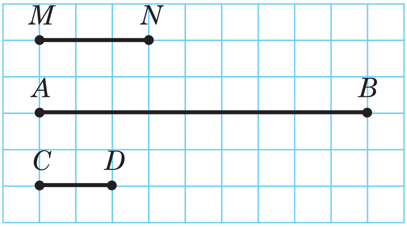
A 23. ábrán két azonos hosszúságú *AB* és a *CD* szakasz látható.

Ezt így írjuk: $AB = CD$.

Tudjátok, hogy minden szakasznak bizonyos hossza van és a megméréséhez egységszakaszt kell választani. Egységként bármely szakasz szolgálhat.



23.ábra



24.ábra

Tekintsük a 24. ábrán látható MN szakaszt egységnek. Ezt a tényt így írjuk le: $MN = 1$ egység. Akkor úgy tekintjük, hogy az AB **szakasz hossza három egység**, ezt így írjuk: $AB = 3$ egység, alkalmazzák az $AB = 3$ jelölést, ezt így olvassuk: az AB szakasz hossza 3-mal egyenlő.

A CD szakasz esetében: $CD = \frac{2}{3}$.

A gyakorlatban a leggyakrabban ezeket az egységszakaszokat használják: 1 mm, 1 cm, 1 dm, 1 m, 1 km.

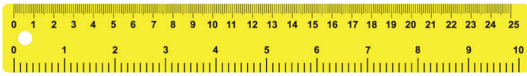
A hosszegység kiválasztásától függően változik a **szakasz hosszának mérőszáma**. Például, a 120. ábrán adódik: $AB = 17$ mm vagy $AB = 1{,}7$ cm vagy $AB = 0{,}17$ dm stb.

25.ábra

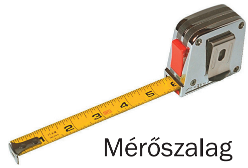
A termelésben és a mindennapokban sokféle eszközt használnak a szakaszok hosszának a meghatározására (26. ábra): beosztással ellátott vonalzót, mérőszalagot, tolómércét, mikrométert, terepkörzőt.

Az egybevágó szakaszoknak egyenlő a hosszuk és megfordítva, ha a szakaszok hossza egyenlő, akkor maguk a szakaszok is egybevágók.

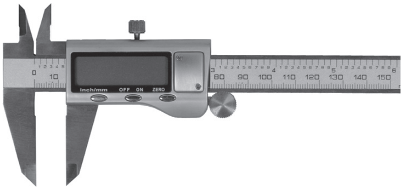
Ha az AB szakasz hossza nagyobb, mint az MN szakaszé, akkor azt mondják, hogy az AB szakasz nagyobb, mint az MN és így jelölik: $AB > MN$. Ugyanígy mondhatjuk, hogy az MN szakasz kisebb, mint az AB, ezt így írjuk: $MN < AB$.



Beosztással ellátott vonalzó

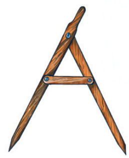


Mérőszalag



Tolómérce

Mikrométer



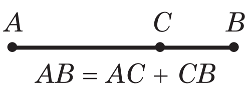
Terepkörző

26.ábra

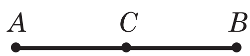
A továbbiakban „a szakaszok összegéről” szólva e szakaszok hosszának összegére gondolunk.

A szakasz hosszának alapigazsága. Ha a *C* pont az *AB* szakasz belső pontja, akkor az *AB* szakasz egyenlő az *AC* és a *CB* szakasz összegével (27. ábra), vagyis

$$AB = AC + \boldsymbol{CB}.$$



27.ábra



28.ábra

Meghatározás. Az *A* és a *B* pontok közötti távolságot az *AB* szakasz hosszának nevezzük. Ha az *A* és a *B* pontok egybeesnek, akkor úgy tekintjük, hogy a köztük lévő távolság nulla.

Meghatározás. Az *AB* szakasz felezőpontjának, ennek a szakasznak azt a *C* pontját nevezzük, amelyre nézve *AC* = *CB*.

A 28. ábrán a *C* pont az *AB* szakasz felezőpontja.

Gyakran, a „Határozzuk meg a szakasz hosszát!” helyett, „Határozzuk meg a szakaszt!” mondunk.

Feladat. Az A, B, és C pontok egy egyenesre illeszkednek, $AB = 8$ cm, az AC szakasz 2 cm-el hosszabb a BC-nél. Határozzátok meg az AC és a BC szakaszokat!

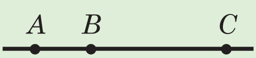
Megoldás. A feltételben nincs kikötve, milyen az adott pontok kölcsönös helyzete. Ezért megvizsgálunk három lehetséges esetet.

1) A B pont az AC szakasz belső pontja (29. ábra). Akkor az AC szakasz az AB szakasznyival, vagyis 8 cm-el hosszabb a BC szakasznál. Ez ellentmond a feltételnek. Tehát ez az eset nem lehetséges.

2) A C pont az AB szakasz belső pontja (30. ábra). Ebben azesetben $AC + BC = AB$. Legyen BC = x cm, akkor AC = (x + 2) cm. Adódik:

$$x + 2 + x = 8;$$
$$x = 3.$$

Tehát, $BC = 3$ cm, $AC = 5$ cm.



29.ábra

30.ábra

31.ábra

3) Az A pont a BC szakasz belső pontja (31. ábra). Ebben azesetben $AB + AC = BC$, és akkor $AC < BC$. Ez ellentmond a feltételnek. Tehát ez az eset nem lehetséges.

Felelet: $AC = 5$ *cm,* $BC = 3$ *cm.*

?

1. Hány olyan szakasz létezik, amelyek végpontjai két megadott pont? **2.** Milyen két szakaszt neveznek egybevágónak? **3.** Lehet-e bármely szakaszt egységszakasznak tekinteni? **4.** Mit mondhatunk az egybevágó szakaszok hosszáról? **5.** Mit mondhatunk azokról a szakaszokról, amelyek hossza megegyezik? **6.** Fogalmazzátok meg a szakasz hosszának alapigazságát. **7.** Mit nevezünk két pont közötti távolságnak? **8.** Mely pontot nevezik az *AB* szakasz felezőpontjának?

В українській мові у словах на означення довжини, складовою частиною яких є слово «метр», наголошуємо останній склад: *міліме́тр, сантиме́тр, дециме́тр*. А от у назвах вимірювальних приладів наголос падає на передостанній склад: *баро́метр, спідо́метр, термо́метр, мікро́метр*.

GYAKORLATI FELADATOK

21.° Vegyetek fel a síkon egy A és egy B pontot, és húzzatok rajtuk keresztül egy egyenest! Jelöljétek meg az AB szakaszhoz tartozó C, D és E pontokat, valamint az F, M és K pontokat, amelyek nem tartoznak az AB szakaszhoz, de hozzátartoznak az AB egyeneshez!

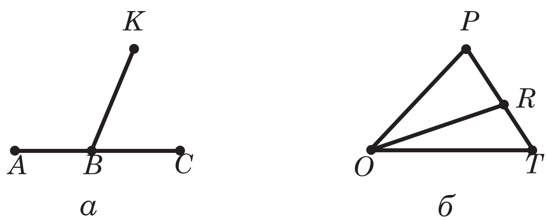
22. Húzzatok egy egyenest, és vegyetek fel azon három pontot. Hány szakasz keletkezett?

23.° Jelöljétek meg az egyenesen az A, B, C és D pontokat úgy, hogy a C pont az A és B pont között, a D pont pedig a B és C pont között legyen!

24.° Vegyetek fel egy egyenesen az A, B és C pontokat úgy, hogy teljesüljön az $AC = AB + BC$ egyenlőség!

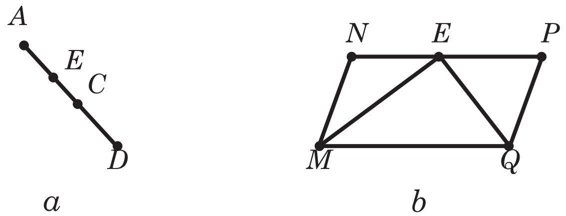
GYAKORLATOK

25. Nevezzétek meg a 32. ábrán látható összes szakaszt!



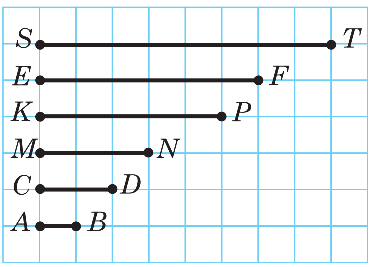
32.ábra

26.° Írjátok le a 33.ábrán látható összes szakasz nevét!



33.ábra

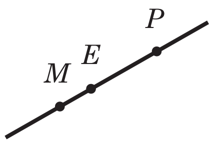
27.° Határozzátok meg a 34. ábrán látható összes szakasz hosszát, ha az egységszakasz egyenlő az: 1) *AB* szakasszal; 2) *MN* szakasszal!



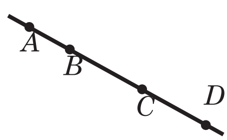
34.ábra

28.° A 35. ábrán jelölt pontok közül melyik van a másik kettő között? Írjátok fel a megfelelő egyenlőséget, amely a szakaszhossz alapigazságából következik!

29.° Mely pontok között fekszik a *B* pont (36. ábra)? Minden esetben írjátok le a megfelelő egyenlőséget, amely a szakasz hosszának alaptulajdonságából következik!



35.ábra



36.ábra

30.° A D pont az ME szakasz belső pontja. Határozzátok meg:

1) az M és E pont közötti távolságot, ha MD = 1,8 dm, DE = 2,6 dm;

2) az MD szakasz hosszát, ha ME = 42 mm, DE = 1,5 cm!

31.° Az A, B és C pontok egy egyenesre illeszkednek (37. ábra). Melyik állítás lesz igaz:

1) $AB + BC = AC$; 2) $AC + AB = BC$?

37.ábra

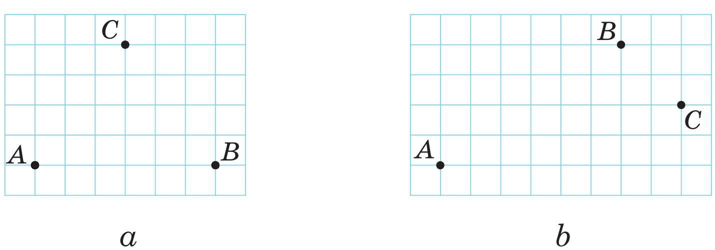
32.° A K pont az MN szakasz felezőpontja. Fedésbe hozhatók-e

1) az MK és KN szakaszok;

2) az MK és MN szakaszok?

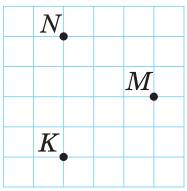
33.° A K pont az MN szakasz felezőpontja, az E pont pedig a KN felezőpontja, EN = 5 cm. Határozzátok meg az MK, ME és MN szakaszokat!

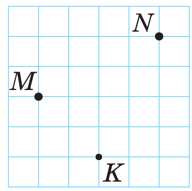
34.° Egy négyzetrácsos lapon az A, B és C pontok vannak jelölve (38. ábra). Határozzátok a C pont és az AB szakasz felezőpontjának távolságát, ha a négyzetács oldalának hossza 5 mm!



38.ábra

35.° Egy négyzetrácsos lapon az M, N és K pontok vannak jelölve (39. ábra). Határozzátok az M pont és az NK szakasz felezőpontjának távolságát, ha a négyzetács oldalának hossza 5 mm!





39.ábra

36. ° A C pont a 20 cm hosszúságú AB szakasz belső pontja. Határozzátok meg az AC és BC szakaszok hosszát, ha:

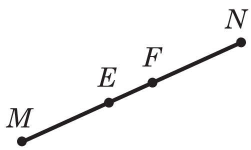
1) az AC szakasz 5 cm-el hosszabb a BC szakasznál;
2) az AC szakasz 4-szer kisebb a BC szakasznál;
3) $AC : BC = 9 : 1$ 1!

37.° A K pont a 28 cm hosszúságú CD szakaszra illeszkedik. Határozzátok meg a CK és KD szakaszokat, ha:

1) a CK szak asz 4 cm -rel kisebb a KD szakasznál;
2) a CK szak asz 6-szor nagyobb a KD szakasznál;
3) $CK : KD = 3 : 4$!

38.• Az AB és a CD szakaszok egyenlők (40. ábra). Igazoljátok, hogy az AC és BD szakaszok is egyenlők!

40.ábra



41.ábra

39.• Az ME és FN szakaszok egyenlők (41.ábra). Bizonyítsátok be, hogy az $MF = EN$!

40.• A *C* pont az a hosszúságú *AB* szakaszt két részre osztja. Határozzátok meg az *AC* és a *BC* szakaszok felezőpontjai közötti távolságot!

41.• Az A, *B* és *C* pontok egy egyenesen fekszenek. Határozzátok meg a *BC* szakaszt, ha *AB* = 24 cm, *AC* = 32 cm. Hány megoldása van a feladatnak?

42.•• Egy egyenesen feltüntették az A, *B* és *C* pontokat úgy, hogy *AB* = 15 cm, *AC* = 9 cm. Határozzátok meg az *AB* és *AC* szakaszok felezőpontjai közötti távolságot!

43.• Az *EF* szakasz 12 cm. Határozzátok meg az *EF* egyenesen az összes olyan pontot, amelyek mindegyike az *EF* szakasz végpontjaitól mért távolságainak összege egyenlő: 1) 12 cm, 2) 15 cm; 3) 10 cm!

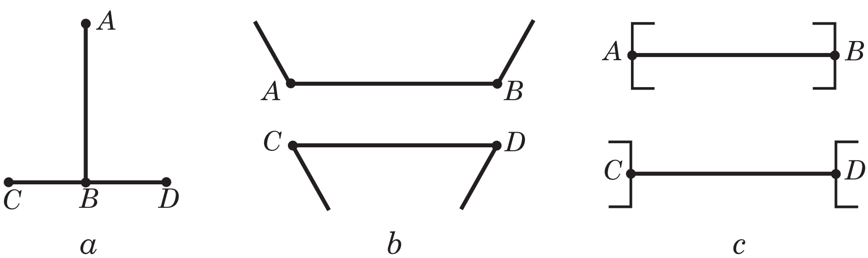
44.• Az *A* és *B* pontokon át egyenest húztak. Hol helyezkedik el ezen az egyenesen az a *C* pont amely a *B* ponttól kétszer akkora távolságra van, mint az *A* ponttól?

45.•• A 32 cm hosszú szakaszt három nem egybevágó szakaszra osztották . A szélső szakaszok felezőpontjai közötti távolság 18 cm. Határozzátok meg a középső szakasz hosszát!

46.•• Legkevesebb hány belső pontot kell felvenni az *AB* egyenesen az *A* és *B* pontok között, ahhoz hogy az *AB* szakasszal együtt 6 szakasz keletkezzen?

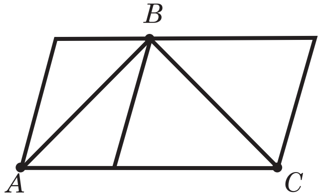
MEGTANULJUK ALKALMAZNI A MÉRTANT

47. Hasonlítsátok össze szemre az *AB* és *CD* szakaszokat (42 ábra). Méréssel ellenőrizzétek a saját következtetéseteket!



42.ábra

48. Haronlítsátok össze az AB és BC szakaszokat (43. ábra)! Méréssel ellenőrizzétek a saját következtetéseteket!



43.ábra

44.ábra

49. Egy vonalzó skáláján egyes beosztások az lekoptak, és csak a 0 cm-es, 5 cm-es és 13 cm-es beosztások maradtak meg (44. ábra). Hogyan lehet ezzel a vonalzóval olyan szakaszt rajzolni, melynek hossza: 1) 3 cm; 2) 2 cm; 3) 1 cm?

50. Egy vonalzó skáláján egyes beosztások az idők folyamán lekoptak, és csak a 0 cm-es, 7 cm-es és 11 cm-es beosztások maradtak meg. Hogyan lehet ezzel a vonalzóval olyan szakaszt rajzolni, melynek hossza: 1) 8 cm; 2) 5 cm?

FIGYELJÉT*EK* MEG, RAJZOLJAT*OK*, SZERKESSZET*EK*, KÉPZELJÉT*EK* EL

51. Az 1×1, 1×2, 1×3, ..., 1×13 méretű téglalapokból rakjatok ki egy olyan téglalapot, amelynek oldalai nagyobbak egynél!

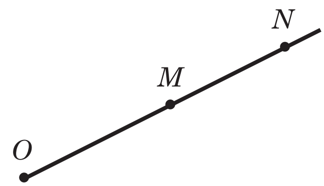
3. Félegyenes. Szög. Szögmérés

Meghúzzuk az AB egyenest és megjelölünk rajta egy tetszőleges O pontot. Ez a pont két részre osztja az egyenest, amit különböző színnel jelöl a 45. ábra Mindkét részt, az O pontot is beleértve, **félegyenesnek nevezzük**. Az O pontot a **félegyenes kezdőpontjának nevezzük**.

A 45. ábrán látható két félegyenes mindegyike az O pontból és az AB egyenes összes, az *O ponttól azonos oldalra eső pontjából áll.*

Ez lehetővé teszi a félegyenest két pontjával jelölni: elsőként kötelezően a félegyenes kezdőpontját nevezik meg, másodikként pedig bármely, a félegyeneshez tartozó pontot, így például, az *O* kezdőpontú félegyenest (46. ábra) jelölhetjük *OM*-mel vagy ON-nel.

45.ábra



46. ábra

Az *OA* és *OB* félegyenesek egyenessé egészítik ki egymást (45. ábra). Állíthatjuk, hogy ezeknek a félegyeneseknek az egyesítése – egyenes lesz?

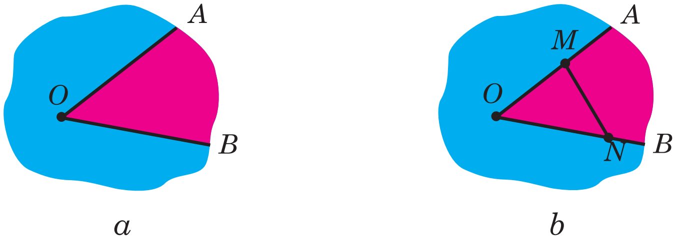
Meghatározás. Két félegyenest, amelyeknek közös a kezdőpontjuk és egy egyenesre illeszkednek, kiegészítő (komplementer) félegyeneseknek nevezünk.

47.ábra

Például a *BC* és *BA* félegyenesekl – kiegészítő félegyenesek (47. ábra). Egyesítésük az *AC* egyenes. Megjegyezzük, hogy a CA és az *AC* félegyenesek egyesítése ugyancsak az *AC* egyenes. Azonban ezek a félegyenesek már nem kiegészítők: nincs közös kezdőpontjuk.

A 48. a ábrán egy alakzat látható, amely két, *OA* és *OB* félegyenesből áll, amelyeknek közös a kezdőpontjuk. Ez az alakzat a síkot két részre osztja, amelyeket másmás szín jelöl. Mindegyik részt, az *OA* és az *OB* félegyenesekkel együtt **szögnek** nevezzük.

Az *OA* és az *OB* **félegyeneseket a szög** szárainak, az *O* pontot pedig a **szög csúcsának** nevezzük.

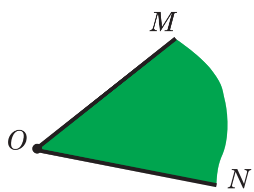


48.ábra

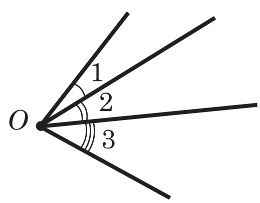
Amint látjuk, a 48. a ábra szögei külsőleg jelentősen különböznek. Ezt a különbséget a következő tulajdonság határozza meg. Az OA és OB félegyeneseken kiválasztunk két tetszőleges M és N pontot (48. *b* ábra). Az MN szakasz a zöld szöghöz tartozik, a kék szöghöz viszont csak a szakasz végpontjai.

A továbbiakban a szög alatt csak azt értjük, amely bármely olyan szakaszt tartalmaz, amelynek a végpontjai a szög szárain vannak. Azokat az esetek, amikor olyan szögeket vizsgálunk, amelyekre nézve nem teljesül ez a feltétel, külön kiemeljük.

A szögek jelölésének néhány módja létezik. A 49. ábrán látható szöget jelölhetjük így: $\angle MON$, vagy $\angle NOM$, vagy egyszerűen $\angle O$ (így olvassuk: MON szög, NOM szög, O szög).



49.ábra

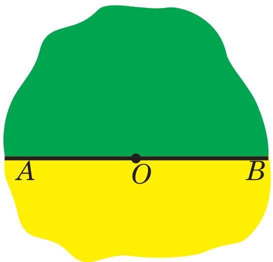


50.ábra

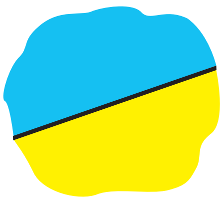
Az 50. ábrán néhány szög látható, amelyeknek közös a csúcsuk. Itt a szög jelölése a csúcsa egy betűje által zavart okozhat.

Ezekben az esetekben a szögeket számokkal kényelmes megjelölni: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ (ennek megfelelően olvassuk: egyes szög, kettes szög, hármas szög).

Meghatározás. Az olyan szöget, amelyek a szárai kiegészítő félegyenesek, egyenesszögnek nevezzük.



51.ábra

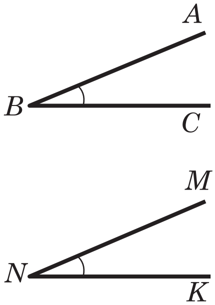


52.ábra

Az 51. ábrán az *OA* és az *OB* félegyenesek kiegészítő félegyenesek, ezért a zöld és sárga színnel kiemelt szögek egyenesszögek lesznek.

Bármely egyenes a síkot két **félsíkra osztja**, melyeknek az adott egyenes a **határoló egyenesük** (52. ábra). Úgy tekintjük, hogy az egyenes mindkét félsíkhoz hozzátartozik, amelyeket határol. Mivel pedig az egyenesszög szárai egyenest alkotnak, úgy elmondható, hogy az egyenesszög olyan félsík, amelynek a határoló egyenesén megjelöltek egy pontot, a szög csúcsát.

Meghatározás. Két szöget egyenlőnek vagy egybevágónak mondunk, ha egymásra helyezéssel fedésbe hozhatók.



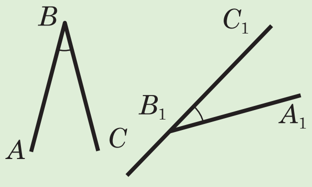
53.ábra

A 53. ábrán két egyenlő szög látható, az *ABC* és az *MNK*.

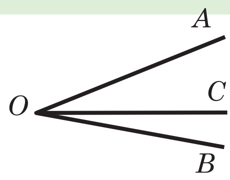
Ezt így jelölik: $\angle ABC = \angle MNK$.

Érthető, hogy minden egyenesszög egyenlő.

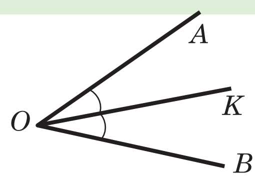
A szög felmérés alapigazsága. Egy adott ABC szögre és egy adott B_1C_1 félegyenesre egyetlen olyan $A_1B_1C_1$ szög létezik, amely egyenlő az adott szöggel, és a C_1 pontja az adott félsíkhoz tartozik (54.ábra).



54.ábra



55.ábra



56.ábra

Az 55.ábrán az AOB szög látható, és az OC félegyenes a szöghöz tartozik, de különbözik a szög száraitól. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az OC félegyenes az AOB *szög szárai között megy át és azt két szögre, az* AOC –re és COB -re osztja.

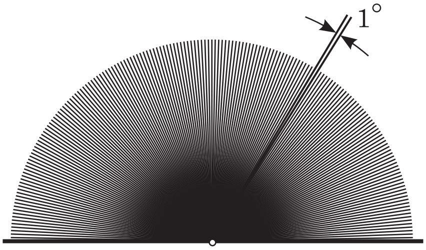
Meghatározás. A szög szögfelezőjének a szög csúcsából kiinduló félegyenest nevezik, amely az adott szöget két egyenlő szögre osztja.

Az 56. ábrán az OK félegyenes az AOB szög szögfelezője. Tehát $\angle AOK = \angle KOB$.

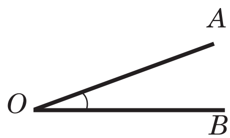
Tudjátok, hogy minden szögnek bizonyos mértéke van. A méréséhez ki kell választani a mértékegységetl – az **egységszöget**. Kiválasztása a következőképpen történhet. Felosztjuk 180 egyenlő részre az egyenesszöget (57. ábra). A két szomszédos félegyenes által alkotott szöget egységnek tekintjük. Mértékét **foknak** nevezik és így jelölik: 1°.

Például az AOB szög fokmértéke (nagysága) (58. ábra) 20° (ezt könnyű szögmérő segítségével ellenőrizni). Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az AOB szög 20°-os, így jelöljük: $\angle AOB = 20°$.

A szög elfogadott meghatározásából következik, *hogy az egyenesszög fokmértéke* **180°**.



57.ábra



58.ábra

Az 59. a ábrán ősi fokmérő műszer, az asztrolábium (görögből _ a csillagokat megragadó) látható. Sok évszázadon át éppen ez a műszer segített a tengerészeknek megtalálni az utat, a csillagászoknak pedig meghatározni a csillagok helyzetét. Napjainkban a gyakorlatban szögmérésre használják az asztrolábiumot (59. *b* ábra), valamint egyéb, speciális rendeltetésű műszert: a teodolitot (60. ábra) a terepen végzett mérésekhez, periszkópos tájolóműszert (61. ábra) a tüzérségnél, a sextánst (62. ábra) a tengerészetnél.

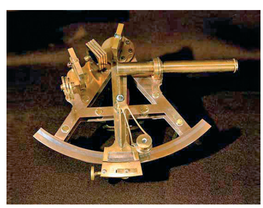
a

b

59.ábra. asztrolábiumot
a– régi;
b– korszerű

60.ábra.
Teodolit

61.ábra. periszkópos tájolóműszert



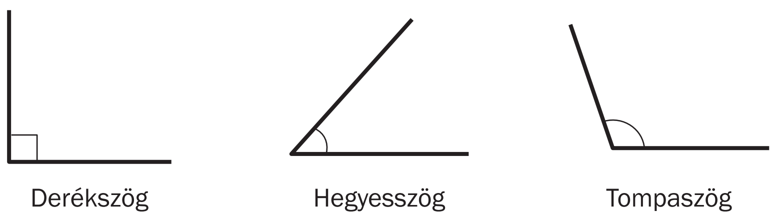
62.ábra.
Szextáns

A szögek még pontosabb méréséhez a fokok törtrészeit használják: 1/60 egyenlő egy szögperccel (1'), vagyis 1° = 60'; a perc 1/60 át szögmásodpercnek nevezik (1"), vagyis 1'= 60".

Például a 23° 15' 11" azt jelenti, hogy a szög fokmértéke 23 fok 15 perc 11 másodperc. Léteznek egyéb szög mértékegységek: a tengerjárók például a hajózási vonást használják. 1 hajózási vonás egyenlő 11° 15'.

Meghatározás. A 90° fokmértékű szöget derékszögnek nevezzük . A 90° fokmértéknél kisebb szöget hegyesszögnek nevezzük. A 90° fok mértéknél nagyobb, de 180°-nál kisebb szöget tompaszögnek nevezzük.

A 63. ábrán ez a háromféle szög látható.



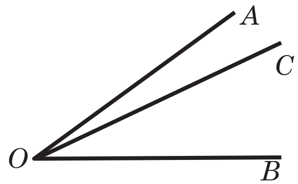
63.ábra

Az egybevágó szögek mértéke egyenlő, és megfordítva, ha szögek mértéke megegyezik, maguk a szögek is egybevágók.

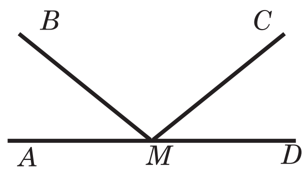
Ha az ABC szög mértéke nagyobb az MNP szögénél, akkor azt mondjuk, hogy az ABC szög nagyobb, mint az MNP és így jelölik: $\angle ABC > \angle MNP$. Azt is mondják, hogy az MNP szög kisebb, m int az ABC szög, ezt így írják: $\angle MNP < \angle ABC$.

A továbbiakban a szögek összegéről szólva a szögek mértékének összegére gondolunk.

A szögmérés axiómája. Ha az *OC* félegyenes az *AOB* szöget két szögre, *AOC*-rc, és C*OB*-re osztja, akkor $\angle \boldsymbol{AOB} = \angle \boldsymbol{AOC} + \angle \boldsymbol{COB}$ (64. ábra).



64.ábra



65.ábra

Feladat. A 65. ábrán az AMDl – egyenes szög $\angle AMC = \angle DMB$, $\angle BMC = 118°$. Határozzátok meg az *AMB* szöget.

Megoldás . Adva van: $\angle AMC = \angle AMB + \angle BMC$,

$$\angle DMB = \angle DMC + \angle BMC.$$

Mivel $\angle AMC = \angle DMB$, ezért $\angle AMB = \angle DMC$.

Leírhatjuk, hogy:

$\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD = \angle AMD = 180°$.

Akkor $2\angle AMB + 118° = 180°$. Ebből adódik, hogy

$\angle AMB = 31°$.

Felelet: 31ϒ.

?

1. Milyen két félegyenest nevezünk kiegészítőknek? **2.** Milyen szöget nevezünk egyenesszögnek? **3.** Milyen szögeket nevezünk egyenlőknek? **4.** Mi a szögfelező? **5.** Milyen mértékegységben mérjük a szögeket? **6.** Mennyi az egyenesszög fokmértéke? **7.** Hogyan nevezik a 90° mértékű szöget? **8.** Milyen szöget nevezünk hegyesszögnek? Milyen szöget nevezünk tompaszögnek? **9.** Mi mondható el az egybevágó szögek fokmértékéről? **10.** Mi mondható el az azonos fokmértékű szögekről? **11.** Fogalmazzátok meg a szögmérés axiómáját!

GYAKORLATI FELADATOK

52.° Húzzatok két, *AB* és *AC* félegyenest úgy, hogy azok ne legyenek egymás kiegészítő félegyenesei. Húzzátok meg mindkét félegyenes kiegészítőfélegyenesét. Jelöljétek meg, és írjátok le az összes keletkezett félegyenest!

53.° Húzzatok egy *AB* szakaszt és két félegyenest, az *AB*-t és a *BA*-t. Kiegészítő félegyenesei-e egymásnak ezek a félegyenesek? A választ indokoljátok meg!

54.° Rajzoljatok egy *MNE* szöget, és húzzátok meg a szárai között az *NA* és *NC* félegyeneseket. Írjátok le az összes így kapott szöget!

55.° Húzzátok meg az *OA*, *OB*, *OC* és *OD* félegyeneseket úgy, hogy az *OC* félegyenes az *AOB* szög, az *OD* félegyenes pedig a *BOC* szög szárai között legyen!

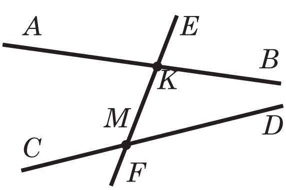
56.* Rajzoljatok két félegyenest úgy, hogy a közös részük: 1) pont; 2) szakasz; 3) félegyenes legyen!

GYAKORLATOK

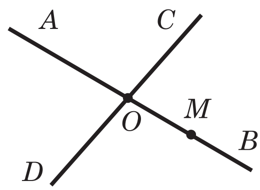
57.° Az *EF* egyenes metszi az *AB* és a *CD* egyeneseket (66. ábra).

Nevezzétek meg:

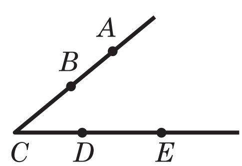
1) az összes félegyenest, amelyek kezdőpontja az *M* pont;
2) az összes *K* kezdőpontú kiegészítő félegyenes-párt!



66.ábra



67.ábra



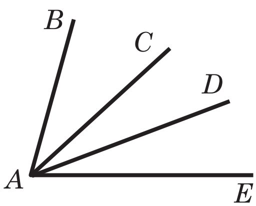
68.ábra

58.° Írjátok le az összes félegyenest, amely a 67. ábrán látható. Nevezzétek meg, közülük azokat, melyek az *O* kezdőpontú kiegészítő félegyenesek!

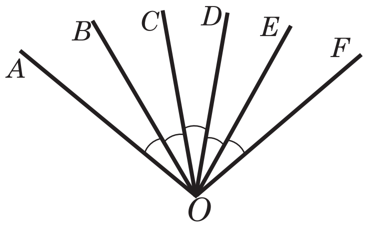
59.° Lehet-e a 65. ábrán látható szögeket így jelölni:

1) $\angle ABC$; 3) $\angle ADC$; 5) $\angle ACE$; 7) $\angle BDE$;
2) $\angle ACD$; 4) $\angle DCA$; 6) $\angle BCD$; 8) $\angle ECD$?

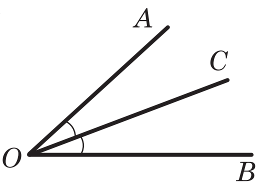
60.° Írjátok le az összes szöget, amelyeket a 165. ábrán láthatunk!



69.ábra



70.ábra



71.ábra

61.° *A* 70.ábrán

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF.$$

1) Melyik félegyenes az *AOC* szög szögfelezője? A *DOF*-é szögé? A *BOF*- é szögé?

2) Mely szögnek a szögfelezője az *OC* félegyenes?

62.° *A* 71. ábrán az *OC* félegyenes az *AOB* szög szögfelezője. Fedésbe hozhatók-e:

63.° A *BD* félegyenes az *ABC* szöget két szögre osztja. Határozzátok meg:

1) az *ABC* szöget, ha $\angle ABD = 54°$, $\angle CBD = 72°$;
2) a *CBD* szöget, ha $\angle ABC = 158°$, $\angle ABD = 93°$.

64.° Az OP félegyenes az *MOK* szárai között halad át. Határozzátok meg az *MOP* szöget, ha $\angle MOK = 172°$, $\angle POK = 85°$.

65.° Egy szög fokmértéke: 1) 28°; 2) 162°. Mekkora az a szög, melyet a szögfelező és az adott szög szára zár be?

66.° Határozzátok meg annak a szögnek a mértékét, melynek a szögfelezője és egyik szára 1) 43°-os; 2) 65°-os szöget zár be!

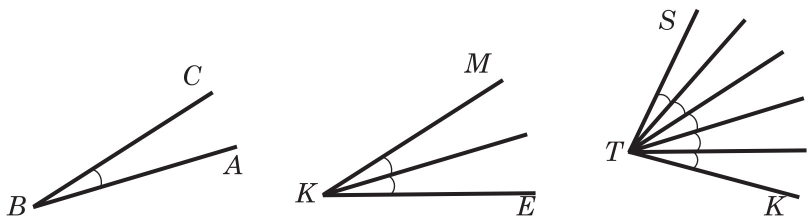
67.° Igaz-e az állítás:

1) bármely, a tompaszögnél kisebb szög az hegyesszög;
2) az egyenesszögnél kisebb szög az tompaszög;
3) a tompaszögnél 2-szer kisebb szög az hegyesszög;
4) két hegyesszög összege nagyobb a derékszögnél;
5) az egyenesszögnél 2-szer kisebb szög nagyobb bármely hegyesszögnél;
6) a derékszögnél nagyobb szög az tompaszög?

68.° A *CE*F szög 152°-os, az *E*M félegyenes a szárai között megy át, a *CE*M szög 18°-kal nagyobb az *FEM* szögnél. Határozzátok meg a *CE*M és *FEM* szögeket.

69.° Az *AK* félegyenes a *BAD* szöghöz tartozik. Határozzátok meg a *BAK* és *DAK* szögeket, ha a *BAK* szög 7-szer kisebb a *DAK* szögnél és $\angle BAD = 72°$.

70.° A 72. ábrán körívek jelzik az egyforma szögeket. Határozzátok meg az *ABC*, *MKE* és *STK* szögeket, ha az egységszög: 1) az *ABC* szög; 2) az *MKE* szög lesz!

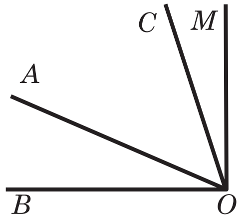


72.ábra

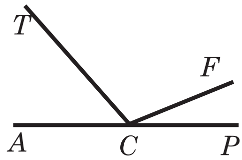
71.• A B*OM* derékszög csúcsából (73.ábr) két félegyenest húztunk az *OA*-t és az *OC*-t úgy, hogy a $\angle BOC = 74°$, $\angle AOM = 62°$. Határozzátok meg az *AOC* szöget!

72.• A *ACP* egyenesszög csúcsából (74.ábr) két félegyenest húztunk az *CT*-t és az *CF*-t úgy, hogy a $\angle ACF = 158°$, $\angle TCP = 134°$. Határozzátok meg az *TCF* szöget!

73.• Az *A*, *B* és *C* pontok úgy helyezkednek el az egyenesen, hogy *AB* = 3,2 cm, *AC* = 4,8 cm, *BC* = 8 cm. Az *AB* és *AC* félegyenesek kiegészítőfélegyenesek-e?

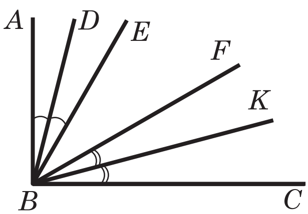


73.ábra

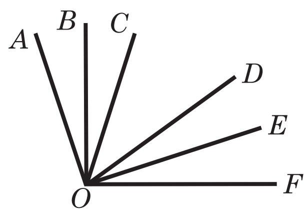


74.ábra

74.• *A* 75. ábrán az *ABC* szög derékszög, $\angle ABE = \angle EBF = \angle FBC$, a *BD* és *BK* félegyenesek pedig megfelelően, az *ABE* és *FBC* szögek szögfelezői. Határozzátok meg a *DBK* szöget!



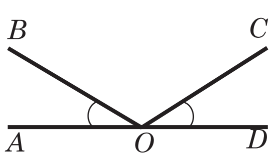
75.ábra



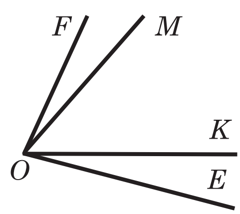
76.ábra

75.• *A* 76. ábrán az $\angle AOC = \angle COD = \angle DOF$, a *OB* és *OE* félegyenesek pedig megfelelően, az *AOC* és *DOF* szögek szögfelezői. $\angle BOE = 72°$. Határozzátok meg a *AOF* szöget!

76.• *A* 77.ábrán az $\angle AOB = \angle DOC$. Ezen az ábrán vannak e még más egyenlő szögek? A válaszotokat magyarázzátok meg!



77.ábra

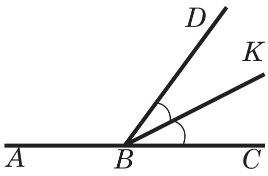


78.ábra

77.• Az *FOK* és *MOF* szögek egyenlők (78.ábra). Egyenlők-e az F*OM* és KOE szögek?

78.• Az ABC szög egyenesszög, a BK félegyenes szögfelezője a CBD szögnek, $\angle ABK = 146°$ (79.ábra). Határozzátok meg a CBD szöget!

79.• Az ABC egyenesszög, a BK félegyenes a CBD szög szögfelezője, $\angle CBD = 54°$ (79.ábra). Határozzátok meg az ABK szöget!



79.ábra

80.• Hány fokkal fordul el egy perc alatt: 1) a percmutató; 2) az óramutató?

81.• Határozzátok meg az óra mutatói által bezárt szöget, ha: 1) 3 órát; 2) 6 órát; 3) 4 órát; 4) 11 órát; 5) 7 órát mutatnak!

82.•• Az ABC szög 30°-kal egyenlő, a CBD pedig 80°-kal. Határozzátok meg az ABD szöget. Hány megoldása van a feladatnak?

83.•• Határozzátok meg az MOK szöget, ha $\angle MON = 120°$, $\angle KON = 43°$. Hány megoldása van a feladatnak?

84.•• *A* derékszög csúcsából húzott félegyenes két szögre bontja azt. Bizonyítsátok be, hogy a keletkezett szögek szögfelezői 45°-os szöget alkotnak!

85.•• Hogyan lehet a 70° -os szög sablonja segítségével 40°-os szöget rajzolni?

86.•• Hogyan lehet a 40°-os szög sablonja segítségével olyan szöget rajzolni, amely 1) 80°- os; 2) 160°- os; 3) 20°- os?

87.•• Hogyan lehet 13°-os szögsablon segítségével 2°-os szöget rajzolni?

88.* Hogyan lehet l°-os szöget rajzolni olyan szögsablon segítségével, amely egyenlő: 1) 19°-kal; 2) 7°-kal?

89.* Húzzatok hat egyenest, melyek egy pontban metszik egymást. Igaz-e, hogy a keletkezett szögek között van –e 31°-os szögnél kisebb szög?

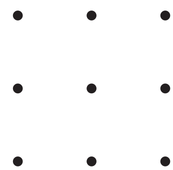
MEGTANULJUK ALKALMAZNI A MÉRTANT

90. A déli szél a következőkre változott: 1) nyugati; 2) délkeleti. Határozzátok meg azt a szöget, amellyel a szél iránya megváltozott!

91. Északi szél fújt. Ekkor az iránya: 1) 90°; 2) 45°szögre változott. Milyen irányú lett a szél ezután?

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

92. Anélkül, hogy felemelnétek a ceruzát a papírról, kilenc ponton át (80. ábra) húzzatok négy szakaszt (nem kötelező visszatérni a kezdőpontba)!

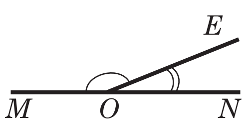


80.ábra

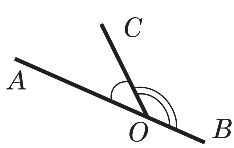
4. Mellékszögek és csúcsszögek

Meghatározás. Két szöget mellékszögnek nevezzük, ha az egyik száruk közös, a másik kettő pedig kiegészítő félegyenesek.

A 81.ábrán az *MOE* és az *EON* szögek mellékszögek lesznek.



81.ábra



82.ábra

4.1. tétel. ***A mellékszögek összege180°-kal egyenlő.***

Bizonyítás: ⊙ Legyenek az *AOC* és a *COB* szögek mellékszögek (82. ábra). Azt kell bizonyítani, hogy $\angle AOC + \angle COB = 180°$.

Mivel az *AOC* és *COB* mellékszögek, ezért az *OA* és az *OB* félegyenesek kiegészítő félegyenesek. Akkor az *AOB* szög egyenesszög. $\angle AOB = 180°$. A szögmértékének alapigazságából adódik: $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 180°$. ●

Meghatározás. Két szöget csúcsszögnek nevezzük, ha az egyik szög szárai a másik szög szárainak kiegészítő félegyenesei.

A 83. ábrán az *AOB* és *COD* szögek csúcsszögek.

Nyilvánvaló, hogy amikor két egyenes metszi egymást, két pár csúcsszög keletkezik, amelyek nem egyenesszögek. A 83. ábrán az *AOC* és *BOD* szögek is csúcsszögek.

4.2. tétel. ***A csúcsszögek egyenlők.***

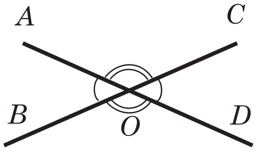
Bizonyítás: ⊙ Ha a csúcsszögek egyenesszögek, akkor egyenlők. A 84. ábrán az 1-es és a 2-es szögek csúcsszögek és különböznek az egyenesszögtől. Be kell bizonyítani, hogy $\angle 1 = \angle 2$.

Az 1-es és a 2-es szögek mindegyike a 3-as szög mellékszöge. Akkor $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ és $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Ebből adódik, hogy $\angle 1 = 180° - \angle 3$ és $\angle 2 = 180° - \angle 3$. Azt kaptuk, hogy az 1-es és a 2-es szögek fokmértéke egyenlő, tehát maguk a szögek is egyenlők. ●

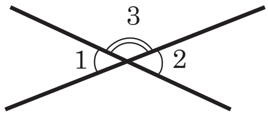
Feladat. A 85. ábrán 85 $\angle ABE = \angle DCP$. Bizonyítsátok be, hogy $\angle FBC + \angle BCP = 180°$.

Megoldás. $\angle DCP + \angle BCP = 180°$, mivel a *DC*P és a *BC*P szögek mellékszögek. A *DC*P és az *ABE* szögek egyenlők a feltétel szerint. Az *ABE* és *FBC* szögek egyenlők, mint csúcsszögek.

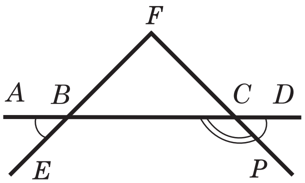
Tehát $\angle DCP = \angle FBC$. Ekkor $\angle FBC + \angle BCP = 180°$. ◀



83.ábra



84.ábra



85.ábra

?

1. Milyen két szöget nevezünk mellékszögnek? **2.** Mennyi a mellékszögek összege? **3.** Milyen két szöget nevezünk csúcsszögnek? **4.** Fogalmazzátok meg a csúcsszögek tulajdonságáról szóló tételt!

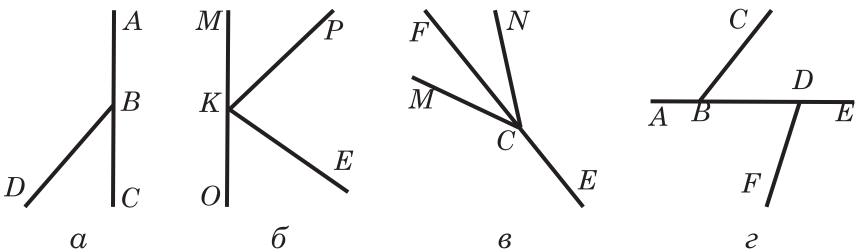
GYAKORLATI FELADATOK

93.° Rajzoljatok három szöget: egy-egy hegyes-, derék- és tompaszöget! Rajzoljátok meg mindegyik mellékszögét!

94.° Rajzoljatok két nem egyenlő mellékszöget úgy, hogy a közös száruk függőleges félegyenes legyen!

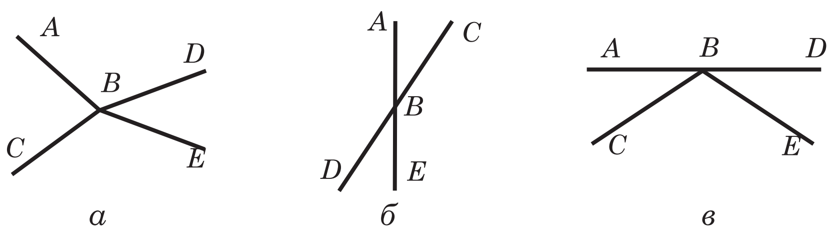
GYAKORLATOK

95.° Nevezzétek meg a mellékszögeket (86. ábra)!



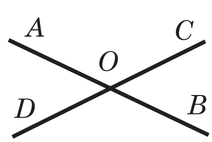
86.ábra

96.° Csúcsszögek -e *ABC* és *DBE* szögek (87.ábra)?



87.ábra

97.° Hány mellékszög-pár látható a 88. ábrán? Jelöljétek meg őket! Nevezzetek meg mellékszögeket!



88.ábra

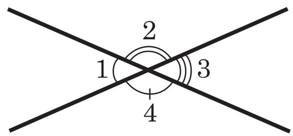
98.° Lehet-e a két mellékszög egyenlő: 1) **24ϒ** és **156ϒ;** 2) **63ϒ** és **107ϒ?** A feleletet indokoljátok meg!

99.° Határozzátok meg a következő szögek mellékszögét: 1) **29ϒ;** 2) **84ϒ;** 3) **98ϒ;** 4) **135ϒ.**

100.° Alkothathatnak-e mellékszögeket
1) két hegyesszög;
2) két tompaszög;
3) egy derék- és egy tompaszög;
4) egy derék és egy hegyesszög?

101.° *A* mellékszögek egyike derékszög. Milyen fajtájú a másik szög?

102.° Határozzátok meg az *ABC* szög mellékszögét, ha: 1) $\angle ABC = \mathbf{36°}$; 2) $\angle ABC = 102°$.



89.ábra

103.° Határozzátok meg a 2-es, 3-as és 4-es szögeket (89. ábra), ha $\angle 1 = 42°$.

104.° Határozzátok meg a mellékszögeket, ha:
1) az egyik 70°-kal nagyobb a másiknál;
2) az egyik 8-szor kisebb a másiknál;
3) a fokmértékeik aránya 3 : 2!

105.° Határozzátok meg a mellékszögeket, ha:
1) az egyik 17-szer nagyobb a másiknál;
2) a fokmértékeik aránya 19 : 26!

106.° Igaz-e az állítás:
1) minden szöghöz csak egy csúcsszög húzható;
2) minden szöghöz csak egy mellékszög rajzolható;
3) ha a szögek egyenlők, akkor csúcsszögek;
4) ha a szögek nem egyenlők, akkor nem csúcsszögek;
5) ha a szögek nem csúcsszögek, akkor nem egyenlők;
6) ha két szög mellékszög, akkor az egyikük hegyesszög, a másik pedig tompa;

7) mellékszögek közül az egyik nagyobb a másiknál;
8) ha két szög összege 180°, akkor azok mellékszögek;
9) ha két szög összege nem egyenlő 180°-kal, akkor azok nem mellékszögek;
10) ha két szög egyenlő, akkor a mellékszögeik is egyenlők;
11) ha a mellékszögek egyenlők, akkor azok derékszögek;
12) ha két szögnek közös a szára, akkor azok mellékszögek?

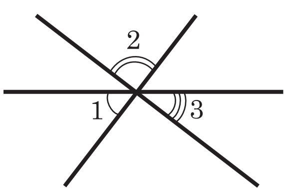
107.• Bizonyítsátok be, hogyha két szög egyenlő, akkor a mellékszögeik is egyenlők!

108.• Két egyenes metszésekor keletkezett két szög összege 140°. Bizonyítsátok be, hogy ezek a szögek csúcsszögek!

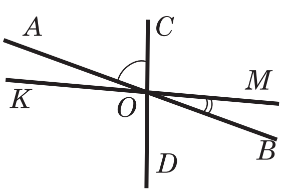
109.• Határozzátok meg a két egyenes metszésekor keletkezett szögeket, ha:
1) két szög összege 106°;
2) három szög összege 305°!

110.• Határozzátok meg a két egyenes metszésekor keletkezett szögeket, ha közülük kettő különbsége 64°!

111.• Három egyenes egy pontban metszi egymást (90. ábra). Határozzátok meg: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.



90.ábra



91.ábra

112.• Az AB, CD és MK egyenesek az O pontban metszik egymást (91. ábra), $\angle AOC = 70°$, $\angle MOB = 15°$. Határozzátok meg a DOK, AOM és AOD szögeket!

113.• Határozzátok meg a mellékszögek szögfelezői által bezárt szöget!

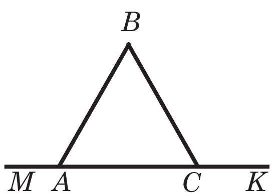
114.• Határozzátok meg a csúcsszögek szögfelezői által bezárt szöget!

115.• Az ABF és FBC szögek mellékszögek, $\angle ABF = 80°$, a BD félegyenes az ABF szöghöz tartozik, $\angle ABD = 30°$. Határozzátok meg a DBF és az FBC szögek szögfelezői által bezárt szöget!

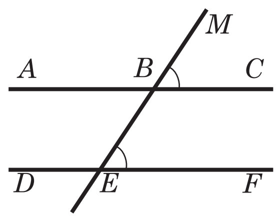
116.• Az AOB és BOC szögek mellékszögek, az OD félegyenes az AOB szög szögfelezője, a BOD szög 18°-kal kisebb a BOC szögnél. Határozzátok meg az AOB és BOC szögeket!

117.• Határozzátok meg az MKE és PKE mellékszögeket, ha az FKE szög 24°-kal nagyobb a PKE szögnél, ahol a KF félegyenes az MKE szög szögfelezője!

118.• A 92.ábrán az $\angle MAB + \angle ACB = 180°$. Bizonyítsátok be, hogy $\angle MAB = \angle KCB$.



92.ábra



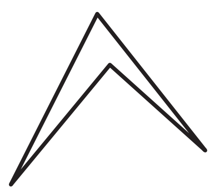
93.ábra

119.• A 93.ábrán az $\angle MBC = \angle BEF$. Bizonyítsátok be, hogy $\angle ABE + \angle BED = 180°$.

120.•• Két szögnek közös a szára, az összegük pedig 180°-kal egyenlő. Állíthatjuk-e, hogy ezek mellékszögek?

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

121. Vágjátok szét két egyenessel a 94. ábrán látható alakzatot hat részre!

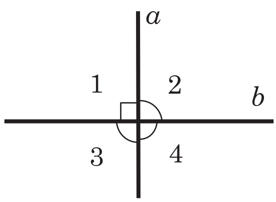

94.ábra

5. Merőleges egyenletek

A 95. ábrán négy szög látható, amelyek az a és *b* egyenesek metszésekor keletkeztek. Könnyű belátni (végezzétek el önállóan), hogy amikor az egyik szög derékszög (például az 1-es szög), akkor a 2-es, 3-as és 4-es szögek is derékszögek.

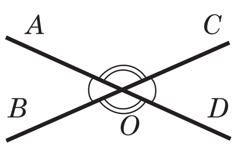
Meghatározás. Két egyenest merőlegesnek nevezünk, ha metszésükkor derékszög keletkezik.

A 95. ábrán az a és *b* egyenesek merőlegesek. Ezt így jelölik: $a \perp b$ vagy $b \perp a$.



95.ábra

A 96. ábrán az *AD* és *BC* egyenesek nem merőlegesek. Metszésükkor egy egyenlő nagyságú hegyesszög-pár, illetve tompaszög-pár keletkezett. A keletkezett hegyesszög mértékét az *AD* és a *BC* **az egyenesek által közbezárt szögnek**, vagy az egyenesek hajlásszögének nevezzük.



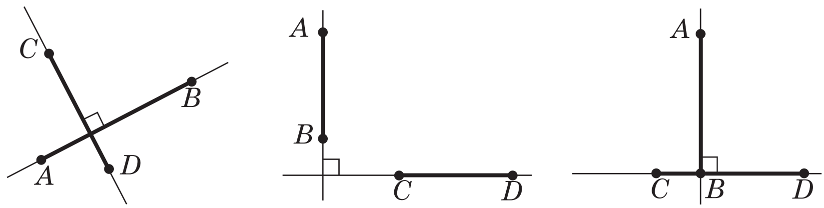
96.ábra

Ha az egyenesek merőlegesek, akkor úgy tekintik, hogy az általuk bezárt szög 90°.

Az elmondottakból az következik, hogy a két egyenes hajlásszöge nem több meg a 90°.

Meghatározás. Két szakaszt merőlegesnek neveznek, ha azok merőleges egyenesekre illeszkednek.

A 97. ábrán az AB és CD szakaszok merőlegesek. Így jelölik: $AB \perp CD$.

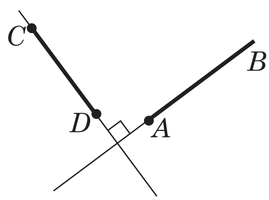


97.ábra

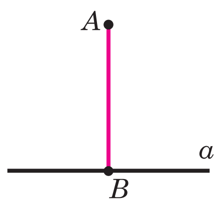
Ugyanígy megvizsgálható két félegyenes merőlegessége, a szakaszé és a félegyenesé, a szakaszé és az egyenesé. Például a 98. ábrán az egymásra merőleges CD szakasz és AB félegyenes látható.

A 99. ábrán az a egyenes és a rá merőleges AB szakasz látható, amelynek B végpontja az a egyenesre illeszkedik. Ebben az esetben azt mondják, hogy az **A pontból az a egyenesre AB merőlegest bocsátottak**. A B pontot az AB **merőleges talppontjának nevezzük**

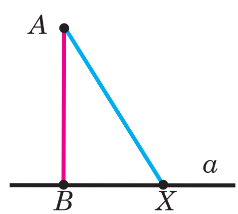
Az AB merőleges hosszát az A pont és az a egyenes távolságának nevezzük. Ha az A pont az a egyeneshez tartozik, akkor az A pont és az a egyenes közötti távolság 0.



98.ábra



99.ábra

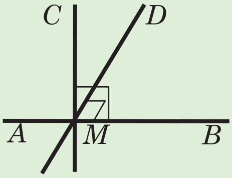


100.ábra

Az A pontból húzzunk egy AB merőlegest az a egyenesre (100.ábra). Legyen az X az a egyenes bármely pontja, mely a B ponttól különbözik. Az AX szakaszt az A pontból az a egyenesre húzott **ferdének** nevezzük.

5.1. tétel. ***Az egyenes minden egyes pontjába csak egy és csakis egy merőleges egyenes bocsátható.***

Bizonyítás. Megjelölünk egy tetszőleges M pontot az AB egyenesen. Először is megmutatjuk, hogy az M ponton keresztül húzható az AB egyenesre merőleges egyenes. Az MB félegyenesre a felmérünk egy CMB derékszöget (101. ábra) (ezt a szögek felmérésének alapigazsága alapján tehetjük meg). Ekkor a CM egyenes merőleges az adott AB egyenesre.



101.ábra

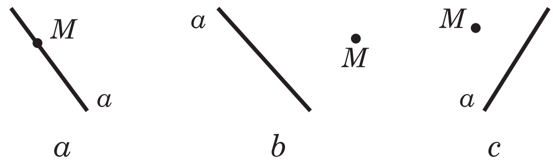
Tegyük fel, hogy az M ponton át egy másik, a CM egyenestől eltérő és az AB egyenesre merőleges egyenes halad át. Legyen ennek az egyenesnek a D pontja az AB egyeneshez képest ugyanabban a félsíkban, mint a C pont (101. ábra). Ekkor azt kapjuk, hogy két CMB és DMB szög, amelyek egyenlők a derékszöggel, az MB félegyenestől egy félsíkban fekszenek, ami ellentmond a szögfelmérés alapigazságának. ●

?

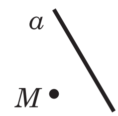
1. Milyen két egyenest nevezünk merőlegesnek? **2.** Milyen szimbólummal jelölik a merőleges egyeneseket? **3.** Mit nevezünk két egymást metsző egyenes hajlásszögének? **4.** Milyen két szakaszt nevezünk merőlegesnek? **5.** Mit nevezünk a pont és az egyenes távolságnak? **6.** Hány merőleges egyenes bocsátható az egyenes minden egyes pontján át?

GYAKORLATI FELADATOK

122.° Rajzoljátok át a 102. ábrát a füzetbe! Derékszögű vonalzó segítségével húzzatok az M ponton át az a egyenesre merőleges egyenest!



102.ábra



103.ábra

123.° Rajzoljátok át a 103. ábrát a füzetbe! Derékszögű vonalzó segítségével húzzatok az M ponton át az a egyenesre merőleges egyenest! Az M pontból húzzatok két ferdét is az a egyenesre!

124.° Húzzátok egy c egyenest, és jelöljetek meg rajta egy K pontot. Derékszögű vonalzó segítségével húzzatok a K ponton át merőlegest a c egyenesre!

125.° Húzzátok egy d egyenest, és jelöljétek meg az egyeneshez nem tartozó M pontot. Derékszögű vonalzó segítségével húzzatok az M ponton át merőlegest a d egyenesre. Az M pontból húzzatok két ferdét is a d egyenesre!

126.° Rajzoljatok egy ABK szöget, amely: 1) 73°; 2) 146°! A BK félegyenesen jelöljétek meg egy C pontot, és húzzatok ezen át az AB és BK egyenesekre merőleges egyeneseket.

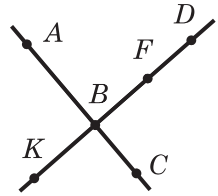
127.° Rajzoljatok két merőleges szakaszt úgy, hogy: 1) metsszék egymást, és ne legyen közös végpontjuk; 2) ne legyen közös pontjuk; 3) legyen közös végpontjuk!

128.° Rajzoljatok két merőleges félegyenest úgy, hogy azok: 1) metsszék egymást; 2) ne legyenek közös pontjaik!

GYAKORLATOK

129.° *A* 104. ábrán az AC és a DK egyenesek merőlegesek. Merőlegesek-e:

1) az AB és BK szakaszok;
2) a BC és a DF szakaszok;
3) a BC és a BK félegyenesek;
4) az AB szakasz és az FD félegyenes?

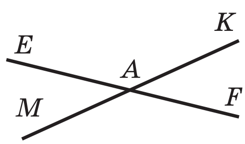


104.ábra

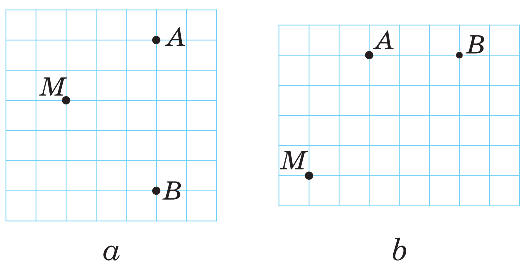
130.° Lehet-e az egyenesek által bezárt szög: 1) 1ϒ; 2) 80ϒ; 3) 90ϒ; 4) 92ϒ. 5) 101ϒ?

131.° Norbert rajzolt két metsző egyenest, szögmérővel megállapította, hogy az egyenesek által bezárt egyik szög egyik szög 110°, és azt mondta, hogy ezen egyenesek hajlásszöge 110°. Igaza van Norbertnek? Indokoljátok meg a választ!

132.° Az EF és MK egyenesek az A pontban metszik egymást, az $\angle EAK = =142°$ (105.ábra). Határozzátok meg az EF és MK egyenesek hajlásszögét!



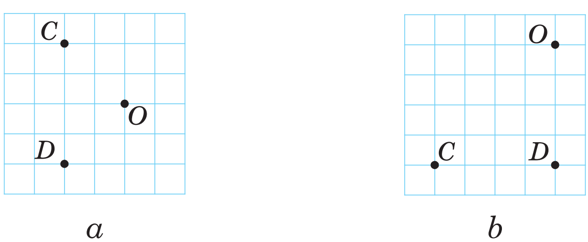
105.ábra



106.ábra

133.° A négyzetrács oldalát 0,5 cm-nek tekintve, határozzátok meg az M pont és az AB egyenes távolságát (106. ábra)!

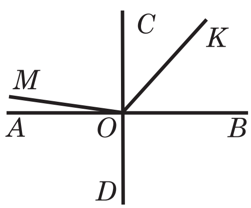
134.° A négyzetrács oldalát 0,5 cm-nek tekintve, határozzátok meg az O pont és az CD egyenes távolságát (107. ábra)!



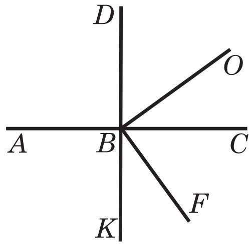
107.ábra

135.• Bizonyítsátok be, hogy ha az AOB és BOC szögek szögfelezői merőlegesek egymásra, akkor az A, O és C pontok egy egyenesre illeszkednek!

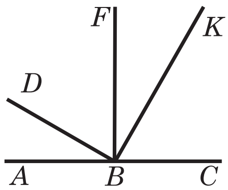
136.• A 108. ábrán $AB \perp CD$, $\angle COK = 42°$, $\angle MOC + \angle BOK = 130°$. Határozzátok meg: 1) a MOK szöget; 2) a MOD szöget!



108.ábra



109.ábra



110.ábra

137.• A 109. ábrán $AC \perp DK$, $OB \perp BF$, $\angle DBO = 54°$. Határozzátok meg az ABF szöget!

138.• Az ABC szög 160°-os, a BK és a BM félegyenesek ennek a szögnek a szárai között haladnak át, és azokra merőlegesek. Határozzátok meg az MBK szöget!

139.• A 110. ábrán $BF \perp AC$, $BD \perp BK$. Bizonyítsátok be, hogy $\angle ABD = \angle FBK$.

140.• A 110. ábrán $\angle ABD = \angle FBK$, $\angle DBF = \angle KBC$. Bizonyítsátok be, hogy $BF \perp AC$.

141.•• A 70°-os ABC szög csúcsából meghúzták a BD és a BF félegyeneseket úgy, hogy $BD \perp BA$, $BF \perp BC$, a BD és BC félegyenesek az ABF szöghöz tartoznak. Határozzátok meg a DBF és ABF szögeket!

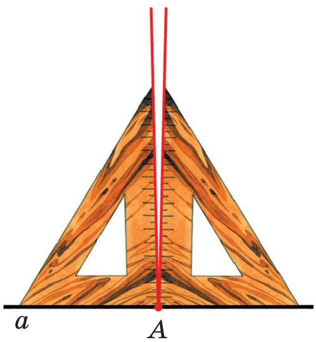
142.•• A 130°-os ABC szög csúcsából meghúzták a BD és a BF félegyeneseket úgy, hogy $BD \perp AB$, $BF \perp BC$, a BF félegyenes az ABC szöghöz tartozik. Határozzátok meg a DBF szöget!

143.* Derékszögű vonalzó és 17°-os szög sablonja segítségével rajzoljatok: 1) 5°-os szöget; 2) 12°-os szöget!

144.* Derékszögű vonalzó és 20°-os szög sablonja segítségével rajzoljatok 10°-os szöget!

MEGTANULJUK ALKALMAZNI A MÉRTANT

145. *A* derékszögű vonalzót az egyik, majd a másik oldalra helyezve Marika két merőlegest húzott az *A* pontból az a egyenesre (111. ábra). Mit lehet elmondani erről a vonalzóról?



111.ábra

112.ábra

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

146. *A* 112. ábrán az egyenes metszi a nyolcszög összes oldalát. Metszheti-e az egyenes egy tizenháromszög összes oldalát úgy, hogy nem halad át egyik csúcsán sem?

6. Axiómák

A korábbi pontokban négy tételt bizonyítottunk. Minden esetben, amikor az alakzat új tulajdonságát bizonyítottuk, a már korábbról ismert mértani állításokra támaszkodtunk. A csúcsszögek tételének bizonyítása során például a mellékszögek tulajdonságát használtuk fel. Ezt az elvet szem előtt tartva még sok új tételt fogunk bizonyítani. Azonban már most, a mértan tanulmányozásának kezdeti szakaszán felmerül a természetes kérdés: ha a mértani alakzatok tulajdonságaival az új a régi alapján elv szerint ismerkedünk, akkor létezniük kell az elsődleges, kiinduló tényeknek, de akkor mire támaszkodik azok valódiságának megalapozása? Hiszen mindaddig semmiféle igaz állítás nem létezett. Ezt a problémát egy módon lehet feloldani: az elsődleges tulajdonságok bizonyítás nélküli elfogadása által. A matematikusok pont így cselekednek. Ezeket a tulajdonságokat **axiómáknak** nevezzük.

Axiómaként az egyszerű, nyilvánvaló, megdönthetetlen állításokat választják ki. Hiszen nem hiába jelenti a görög axios szóból eredő axióma azt, hogy méltó elismerés.

Egyes axiómákat már a korábbi pontokban megfogalmaztunk. **Ezeket alapigazságok neveztük.**

Az axiómák egy részét nem emeltük ki, hanem csak egyszerűen megfogalmaztuk, mint szemléletesen nyilvánvaló igaz állításokat. Például a 2., 3. pontokban megfogalmaztuk a következő axiómákat:

tetszőleges két pont számára egyetlen szakasz létezik , amelynek ezek a pontok a végpontjai;
minden szakasznak bizonyos hossza van;
minden szögnek bizonyos nagysága van.

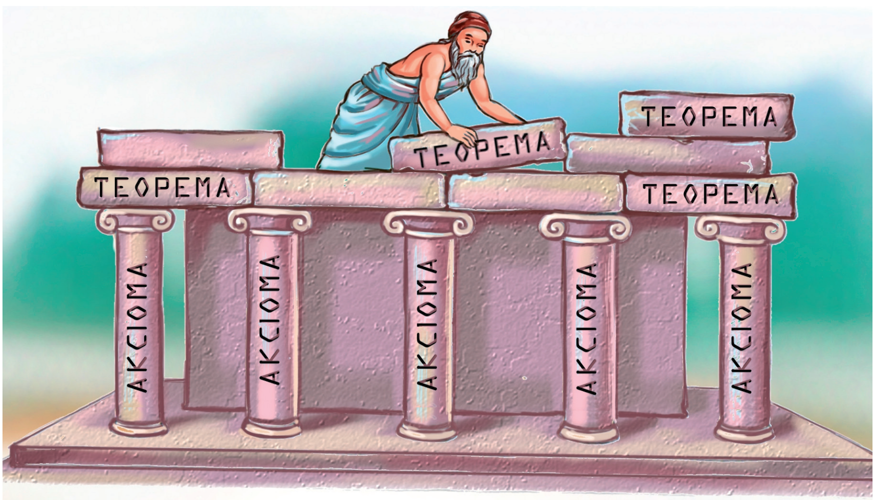
Más igaz állításokra is támaszkodtunk, amelyeket bizonyítás nélkül fogadtunk el, vagyis lényegében ezek is axiómák, de burkoltan megfogalmazottak. Például az 1. pontban, a 13. ábra leírásakor gyakorlatilag ezt az axiómát alkalmaztuk:

bármilyen legyen is az egyenes, léteznek olyan pontok, amelyek hozzátartoznak és olyanok is, amelyek nem tartoznak hozzá.

Axiómákat nemcsak a matematikában alkalmaznak. Nemritkán a mindennapi életben is axiómáknak neveznek minden olyan valós állítást, amely nem követel alátámasztást. Például azt mondják: Március után április jön. Ez axióma.

Az axiómák nemcsak a gyakorlat vagy a megfigyelések alapján jönnek létre.

Ukrajna minden állampolgára számára az alkotmányl – axiómák listája. Ezért az axióma törvényként vagy szabályként is értékelhető. Azonban a törvényeket (a játékszabályokat) elfogadják, vagyis az emberek egymás közötti megállapodásának eredményeként jönnek létre. Tehát a mértani axiómákat is jóváhagyott szabályoknak tekinthetjük, amelyek alapján a matematikusok, akárcsak a kőművesek, felépítik a tudomány házát (113. ábra).



113.ábra

Ebben az esetben megkérdezhetitek: Valójában a mértan játékként is felfogható, mint például a sakk? Bizonyos mértékbenl – igen. Azonban mindeközben meg kell érteni, hogy a sakk szabályai, így tehát maga a játék is az emberi fantázia révén jöttek létre. Viszont a mértani szabályok (axiómák) a gyakorlatból és a megfigyelésekből keletkeztek. Ezért a mértant, a sakkal ellentétben, nagyon széleskörűen alkalmazzák.

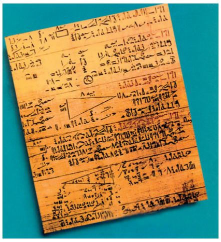
Ha matematikusok lesztek, teljesen más geometriákkal is megismerkedhettek, amelyek abban különböznek az iskolában tanulttól, hogy más axiómákra épülnek.

A MÉRTAN TÖRTÉNETÉBŐL

Mikor és hol keletkeztek az első mértani ismeretek? A szakértők erre a kérdésre nem adnak egyértelmű választ. Egyesek úgy vélik, hogy az úttörők az egyiptomi és babiloni földmérők voltak, akik i. e. 4000 évvel ezelőtt éltek, mások azt feltételezik, hogy a geometria az ókori Egyiptomban született 5000 évvel ezelőtt.

Furcsának tűnhet, de az a kérdés, **hogy a mértan,** mint tudomány, mikor született meg, nem vált ki vitát. A történészek közös véleményre jutottak: az i. e. VI. században. Ez az egyhangúság első látásra meglepő, hiszen addig az időpontig is nagymennyiségű geometriai ismeretet halmoztak fel az ókori világ népei. Teljesen nyilvánvaló például, hogy mértani tapasztalat nélkül az egyiptomiak nem ajándékozhatták volna meg a világot a hét csoda egyikévell – a piramisokkal. Mégis, miért nem egyenértékű a nagyszámú, összegyűjtött geometriai tény a geometria, mint tudomány létezésével?

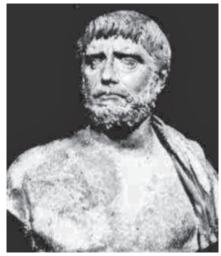
A geometria akkor vált tudománnyá, amikor az állításai igazságát el kezdték levezetni, bizonyítani.



Ősi papirusz

Egyiptomi piramisok

A bizonyításos mértan megjelenése összefügg a hét bölcs első tagja nevévell – a milétoszi Thalészével (i. e. közel 625-547),l – aki filozófus, tudós, kereskedő és államférfi is volt.



Milétoszi Thalész

Thalész előtt sokkal korábban ismert volt, hogy a csúcsszögek egyenlők, az is, hogy az átmérő két egyenlő részre osztja a körlapot. Senki sem kételkedett e tények valódiságában. Thalész viszont bebizonyította azokat, híressé válva ezzel. Az i. e. V I-III. században az ókori Görögország tudósainak köszönhetően, közöttük volt Püthagorasz, Eudoxosz, Arkhütasz, Theaitétosz, Eukleidész, Arkhimédész, a mértan alkalmazott tudományból matematikai elméletté változott.

Azt a könyvet, amelyből több m int 2000 évvel ezelőtt a geometriát tanulták, túlzás nélkül kiemelkedőnek nevezhetjük. A címe Elemek, szerzője pedig Eukleidész (kb. i. e. 365–300). Sajnos Eukleidész személyéről keveset tudunk. Ezeket az embereket sok legenda övezi, amelyek egyike nagyon tanulságos.

Eukleidész

I. Ptolemaiosz király megkérdezte Eukleidészt, létezik-e a geometria megismerésének egyszerűbb útja, mint az *E*lemekben kifejtett. Eukleidész azt felelte: A geometriához nem vezet királyi út.

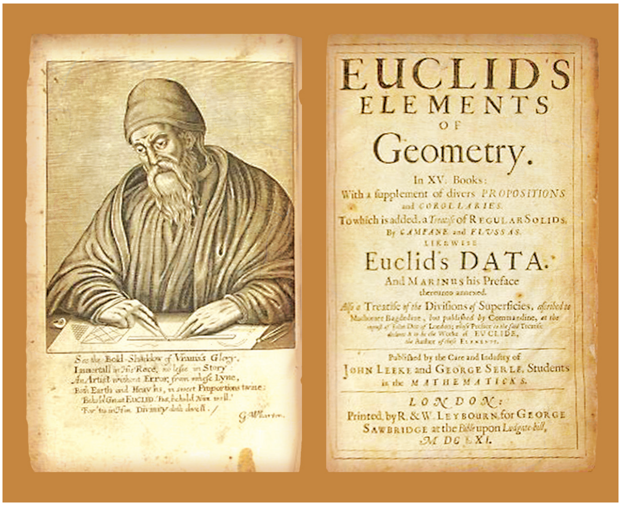
Milyen utat is választott a geometriához Eukleidész az *E*lemekben? Az axiomatikus utat. A tudomány alapjal – a legegyszerűbb tények listája. Ezeket posztulátumoknak (a latin postulatuml – követelmény szóból) és axiómáknak nevezzük.

Azután ezekre alapozva, logikai megfontolások útján bizonyítják a többi tulajdonságotl – a tételeket. Eukleidésznek öt posztulátuma volt. Kifejtjük az első négyet.

I posztulátum	Szükséges, hogy minden ponttól tetszőleges másik pontig egyenes vonalat húzhassunk.
II posztulátum	És, hogy minden vonalat korlátlanul meghosszabbíthassunk.
III posztulátum	És, hogy bármely középpontból bármilyen sugarú körvonalat rajzolhassunk.
IV posztulátum	És, hogy minden derékszög egyenlő legyen.

Az ötödik posztulátumról a 48. pont után szólunk. Sok évszázadon át Eukleidész Elemek c. művével legfeljebb a Biblia vetekedhetett. így például a XIX. században egy sor európai országban még az *E*lemek egyszerűsített kiadása alapján tanították a geometriát.

Az a mértan, amelyet most az iskolában tanultok, nagyon sokban követi Eukleidész elképzeléseit.



Eukleidész Elemek c. műve

A geometria fejlődéstörténetéről többet tudhattok meg, ha részt vesztek az „Euklidész és nagy könyve „Elemek” és „A geometria mint tudomány kialakulása és fejlődésének főbb szakaszai” című projektmunkákban (lásd 256. oldal).

Az Euklidész által alapított Alexandriai Matematikai Iskola 700 éve egyesítette a matematika, a fizika, a csillagászat, a mechanika és a mérnöki területeken dolgozó tudósokat. A világhírű tudósok közé tartoznak, akiknek tevékenysége ehhez az iskolához kapcsolódik: Arkhimédész (i. e. 287–212), Eratoszthenész (i. e. 276–194), Perzsa Apollóniosz (i. e. 260–170), szamoszi Konon (i. e. 280 körüll – Kr.e. 220 körül), Nikomédész (Kr. e. III. század), Alexandriai Ktesibius (Kr. e. II-I. század), Alexandriai Heron (kb. 1. század), Alexandriai Papp (3. század vége), Alexandriai Diophantus (3. század körül). A tudományos központok az Alexandriai Múzeum (a görög "museion"l – "múzsák temploma" szóból) és az Alexandriai Könyvtár voltak.

Hüpatia.
Jules festménye
Maurice Gaspar,
1908

Az utolsó ebben a dicsőséges tudósgalaxisban az alexandriai Hüpatia első ismert női matematikus volt, aki a IV. és V. század fordulóján élt. A híres csillagász, matematikus és mechanikus, Alexandriai Theon, az Alexandriai Könyvtár utolsó vezetőjének a lánya volt. Theon alapos és átfogó oktatásban részesítette lányát. 20 éves korában Hüpatia Hüpatia segíteni kezdett apjának, csillagászatot, matematikát, filozófiát tanított a Museionban, csatlakozott tudományos eredményeihez, és a kortársak szerint felülmúlta apját.

Halála után ő vette át az iskola vezetését, amely Theon és Hüpatia Iskola néven vált ismertté. Hüpatia nemcsak a Museionban tartott előadást, hanem nagy tömegeknek is, akik a háza kapujában gyűltek össze tanulni. Emellett részt vett a város politikai életében.

A tudománytörténészek úgy vélik, hogy Hüpatia társszerzője volt apjának olyan tudományos munkájában, mint az "Asztronómiai kánon", Eukleidész "Elvei" és "Optika" kommentárjai, Diophantus "Aritmetika" és Ptolemaiosz trigonometria tanításai. Hüpatia csillagászati táblázatok kiszámításával foglalkozott, részt vett mérnöki eszközök létrehozásában: asztrolábium, hidrométer (a folyadékok sűrűségének mérésére szolgáló eszköz). Sajnos Hüpatia összes munkája a korai középkorban elpusztult sok más ókori tudós munkáival együtt.

A tudós nőt brutálisan meggyilkolta egy keresztény fanatikus csőcselék. Nem tudni biztosan, mi volt az oka – vallási okok, Hüpatia politikai szerepvállalása vagy a sötét emberek hozzáállása a tudóshoz, mint "boszorkányhoz", de ő lett a kereszténység egyik első történelmi áldozata.

Athéni iskola.
Freskó töredéke
Rafael Santi

Hüpatia személyisége iránti érdeklődés a felvilágosodás korában újult meg, amikor a tudomány áldozatának kezdték tekinteni. Az első tudós nőről versek, regények és filmek születtek (köztük Oles Berdnik ukrán író "Prométheusz" című története). Róla kapta a nevét egy kráter a Holdon, egy aszteroida és egy bolygó a Sárkány csillagképben.

1. SZ. FELADAT. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁBAN

1. Hány egyenest határoz meg három, nem egy egyenesen fekvő pont?

A) 2; B) 4; C) 3; D) 1.

2. Hány olyan szakaszt lehet húzni, amelyek két adott pontot tartalmaznak?

A) 1; B) 2; C) 3; D) végtelenül sok.

3. Az M pont a PQ szakasz belső pontja. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

A) $PM + MQ = PQ$; C) $MQ = PQ + PM$;
B) $PQ = PM - MQ$; D) $PM = PQ + MQ$.

4. Az A ,B é s C pontok ugyanazon az egyenesen fekszenek, emellett $BC = 8$ cm, $AB - BC = 8$ cm. Az alábbi állítások közül melyik igaz?

A) az A pont a BC szakasz felezőpontja;
B)a B pont az AC szakasz felezőpontja;
C) a C pont az AB szakasz felezőpontja;
D) az A és B pont egybeesik.

5. Az AB szakasz hossza 12 cm. Hány olyan pont létezik az AB egyenesen, amelytől a távolságok összege az AB szakasz végpontjáig 14 cm?

A) számtalan; B) 1; C) 2; D) egy sem.

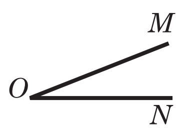
6. Az AB szakasz hossza 12 cm. Hány olyan pont létezik az AB egyenesen, amely mindegyike távolságának összege az AB szakasz végpontjáig 12 cm-rel egyenlő?

A) egy sem; B) 2; C) számtalan; D) 1.

7. Két félegyenes kiegészítő, ha:

A) közös kezdőpontjuk van;
B) egyesítésük egyenes, és közös kezdőpontjuk van;
C) egyazon egyeneshez tartoznak;
D) egyesítésük egyenes.

8. Az ábrán látható szög megjelölései közül melyik hibás?



A) $\angle O$; C) $\angle MON$;
B) $\angle OMN$; D) $\angle NOM$.

9. Az alábbi állítások közül melyik hamis?
A) a mellékszögeknek közös a csúcsuk;
B) a mellékszögeknek van közös száruk;
C) a mellékszögek közül az egyik hegyes, a másik pedig tompaszög;
D) ha az AOC és COB szögek mellékszögek, akkor az OA és OB félegyenesek kiegészítő félegyenesek.

10. Az alábbi állítások közül melyik hamis?
A) a csúcsszögek egyenlők;
B) ha a szögek egyenlők, akkor csúcsszögek;
C) a csúcsszögeknek közös a csúcsuk;
D) a csúcsszögek szárai két pár kiegészítő félegyenes.

11. Az alábbi állítások közül melyik igaz?
A) a merőleges szakaszoknak mindig van közös pontjuk;
B) a merőleges félegyeneseknek mindig van közös pontjuk;
C) a merőleges egyeneseknek mindig van közös pontjuk;
D) a merőleges félegyenesnek és egyenesnek mindig van közös pontja.

AZ 1. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Az egyenes alapigazsága

Tetszőleges két ponton át egyenes húzható, méghozzá kizárólag egy.

Egymást metsző egyenesek

Két, közös ponttal rendelkező egyenest egymást metszőnek nevezzük.

Két metsző egyenes tétele

Bármely két, egymást metsző egyenesnek egyetlen közös pontja van.

Egybevágó szakaszok

Két szakaszt egybevágónak nevezünk, ha egymásra helyezéssel fedésbe hozhatók.

Az egybevágó szakaszok hossza egyenlő, és megfordítva, ha a szakaszok hossza egyenlő, akkor a szakaszok egybevágók.

A szakasz hosszának alapigazsága

Ha a C pont az AB szakasz belső pontja, akkor az AB szakasz egyenlő az AC és CB szakaszok összegével, vagyis $AB = AC + CB$.

A pontok távolsága

Az A és B pont távolságának az AB szakasz hosszát nevezzük.

Kiegészítő félegyenesek

Két, közös kezdőpontú félegyenest, amelyek azonos egyenesen fekszenek, kiegészítő félegyeneseknek nevezzük.

Egyenesszög

Azt a szöget, amelynek a szárai kiegészítő félegyenesek, egyenesszögnek nevezzük.

Egybevágó szögek

Két szöget egybevágónak nevezünk, ha egymásra helyezéssel fedésbe hozhatók.

Az egybevágó szögeknek egyenlő a mértékük, és megfordítva, ha a szögek mértéke egyenlő, akkor a szögek egybevágók.

A szögek felmérésének alapigazsága

Az adott ABC szögre és az adott B_1C_1 félegyenesre egyetlen olyan $A_1B_1C_1$ szög létezik, amely az ABC szöggel egyenlő, és a C_1 pont a B_1C_1 félegyeneshez viszonyítva az adott félsíkhoz tartozik.

A szög szögfelezője

A szög szögfelezőjének azt a szög csúcsából kiinduló félegyenest nevezik, amely az adott szöget két egyenlő szögre osztja.

Hegyesszög, derékszög, tompaszög

A 90°-os szöget derékszögnek nevezzük.
A 90°-nál kisebb szöget hegyesszögnek nevezzük.
A 90°-nál nagyobb, de 180°-nál kisebb szöget tompaszögnek nevezzük.

A szög mérésének alapigazsága

Ha az OC félegyenes az AOB szöget két szögre, AOC-re, és COB-ra osztja, akkor $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

Mellékszögek

Két szöget mellékszögnek nevezünk, ha az egyik száruk közös, a másik kettő pedig kiegészítő félegyenes.

A mellékszögek tulajdonsága

A mellékszögek összege 180°.

Csúcsszögek

Két szöget csúcsszögnek nevezünk, ha az egyik szög szárai a másik szárainak kiegészítő félegyenesei.

A csúcsszögek tulajdonsága

A csúcsszögek egyenlők.

Merőleges egyenesek

Két egyenest merőlegesnek nevezünk, ha derékszögben metszik egymást.

Az adott egyenesre merőleges egyenes tétele

Az egyenes minden egyes pontján egyetlen, az adottra merőleges egyenes megy át.

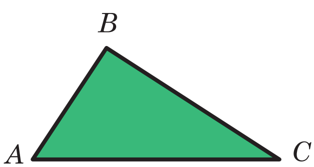
HÁROMSZÖGEK §2

Hogyan lehet megállapítani két háromszögről, hogy egybevágó-e, anélkül, hogy egymásra helyeznénk? Milyen tulajdonsággal rendelkezik az egyenlő szárú és egyenlő oldalú háromszög? Milyen egy tétel „felépítése”? Ezekre és más hasonló érdekes kérdésekre kaptok választ ebben a fejezetben.

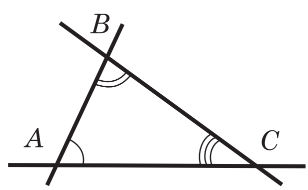
7. Egybevágó háromszögek. A háromszög magassága, súlyvonala, szögfelezője

Vegyünk három A, B és C pontot, amelyek nem illeszkednek egy egyenesre. Kössük őket össze az AB, BC és CA szakaszokkal. A kapott alakzat egy síkrészt határol, ami a 114. ábrán zöld színnel van jelölve. A síknak ezt a részét a szakaszokkal együtt **háromszögnek** nevezzük. Az A, B és C pontok a **háromszög csúcsai**, az AB, BC és CA szakaszok pedig a **háromszög oldalai**.

A háromszöget a csúcsai határozzák meg és a csúcsai alapján jelöljük meg. így a 114. ábrán látható háromszög jelölése: ΔABC (olvassuk: az ABC háromszög), ΔBCA ((olvassuk: a BCA háromszög), esetleg $\varnothing ACB$ és így tovább.



114.ábra



115.ábra

Az ABC, BAC és BCA szögeket (115. ábra) az ABC háromszög szögeinek nevezzük.

Az ABC háromszögben (115. ábra) a B szöget az AC oldallal szembeni szögnek, az A és C szögeket pedig az AC oldalon lévő szögeknek nevezzük, míg az AC oldalt a B *szöggel szembeni oldalnak, az AB és AC oldalakat pedig az A szöget közbezáró oldalaknak nevezzük.*

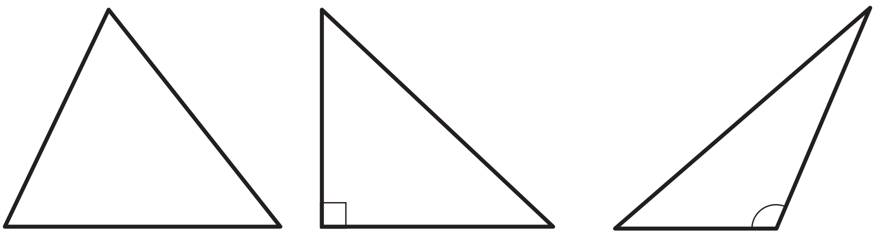
Meghatározás. **A háromszög kerületének az oldalai hosszának összegét nevezzük.**

A kerületet *P*-vel (vagy *K*-val) jelöljük. Például az *MNK* háromszög kerületét így jelöljük: P_{MNK} .

Meghatározás. **Egy háromszög hegyesszögű, ha mind a három szöge hegyesszög.**

A háromszöget derékszögűnek nevezzük, ha az egyik szöge derékszög.

A háromszöget tompaszögűnek nevezzük, ha az egyik szöge tompaszög. (116.ábra).



116.ábra

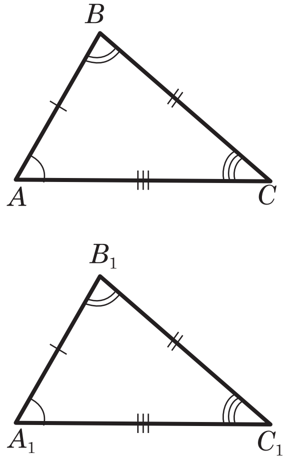
Meghatározás. **Két háromszöget egybevágónak nevezzük, ha egymásra helyezve kölcsönösen fedik egymást.**

A 117. ábrán az *ABC* és $A_1B_1C_1$ háromszögek egybevágók. Így jelöljük: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Ezeket a háromszögeket úgy helyezhetjük egymásra, hogy az *A* és A_1 csúcs, a *B* és B_1 csúcs és a *C* és C_1 csúcs illeszkedjen egymásra. Így az $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$. valamint az $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, és $CA = C_1A_1$.

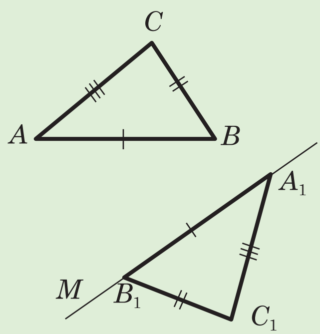
Azokat az oldalakat és szögeket, melyek illeszkednek, ha egymásra helyezünk két egybevágó háromszöget, **megfelelő oldalaknak és megfelelő szögeknek nevezzük.** így a 117. ábrán az AC és A_1C_1 oldal, valamint az A és A1 szög megfelelő.

Általában a rajzokon az egyenlő hosszúságú szakaszokat azonos számú vonallal, az egyenlő fokmértékű szögeket azonos számú ívvel jelöljük (117. ábra).

Megjegyzendő, hogy az egybevágó háromszögekben a megfelelő szögekkel szemben megfelelő oldalak vannak és viszont is, a megfelelő oldalakkal szemben megfelelő szögek vannak.



117.ábra



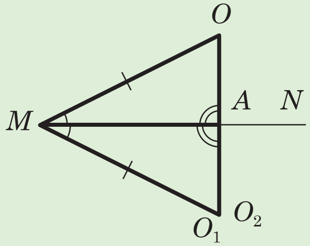
118.ábra

Az egybevágó háromszögek alaptulajdonsága (axiómája). **Adott ABC háromszöggel adott A_1M félegyenesre vonatkoztatva létezik az ABC háromszöggel vele egybevágó $A_1B_1C_1$ háromszög, melyre $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ és $AC = A_1C_1$ az A_1B_1 oldal illeszkedik az A_1M félegyenesre és a C_1 csúcs az adott félsíkban van (118. ábra).**

7.1. tétel. ***Adott egyenesre, az egyenesen kívül fekvő ponton keresztül csak egy, az egyenesre merőleges egyenes húzható.***

Bizonyítás ⊛ Vegyünk egy MN egyenest és egy rajta kívüli O pontot.

Először bebizonyítjuk, hogy az O ponton át lehet olyan egyenest fektetni, amely merőleges lesz az MN egyenesre.



119.ábra

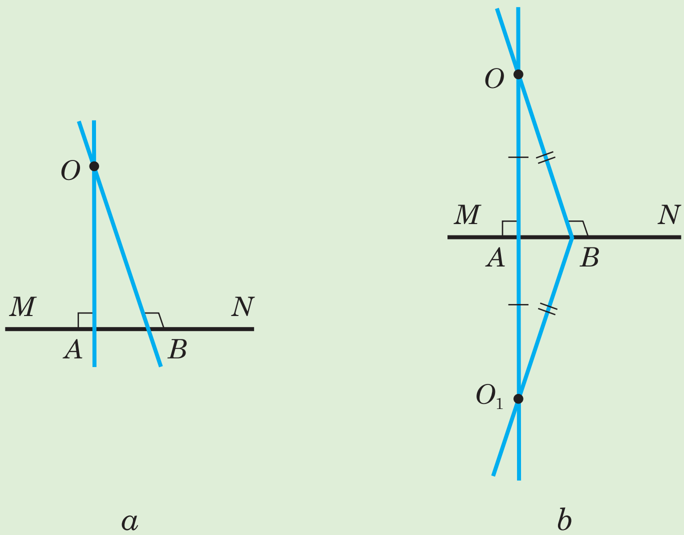
Az MN félegyenesre felvesszük az O_1MN szöget, amely egyenlő az OMN szöggel. Az O_1 pontra teljesüljön az $MO = MO_1$ (119.ábra). A OO_1 és az MN metszéspontját A betűvel jelöljük.

Az MA félegyenesre ráhelyezünk egy O_2MA háromszöget, amely egybevágó az OMA háromszöggel. Az AMO_1 és az AMO_2 háromszög minden szöge az AMO háromszög szögeivel egyenlő, ezért az AMO_1 és az AMO_2 szögek egyenlők. Tehát az O_2 pont az MO_1 félegyenesre illeszkedik. Ezen kívül az MO_1 és az MO_2 szakaszok az MO szakasszal egyenlők. Tehát az O_1 és az O_2 pontok egybeesnek. Vagyis az AMO_1 és az AMO_2 háromszögek is egybeesnek. Az AMO és AMO_1 háromszögek egybevágóságából az OAM és O_1AM szögek egyenlősége következik. Mivel ezek a szögek mellékszögek, ebből következik, hogy derékszögek lesznek. Tehát az OO_1 egyenes merőleges az MN egyenesre.

Feltételezzük, hogy az O ponton át két OA és OB egyenes húzható, melyek merőlegesek az MN egyenesre 120. a ábra).

Az adott háromszöggel egybevágó háromszög létezéséről szóló axióma alapján, létezik egy O_1AB háromszög, amely egybevágó az OAB háromszöggel (120.b ábra). Ekkor $\angle OAB = \angle O_1AB = 90°$. Ebből következik, hogy

$\angle OAO_1 = 180°$, tehát az O, A és O_1 pontok egy egyenesre illeszkednek. De így az OA és OB egyenesek két pontban metszik egymástl – az O és O_1 pontokban, ez ellentmond a 1.1 tételnek. Tehát, a mi feltételezésünk hibás. Vagyis az O ponton át csak egyetlen egyenes húzható, amely merőleges az MN egyenesre. ●

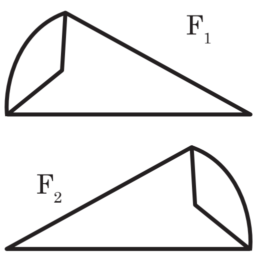


120.ábra

Bizonyára észrevettétek, hogy az egybevágó szakaszok, egybevágó szögek és egybevágó háromszögek meghatározásai hasonlítanak egymásra. Ezért célszerű megfogalmazni az egybevágó alakzat következő meghatározását.

Meghatározás. Két mértani alakzat egybevágó, ha egymásra helyezve kölcsönösen fedik egymást.

A 121. ábrán két egybevágó, F_1 és F_2 alakzat látható. így írjuk $F_1 = F_2$.

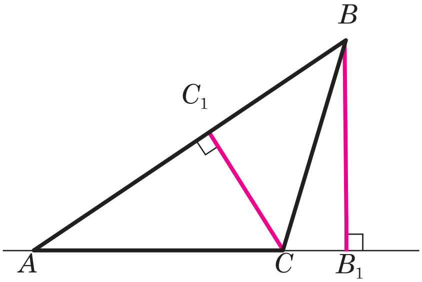


121.ábra

Könnyű belátni, hogy két egyenes (két félegyenes, két pont) mindig egybevágó.

Meghatározás. A háromszög csúcsából a szemközti oldalra húzott merőlegest, a háromszög magasságának nevezzük.

A 122. ábrán a BB_1 és CC_1 szakaszok az ABC háromszög magasságai.



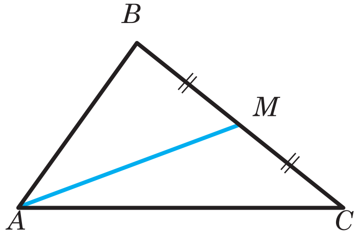
122.ábra

Meghatározás. Azt a szakaszt, amely a háromszög csúcsát és a szemközti oldal felezőpontját köti össze azt a háromszög súlyvonalának nevezzük.

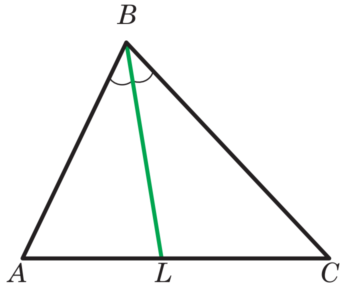
A 123.ábrán az AM szakasz az ABC háromszög súlyvonala lesz.

Meghatározás. A szögfelező azon szakaszát, amely összeköti a három szög csúcsát a szemközti oldallal, a háromszög szögfelezőjének nevezzük.

A 124.ábrán a BL szakasz az ABC háromszög szögfelezője. Minden háromszögnek három magassága, három súlyvonala és három magassága van.



123.ábra



124.ábra

1. Mi a háromszög, és hogyan jelöljük? **2.** Mi a háromszög kerülete? **3.** Milyen háromszögeket különböztetünk meg szögeik szerint? **4.** Melyik három szög derékszögű? Tompaszögű? Hegyesszögű? **5.** Mely háromszögek egybevágók? **6.** Hogyan nevezzük az egybevágó háromszögek azon oldalpárjait, szögpárjait, melyek illeszkednek, ha a háromszögeket egymásra helyezzük? **7.** Mely alakzatok egybevágók? **8.** Mi a háromszög magassága? **9.** Mi a háromszög súlyvonala? **10.** Mi a háromszög szögfelezője? **11.** Egy háromszögnek hány magassága, súlyvonala és szögfelezője van?

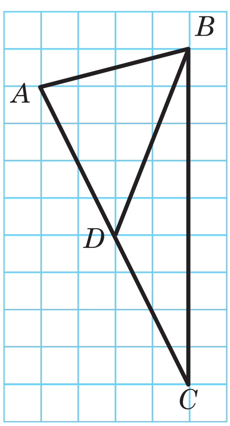
GYAKORLATI FELADATOK

147.° Rajzoljatok:

1) hegyesszögű;
2) derékszögű;
3) tompaszögű háromszöget!

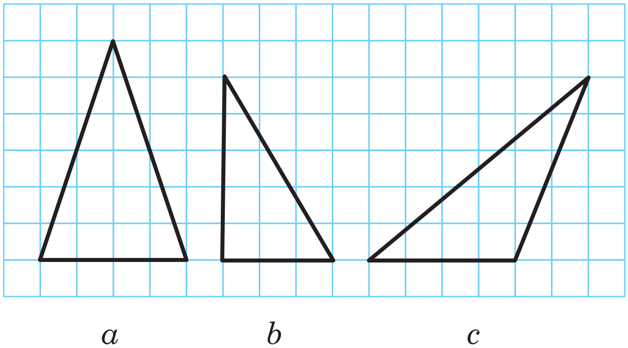
Húzzatok minden csúcsából magasságot!

148.° Rajzoljátok át a füzetbe a 125. ábrát! Húzzátok meg azt a magasságot, amely egybeesik mind a három háromszögben! Melyik háromszögben esik ez a magasság a háromszögön kívülre?



125.ábra

149.° Rajzoljátok át a füzetbe a 126. ábrát! Húzzátok meg mind a három háromszög mindegyik magasságát!



126.ábra

150.° Rajzoljatok egy tetszőleges háromszöget és rajzoljátok meg a súlyvonalait!

151.° Rajzoljatok egy tetszőleges háromszöget és rajzoljátok meg a szögfelezőit!

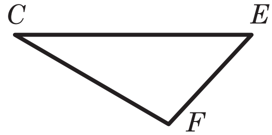
GYAKORLATOK

152.° Rajzoljatok egy tetszőleges háromszöget, jelöljétek a csúcsait M, K és E betűkkel! Nevezzétek meg:

1) az M szöggel szembeni oldalt;
2) az MK oldallal szembeni szöget;
3) a K szöget bezáró oldalakat;
4) a KE oldalon lévő szögeket!

153.° Írjátok le a CEF háromszög oldalait, csúcsait és szögeit (127. ábra). Nevezzétek meg:

1) a CF oldallal szemben lévő szöget;
2) a CE oldalon lévő szögeket;
3) az E szöggel szembeni oldalt;
4) az F szöget bezáró oldalakat!



127.ábra

154.° *E*gy háromszög egyik oldala ötször kisebb a másik oldalnál és 25 cm-rel rövidebb a harmadik oldalnál. Határozzátok meg a háromszög oldalait, ha a kerülete 74 cm!

155.° *E*gy háromszög oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint 5 : 7 : 11. A leghosszabb és a legrövidebb oldal összege 80 cm. Számítsátok ki a háromszög kerületét!

156.° *E*gy három szög kerülete 48 cm. Oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint 7 : 9 : 8. Mekkorák a háromszög oldalai?

157.° Az *APK* és *MCE* háromszögek egybevágók, az *A* szögnek a *C* szög felel meg. $PK = 10$ cm. Mekkora az *ME* oldala?

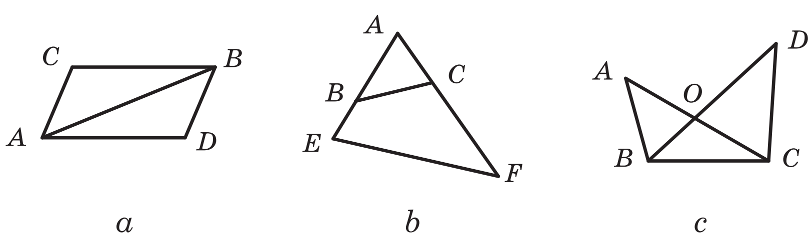
158.° Az *ABC* és *DEF* háromszögek egybevágók, az *AB* oldalnak a *DE* oldal felel meg, a *BC* oldalnak a *DF* oldal, $\angle B = 32°$. Mekkora a *D* szöge?

159.° Az *ABC* és *KTM* háromszögek egybevágók, az *A* szögnek az *M* szög felel meg, valamint a *B* szögnek a *K* szög, $\angle C = 40°$, $MK = 5$ cm. Határozzátok meg a *T* szög fokmértékét és az *AB* oldal hosszát!

160.° Igaz-e az alábbi állítás:

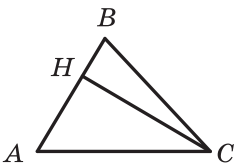
1) ha két háromszög egybevágó, akkor a kerületeik is egyenlők;
2) ha két háromszög kerülete egyenlő, akkor a háromszögek egybevágók?

161.° Nevezzétek meg a háromszögek közös elemeit, a 128.ábrán!

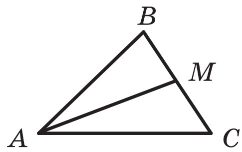


128.ábra

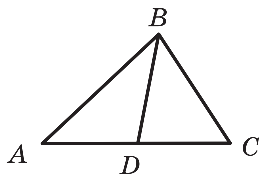
162.° Az ABC háromszög magassága a CH szakasz (129. ábra) Határozzátok meg az AHC és BHC szögek fokmértékeit!



129.ábra



130.ábra



131.ábra

163.° Az AM szakasz az ABC háromszög súlyvonala (130. ábra), BM = 8 cm. Határozzátok meg a CM és BC szakaszokat!

164.° A BD szakasz az ABC háromszög szögfelezője (131. ábra), $\angle ABD = 42°$. Határozzátok meg a CBD és ABC szögek fokmértékét!

165.° A háromszög mely elemeil – szögfelező, súlyvonal, magasság– közül melyik tartozik mindig a háromszöghöz?

166.° A háromszög mely elemeil – szögfelező, súlyvonal , magasság– közül melyik eshet egybe az egyik oldalával? Milyen fajtájú az a háromszög, melynél ez lehetséges?

167.° 1) Hozzátartozhat-e a háromszöghöz egy magassága, a másik kettő pedig nem?

2) Egy háromszögnek csak egy magassága eshet egybe az oldalával?

3) Milyen fajtájú háromszög egyik csúcsában metszi egymást a három magasság?

168.• Az ABC háromszög AC oldalán felvettek egy D pontot. A BD szakasz az ABC háromszöget két háromszögre osztja, amelyek kerülete 32 cm és 36 cm. Határozzátok meg az ABC háromszög kerületét, ha BD = 10 cm?

169.• Az M pont az ABC háromszög BC oldalára illeszkedik. Az ABC, AMC és AMB háromszögek kerülete rendre 60 cm, 36 cm, illetve 50 cm. Határozzuk meg az AM szakaszt!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

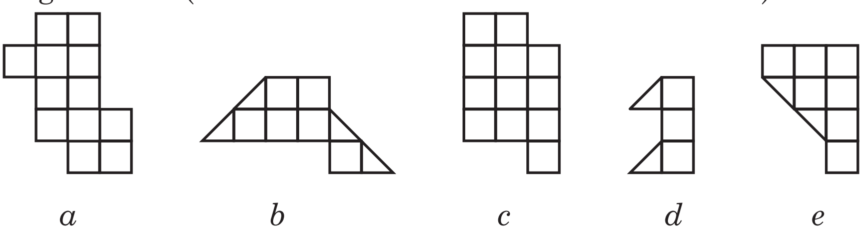
170. A 132.ábrán $KP = PE = EF = FT = 1$ cm. Milyen egyenlő szakaszok vannak még ezen az ábrán? Határozd meg ezeknek a hosszát!

132.ábra

171. A 72° -os *ABC* szöget a *BD* félegyenes *ABD* és *CBD* szögekre osztja fel úgy, hogy $\angle ABD = 5\angle CBD$. A *BK* félegyenes úgy húzták meg, hogy a *BA* félegyenes a *DBK* szög szögfelezője legyen. Határozzátok meg a *DBK* szög fokmértékét és fajtáját!

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

172. A 133. ábrán látható alakzatokat vágjátok két egybevágó részre (nem feltétlenül a rácsvonalak mentén)!



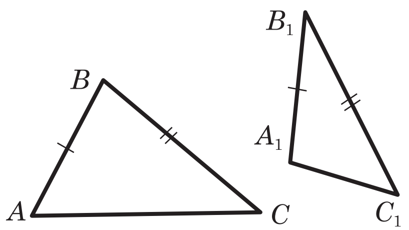
133.ábra

8. A háromszögek egybevágóságának első és második alapesete (ismertetőjele)

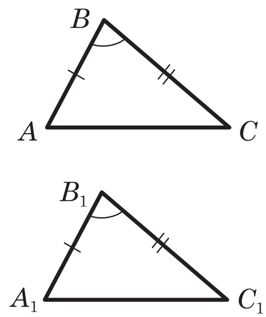
Ha két, *ABC* és $A_1B_1C_1$ háromszög egybevágó, akkor hat egyenlőségnek kell teljesülnie. Az *ABC* és $A_1B_1C_1$ háromszögekre ez $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, Ez könnyen belátható, mert ezek a háromszögek fedik egymást, ha egymásra helyezzük. Tehát egybevágók.

Próbáljuk meg csökkenteni a feltételeket. Például hagyjunk meg csak két feltételt: $AB = A_1B_1$ és $BC = B_1C_1$. Ebben az esetben a két, ABC és $A_1B_1C_1$ háromszög nem feltétlenül egybevágó (134. ábra).

Hogyan csökkentsük le a feltételeket minimálisra úgy, hogy teljesüljön az egybevágóság? Erre a kérdésre azok a tételek adnak választ, melyek a háromszögek egybevágóságának (ismertetőjelei) alapeseteit mondják ki.



134.ábra



135.ábra

8.1. tétel (a háromszögek egybevágóságának első alapesete: két oldaluk és általuk közbezárt szögük alapján). ***Ha az egyik háromszög két oldala és az általuk közbezárt szög egyenlő egy másik háromszög két oldalával és az általuk közbezárt szöggel, akkor ez a két háromszög egybevágó.***

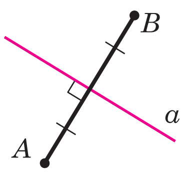
Bizonyítás. Tekintsük az ABC és $A_1B_1C_1$, háromszögekre, melyekben $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ (135. ábra). Bizonyítsuk be, hogy $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Tegyük az ABC háromszögre az $A_1B_1C_1$ háromszöget úgy, hogy a BA félegyenes illeszkedjen a B_1A_1, félegyenesre, a BC pedig a B_1C_1. félegyenesre. Ez lehetséges, mivel a feltételek alapján a $\angle B = \angle B_1$. Mivel a feltétel szerint $BA = B_1A_1$ és $BC = B_1C_1$, ezért a BA oldal illeszkedik a B_1A_1 oldalra, a BC pedig a B_1C_1 oldalra. Tehát az ABC

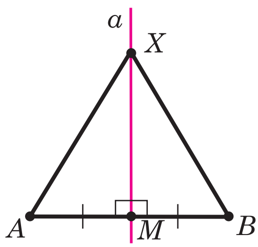
és az $A_1B_1C_1$ háromszögek teljesen fedik egymást, vagyis egybevágók. ●

Meghatározás. Azt az egyenest, amelyre illeszkedik a szakasz felezőpontja és merőleges a szakaszra, szakaszfelező merőlegesnek vagy felezőmerőlegesének nevezzük.

A 136. ábrán az a egyenes az AB szakasz felező merőlegese. Jegyezzétek meg, hogy az A és B pont azonos távolságra van az a egyenestől.



136.ábra



137.ábra

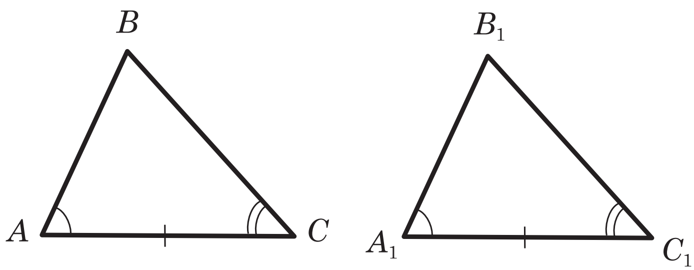
8.2. tétel. ***A szakaszfelező merőleges bármelyik pontja azonos távolságra van a szakasz végpontjaitól.***

Bizonyítás. ⊙ Legyen az X pont az AB szakasz felezőmerőlegesének egyik tetszőleges pontja. Be kell bizonyítani, hogy $XA = XB$. Legyen az AB szakasz felezőpontja az M pont. Ha az X pont illeszkedik az M pontra (ez lehetséges, mivel az X pont az a egyenes tetszőleges pontja), akkor $XA = XB$.

Ha az X nem esik egybe az M ponttal, akkor megvizsgáljuk az AXM és BXM háromszögeket (137. ábra). Ezekben a háromszögekben az $AM = MB$, mivel az M pont az AB szakasz felezőpontja, az XM oldal közös, az $\angle AMX = \angle BMX = 90°$. tehát az AXM és BXM háromszögek egybevágók két oldaluk és az általuk közbezárt szög alapján, vagyis a három szögek egybevágóságának első alapesete alapján. Innen következik, hogy az XA és XB szakaszok egyenlők, mint az egybevágó háromszögek megfelelő oldalai. ●

8.3. tétel (a háromszögek egybevágóságának második alapesete: oldaluk és a rajta fekvő szögeik alapján). ***Ha az egyik háromszög egyik oldala és a rajta fekvő két szöge megfelelően egyenlő egy másik háromszög egyik oldalával és a rajta fekvő szögeivel, akkor ezek a háromszögek egybevágók.***

Bizonyítás. Vizsgáljuk az ABC és $A_1B_1C_1$, háromszögeket, melyekben $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (138. ábra). Bizonyítsuk be, hogy $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.



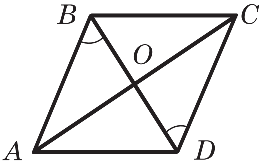
138.ábra

Úgy helyezzük egymásra az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögeket, hogy az A pont az A_1 ponttal, az AC szakasz az A_1C_1 szakasszal essen egybe (ezt megtehetjük, mert $AC = A_1C_1$) és a B és B_1 csúcsok pedig az A A_1C_1 egyeneshez viszonyítva egy félsíkban helyezkedjenek el. Mivel $\angle A = \angle A_1$ és $\angle C = \angle C_1$, ezért az AB félegyenes az A_1B_1 félegyenessel, a CB pedig a C_1B_1 félegyenessel esik egybe. Ekkor a B pont, mint az AB és CB félegyenesek közös pontja egybeesik B_1 ponttal, ami az A_1B_1 és a C_1B_1 félegyenesek közös pontja lesz. Tehát az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögeket fedik egymást, vagyis egybevágók.

Feladat. A 139. ábrán az O pont a BD szakasz felezőpontja, $\angle ABO = \angle CDO$. Bizonyítsátok be, hogy $BC = AD$.

Megoldás. Vizsgáljuk meg az AOB és COD háromszögeket. Mivel O a BD szakasz felezőpontja, ezért $BO = OD$.

A feladat féltétele alapján $\angle ABO = \angle CDO$. Az AOB és COD szögek egyenlők, mint csúcsszögek. Tehát az $\Delta AOB = \Delta COD$ az oldaluk és a rajta fekvő két szögük alapján, vagyis a háromszögek egybevágóságának második alapesete szerint. Megjegyezzük, hogy BD az ABD és CDB háromszögek közös oldala. A feladat feltételéből az is következik, hogy $\angle ABD = \angle CDB$. Tehát az ABD és CDB háromszögek egybevágók a két oldal és a közbezárt szög alapján is, vagyis a háromszögek egybevágóságának első alapesete szerint. Tehát $BC = AD$. ◀



139.ábra

1. Fogalmazzátok meg a háromszögek egybevágóságának első alapesetét! **2.** Milyen egyenest nevezünk a szakasz felezőmerőlegesének? **3.** Milyen tulajdonsággal rendelkeznek a szakasz felezőmerőlegesének pontjai? **4.** Fogalmazzátok meg a háromszögek egybevágóságának második alapesetét!

GYAKORLATI FELADATOK

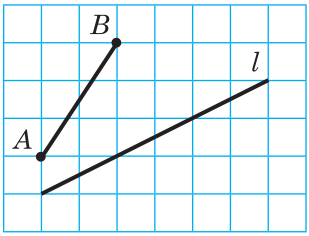
173.° Vonalzó és szögmérő segítségével rajzoljatok egy háromszöget, melynek két oldala 3 cm és 6 cm, a köztük lévő szög pedig 40°!

174.° Vonalzó és szögmérő segítségével rajzoljatok egy háromszöget, melynek két oldala 3 cm és 4 cm, a köztük lévő szög pedig 90°. Határozzátok meg a háromszög fajtáját!

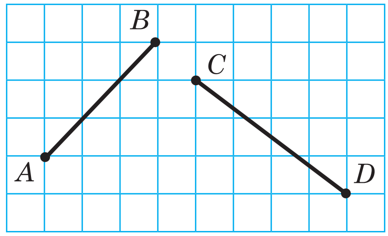
175.° Vonalzó és szögmérő segítségével rajzoljatok egy háromszöget, melynek egyik oldala 3 cm, ezen az oldalon lévő szögei pedig 100° és 20°. Határozzátok meg a háromszög fajtáját!

176.° Vonalzó és szögmérő segítségével rajzoljatok egy háromszöget, melynek egyik oldala 6 cm, ezen az oldalon lévő szögei pedig 90° és 45°. Határozzátok meg a háromszög fajtáját!

177.° Rajzoljátok át a füzetetekbe a 140. ábrát. Derékszögű vonalzó és egyszerű vonalzó segítségével határozzátok meg az l egyenesnek azt a pontját, amely egyenlő távolságra van az *AB* szakasz végpontjaitól!



140.ábra

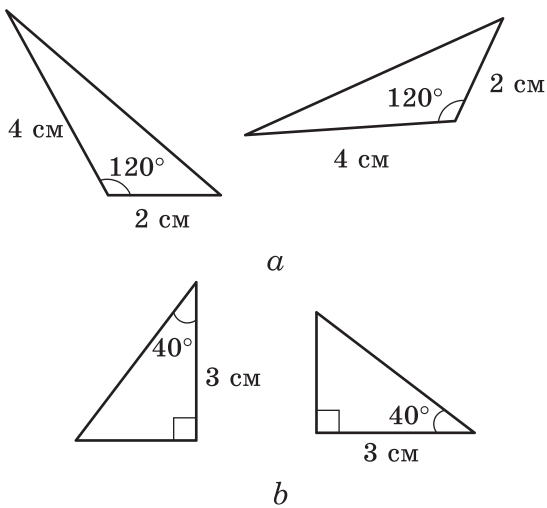


141.ábra

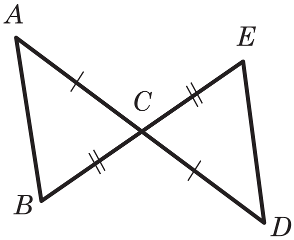
178.° Rajzoljátok át a füzetetekbe a 141. ábrát. Derékszögű vonalzó és egyszerű vonalzó segítségével határozzátok meg azt a pontot, amely egyenlő távolságra lesz az *A* és *B* pontoktól, és egyidejűleg egyenlő távolságra a *C* és *D* pontoktól is!

GYAKORLATOK

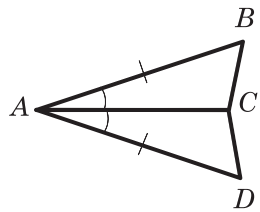
179.° *E*gybevágók -e a 142.ábrán lévő háromszögek? Ha a válasz igen, nevezzétek meg, melyik egybevágóság alapesete alapján egybevágók ezek a háromszögek!



142.ábra



143.ábra

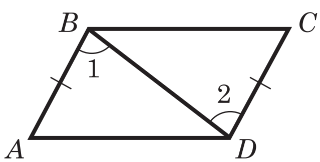


144.ábra

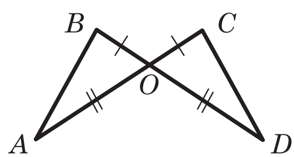
180.° *A* 143. ábrán $AC = DC$, $BC = EC$. Bizonyítsátok be, hogy $\Delta ABC = \Delta DEC$.

181.° *A* 144. ábrán $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$. Bizonyítsátok be, hogy $\Delta ABC = \Delta ADC$.

182.° *A* 145. ábrán $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$, AD = 7 cm, $\angle C = 34°$. Határozzátok meg a BC szakasz hosszát és az A szöget!



145.ábra

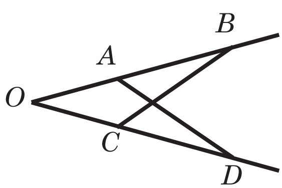


146.ábra

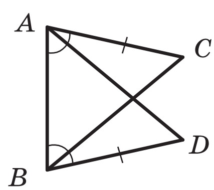
183.° *A* 146. ábrán $AO = OD$, $BO = OC$. Határozzátok meg az OCD háromszög CD oldalát és OCD szögét, ha AB = 8 cm, $\angle OBA = 43°$.

184.° Adott: $OA = OC$, $OB = OD$ (147.ábra). Bizonyítsátok be, hogy $\angle OAD = \angle OCB$.

185.° Adott: $AC = BD$, $\angle BAC = \angle ABD$ (148.ábra). Bizonyítsátok be, hogy $AD = BC$.



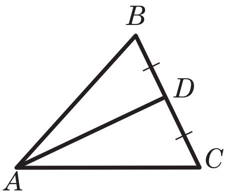
147.ábra



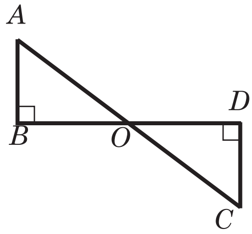
148.ábra

186.° Adott: $\angle ADC = \angle ADB$, $BD = CD$ (149.ábra). Bizonyítsátok be, hogy $AB = AC$!

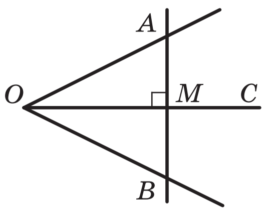
187.° A 150.ábrán az $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, Ol – a BD szakasz felezőpontja. Bizonyítsátok be, hogy $\Delta ABO = \Delta CDO$.



149.ábra



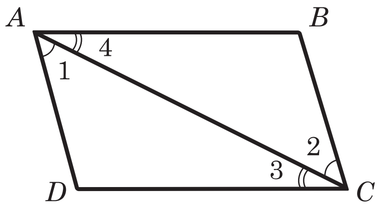
150.ábra



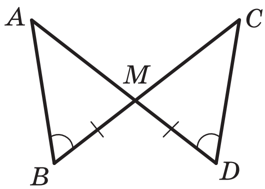
151.ábra

188.° *A* 151.ábrán az OC félegyenes az AOB szög szögfelezője, az AB és OC egyenesek egymásra merőlegesek. Bizonyítsátok be, hogy $\Delta AMO = \Delta BMO$.

189.° *A* 152.ábrán az $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm. Határozzátok meg az ADC háromszög AD és CD oldalát!



152.ábra

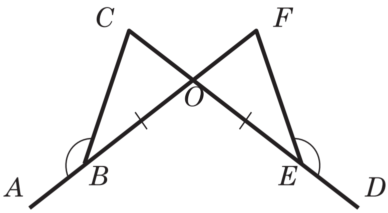


153.ábra

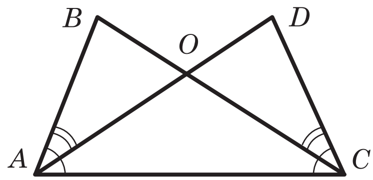
190.° *A* 153.ábrán $\angle B = \angle D$, $BM = DM$, $CD = 7$ cm, $CM = 4$ cm. Határozzátok meg az ABM háromszög AB és AM oldalát!

191.° *A* 154.ábrán $\angle ABC = \angle DEF$, $BO = OE$. Bizonyítsátok be, hogy a $\Delta BCO = \Delta EFO$.

192.° *A* 155.ábrán $\angle BAO = \angle DCO$, $\angle BAC = \angle DCA$. Bizonyítsátok be, hogy az $\Delta ABC = \Delta CDA$.



154.ábra



155.ábra

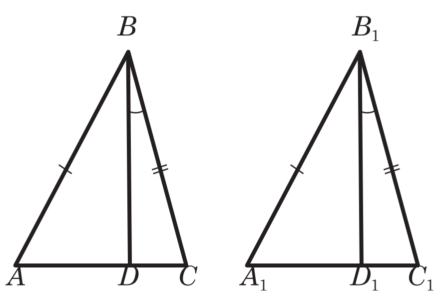
193.• Az A és B pontok az a egyeneshez viszonyítva az egyik félsíkra illeszkednek, és azonos távolságra vannak az adott a egyenestől. AC és BD merőlegeseket bocsátottunk erre az egyenesre. Határozzátok meg az ACB háromszög szöget, ha $\angle ADC = 25°$.

194.• Az AD és BC szakaszok az O pontban metszik és felezik egymást. Határozzátok meg az ACD szöget, ha $\angle ABC = 64°$, $\angle ACO = 56°$.

195.• A B szög különböző szárain megjelölték az A és C pontokat, a szögfelezőn pedig egy D pontot úgy, hogy $\angle ADB = \angle CDB$. Bizonyítsátok be, hogy $AB = BC$!

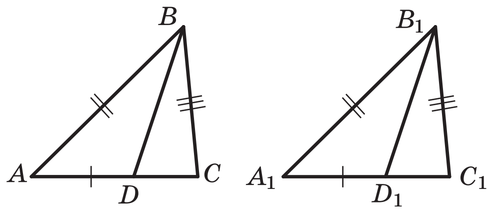
196.• Az M ponton keresztül, amely az O csúcsú szög szögfelezőjére illeszkedik, merőleges egyenest húztak erre a szögfelezőre. Ez az egyenes az adott szög szárait A és B pontokban metszi. Bizonyítsátok be, hogy AM = MB!

197.• A 156. ábrán $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$. Bizonyítsátok be, hogy $\Delta DBC = \Delta D_1B_1C_1$.



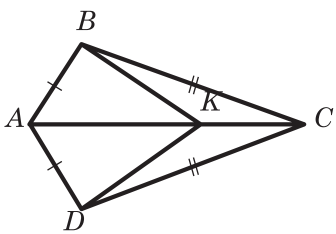
156.ábra

198.• A 157. ábrán $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, $AD = A_1D_1$. Bizonyítsátok be, hogy az $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$.

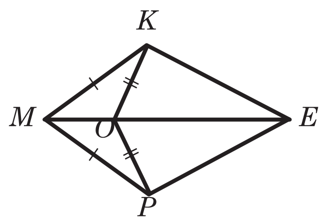


157.ábra

199.• A 158.ábrán az $\Delta ABC = \Delta ADC$. Bizonyítsátok be, hogy az $\Delta ABK = \Delta ADK$.



158.ábra



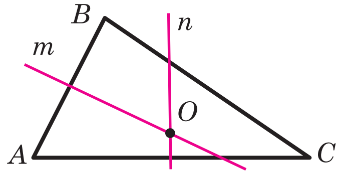
159.ábra

200.• A 159.ábrán az $\Delta MKO = \Delta MPO$. Bizonyítsátok be, hogy az $\Delta KOE = \Delta POE$.

201.• Az ABC háromszög AM súlyvonalának meghosszabbítására felmértek egy MK szakaszt, melynek hossza az AM szakasz hosszával egyenlő. Határozzátok meg a К pont és a C csúcs közötti távolságot, ha $AB = 6$ cm!

202.• Az AB és CD szakaszok az O pontban metszik és felezik egymást. Bizonyítsátok be, hogy $\Delta ABC = \Delta BAD$.

203.• A 160. ábrán az ABC háromszög AB és AC oldalainak a felezőmerőlegesei az m és n egyenesek. Bizonyítsátok be, hogy az O pont a háromszög minden csúcsától egyenlő távolságra lesz!



160.ábra

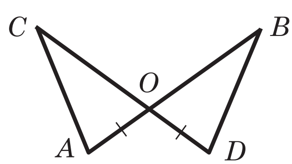
204.˙˙ Bizonyítsátok be, hogy az egybevágó háromszögek megfelelő szögeikből bocsátott szögfelezői egyenlők!

205.˙˙ Bizonyítsátok be, hogy az egybevágó háromszögek megfelelő oldalaira bocsátott súlyvonalak egyenlők!

206.˙˙ Az ABC háromszög BC oldalának felezőmerőlegese az AB oldalt egy D pontban metszi. Határozzátok meg az AD szakasz hosszát, ha $CD = 4$ cm, $AB = 7$ cm!

207.˙˙ Az ABC háromszög AB oldalának felezőmerőlegese a BC oldalt egy M pontban metszi. Határozzátok meg az ABC háromszög AC oldalának hosszát, ha $BC = 16$ cm, az AMC háromszög kerülete pedig 26 cm!

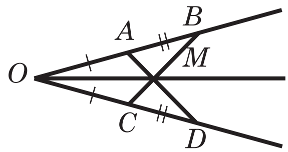
208.˙˙ *A* 161. ábrán OA = OD. Adjatok hozzá a feladathoz még egy feltételt, hogy az AOC és DOB háromszögek egybevágók legyenek:
1) a háromszögek egybevágóságának első alapesete alapján;
2) a háromszögek egybevágóságának második alapesete alapján!



161.ábra

209.* Az AB és CD szakaszok az O pontban metszik és metszéspontjukban felezik egymást. Az AC szakaszon felvettek egy M pontot, a BD szakaszon pedig egy K pontot úgy, hogy $AM = BK$. Bizonyítsátok be: 1) $OM = OK$; 2) az M, O és K pontok egy egyenesre illeszkednek!

210.* Az O csúcsú szög egyik szárán (162. ábra) megjelöltük az A és B pontokat, a másikon pedig a C és a D pontokat úgy, hogy $OA = OC$, $AB = CD$. Bizonyítsátok be, hogy OM a BOD szög szögfelezője, ahol az M pont az AD és BC szakaszok metszéspontja!



162.ábra

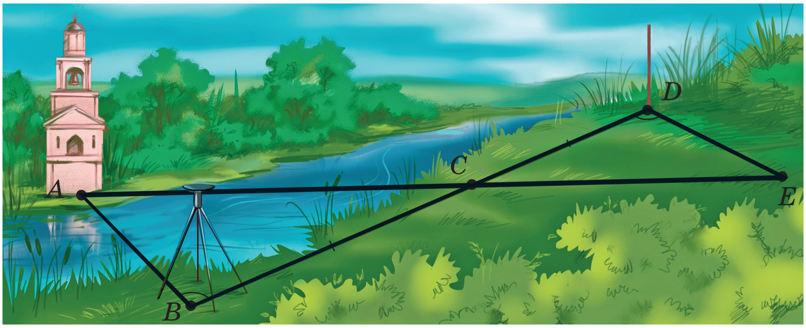
ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

211. Igaz-e a következő állítás: ha adott három pont, és közülük két-két ponton keresztül egyenest húzunk, akkor három egyenest fogunk kapni?

212. Az OD és OF félegyenesek az AOB és BOC szögek megfelelő mellékszögeinek a szögfelezői lesznek. $\angle AOD : \angle FOC = 2:7$. Határozzátok meg az AOD és FOC szögeket!

MEGTANULJUK ALKALMAZNI A MÉRTANT

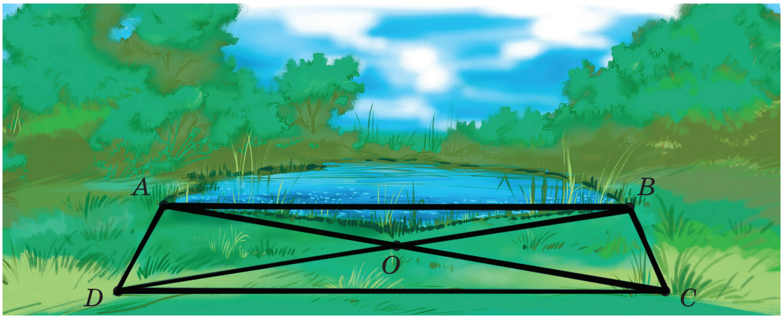
213. Ahhoz, hogy meghatározzuk a B pont és a folyó másik partján lévő A harangtorony közötti távolságot (163. ábra), mérőszalag és asztrolábium használatával megjelölték



163.ábra

a helyszínen a *C, D* és *E* pontokat úgy, hogy a *B, C* és *D* pontok egy egyenesre illeszkedjenek, és a *C* pont legyen a *BD* szakasz felezőpontja. Aztán megjelölték az *AE* egyenest, mely a *C* pontra illeszkedik, $\angle ABC = \angle CDE$. Majd a C*DE* háromszög egyik oldalát megmérve meghatározták a *B* és az A pontok közötti távolságot. Melyik oldalát mérték meg? Feleleteteket indokoljátok meg!

214. *A* tó szélességének meghatározására (164. ábra) a partján megjelölték az *A* és *B* pontokat, aztán a *C, D* és *O* pontokat úgy, hogy az *O* pont az *AC* és a *BD* szakaszok közös felezőpontja legyen. Hogyan lehet meghatározni a tó szélességét? Feleleteteket indokoljátok meg!



164.ábra

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

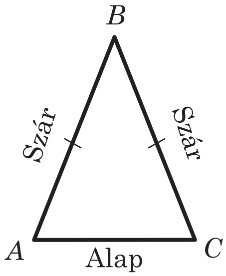
215. *A* 165. ábrán látható alakzatokat a rácsvonalak mentén vágjátok négy olyan egybevágó részre, hogy mindegyikben csak egy kör legyen.

165.ábra

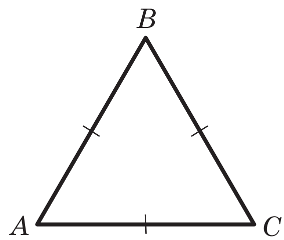
9. Az egyenlő szárú háromszög és tulajdonságai

Meghatározás. Azt a háromszöget, melynek két oldala egyenlő, egyenlő szárú három szögnek nevezzük.

A 166. ábrán az ABC egyenlő szárú háromszög látható, melyben $AB = BC$.



166.ábra



167.ábra

Az egyenlő szárú háromszög **egyenlő oldalait száraknak**, a harmadik oldalát pedig az egyenlő szárú háromszög **alapjának** nevezzük.

Szárainak közös pontját az **egyenlő szárú háromszög csúcsának** nevezzük (a B pont a 166. ábrán). A B szöget a **háromszög csúcsnál lévő szögének** (szárszögének), az A és C szögeket pedig az egyenlő szárú háromszög **alapon fekvő szögeinek nevezzük.**

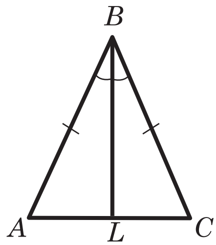
Meghatározás. Azt a háromszöget, melynek minden oldala egyenlő, egyenlő oldalú háromszögnek nevezzük.

A 167. ábrán egy ABC egyenlő oldalú háromszög látható. Az egyenlő oldalú háromszög az egyenlő szárú háromszögnek egy speciális esete.

9.1. tétel (az egyenlő szárú háromszög tulajdonságai). ***Az egyenlő szárú háromszögnek: 1) az alapon fekvő szögei egyenlők; 2) az alapra bocsátott szögfelezője a háromszög súlyvonala és magassága is.***

Bizonyítás: Vizsgáljuk meg az ABC egyenlő szárú háromszöget, melyben $AB = BC$, a BL szakasz a háromszög szögfelezője (168. ábra). Be kell bizonyítani, hogy $\angle A = \angle C$, $AL = LC$, $BL \perp AC$.

Az ABL és CBL háromszögekben BL közös oldal $\angle ABL = \angle CBL$, mivel a feltétel szerint a BL szakasz az ABC szög szögfelezője, az AB és BC szakaszok egyenlők, mint az egyenlő szárú háromszög szárai. Tehát $\Delta ABL = \Delta CBL$ a háromszögek egybevágóságának első alapesete alapján. Ebből az alábbi következtetéseket lehet levonni: 1) $\angle A = \angle C$; 2) $AL = = LC$; 3) $\angle ALB = \angle CLB$.



168.ábra

Mivel az AL és LC szakaszok egyenlők, ezért a BL szakasz az ABC háromszög súlyvonala.

Mivel az ALB és CLB szögek mellékszögek, ezért $\angle ALB + \angle CLB = 180°$. Figyelembe véve azt, hogy az $\angle ALB = \angle CLB$, oazt kapjuk, hogy $\Delta ABL = = \angle CLB = 90°$. Tehát a BL szakasz az ABC háromszög magassága.●

A 9.1. tételből következik, hogy:

1) a háromszögben egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek helyezkednek el;

2) az egyenlő szárú háromszögben a csúcsból az alapra húzott szögfelező egyben magasság és súlyvonal is;

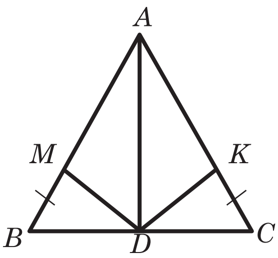
3) az egyenlő oldalú háromszögben minden szög egyenlő;

4) az egyenlő oldalú háromszögekben az egy csúcsból húzott szögfelező magasság és súlyvonal egybeesik.

Meghatározás. Ha a háromszög minden oldala különböző hosszúságú, akkor az ilyen háromszöget különböző oldalú (általános) háromszögnek nevezzük.

Feladat. Az AD szakasz az ABC egyenlőszárú háromszög alapjára bocsátott súlyvonala. Az AB és AC oldalakon felvették az M és K pontokat úgy, hogy $BM = CK$. Bizonyítsátok be, hogy AMD és AKD háromszögek egybevágók.

Megoldás. Az M pont az AB szakaszra illeszkedik, a K pont pedig az AC-re, $AB = AM + BM$, $AC = AK + CK$ (169. ábra)



169. ábra

Mivel $AB = AC$ és $BM = CK$, ezért $AM = AK$. A BAD és CAD szögek egyenlők, mivel az egyenlő szárú háromszög alapra bocsátott súlyvonala egyben szögfelező is.

Megjegyezzük, hogy AD az AMD és AKD háromszögek közös oldala.

Tehát az AMD és AKD háromszögek egybevágók a két oldal és közbezárt szögük alapján, vagyis a háromszögek egybevágóságának első alapesete szerint. ◀

?

1. Milyenek lehetnek a háromszögek oldalaik szerint? **2.** Milyen háromszögeket nevezünk egyenlő szárúaknak? Egyenlő oldalúaknak? Különböző oldalúaknak? **3.** Az egyenlő szárú háromszög mely oldalait nevezzük száraknak? **4.** Az egyenlő szárú háromszög mely oldalát nevezzük alapnak? **5.** Fogalmazzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeinek tulajdonságát! **6.** Fogalmazzátok meg az egyenlő szárú háromszög alapra húzott szögfelezőjének tulajdonságát. **7.** Milyen tulajdonsággal rendelkeznek a háromszögnek az egyenlő oldalaival szemközti szögei? **8.** Fogalmazzátok meg az egyenlő oldalú háromszög szögeinek tulajdonságát. **9.** Milyen tulajdonsággal rendelkezik az egyenlő oldalú háromszög egy csúcsából húzott szögfelezője, magassága és súlyvonala?

Якщо прикметник утворюється приєднанням суфікса -н- до іменника з основою на **-н**, то пишемо його з двома буквами **нн**: *сторо**на*** + -н- = *одностоNo**нн**ій*, *середи**на*** + -н- = *середи**нн**ий*.

Якщо прикметник утворюється приєднанням суфікса -н- до іменника з основою на будь-яку іншу букву, то пишемо його з однією буквою **н**: *парале**ль*** + -н- = *парале**льн**ий*, *ку**т*** + -н- = *прямоку**тн**ий*.

Тому пишемо: *рівносторо**нн**ій* és *різносторо**нн**ій*, але *рівнобедре**н**ий трикутник*.

GYAKORLATI FELADATOK

216.° Rajzoljatok:

1) különböző oldalú hegyesszögű háromszöget;
2) egyenlő szárú derékszögű háromszöget;
3) egyenlő szárú tompaszögű háromszöget!

217.° Rajzoljatok:

1) különböző oldalú derékszögű háromszöget;
2) különböző oldalú tompaszögű háromszöget!

218.° Rajzoljatok egyenlő szárú háromszöget, melynek szára 3 cm, csúcsszöge pedig: 1) hegyesszög; 2) derékszög; 3) tompaszög! Az így kapott háromszögekben a szárakra húzzátok magasságot!

GYAKORLATOK

219.° 1) Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög kerületét, ha az alapja 13 cm, a szára pedig 8 cm!

2) Az egyenlő szárú háromszög kerülete 39 cm, az alapja 15 cm. Határozzátok meg a szára hosszát!

220.° Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 28 cm, a szára pedig 10 cm. Határozzátok meg az alapjának a hosszát!

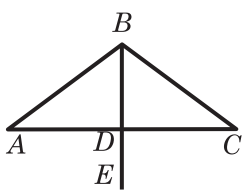
221.° Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög oldalait, ha a kerülete 32 cm, az alapja pedig 5 cm-rel nagyobb, mint a szára!

222.° Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög oldalait, ha a kerülete 54 cm, az alapja pedig 4-szer kisebb, mint a szára!

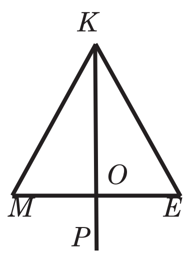
223.° Egy AC alapú ABC egyenlő szárú háromszögben $\angle BCA = 40°$, $\angle ABC = 100°$, BD pedig súlyvonal. Határozzátok meg az ABD háromszög szögeit!

224.° A 170. ábrán $AB = BC$, BD az ABC háromszög súlyvonala, $\angle ABD = 53°$. Határozzátok meg az ABC és ADE háromszög szögeit!

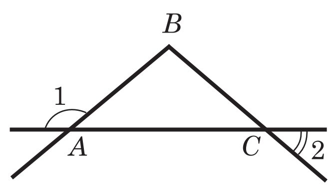
225.° A 171. ábrán $MK = KE$, $OE = 6$ cm, $\angle MKE == 48°$, $\angle POE = 90°$. Határozzátok meg az ME oldal hosszát, és az MKO szöget!



170.ábra



171.ábra



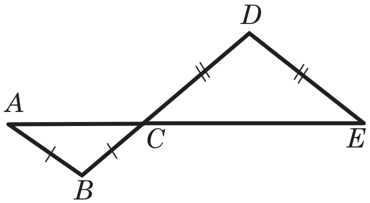
172.ábra

226.° A 172. ábrán $AB = BC$, $\angle 1 = 140°$. Határozzátok meg a 2-es szöget!

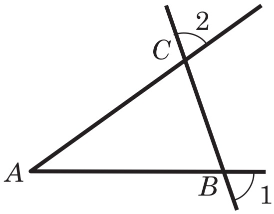
227.° Egy egyenlő szárú háromszög szárszöge 68°. Határozzátok meg a háromszög szára és az alapra húzott súlyvonala által bezárt szöget!

228.° Az egyenlő szárú háromszög szárszögének mellékszöge 76°. Határozzátok meg a háromszög szára és az alapra húzott magassága közötti szöget!

229.° A 173. ábrán $AB = BC$, $DC = DE$. Bizonyítsátok be, hogy az $\angle A = \angle E$.



173.ábra

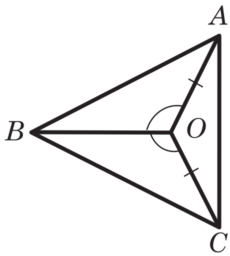


174.ábra

230.° Az A szög szárait egy egyenes úgy metszi a B és C pontokban, hogy $AB = BC$ (174. ábra). Bizonyítsátok be, hogy az $\angle 1 = \angle 2$.

231.° A 175. ábrán $AO = CO$, $\angle AOB = \angle COB$. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!

232.• Az ABC háromszög egyenlő szárú, melynek az alapja AC, BD a háromszög szögfelezője, DM pedig a BDC háromszög szögfelezője. Határozzátok meg az ADM szöget!



175.ábra

233.• Az egyik tanuló azt állítja, hogy az adott háromszög egyenlő szárú, a másik pedig azt, hogy ez a háromszög egyenlő oldalú.

1) Előfordulhat-e, hogy mindkét tanuló igazat mond?

2) Milyen esetben lesz csak az egyiknek igaza, és melyiknek?

234.• Alkalmazva a háromszögek egybevágóságának alapeseteit, bizonyítsátok be az egyenlő szárú háromszögek egybevágóságát száruk és szárszögük egyenlősége alapján!

235.• Alkalmazva a háromszögek egybevágóságának alapeseteit, bizonyítsátok be az egyenlő szárú háromszögek egybevágóságát alapjuk és a rajta fekvő szögük egyenlősége alapján!

236.• Az MKE háromszögben ismert, hogy $MK = ME$. A KE oldalán úgy vették fel az F és N pontokat, hogy az N pont az F és E közé került, eközben $\angle KMF = \angle EMN$. Bizonyítsátok be, hogy az $\angle MFN = \angle MNF$.

237.• Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja AC, melyen úgy vették fel az M és K pontokat, hogy az M pont az A és K pontok között legyen, és $AM = CK$. Bizonyítsátok be, hogy az MBK háromszög egyenlőszárú!

238.• Az ABC egyenlő szárú háromszög CA és CB száraira megfelelően felmérték CK és CM egyenlő szakaszokat. Bizonyítsátok be, hogy az: 1) $\Delta AMC = \Delta BKC$; 2) $\Delta AMB = = \Delta BKA$.

239.• Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja AC, a BD oldalfelezőjén felvettek egy M pontot. Bizonyítsátok be, hogy az: 1) $\Delta AMB = \Delta CMB$; 2) $\Delta AMD = \Delta CMD$.

240.• Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszögben az alap végpontjaiból húzott szögfelezők egyenlők egymással!

241.• Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszögben a szárakra húzott súlyvonalak egyenlők egymással!

242.• Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög oldalainak a felezőpontjai egy egyenlő szárú háromszög csúcsai lesznek!

243.• Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög harmadik oldalát, ha a két oldalának a hossza 7 cm és 4 cm. Hány megoldása lesz a feladatnak?

244.• Az egyenlő szárú háromszög egyik oldala 4 cm. Határozzátok meg a másik két oldalát, ha a háromszög kerülete 14 cm!

245.• Igaz-e a következő állítás:

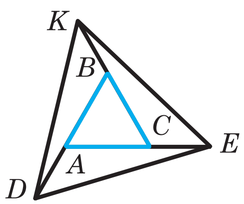
1) az egyenlő szárú háromszögben a szögfelező magasság és súlyvonal is egyben;

2) az egyenlő oldalú háromszögben a szögfelező magasság és súlyvonal is egyben;

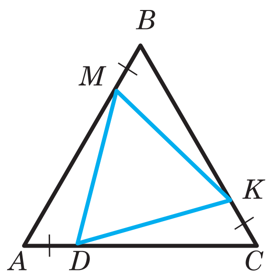
3) ha a háromszög kerülete 3-szor nagyobb, mint az egyik oldala, akkor ez a háromszög egyenlő oldalú?

246.•• Az ABC egyenlő oldalú háromszög AB, BC, AC oldalainak meghosszabbításán AD, BK és CE egyenlő szakaszokat mértek fel (176.ábra). Bizonyítsátok be, hogy a DEK háromszög egyenlő oldalú!

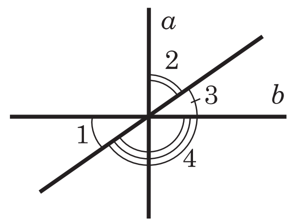
247.•• Az ABC egyenlő oldalú háromszög (177. ábra) oldalain felvették az M, K és D pontokat, úgy hogy $AD = BM = CK$. Bizonyítsátok be, hogy az MKD háromszög egyenlő oldalú!



176.ábra



177.ábra



178.ábra

248.•• Az egyenlő szárú háromszög alapja 20 cm, súlyvonala pedig a háromszöget két olyan háromszögre bontja, hogy az egyik kerülete 6 cm-rel kisebb a másik háromszög kerületénél. Határozzátok meg az adott háromszög szárát! Hány megoldása van a feladatnak?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

249. *A* 178.ábrán $a \perp b$, $\angle 1 = 35°$. Határozzátok meg a 2, 3, 4 szögeket!

250. Az a hosszúságú AB szakaszt a C és D pontok, AC, CD és DB szakaszokra osztják úgy, hogy $AC = 2CD$, $CD = 2DB$. Határozzátok meg a következő távolságokat: 1) az A pont és a CD szakasz felezőpontja között; 2) az AC és DB szakaszok felezőpontjai között!

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

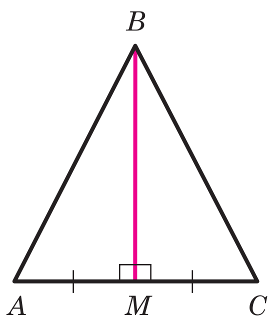
251. Rajzoljatok egy olyan hatszöget, melyet egy vágással két háromszögre lehet osztani!

10. Az egyenlő szárú háromszögek ismertetőjelei

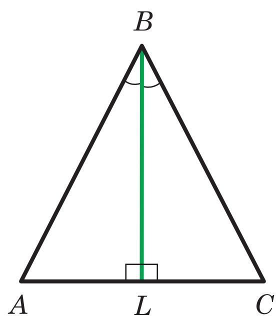
Az előző pontban megvizsgáltuk az egyenlő szárú háromszögek tulajdonságait. De hogyan lehet a háromszögek között felismerni az egyenlő szárúakat? Erre a kérdésre válaszolnak a következő ismertetőjel-tételek.

10.1. tétel. ***Ha a háromszög súlyvonala magassága is egyben, akkor a háromszög egyenlő szárú.***

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az ABC háromszöget, melyben a BM súlyvonal és magasság is egyben. Be kell bizonyítani, hogy $AB = BC$ (179. ábra).



179.ábra



180.ábra

A tétel feltételéből következik, hogy a BM az AC szakasz felezőmerőlegese.

Ekkor a felezőmerőleges tulajdonságából következik, hogy $AB = BC$.

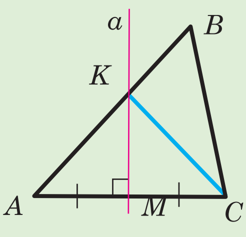
10.2. tétel. ***Ha a háromszög szögfelezője magassága is egyben, akkor az ilyen háromszög egyenlő szárú.***

Bizonyítás: ⊙ Vizsgáljuk meg az ABC háromszöget, melyben a BL szögfelező és magasság is. Be kell bizonyítani, hogy $AB = BC$ (180. ábra).

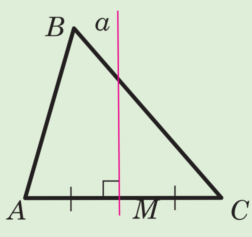
Az ABL és CBL háromszögeknek BL a közös oldala, $\angle ABL = \angle CBL$ (mivel BL az ABC szög szögfelezője), $\angle ALB = \angle CLB = 90°$ (mivel BL a háromszög magassága). Tehát az ABL és CBL háromszögek egybevágók a háromszögek egybevágóságának második alapesete alapján. Ezért az AB és BC oldalak egyenlők, mint az egybevágó háromszögek megfelelő oldalai. ●

10.3. tétel. ***Ha a háromszög két szöge egyenlő, akkor a háromszög egyenlő szárú.***

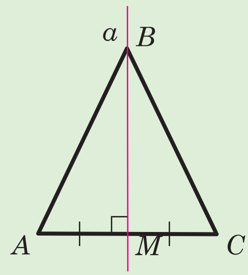
Bizonyítás. ✪ Vizsgáljuk meg az ABC háromszöget, melyben $\angle A = \angle C$. e kell bizonyítani, hogy $AB = BC$.



181.ábra



182.ábra



183.ábra

Meghúzzuk az AC oldal a felezőmerőlegesét. Bebizonyítjuk, hogy a B csúcs illeszkedik az a egyenesre.

Feltételezzük, hogy ez nincs így. Ekkor az a egyenes egy egyik belső pontjában metszi az AB (181. ábra) vagy a BC szakaszt (182. ábra).

Vizsgáljuk meg az első esetet. Legyen K az a egyenes és a AB oldal metszéspontja. Ekkor a felezőmerőleges tulajdonsága alapján (42.2. tétel) $AK = CK$. Tehát az AKC háromszög egyenlő szárú lesz, ebből következik, hogy $\angle A = \angle ACK$. A feltétel szerint, $\angle A = \angle ACB$. bből kapjuk, hogy $\angle ACB = \angle ACK$, ami ellentmond a szögmérték alaptulajdonságának (3. pont).

Hasonlóan ellentmondásra jutunk a második esetben is (182. ábra).

Tehát, a mi feltételezésünk nem helyes. Az a egyenesre a B pont illeszkedni fog (183. ábra). Ekkor a felezőmerőleges tulajdonsága alapján $BA = BC$. ●

Ebből a tételből következik:

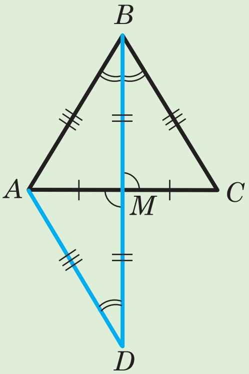
1) a háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak;

2) ha a háromszögben minden szög egyenlő, akkor a háromszög egyenlő oldalú.

10.4. tétel. ***Ha a háromszög súlyvonala egyben a szögfelezője is, akkor a háromszög egyenlő szárú.***

Bizonyítás: Vizsgáljuk meg az ABC háromszöget, melyben a BM súlyvonal szögfelező is. Be kell bizonyítani, hogy $AB = BC$.

Vizsgáljuk meg az ABC háromszöget, melyben a BM súlyvonal szögfelező is. Be kell bizonyítani, hogy $AB = BC$.



184.ábra

A BM félegyenesen, a BM szakasz hosszával megegyező MD szakaszt mérünk fel (184.ábra).

Az AMD és CMB háromszögekben: $AM = MC$ (mivel a BM súlyvonal); a szerkesztés alapján BM = MD, az AMD és CMB szögek csúcsszögek, ezért egyenlők. Tehát az AMD és CMB háromszögek a háromszögek egybevágóságának első alapesete alapján egybevágók. Tehát az AD és BC oldalaik, az ADM és CBM szögeik egyenlők, mint az egybevágó háromszögek megfelelő elemei.

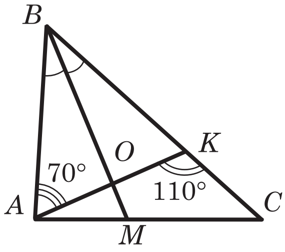
Mivel a BD az ABC szög szögfelezője, ezért $\angle ABM = \angle CBM$. Mivel $\angle CBM = \angle ADM$, ezért az $\angle ABM = \angle ADM$. Ekkor az egyenlő szárú háromszögek ismertetőjele (44.3. tétel) alapján azt kaptuk, hogy a DAB háromszög egyenlő szárú, innen következik, hogy $AD = AB$. És mivel már bizonyítva van, hogy $AD = BC$, ezért $AB = BC$.●

Feladat. Az ABC háromszögben meghúzták a BM szögfelezőt (185. ábra). $\angle BAK = 70°$, $\angle AKC = 110°$. Bizonyítsátok be, hogy az $BM \perp AK$.

Megoldás. Mivel a BKA és AKC szögek mellékszögek, ezért $\angle BKA = 180° - \angle AKC$.

Ekkor $\angle BKA = 180° - 110° = 70°$.

Tehát az ABK háromszögben $\angle BAK = \angle BKA = 70°$. Ezért az ABK háromszög egyenlő szárú, melynek AK az alapja, szögfelezője pedig BO (O – az AK és a BM metszéspontja), amely magassága is egyben, tehát $BM \perp AK$. ◀



185.ábra

?

1. Fogalmazzátok meg az egyenlő szárú háromszög ismertetőjelét! **2.** Milyen összefüggés van a háromszögek egyenlő oldalai és egyenlő szögei között? **3.** Mit állíthatunk arról a háromszögről, melynek a szögei egymással egyenlők?

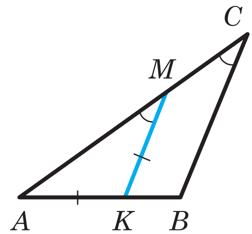
GYAKORLATOK

252.° Az ABC háromszög BK súlyvonala merőleges az AC oldalra. Határozzátok meg az ABC szögét, ha $\angle ABK = 25°$.

253.° A B pont illeszkedik az ABC háromszög AC oldalának felező merőlegesére. Határozzátok meg a C szögét, ha $\angle A = 17°$.

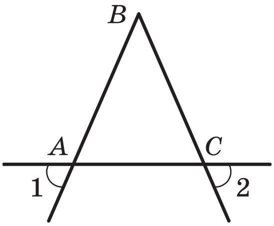
254.° Az ABC háromszögben ismert, hogy $\angle ACB = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$, CK szakasz pedig a háromszög magassága. Határozzátok meg az AB oldalát, ha CK = 7 cm!

255.° A 186. ábrán az $\angle AMK = \angle ACB$, $AK = MK$. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!



186.ábra

256.° *A* 187.ábrán az $\angle 1 = \angle 2$. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!



187.ábra

257.° Egy egyenes merőleges az A szög szögfelezőjére, és B és C pontokban metszi a szög szárait. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!

258.° Az ABC egyenlőszárú háromszögben az AC alapon fekvő szögek AM és CK szögfelezői egy O pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy az AOC háromszög egyenlő szárú.

259.• Az ABC háromszögben a BK szögfelező egyben a háromszög magassága is. Határozzátok meg a háromszög kerületét, ha az ABK háromszög kerülete 16 cm és a $BK = 5$ cm!

260.• Az ABC háromszög BM súlyvonala a szögfelezője is. Az ABC háromszög kerülete 48 cm, az ABM háromszög kerülete pedig 30 cm. Határozzátok meg a BM szakasz hosszát!

261.• Igazak-e a következő állítások:

1) ha az egy csúcsból húzott súlyvonal és a szögfelező nem esik egybe, akkor az ilyen háromszög nem lesz egyenlő szárú;
2) ha a háromszög szögfelezője a szemközti oldalát felezi, akkor ez a háromszög egyenlő szárú?

262.• Az ABC egyenlő szárú háromszög BC és AB oldalaira húzott AE és CF súlyvonalak az M pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy az AMC háromszög egyenlő szárú!

263.• Az ABC egyenlő szárú három szög háromszög AB és BC oldalain rendre felvették az M és K pontokat úgy, hogy $AM = CK$. Az AK és CM szakaszok az O pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy az AOC háromszög egyenlő szárú!

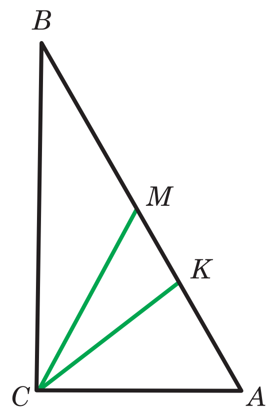
264.•• Az ABC háromszög AB és BC oldalain megfelelően felvették a D és E pontokat úgy, hogy $\angle EAC = \angle DCA$. Az AE és CD szakaszok az F pontban metszik egymást, és DF = EF. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!

265.•• Az ABC háromszög AB oldalának D felezőpontján át az ABC és BAC szögek szögfelezőire merőleges egyeneseket húztak. Ezek az egyenesek az AC és BC oldalakat rendre M és K pontokban metszik. Bizonyítsátok be, hogy $AM = BK$!

266.•• Az ABC háromszög AM súlyvonala merőleges a BK szögfelezőre. Határozzátok meg az AB oldal hosszát, ha BC = 16 cm!

267.•• Az ABC háromszögben a BD súlyvonal merőleges egy olyan egyenesre, amelyre illeszkedik a háromszög A csúcsa, és ez az egyenes felezi az súlyvonalat. Határozzátok meg az ABC háromszög AB és AC oldalainak arányát!

268.•• Az ABC háromszögben adott, hogy $\angle C = 90°$, $\angle A = 67{,}5°$, $\angle B = 22{,}5°$, CK az ABC háromszög szögfelezője, CM pedig a BCK háromszög szögfelezője (188. ábra). Bizonyítsátok be, hogy az M pont az AB oldal felezőpontja!



188. ábra

269.* Egy háromszög oldalainak centiméterekben mért hossza három egymást követő természetes szám. Határozzátok meg az adott háromszög oldalait, ha az egyik súlyvonala merőleges az egyik szögfelezőjére!

270.* Az ABC háromszögben adott, hogy AB = 3 cm, AC = 6 cm. A BC oldalán úgy jelöltek egy M pontot, hogy CM = 1 cm. Az M ponton átmenő egyenes merőleges az ACB szög szögfelezőjére, és az AC szakaszt egy K pontban metszi. Ismert továbbá, hogy a K pontra illeszkedő egyenes, amely merőleges a BAC szög szögfelezőjére, az AB oldalt egy D pontban metszi. Határozzátok meg a BD szakasz hosszát!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

271. Egy egyenesen egymás után vették fel az A, B, C, D, E és F pontokat úgy, hogy $AB = BC = CD = DE = EF$. Határozzátok meg az $AB : CF$, $AB : BF$, $BD : AE$ arányokat!

272. Határozzátok meg két egyenes metszésekor keletkezett szögeket, ha az egyik szög 42°-kal nagyobb, mint a másik szög fele!

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

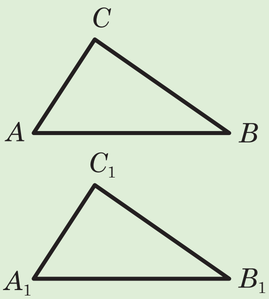
273. A 4×9 méretű téglalapot vágjátok két egyenlő részre úgy, hogy ezekből a részekből egy négyzetet lehessen kirakni!

11. A háromszög egybevágóságának harmadik alapesete

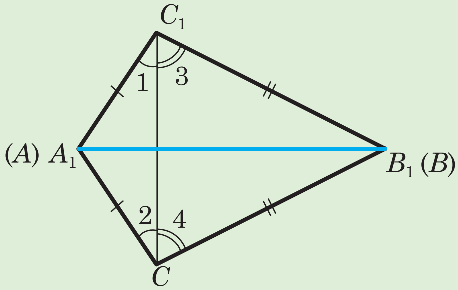
11.1. tétel (a háromszög egybevágóságának harmadik alapesete: három oldal alapján). ***Ha az egyik háromszög három oldala megfelelően egyenlő a másik háromszög három oldalával, akkor ezek a háromszögek egybevágók.***

Bizonyítás: Vizsgáljuk meg az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögeket (189. ábra), melyekben $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (ezek az egyenlőségek azt mutatják, hogy a háromszögek mely oldalai lesznek a megfelelő oldalak). Bebizonyítjuk, hogy $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Úgy helyezzük el az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögeket, hogy az A csúcsa az A_1, csúcsra, a B csúcs pedig a B_1, re kerüljön, a C és C_1 csúcsok pedig az AB egyeneshez viszonyítva különböző félsíkokra illeszkedjenek (190. ábra). Meghúzzuk a CC_1. szakaszt. Mivel $AC = A_1C_1$, ezért a C_1A_1C háromszög egyenlő szárú lesz, tehát $\angle 1 = \angle 2$. Hasonlóan be lehet bizonyítani, hogy $\angle 3 = \angle 4$. Tehát az $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$. Ekkor az Az $A_1C_1B_1$ és A_1CB_1 háromszögek egybevágók a két oldaluk és közbezárt szögük alapján, vagyis az első alapeset alapján.

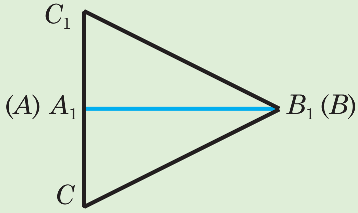


189.ábra

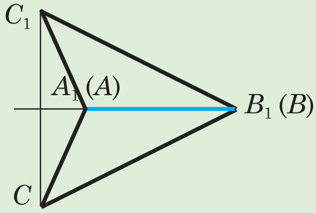


190.ábra

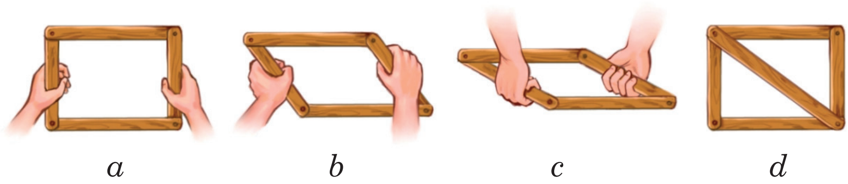
Ezzel a bizonyítást akár befejezettnek tekinthetjük. De mi csak azt az esetet vizsgáltuk, amikor a CC_1 szakaszt az A_1B_1 szakaszt az CC_1 szakasz átmehet az A_1B_1, szakasz egyik végpontján, például az A_1 ponton (191. ábra), vagy az is előfordulhat, hogy az A_1B_1 szakasszal nincs közös pontja (192. ábra). Ezekben az esetekben a bizonyítás hasonló az előzőhöz. Végezzétek el önállóan!



191.ábra



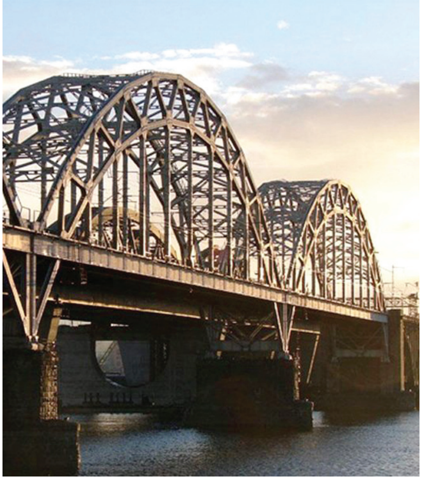
192.ábra



193.ábra

A háromszögek egybevágóságának harmadik alapesetéből következik, hogy a *háromszög egy merev szerkezet*. Valóban, ha négy pálcát úgy kötünk össze, mint a 193. a ábra mutatja, akkor ez a szerkezet nem lesz merev (193 b, c ábrák). Ha még egy pálcát hozzáteszünk, akkor két háromszöget kapunk (193. d ábra), és a keletkezett szerkezet merev lesz. Ezt a tényt széleskörűen alkalmazzák a gyakorlatban (194.ábra).

Távvezetékek oszlopai

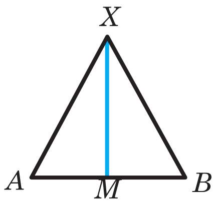


Darnitszki híd a Dnyipro folyón

194.ábra Merev szerkezetek

11.2. tétel. ***Ha a pont egyenlő távolságra van a szakasz végpontjaitól, akkor az a szakasz felező merőlegesére illeszkedik.***

Bizonyítás: Legyen az X pont egyenlő távolságra az AB szakasz végpontjaitól, vagyis $XA = XB$ (195. ábra). Vizsgáljuk meg az AXM és BXM, háromszögeket, ahol az M az AB szakasz felezőpontja. Ekkor az $\Delta AXM = \Delta BXM$ a három oldal alapján, vagyis a háromszögek egybevágóságának harmadik alapeset alapján. Innen $\angle AMX = \angle BMX$. E szögek összege 180°, ezért mindegyikük 90°-kal egyenlő. Tehát az XM az AB szakasz felezőmerőlegese.



195.ábra

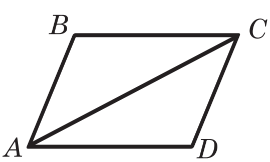
Megjegyezzük, hogy csak azt az esetet vizsgáltuk meg, amikor az X pont nem illeszkedik az AB szakaszra. Ha az X pont az AB szakaszra illeszkedik, akkor egybeesik az AB szakasz felezőpontjával, tehát a felezőmerőlegesre illeszkedik.

?

1. Fogalmazzátok meg a háromszögek egybevágóságának harmadik alapesetét! **2.** Hol helyezkednek el azok a pontok, amelyek egyenlő távolságra vannak a szakasz végpontjaitól?

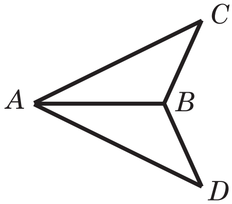
GYAKORLATOK

274.° A 196. ábrán $AB = CD$, $BC = AD$. Bizonyítsátok be, hogy $\angle B = \angle D$.



196.ábra

275.° *A* 197. ábrán $AC = AD$, $BC = BD$. Határozzátok meg a BAC szöget, ha $\angle BAD = 25°$.

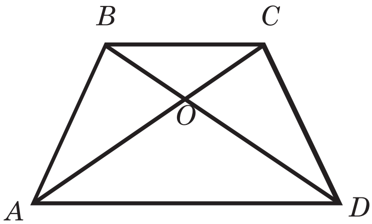


197.ábra

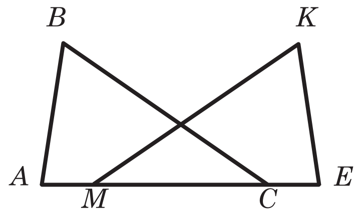
276.° Bizonyítsátok be, hogy két egyenlő szárú háromszög egybevágó, ha az egyik háromszög szára és alapja megfelelően egyenlő a másik háromszög szárával és alapjával!

277.° Bizonyítsátok be, hogy két egyenlő oldalú háromszög egybevágó, ha az egyik háromszög oldalai egyenlő a másik háromszög oldalaival!

278.• *A* 198. ábrán $\Delta ABC = \Delta DCB$, miközben $AB = CD$. Bizonyítsátok be, hogy az $\Delta ABD = \Delta DCA$.



198.ábra



199.ábra

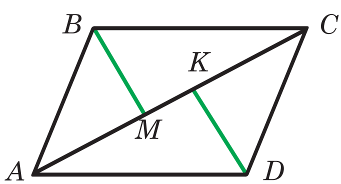
279.• *A* 198. ábrán $AB = CD$, $AC = BD$. Bizonyítsátok be, hogy a BOC háromszög egyenlő szárú!

280.• Az M és N pontok az AB szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra vannak. Bizonyítsátok be, hogy az MN egyenes az AB szakasz felezőmerőlegese!

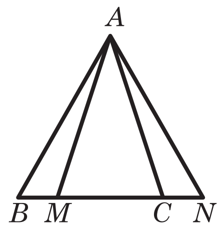
281.• Az ABC egyenlő szárú ($AB = BC$) háromszög belsejében, úgy jelöltünk meg egy D pontot, hogy $AD = CD$. Bizonyítsátok be, hogy a BD és az AC egyenesek merőlegesek!

282.• A 199. ábrán $AB = KE$, $BC = KM$, $AM = EC$. Bizonyítsátok be, hogy az $\angle AMK = \angle BCE$.

283.• A 200. ábrán $AB = CD$, $BC = AD$, BM az ABC szög szögfelezője, DK pedig az ADC szög szögfelezője. Bizonyítsátok be, hogy $\Delta ABM = \Delta CDK$.



200.ábra



201.ábra

284.• Az AB és CD szakaszok az O pontban metszik egymást úgy, hogy OA = OD. Bizonyítsátok be, hogy $\Delta ABC = \Delta DCB$.

285.• A BD és B_1D_1 – szakaszok az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek megfelelő szögfelezői, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$. Bizonyítsátok be, hogy $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

286.• A AM és A_1M_1 –szakaszok az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek megfelelő súlyvonalai, $AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$, $AM = A_1M_1$. Bizonyítsátok be, hogy $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

287.•• Miki azt állítja, hogy sikerült egy olyan rajzot készítenie, melyen AB = AC és AM = AN (201. ábra). Vajon igaza van-e Mikinek?

288.•• Ki lehet-e jelenteni, hogy két háromszög akkor egybevágó, ha az egyik háromszög minden oldala egyenlő a másik háromszög valamelyik oldalával?

289.* Bizonyítsátok be két háromszög egybevágóságát, két oldaluk és a harmadik oldalra húzott súlyvonal alapján!

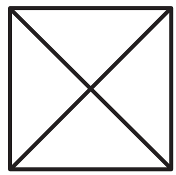
ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

290. Az AB szakaszon a felvettek egy C és egy D pontot, úgy hogy $AC:BC=7:8$, $AD:BD=13:17$. Határozzátok meg az AB szakasz hosszát, ha a C és D pontok távolsága 2 cm!

291. Az AB és CD szakaszok az O pontban metszik egymást, az OM és OK félegyenesek megfelelően az AOC és BOC szögek szögfelezői. Lehet -e az MOK szög derékszög?

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

292. *E*gy négyzetet az átlói mentén négy háromszögre vágták szét (202. ábra). A kapott háromszögekből rakjatok ki két négyzetet!



202.ábra

12. Tételek

A tankönyvben egyre szaporodik a tételek száma. Ez nem meglepő, mert a mértan többségében tételekből és azok bizonyításából áll.

Az általunk eddig bizonyított tételek két részből állnak. A tétel első részét (az, ami adva van) a **tétel feltételének** nevezzük, a második részt (az, am it bizonyítani kell) a **tétel következményének** nevezzük.

Például a 8.1. tétel (a háromszögek egybevágóságának első alapesete) feltétele: ***az egyik háromszög két oldala és közbezárt szöge egyenlő a másik háromszög két oldalával és közbezárt szögével, a következménye pedig: a háromszögek egybevágók.***

A már ismert tételeket feltételesen két csoportra oszthatjuk: a **tulajdonság-tételekre és az ismertetőjel-tételekre.** Például a 1.1. tétel az egymást metsző egyenesek tulajdonságát adja meg, a 9.1. tétel pedig az egyenlő szárú háromszög tulajdonságát.

Az ismertetőjel-tételek adják meg azokat az ismertetőjeleket, amelyek alapján fel lehet ismerni az adott alakzatot, vagyis az egyik vagy a másik csoportba lehet azt besorolni.

A háromszögek egybevágóságának alapesetei meghatározzák azokat a feltételeket, amelyek alapján két háromszöget az egybevágó háromszögek csoportjába sorolhatunk. Például a 10.1.l – 10.4. tételekben fogalmazódnak meg azok a feltételek, amelyek alapján az egyenlő szárú háromszögek felismerhetők.

Azokat a tételeket, amelyek az axiómákból vagy tételekből közvetlenül következnek, **következmény-tételeknek** vagy egyszerűen **következményeknek** nevezzük.

Például a háromszög egyenlő oldalaival szemközti szögek tulajdonsága a 9.1. tétel következménye.

Ha a 8.2. tételbenl – a felezőmerőleges tulajdonságáról szóló tételbenl – felcseréljük a feltételt a következménynyel, akkor a 11.2. tételt kapjuk.

Azt a két tételt, amelyekben az egyik tételben a feltétel és a következmények felcserélésével megkapjuk a másik tételt, és fordítva, **kölcsönösen fordított (inverz) tételeknek** nevezzük. Ha az egyik tételt **egyenes tételnek** nevezünk, akkor a másik lesz a **fordítottja (inverze)**.

Óvatosan kell eljárnunk a tételek feltétele és következménye felcserélésekor, mert nem mindig kapunk ilyenkor igaz állítást. Például a mellékszögek összegéről szóló 4.1. tétel fordítottja nem lesz igaz. Valóban, ha bármely két szög összege 180°, akkor ezek a szögek nem biztos, hogy mellékszögek.

Már tudjátok, hogy a tétel igaz voltát a logikus gondolatmenet által igazolják, vagyis bizonyítás útján. Ennek a tankönyvnek az első **tételét indirekt módon** (az ellenkezőt állítva) bizonyítottuk. A módszer neve elárulja a bizonyítás lényegét. Feltételeztük a 1.1. tétel állításának az ellenkezőjét. A feltételezésből kiindulva logikus gondolatmenet által olyan tényt kaptunk, ami ellentmond az egyenesek alaptulajdonságának.

Nagyon fontos, hogy a tétel bizonyítása teljes legyen, vagyis minden lehetséges esetre kiterjedjen. A 11.1. tétel (a háromszögek egybevágóságának harmadik alapesete) bizonyítása során három lehetséges esetet kellett megvizsgálni.

A matematikai kultúra kialakításának legfontosabb része az a képesség, amely lehetővé teszi a bizonyítás minden részletének átlátását. Ha például a 8.2. tétel bizonyításánál nem vizsgáltuk volna külön azt az esetet, amikor az X pont az AB szakasz felezőpontja, akkor ebben az esetben az AXM és BXM háromszögek vizsgálata lehetetlen lenne.

A 10.4. tétel (az egyenlő szárú háromszög ismertetőjele) bizonyítása során a **kiegészítő szerkesztési módszert alkalmaztuk:** a rajzot olyan elemekkel egészítettük ki, melyekről a tétel feltételében nem esett szó. Ez a módszer nagyon sok feladat megoldása során alkalmazható, és sok tétel bizonyításakor is. Ezért nagyon fontos, hogy megtanuljuk észrevenni az optimális kisegítő szerkesztés lehetőségét, amellyel a kívánt eredmény elérhető.

Hogyan tehetünk szert geometriai szemléletre? Ez egy nem könnyű kérdés, amire nagyon nehéz válaszolni, vagy konkrét tanácsot adni. Mégis azt tanácsoljuk: először is ne legyetek közömbösek a geometria iránt, és szeressétek ezt a csodálatos tantárgyat; másodszor, nagyon sok feladatot oldjatok meg, hogy minél nagyobb tapasztalatra tegyetek szert.

?

1. Milyen két részből áll a tétel megfogalmazása? **2.** Hogy nevezzük azt a tételt, amely az alakzat tulajdonságainak felsorolásával teszi felismerhetővé az alakzatot? **3.** Hogy nevezzük azt a tételt, amely közvetlenül az axiómákból vagy más tételekből következik? **4.** Hogy nevezik az olyan tételpárt, amelyekben a feltétel és a következmény fel van cserélve? **5.** Miben áll az indirekt bizonyítási mód? **6.** A 1.1., 4.2., 5.1. és 8.3. tételek közül melyiket bizonyítják indirekt módon? **7.** Miben áll a kisegítő szerkesztési módszer?

GYAKORLATOK

293.° A 4.1, 8.2, 9.1, 10.3, 11.2 tételekben nevezzétek meg a feltételt és a következményt!

294.° A 4.1, 8.2, 9.1, 10.3, 11.2 tételek közül válasszátok ki:
1) a tulajdonság-tételeket;
2) az ismertetőjel-tételeket!

295.• Fogalmazzátok meg a következő állításokkal fordított állítást:
1) ha a háromszög egyenlő oldalú, akkor a szögei egyenlők;
2) ha két szög csúcsszög, akkor a szögfelezői egymás kiegészítő félegyenesei;
3) ha két szög szögfelezői közötti szög derékszög, akkor ezek a szögek mellékszögek;
4) ha az egyik háromszög oldala és szemközti szöge megegyezik egy másik háromszög oldalával és szemközti szögével, akkor az ilyen háromszögek egybevágók.

Az előző állítások melyikére mondhatjuk, hogy:
1) az egyenes és a fordított állítás is igaz;
2) az egyenes állítás igaz, de a fordítottja hamis;
3) az egyenes állítás hamis, de a fordítottja igaz?

296.• Fogalmazzátok meg azt az állítást, amely fordítottja következőnek:
1) ha két háromszög nem egybevágó, akkor a kerületük sem egyenlő;

2) ha egy szög fokmértéke nagyobb, mint 90°, akkor ez a szög tompaszög.

Az előző állítások közül melyik lesz igaz:
1) az egyenes és a fordított állítás is igaz;
2) az egyenes állítás igaz, de a fordított hamis;
3) az egyenes állítás hamis, de a fordított igaz?

297.• Fogalmazzátok meg azt az állítást, amely tagadja az adottat:
1) az AB szakasz metszi az m egyenest;
2) az ABC szög fokmértéke nagyobb 40°-nál;
3) két mellékszög közül legalább az egyik nem nagyobb 90°-nál;
4) az OA és OB félegyenesek nem lesznek kiegészítő félegyenesek;
5) a szakasznak csak egyetlen középpontja van!

298.• Fogalmazzátok meg azt az állítást, amely tagadja az adottat:
1) az ABC szög nem derékszög;
2) az MKE háromszög egyenlő szárú;
3) az egyenes egy pontjába csak egy olyan egyenes húzható, amelyik merőleges az adott egyenesre;
4) az AC félegyenes felezi a BAK szöget!

299.• Indirekt módszerrel bizonyítsátok be, hogyha a háromszög egyetlen magassága sem esik egybe az adott csúcsból húzott szögfelezővel, akkor ez a háromszög nem egyenlő szárú!

300.• Indirekt módszerrel bizonyítsátok be, hogyha az ABC háromszög AB és AC oldalai nem egyenlők, akkor a BD oldalfelezője nem lesz a háromszög magassága!

301.• Indirekt módszerrel bizonyítsátok be, hogyha két szög fokmértékének különbsége 1°-kal egyenlő, akkor ezek a szögek nem lehetnek mellékszögek!

302.• Indirekt módszerrel bizonyítsátok be, hogy a mellékszögek közül legalább az egyik kisebb, mint 90°!

303.• Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be az egyenlő szárú háromszögek egybevágóságát a szára és a szárára húzott súlyvonala alapján!

304.• Fogalmazzátok meg, és bizonyítsátok be a háromszögek egybevágóságát az oldala, az adott oldalra húzott súlyvonala és általuk közbezárt szög alapján!

305.•• Bizonyítsátok be a háromszögek egybevágóságát súlyvonala és azoknak a szögeknek alapján, amelyekre az súlyvonal felosztja a háromszög szögét!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

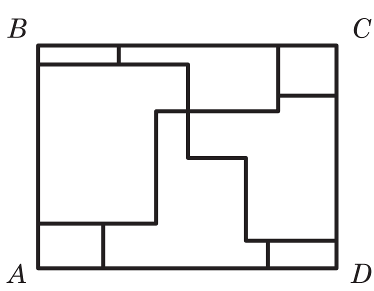
306. Jelöljétek az egyenesen az A, B és C pontokat! A pontok helyére tegyétek a <, > vagy = jelek közül az egyiket, hogy igaz egyenlőséget vagy egyenlőtlenséget kapjunk:

1) $AB + BC$ ... AC; 2) $AB + AC$ ... BC; 3) $AC + BC$ ... AB.

307. *A* mellékszögek egyikének szögfelezője és a közös száruk közötti szög 1/3-a a másik szögnek. Határozzátok meg ezeket a mellékszögeket!

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

308. Az $ABCD$ téglalap oldalai 4 cm és 3 cm. Határozzátok meg a téglalapban lévő összes szakasz hosszának összegét (203. ábra)!



203.ábra

UKRÁN GEOMETRIAI ISKOLA

Emlékezzünk az ukrán geometrikusokra, tudósokra és tanárokra, akiknek köszönhetően a mai ukrán matematikai iskola méltó helyet foglalja el a tudományos világban. Elsősorban tudományos felfedezéseikről ismertek, jelentős figyelmet fordítottak a matematikai oktatásra is.

Feofan Prokopovics (1681–1736) tudós, államférfi, író, a kultúra és a felvilágosodás kiemelkedő alakja. A Kijev-Mohyla Akadémián végzett, tanulmányait lengyel oktatási intézményekben és a Római Collegiumban folytatta. A Kijev-Mohyla Akadémián tanított, 1711–1716-ban rektora volt. A matematika előadásokat beépítette filozófia tanfolyamába. A tantárgy geometriai része tartalmazta az *E*uklidész szerinti planimetriát (síkmértant) bizonyos kiegészítésekkel, gyakorlati geometriai kérdéseket, geometriai műszerek leírását, mérési szabályokat. A geometriával kapcsolatos elméleti információkat ebben a kötetben mutatták be először.

Mihajlo Vasziliovics Osztrogradszkij (1801–1862) előtt tisztelegünk. A Pashenivka faluban született (Poltava régió) a Harkivi Egyetemen kezdett tanulni. M. V. Ostrogradszkij kiváló tanár és szervező volt, koherens nézetrendszert dolgozott ki a matematikatanításról és ezt felhasználta oktatói munkájában, számos módszertani kézikönyv megalapozását kezdeményezte a korszerű tanítási módszerek bevezetésére.

Mihajlo Jehorovics Vascsenko-Zakharcsenko (1825–1912) a Malyivka faluban (Cserkaszi régió) született.. A Kijevi Egyetemet végezte, majd tanára és professzora lett, tudományos munkáival, pedagógiai tevékenységével jelentős hatást gyakorolt a matematikai kultúra fejlődésére, lefordította Eukleidész Elemek című művét magyarázatokkal, jegyzetekkel. A számos középiskolai matematikai kézikönyvet szerkesztett, különösen az elemi geometriából.

M.V. Osztrogradszkij
(1802 – 1862)

M. J. Vascsenko-Zakharcsenko
(1825 –1912)

Olekszandr Matvijovics Asztrjab (1879–1962) Lubniban (Poltava régió) született. A Kijevi Egyetemen végzett. A Kijevi Pedagógiai Intézet Matematika Módszertani Tanszékét vezette, aktívan részt vett az Ukrán Pedagógiai Kutatóintézet Matematika Módszertani Tanszékének létrehozásában. Több mint 70 tudományos és módszertani mű szerzője, köztük a „Vizuális geometria”, „A szerkesztési problémák megoldásának elmélete és módszere”, „A sztereometria módszertana”.

Antonij Marjan Lomnitszkij (1881–1941) Lvivben született, a Lvivi Egyetemen végzett, a Lvivi Műszaki Főiskolán dolgozott. Nagy figyelmet fordított a matematika iskolai tanítására, geometria tankönyvet szerkesztett.

Borisz Jakovics Bukrejev (1859–1962) a Kijevi Egyetemen végzett, 1885 óta annak tanára. Közel 100 éves koráig folytatta tudományos és pedagógiai tevékenységét.

A geometria területével foglalkozott, beleértve a nem euklideszi geometriát is.

Kostyantyin Moisejovcs Scserbina (1864–1946) Prilukiban (Csernihiv megye) született, a Kijevi Egyetemen végzett. Szervezője volt a kijevi tanári intézetnek (1909), 10 évig igazgatója is volt, 1920-tól az Odesszai Közoktatási főiskolán dolgozott.

Mihajlo Pilipovics Kravcsuk (1892–1942) a Csuvnicja (Volyni megye) faluban született., a Kijevi Egyetemen végzett. A matematika különböző területein elért jelentős tudományos eredmények mellett felső- és középiskolai tanterveket, felsőoktatási intézményeknek tankönyveket készített, jelentős mértékben hozzájárult az ukrán matematikai terminológia megalkotásához. Szervezője volt az első ukrajnai iskolások matematikai versenyének (1935).

Olekszandr Sztepanovics Szmogorzsevszkij (1896–1969) a Lesovi Birlyntsi (Vinnicja megye) faluban született., a Kijevi Népnevelési Egyetemen végzett. Egyetemek és pedagógiai intézetek számára készített geometriai alapismeretekről szóló tankönyvet, számos matematikai ismeretterjesztő könyvet.

Ivan Fedorovich Teszlenko (1908–1994) a Domotkan faluban (Dnyipropetrovszk régió) született, a Harkivi Pedagógiai Főiskolán tanított, a Lvivi Egyetem Matematika Tanszékét vezette, a Pedagógiai Kutatóintézetben dolgozott. Legfontosabb eredményei a geometriatanítás módszertanával foglalkozó munkái, köztük tankönyvek és taneszközök középiskolai, pedagógiai egyetemi tanárok és hallgatók számára; doktori értekezés "A geometria tanításának pedagógiai alapjai".

Zinaida Ivanyivna Szlepkány (1931–2008) ukrán tudós a matematika tanítási módszereivel, az ukrán tudományos iskola egyik alapítója a matematikatanítás elméletével és módszereivel foglalkozott, a közép- és felsőoktatási intézményekben, a pedagógiai tudományok doktora, Egyetemi tanár. Sok éven át vezette a Kijevi Állami Pedagógiai Főiskola elemi matematika és matematikai módszerek tanszékét. Zinaida Ivanyivna az első nő Ukrajnában, aki megvédte doktori disszertációját a matematika oktatás módszertanából.

Z. I. Szlepkány
(1931–2008)

Iszaak Moiszejovic Jaglom (1921–1988) Harkivban született, számos középiskolás diákoknak szóló kézikönyv szerzője. Munkái: Konvex alakzatok, a kétkötetes Geometriai transzformációk, Elemi geometria régen és most stb.

A kijevi egyetemen a geometriai kutatások a XIX. és XX. század fordulóján kezdődtek. B. J. Bukrejev munkáiban. 1934-ben a Mechanikai és Matematikai Karon megalakult a Geometria Tanszék.

M.I. Kovancov
(1924 – 1988)

Mikola Ivanovics Kovancov közel 30 évig vezette a kijevi Tarasz Sevcsenko Nemzeti Egyetem geometriai tanszékét. Több mint 200 tudományos és népszerű tudományos munka tartozik nevéhez. Mikola Ivanovics tudósok tucatjait képezte ki, akiknek tudományos eredményeit világszerte elismerik, és jelentős erőfeszítéseket tett annak érdekében, hogy a fiatalokat a matematika tanulmányozására ösztönözze. A Matematika és romantika című könyvében ezt írta: „Kedves barátaim! Térjen rá az összetett matematikai feladatok megoldására! Azokra, amelyeket most találtak ki, és azokra, amelyeket hosszú évtizedek vagy évszázadok óta nem sikerült megoldani. Szenvedni és csalódni fognak, amikor úgy tűnik, hogy éveket töltöttek hiába egy olyan szellem keresésével, amely elkerüli Önöket. Minden előfordulhat. De százszoros jutalmat kapnak, ha egy csodálatos napon azon dédelgetett cél előtt találják magukat, amelyért oly régóta és keményen dolgoztak. Ne legyenek közömbösök különben a lelki halál vár Önökre."

Vilen Iljics Mikhajlovszkij, aki egész életében a geometria tanszéken dolgozott, mégis jelentős mértékben hozzájárult az iskolai matematikaoktatás és az ukrajnai olimpiai mozgalom fejlesztéséhez. Tagja volt az „Ukrán Geometriai Gyűjtemény", „A matematika világában", „Matematika az iskolában" folyóiratok szerkesztőbizottságának; aktívan részt vett az iskolások és diákok matematikai olimpiáinak előkészítésében és lebonyolításában. Kiadott munkái között szerepel a Köztársasági matematikai versenyek feladatgyűjteménye, A kijevi matematikai olimpiák feladatgyűjteménye, A matematikai feladatok megoldási gyakorlata, Ukrajnai matematikai versenyek, Kijevi matematikai olimpiák című kézikönyv négy kiadása. , Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye.

V.I. Mikhajlovszkij
(1932 – 2017)

Ha az iskolai geometriáról van szó, valószínűleg mindenkinek, aki 50 évesnél idősebb, először is az Olekszij

Vasziljovics Pogorelov által írt tankönyv jut eszébe. 1937-ben egy tizedik osztályos harkovi, Olekszij Pogorelov megnyerte a kijevi matematikai olimpiát, és meghívást kapott a harkovi egyetemre. 29 évesen védte meg doktori disszertációját. O. V. Pogorelov tudományos munkáját két irányba folytatta: a klasszikus geometria és a mérnöki-tervezési munka.

1947 óta a tudós minden tudományos és pedagógiai tevékenysége Harkivhez kapcsolódott. Ettől az évtől kezdve matematikát tanított a harkivi egyetemen, 1960-ban pedig az újonnan alapított Alacsony hőmérsékletek Fizikai és Műszaki Intézetének geometriai tanszékét vezette. 1950–1960 között a Harkivi Egyetem geometriai tanszékét, a Harkivi Egyetem Matematikai Kutatóintézetének geometriai tanszékét és az Ukrán Tudományos Akadémia Matematikai Intézetét vezette.

О. В. Погорєлов
(1919–2002)

O. V. Pogorelov matematikai kutatásainak fő iránya általában a geometria volt. A geometria különböző ágaiban dolgozott. Különösen sikerült megoldania a modern geometria problémáit, amelyeket a XIX.. és XX. század kiváló matematikusai vetettek fel. David Hilbert, Augustin Louis Cauchy, Herman Minkovsky és mások. Tudományos kutatásainak eredményeit közel 40 monográfiában mutatta be, amelyek szinte mindegyike számos országban megjelent. Figyelmet érdemel a következő tény: a XX. század 80-as éveiben. az Amerikai Matematikai Társaság „A 20. század kiemelkedő matematikusai” című könyvsorozatában külön kötetben volt O. V. Pogorelov monográfiája, amelynek absztraktjában „a 20. század legnagyobb geométerének” nevezték.

A világszínvonalú matematikai problémákkal kapcsolatos intenzív munkával párhuzamosan O. V. Pogorelov már idősebb korában geometriai tankönyvet készített a középiskola számára. Úgy vélte, hogy "az iskolában két fő tantárgy van: az anyanyelv és a geometria. Az egyik megtanítja az embert a gondolatok helyes kifejezésére, a másik a deduktív gondolkodásra." Ennek megfelelően a tudós „szigorú és átlátható axiómarendszerre” alapozta meg a tankönyvét.

1972-ben jelent meg a tankönyv első kiadása, majd 1982-ben, kísérleti tesztelés után, bevezették a tankönyvet az ország iskoláiban. Azóta ebből a tankönyvből több mint 20 kiadás készült több millió példányban. Ukrajna függetlenné válása után is O. V. Pogorelov tankönyvét használták 2007-ig az ukrán iskolákban, egészen addig, amíg ki nem dolgozták az iskolai geometria tanításának új tanterveit és modern követelményeit.

V. B. Polonszkij
(1957–2019)

Az új tankönyv megalkotása során átvették Vitalij Boriszovics Polonszkij (1957–2019), kiemelkedő ukrán tanárnak, Ukrajna tiszteletbeli tanárának, az Érdemekért III. fokának fokozata tulajdonosának több munkáját is. Egész életében iskolai tanárként dolgozott, lenyűgöző eredményeket ért el.

V. B. Polonskij tanulói 13 alkalommal a világ legrangosabb matematikai versenyének a Nemzetközi Matematikai Olimpia díjazottjai lettek az iskolások között, több mint 100 alkalommal pedig az összukrajnai matematikai olimpiák díjazottjai és több mint 250 alkalommal a kijevi városi olimpiák győztesei.

Vitalij Boriszovics Polonszkij több mint 100 iskolai matematikai tankönyv és kézikönyv szerzője. Cikkei rendszeresen megjelentek olyan tekintélyes, iskolásoknak és tanároknak szóló matematikai folyóiratokban, mint a Kvantum, Matematika az iskolában, A matematika világában. Ma a nemzetközi matematikai olimpiákra készülő kijevi iskolások számára újonnan létrehozott matematikai szakkört nevezték el róla. Ha Te is az Összukrajnai Matematikai Olimpia díjazottja leszel (1. vagy 2. helyezést érsz el), jogot kaphatsz, hogy részt vegyél ennek a csoportnak a munkájában.

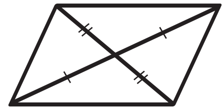
2. SZÁMÚ FELADAT. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁBAN

1. A háromszög hegyesszögű, ha:
A) szögei között nincs tompaszög;
B) mindegyik szöge kisebb a derékszögnél;
C) szögei között nincs derékszög;
D) mindegyik szöge kisebb, mint a tompaszög.

2. Ha a magasságvonal a háromszögön kívül esik, akkor ez a háromszög:
A) derékszögű; B) tompaszögű;
C) egyenlő oldalú; D) hegyesszögű.

3. Két háromszög egybevágó, ha:
A) az egyik háromszög két oldala egyenlő a másik háromszög két oldalával;
B) az egyik háromszög oldala és két szöge egyenlő a másik háromszög oldalával és két szögével;
C) az egyik háromszög két oldala és a szöge egyenlő a másik háromszög két oldalával és szögével;
D) az egyik háromszög két oldala és az általuk közbezárt szög megfelelően egyenlő a másik háromszög két oldalával és az általuk közbezárt szöggel.

4. Hány egybevágó háromszögpár van a rajzon:



A) 1; C) 3;
B) 2; D) 4.

5. Ismert, hogy az M pont az ABC háromszög AC oldalának felezőpontja. A BM félegyenesen a háromszögön kívül felmérték az ME szakaszt, amely egyenlő a BM szakasszal. Határozzátok meg az EC szakasz hosszát, ha $AB = 4{,}2$ cm!
A) 2,1 cm; B) 4,2 cm; C) 4,8 cm; D) 8,4 cm.

6. Melyik igaz a következő állítások közül?
A) az egyenlő szárú háromszög a különböző oldalú háromszög speciális esete;
B) az egyenlő oldalú háromszög a különböző oldalú háromszög speciális esete;

C) az egyenlő oldalú háromszög az egyenlő szárú háromszög speciális esete;
D) az egyenlő szárú háromszög az egyenlő oldalú háromszög speciális esete.

7. Melyik hamis a következő állítások közül?
A) ha a háromszög magassága a szemközti oldalt egyenlő szakaszokra osztja, akkor ez a háromszög egyenlő szárú;
B) ha a háromszög egy csúcsból bocsátott súlyvonala és szögfelezője nem esik egybe, akkor ez a háromszög nem egyenlő szárú;
C) ha a háromszög egyenlő oldalú, akkor bármelyik magasságának a hossza megegyezik bármelyik szögfelezőjének a hosszával;
D) ha a háromszög két szöge egyenlő, akkor a harmadik szögének szögfelezője a szemközti oldalt egyenlő részekre osztja.

8. *A* háromszög egyenlő oldalú, ha:
A) az oldala háromszor kisebb, mint a kerülete;
B) minden oldala háromszor kisebb, mint a kerülete;
C) két magassága egyenlő;
D) két szögfelezője egyenlő.

9. Az ABC ($AB = BC$) egyenlő szárú háromszög kerülete 16 cm. Az ABM háromszög kerülete, amelyben az M pont az AC szakasz felezőpontja, 12 cm. Határozzátok meg a BM súlyvonal hosszát!
A) 4 cm; B) 6 cm; C) 2 cm; D) 5 cm.

10. Az X és Y pontok mindegyike egyenlő távolságra van az AB szakasz végpontjaitól. Melyik hamis a következő állítások közül?
A) Az XY és az AB egyenesek merőlegesek egymásra
B) $\angle XAY = \angle XBY$; C) $\angle AXB = \angle AYB$;
D) $\angle AXY = \angle BXY$.

11. Az M pont az AB szakasz felezőpontja. Az X pont nem illeszkedik az AB szakasz felezőmerőlegesére, ha:
A) $XA = XB$; C) $XM \perp AB$;
B) $XM = XB$; D) $\angle XAM = \angle XBM$.

A 2. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Egybevágó alakzatok

Két alakzat akkor egybevágó, ha egymásra helyezve fedik egymást.

A háromszögek egybevágóságának axiómája

Egy adott ABC háromszöggel egy adott A_1M félegyenes esetében létezik egy olyan $A_1B_1C_1$ háromszög, amely egybevágó lesz az ABC háromszöggel, és igaz, hogy $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ valamint az A_1B_1 oldal az A_1M félegyenesen fekszik, a C_1 csúcsa pedig az A_1M egyeneshez viszonyítva az adott félsíkra illeszkedik.

Az adott egyenesre merőleges egyenes tétele

Az egyenesre nem illeszkedő ponton át egy és csakis egy az adott egyenesre merőleges egyenes húzható.

A háromszög magassága

A háromszög csúcsából a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőlegest, a háromszög magasságának nevezzük.

A háromszög súlyvonala

A háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt, a háromszög súlyvonalának nevezzük.

A háromszög szögfelezője

A háromszög szögfelezőjének azt a szakaszt nevezzük, amely az adott szög szögfelező egyenesének a háromszögbe eső része.

A háromszögek egybevágóságának első alapesete: a két oldal és az általuk közbezárt szög alapján

Ha az egyik háromszög két oldala és az általuk közbezárt szög megfelelően egyenlő a másik háromszög két oldalával és az általuk közbezárt szöggel, akkor ezek a háromszögek egybevágók.

A háromszögek egybevágóságának második alapesete: egy oldala és a rajta fekvő két szög alapján

Ha az egyik háromszög egyik oldala és a rajta fekvő két szöge megfelelően egyenlő a másik háromszög oldalával és a rajta fekvő két szögével, akkor ezek a háromszögek egybevágók.

A háromszögek egybevágóságának harmadik alapesete: a három oldaluk alapján

Ha az egyik háromszög három oldala megfelelően egyenlő a másik háromszög három oldalával, akkor ezek a háromszögek egybevágók.

A szakasz felezőmerőlegese

Azt az egyenest, amely merőleges az adott szakaszra, és a szakasz felezőpontján megy át, a szakasz felezőmerőlegesének nevezzük.

Egyenlő szárú három szögek

Azt a háromszöget, amelynek két oldala egyenlő, egyenlő szárú háromszögnek nevezzük.

Egyenlő oldalú háromszögek

Azt a háromszöget, amelynek minden oldala egyenlő, egyenlő oldalú háromszögnek nevezzük.

Az egyenlő szárú háromszög tulajdonságai

Az egyenlő szárú háromszögben: 1) az alapon fekvő szögek egyenlők; 2) az alapra húzott szögfelező egyúttal a háromszög súlyvonala és magassága is.

Az egyenlő szárú háromszög ismertetőjelei

- Ha a háromszög súlyvonala egyben magassága is, akkor ez a háromszög egyenlő szárú.
- Ha a háromszög szögfelezője egyúttal a magassága is, akkor ez a háromszög egyenlő szárú.
- Ha a háromszögben két szög egyenlő, akkor ez a háromszög egyenlő szárú.
- Ha a háromszögben az súlyvonal egyúttal szögfelező is, akkor ez a háromszög egyenlő szárú.

A háromszögek tulajdonságai, melyek az egyenlő szárú háromszögek tulajdonságaiból és ismertetőjeleiből következnek

- A háromszögekben az egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak.
- A háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak.
- Az egyenlő szárú háromszögben az alapra húzott szögfelező, magasság és súlyvonal egybeesik.
- Az egyenlő oldalú háromszögben minden szög egyenlő.
- Az egyenlő oldalú háromszögben az egy csúcsból húzott szögfelező, magasság és súlyvonal egybeesik.
- Ha a háromszögben minden szög egyenlő, akkor ez a háromszög egyenlő oldalú.

PÁRHUZAMOS EGYENESEK. A HÁROMSZÖG SZÖGEINEK ÖSSZEGE

§3

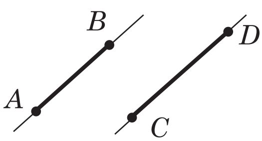
Hogyan állapítható meg két egyenesről, hogy párhuzamos-e vagy sem? Milyen tulajdonságai vannak a párhuzamos egyeneseknek? Mennyi egy tetszőleges háromszög szögeinek összege? Milyen tulajdonságokkal bír a derékszögű háromszög? Ebben a fejezetben választ kaptok ezekre a kérdésekre.

13. Párhuzamos egyenesek

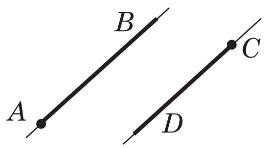
Meghatározás. Két egyenes párhuzamos, ha egy síkban vannak és nem metszik egymást.

A 204. ábrán a és b párhuzamos egyeneseket ábrázoltak. Ezt így jelölik $a \parallel b$ (olvassák: az a és b egyenesek párhuzamosak, vagy az a egyenes párhuzamos a b egyenessel).

204.ábra



205.ábra



206.ábra

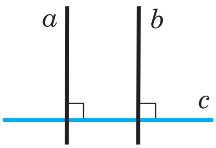
Ha két szakasz párhuzamos egyenesre illeszkedik, akkor ezek is párhuzamosak lesznek. A 205. ábrán az AB és CD szakaszok párhuzamosak. Ezt így jelölik: $AB \parallel CD$.

Ugyanilyen értelemben beszélhetünk két félegyenes, félegyenes és szakasz, szakasz és egyenes párhuzamosságáról. A 206. ábra az AB és CD párhuzamos félegyeneseket szemlélteti.

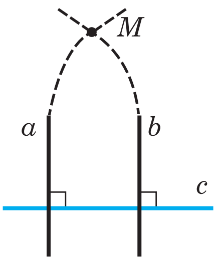
13.1. tétel (az egyenesek párhuzamosságának ismertetőjele). ***Ha két egyenes külön-külön merőleges egy harmadikra, akkor ez a két egyenes párhuzamos egymással.***

Bizonyítás: ⊙ A 207. ábrán az $a \perp c$ és $b \perp c$. Be kell bizonyítani, hogy $a \parallel b$.

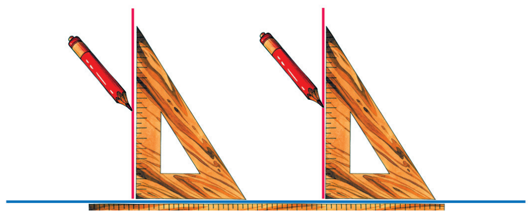
Feltételezzük, hogy az a és b egyenesek metszik egymást egy M pontban (208. ábra). Ekkor az M ponton keresztül, amely nem illeszkedik a c egyenesre, két egyenes megy át, az a és b, melyek merőlegesek a c egyenesre. Ellentmondást kaptunk, mert egy ponton keresztül csak egy merőleges egyenest lehet fektetni az adott egyenesre (7.1. tétel). Vagyis a mi feltevésünk nem volt helyes, tehát $a \parallel b$. ●



207.ábra



208.ábra



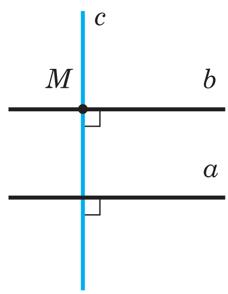
209.ábra

A tétel magyarázatot ad arra, miért tudunk vonalzó és derékszögű vonalzó segítségével párhuzamos egyeneseket húzni a 209. ábrán szemléltetett módon.

Következmény. ***Az a egyeneshez nem tartozó M ponton keresztül húzható az a egyenessel párhuzamos b egyenes.***

Bizonyítás: ⊙ Tételezzük fel, hogy az M pont nem tartozik az a egyeneshez (210. ábra).

Az M ponton keresztül egy c egyenest húzunk, amely merőleges az a egyenesre (például derékszögű vonalzó segítségével). Ezután az M ponton át merőlegesen a c-vel egy b egyenest húzunk. Az egyenesek párhuzamosságának ismertetőjele (13.1. tétel) alapján azt kapjuk, hogy $a \parallel b$. ●



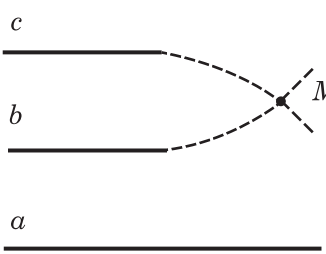
210.ábra

Húzható-e az M ponton keresztül (210. ábra) még egy, az a egyenessel párhuzamos egyenes? Erre a kérdésre az egyenesek párhuzamosságának alaptulajdonsága ad választ.

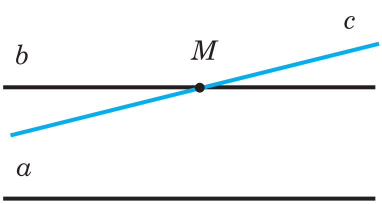
Az egyenesek párhuzamosságának tulajdonsága (párhuzamossági axióma). Az adott egyenesre nem illeszkedő ponton keresztül csak egy olyan egyenes húzható, amely párhuzamos az adottal.

13.2. tétel. ***Ha két egyenes mindegyike párhuzamos egy harmadik egyenessel, akkor a két egyenes párhuzamos egymással.***

Bizonyítás: Legyen $b \parallel a$ és $c \parallel a$. Bizonyítsuk be, hogy $b \parallel c$. Feltételezzük, hogy a b és c egyenesek nem párhuzamosak, tehát metszik egymást egy M pontban (211. ábra). Akkor azt kaptuk, hogy az M ponton át két egyenes is átmegy, melyek pár huzamosak az a-val. Ez ellentmond az egyenesek párhuzamossági axiómájának. Tehát feltételezésünk nem igaz, vagyis $b \parallel c$.



211.ábra



212.ábra

Feladat. Bizonyítsátok be, hogyha az egyenes, két párhuzamos egyenes közül metszi az egyiket, akkor metszi a másikat is.

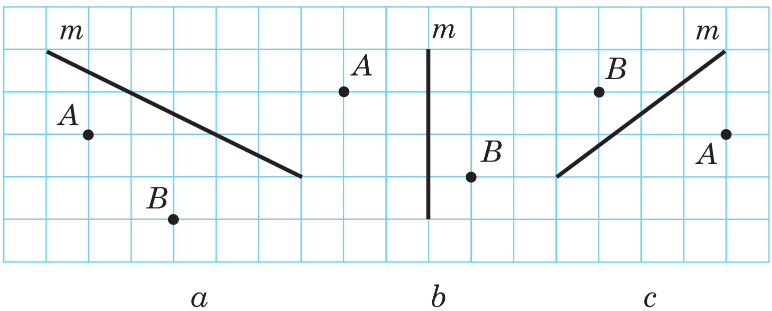
Megoldás. Legyenek az a és a b egyenesek párhuzamosak és a c egyenes metssze a b egyenest az M pontban (212. ábra). Feltételezzük, hogy a c egyenes nem fogja metszeni az a-t. Ekkor $c \parallel a$. Innen adódik, hogy az M ponton két olyan egyenes megy át, amely párhuzamos az a-val, ami ellentmond párhuzamossági axiómának. Tehát feltételezésünk helytelen, vagyis a c egyenes metszi az a egyenest.

?

1. Mikor nevezünk két egyenest párhuzamosnak? **2.** Hogyan olvassuk az m | | n felírást? **3.** Milyen szakaszokat nevezünk párhuzamosnak? **4.** Milyen a kölcsönös helyzete annak a két egyenesnek, melyek merőlegesek egy harmadikra? **5.** Fogalmazzátok meg az egyenesek párhuzamossági axiómáját! **6.** Milyen lesz a kölcsönös helyzete annak a két egyenesnek, melyek párhuzamosak egy harmadik egyenessel?

GYAKORLATI FELADATOK

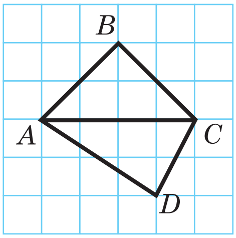
309.° Rajzoljátok át a füzetbe a 213. ábrát. Húzzatok az A és B pontokon át az m egyenessel párhuzamos egyeneseket!



213.ábra

310.° Rajzoljatok egy háromszöget, és mindegyik csúcsán keresztül húzzatok a háromszög szemben fekvő oldalaival párhuzamos egyeneseket!

311.° Rajzoljátok át a füzetbe a 308. ábrát. A B ponton keresztül rajzoljatok az AC oldallal párhuzamos m egyenest, az AC egyenessel párhuzamosan pedig a D ponton keresztül egy n egyenest. Milyen lesz az m és n egyenesek kölcsönös helyzete?



214.ábra

GYAKORLATOK

312.° Lehet-e olyan egyenest rajzolni, amely párhuzamos az a és *b* egymást metsző egyenesekkel?

313.° Az a egyenes párhuzamos az *ABC* háromszög *AB* oldalával. Lehet-e az a egyenes párhuzamos az *AC* oldallal is? És a *BC*-vel?

314.° Ki lehet e jelenteni, hogyha két szakasz párhuzamos, akkor nincs közös pontjuk?

315.° Ki lehet e jelenteni, hogy csak egy félegyenes létezik, amely párhuzamos az adott egyenessel, és a kezdőpontja egy adott pont?

316.° Hány olyan szakaszt lehet rajzolni, amely párhuzamos egy adott egyenessel, és az adott egyeneshez nem tartozó ponton halad át?

317.• Az *a* és *b* egyenesek metszik egymást. Lehet-e egy olyan c egyenest húzni, amely párhuzamos lesz az a egyenessel, és metszi a b egyenest?

318.• Az a és *b* egyenesek merőlegesek a c egyenesre. a d egyenes metszi az a-t. Metszi-e a d egyenes a b –t?

319.• *A BD* szakasz az *ABC* egyenlő szárú (*AB* = *BC*) háromszög súlyvonala. A *B* ponton át egy m egyenest fektettünk, amely merőleges a *BD* egyenesre. Milyen lesz az m és az *AC* egyenes kölcsönös helyzete? Magyarázzátok meg a választ!

320.• Az a és *b* egyenesek metszik egymást. A c egyenes párhuzamos az a-val. Bizonyítsátok be, hogy a b és c egyenesek metszik egymást!

321.• Adott három a, *b* és c egyenesek. Ismert, hogy az a és *b* párhuzamosak, és a c egyenes nem metszi az a-t. Bizonyítsátok be, hogy a c egyenes nem fogja metszeni a b egyenest sem!

322.•• Bizonyítsátok be, hogy ha bármely egyenes, amely metszi az *a*-t és metszi a *b* egyenest is, akkor az *a* és *b* egyenesek párhuzamosak lesznek!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

323. Az AB szakaszon úgy jelölték a C és D pontokat, hogy $AC = BD$. Az O pont a CD szakasz felezőpontja. Határozzátok meg a C és D pontok távolságát, ha AB = 21 cm, $AO : OD = 7 : 2$!

324. A B pont az AC egyenesre illeszkedik, a BD és BF félegyenesek, az AC egyeneshez viszonyítva, különböző félsíkokban fekszenek, $\angle ABD = = 80°$, $\angle ABF = 150°$, a BM félegyenes a DBF szög szögfelezője. Határozzátok meg az MBC szöget!

325. Az ABC háromszögben a CM súlyvonal az AB szakasz felével egyenlő, $\angle A = 47°$, $\angle B = 43°$. Mekkora az ACB szög?

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

326. Katinka és Jenő egy négyzet alakú tóhoz értek, melynek közepén egy négyzet alakú sziget van (215. ábra). A parton találtak két deszkát, amelyek kicsit rövidebbek voltak, mint a tó partja és a sziget közötti távolság. Hogyan juthatnak át a szigetre, ha csak ezeket a deszkákat használhatják?

215.ábra

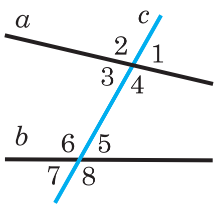
14. Két egyenes párhuzamosságának ismertetőjelei

Ha két, a és b egyenest egy harmadik c egyenessel metszünk, akkor nyolc szög keletkezik (216. ábra). A c egyenest az a és b egyenesek metsző egyenesének nevezzük.

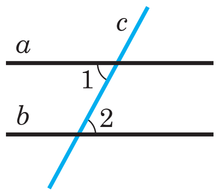
A 3 és 6, a 4 és 5 szögeket egy oldalon fekvő belső szögeknek nevezzük.

A 3 és 5, 4 és 6 szögeket különböző oldalon fekvő belső szögeknek nevezzük.

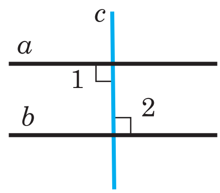
A 6 és 2, 5 és 1, 3 és 7, 4 és 8 szögeket megfelelő szögeknek nevezzük.



216.ábra



217.ábra



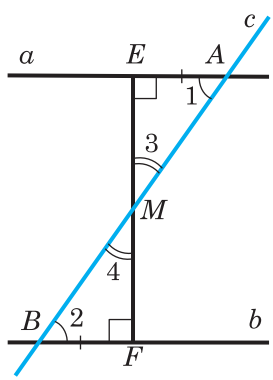
218.ábra

14.1. tétel. ***Ha két egyenesnek a harmadikkal való metszésekor a különböző oldali belső szögeik egyenlők, akkor az egyenesek párhuzamosak.***

Bizonyítás: A 217. ábrán a c egyenes lesz az a és b egyenesek metsző egyenese, az $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Ha az $\angle 1 = \angle 2 = 90°$ (218. ábra), akkor az a és b egyenesek párhuzamossága az egyenesek párhuzamosságának az ismertetőjeléből (13.1. tétel) következik.

Tegyük fel, hogy a c egyenes az a és b egyenesek közül egyikre sem merőleges. Jelöljük meg A és B-vel a c egyenes megfelelő metszéspontjait az a és b egyenesekkel. Megjelöljük az M pontot amely az AB szakasz felezőpontja lesz (219. ábra). Az M ponton keresztül ME merőlegest bocsátunk az a egyenesre. Az ME egyenes és a b egyenes metszés-

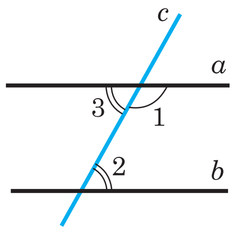


219.ábra

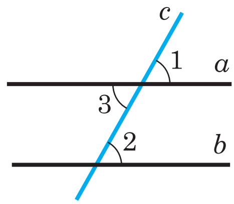
pontja legyen F. Ekkor a következőket kaptuk: az 1 és 2 szögek a feladat feltétele alapján egyenlők; a 3 és a 4 szögek pedig egyenlők, mert csúcsszögek. Tehát az *AME* és *BMF* háromszögek egybevágók, az oldaluk és a rajta fekvő szögeik alapján, vagyis a háromszögek egybevágóságának második alapesete alapján. Innen következik, hogy $\angle AEM = \angle MFB =$ $= 90°$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy az a és *b* egyenesek merőlegesek az *EF* egyenesre, .tehát párhuzamosak egymással. ●

14.2. tétel. ***Ha két egyenes harmadikkal való metszésekor a keletkezett egyoldali belső szögek összege 180°-kal egyenlő, akkor ezek az egyenesek párhuzamosak.***

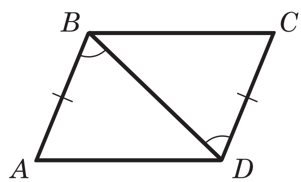
Bizonyítás: ⊙ A 220. ábrán a c egyenes lesz az *a* és *b* egyenesek metsző egyenese, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Bebizonyítjuk, hogy $a \parallel b$. Az 1 és 3 szögek mellékszögek, tehát az $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Mivel az $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, ezért a $\angle 2 = \angle 3$. A 2 és 3 különböző oldalon fekvő belső szögek, ezért a 14.1. tétel alapján $a \parallel b$. ●



220.ábra



221.ábra



222.ábra

14.3. tétel. ***Ha két egyenesnek egy harmadikkal való metszésekor a keletkezett megfelelő szögek egyenlők, akkor ezek az egyenesek párhuzamosak lesznek.***

Bizonyítás: ⊙A 221. ábrán a c egyenes az a és *b* egyenesek metsző egyenese lesz, $\angle 1 = \angle 2$. Bebizonyítjuk, hogy $a \parallel b$.

Az 1 és 3 szögek egyenlők, mert csúcsszögek. Mivel $\angle 1 = \angle 2$ és $\angle 1 = \angle 3$, innen következik, hogy $\angle 2 = \angle 3$. De a 2 és a 3 szögek különböző oldalú belső szögek. Ezért a két egyenes párhuzamosságának ismertetőjele (14.1 tétel) alapján $a \parallel b$. ●

Feladat. A 222. ábrán az $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Bizonyítsátok be, hogy az $BC \parallel AD$.

Megoldás. Az ABD és CDB háromszögeknél az adottak alapján ismert, hogy: $AB = CD$ és $\angle ABD = \angle CDB$ a BD pedig a közös oldal. Tehát, az ABD és CDB háromszögek egybevágók két oldaluk és közbezárt szögük alapján, vagyis az első alapeset alapján.

Ekkor $\angle BDA = \angle DBC$. Mivel a BDA és DBC szögek a BC és AD egyeneseket metsző BD egyenes különböző oldalain fekvő szögei, és ezek egyenlők, tehát $BC \parallel AD$. ◀

? 1. Milyennek kell lenniük két egyenes egy harmadikkal történő metszésénél a különböző oldalakon fekvő belsőszögeknek, hogy az adott egyenesek párhuzamosak legyenek? 2. Milyennek kell lenniük két egyenes egy harmadikkal történő metszésénél az egy oldalon fekvő szögeknek, hogy az adott egyenesek párhuzamosak legyenek? 3. Milyennek kell lenniük két egyenes egy harmadikkal történő metszésénél a megfelelő szögeknek, hogy az adott egyenesek párhuzamosak legyenek?

GYAKORLATI FELADATOK

327.° Rajzoljatok két AB és CD egyenest! Húzzatok egy MK egyenest, amely metszi az AB és CD egyeneseket! Az AB és az MK metszéspontját jelöljük O betűvel, a CD és MK metszéspontját pedig E betűvel. Pótoljátok ki a szövegben a hiányzó részeket:

1) az AOM szög és ... megfelelő;
2) az AOE szög és ... megfelelő;
3) az AOE szög és ... különböző oldalon fekvő belső szögek;
4) az AOE szög és ... egy oldalon fekvő belső szögek!

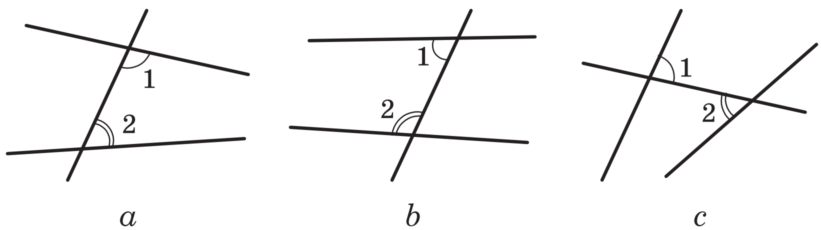
Nevezzétek meg, milyenek (megfelelő, különböző oldalon fekvő vagy egy oldalon fekvő) lesznek a:

1) $\angle BOM$ és $\angle DEM$;
2) $\angle BOE$ és $\angle DEM$;
3) $\angle BOE$ és $\angle OEC$.

328.° Rajzoljatok két egyenest és metsszétek őket egy harmadik egyenessel. Számozzátok meg a szögeket, amelyek az adott egyenesek metszésekor keletkeztek! Soroljátok fel azokat a szögpárokat melyek: 1) megfelelő szögek; 2) egy oldalon fekvő belső szögek; 3) különböző oldalon fekvő belső szögek lesznek!

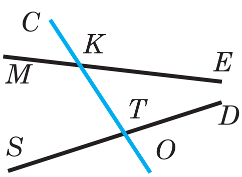
GYAKORLATOK

329.° Hogyan nevezzük az 1 és 2 szögeket a 223.ábrán?

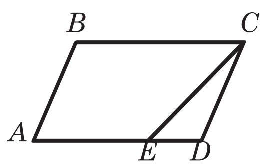


223.ábra

330.° Nevezzétek meg a 224.ábrán lévő különböző oldalon fekvő, az egy oldalon fekvő belső szögeket, valamint a megfelelő szögeket!



224.ábra



225.ábra

331.° Írjátok le a 225. ábrán lévő szögek közül melyek:

1) egy oldalon fekvő belső szögek, ha BC és AD egyeneseket metsszük az AB egyenessel;

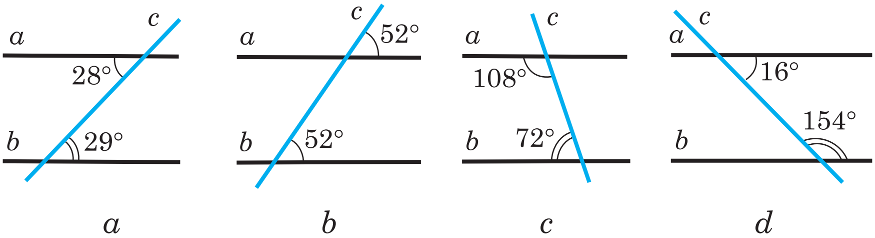
2) egy oldalon fekvő belső szögek, ha CE és CD egyeneseket metsszük az AD egyenessel

3) különböző oldalon fekvő belső szögek, ha BC és AD egyeneseket metsszük az CE egyenessel

4) megfelelő szögek, ha CE és CD egyeneseket metsszük az AD egyenessel

5) egy oldalon fekvő belső szögek, ha BC és AD egyeneseket metsszük a CE egyenessel.

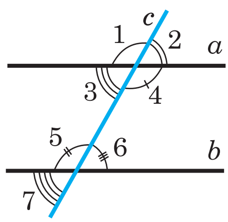
332.° *A* 226. *a*–d ábráin lévő *a* és *b* egyenesek közül melyek lesznek párhuzamosak?



226.ábra

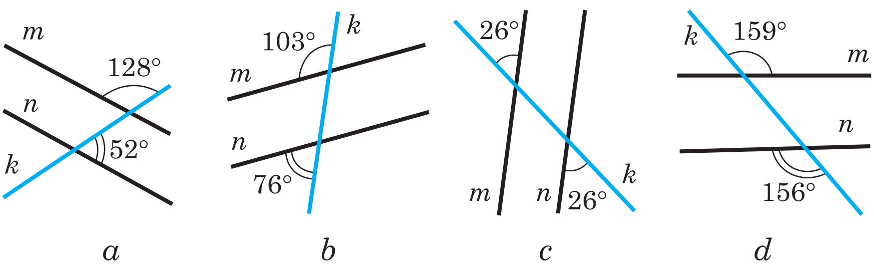
333.° Párhuzamosak-e a 227. ábrán lévő *a* és *b* egyenesek, ha:

1) $\angle 3 = \angle 6$;
2) $\angle 2 = \angle 6$;
3) $\angle 4 = 125°$, $\angle 6 = 55°$;
4) $\angle 2 = 35°$, $\angle 5 = 146°$;
5) $\angle 1 = 98°$, $\angle 6 = 82°$;
6) $\angle 1 = 143°$, $\angle 7 = 37°$?



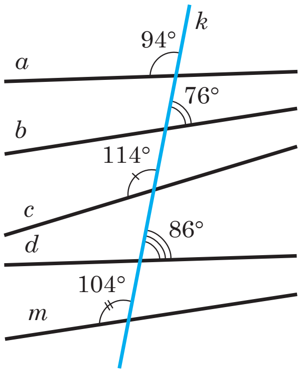
227.ábra

334.° *A* 228. a -d ábrák melyikén lesznek az m és n egyenesek párhuzamosak?

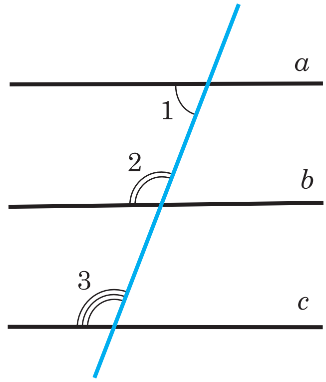


228.ábra

335.° *A* 229.ábrán nevezzétek meg az összes párhuzamos egyenespárt!



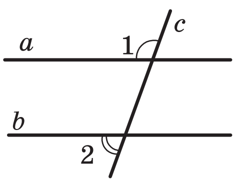
229.ábra



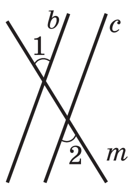
230.ábra

336.° Írjátok le, hogy a 230.ábrán lévő egyenesek közül melyek lesznek párhuzamosak, ha $\angle 1 = 53°$, $\angle 2 = 128°$, $\angle 3 = 127°$.

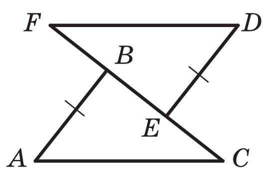
337.° *A* 231.ábrán az $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Bizonyítsátok be, hogy az a és *b* egyenesek párhuzamosak!



231.ábra

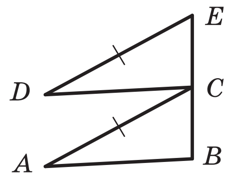


232.ábra



233.ábra

338.° *A* 232.ábrán az $\angle 1 = \angle 2$. Bizonyítsátok be, hogy az прямі *b* és *c* паралельні.



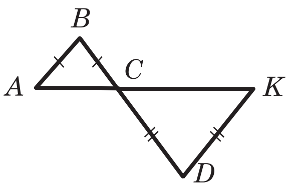
234.ábra

339.° *A* 233.ábrán az $\Delta ABC = \Delta DEF$, $AB = DE$. Bizonyítsátok be, hogy az $AC \parallel DF$.

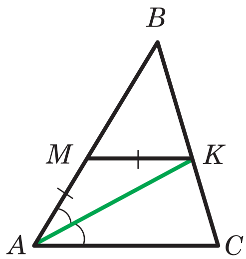
340.° *A* 234.ábrán az $\Delta ABC = \Delta DCE$, $AC = DE$. Bizonyítsátok be, hogy az $AB \parallel CD$.

341.• *A* 235.ábrán az $AB = BC$, $CD = DK$. Bizonyítsátok be, hogy az $AB \parallel DK$.

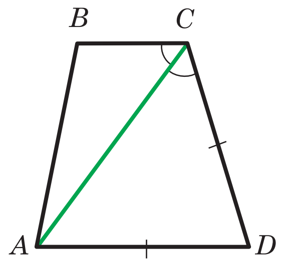
342.• *A* 236.ábrán az *AK* félegyenes a *BAC* szögfelezője, $AM = MK$. Bizonyítsátok be, hogy $MK \parallel AC$.



235.ábra



236.ábra



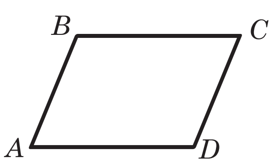
237.ábra

343.• *A* 237.ábrán az $\angle ACB = \angle ACD$, $AD = CD$. Bizonyítsátok be, hogy az $BC \parallel AD$.

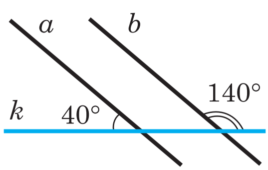
344.• Az ABC háromszögben $AB = BC$, $\angle A = 60°$. BCD szög mellékszöge az ACB szögnek, a CM félegyenes a BCD szög szögfelezője. Bizonyítsátok be, hogy $AB \parallel CM$.

345.• Az AB és CD szakaszok az O pontban metszik egymást, és ebben a pontban felezik is egymást. Bizonyítsátok be, hogy $AC \parallel BD$.

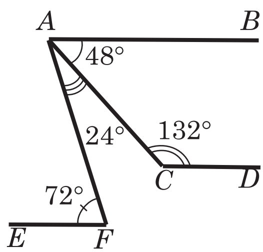
346.• *A* 238.ábrán az $AB = CD$, $BC = AD$. Bizonyítsátok be, hogy az $AB \parallel CD$.



238.ábra



239.ábra



240.ábra

347.• *A* 239. ábrán az a, *b* és k egyenesek láthatók. Ismert, hogy egy m egyenes metszi az a egyenest. Metszi-e az m egyenes a b-t?

348.• Milyen lesz a 240. ábrán lévő CD és EF egyenesek kölcsönös helyzete?

349.•• Az ABC szög 60°, a BCD szög pedig 120°. Ki lehet-e jelenteni, hogy az AB és CD egyenesek párhuzamosak?

350. Az a és c egyenesek által bezárt szöge egyenlő a b és c egyenesek által bezárt szöggel. Ki lehet- e jelenteni, hogy az a és b egyenesek párhuzamosak?

351. Az a és b egyeneseket metsző c egyenes által keletkezett nyolc szög közül négy szög 40°-os, a többi pedig 140°-os. Ki lehet-e jelenteni, hogy az a és b egyenesek párhuzamosak?

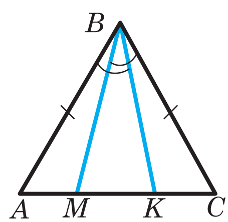
352. *E*gy egyenes az ABC három szög BM szögfelezőjét egy O pontban metszi, amely a BM szakasz felezőpontja, a BC oldalát pedig egy K pontban. Bizonyítsátok be, hogy ha $OK \perp BM$, akkor $MK \parallel AB$.

353. Az AM és CK szakaszok az ABC háromszög súlyvonalai. Az AM szakasz M pontján túli meghosszabbításán felmértek egy MF szakaszt, a CK szakasz K pontján túli meghosszabbításán pedig egy KD szakaszt úgy, hogy $MF = AM$, $KD = CK$. Bizonyítsátok be, hogy a B, D és F pontok egy egyenesre illeszkednek?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

354. Az OC félegyenes az AOB szöget úgy osztja két részre, hogy $\angle AOC : \angle BOC = 3:5$. Határozzátok meg az OC félegyenes és az AOB szög szögfelezője által bezárt szöget, ha BOC szög 42° -kal nagyobb az AOC szögnél!

355. A 241.ábrán $AB = BC$, $\angle ABK = \angle CBM$. Bizonyítsátok be, hogy az $BM = BK$.



241.ábrá

356. Az ABC és ADC egyenlőszárú háromszögeknek AC a közös alapjuk. A BD egyenes az AC szakaszt az E pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy AE = EC!

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

357. Mondjatok példákat arra, amikor egy háromszögnek és egy négyszögnek a közös része (metszete) nyolcszög!

EUKLEIDÉSZ ÖTÖDIK POSZTULÁTU*MA*

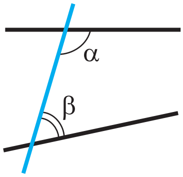
A 6. pontban megismerkedtetek azzal, hogy az axióma egy egyértelmű, nyilvánvaló kijelentés. Akkor viszont az 1.1. és az.5.1 tételeket miért nem sorolják az axiómák közé, hiszen ezek is egyértelműek? Erre a kérdésre a felelet kézenfekvő: ha valamilyen kijelentést be lehet bizonyítani axiómák alkalmazásával vagy már bizonyított tételekkel, akkor az ilyen kijelentés már tétel lesz és nem axióma.

Ebből az álláspontból vizsgálva, egy nagyon tanulságos történet Eukleidész. ötödik posztulátuma (emlékeztetőül: a Mértan története fejezetben már megfogalmaztuk az első négy posztulátumot).

V posztulátum

Ha egy egyenes úgy metsz két egyenest, hogy az egyik oldalán keletkező belső szögek összege, kisebb két derékszögnél, akkor e két egyenes a metszőnek ezen oldalán meghosszabbítva metszi egymást (242. ábra)

Ha egy egyenes úgy metsz két egyenest, hogy az egyik oldalán keletkező belső szögek összege, kisebb két derékszögnél, akkor e két egyenes a metszőnek ezen oldalán meghosszabbítva metszi egymást (242. ábra).



$\alpha + \beta < 180°$

242.ábra

Be lehet bizonyítani, hogy az ötödik posztulátum és a 13. pontban megadott egyenesek párhuzamossági axiómája egyenértékűek, vagyis a posztulátumból következik az axióma, az axiómából pedig a posztulátum.

Több mint húsz évszázadon keresztül nagyon sok tudós próbálkozott az ötödik posztulátum bebizonyításával, vagyis levezetni azt a többi euklideszi axióma segítségével. De csak a XIX. század elején jutott el egymástól függetlenül néhány matematikus a következő megállapításra: az az állítás, hogy az adott egyeneshez egy külső ponton át egyetlen párhuzamos húzhatól – axióma.

Nektek úgy tűnhet, hogy ebben nincs semmi különleges: csak a párhuzamossági axiómát kell az eddig ismert axiómákhoz hozzákapcsolni és bizonyíthatók a tételek.

De ha a futball játékszabályaihoz hozzáadunk még egyet, például megengedjük, hogy a játékosok a kezüket is használhassák, akkor egy egészen más játékot kapunk.

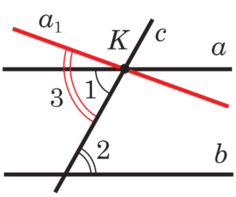
Ha az ötödik posztulátum egy elfogadott szabály, és nem tétel, akkor azt helyettesíthetjük egy másik szabállyal– vele ellentétes állítással: az adott egyeneshez egy külső ponton át legalább két egyenes húzható, amely nem metszi az adott egyenest. Ez az új axióma lehetőséget biztosít egy új geometria felépítéséhezl – a nem euklideszi geometriát.

15. Párhuzamos egyenesek tulajdonságai

15.1. tétel (a 14.1tétel fordítottja). ***Ha két párhuzamos egyenest egy harmadik metsz, akkor a különböző oldalakon lévő szögpárok (váltószögek) egyenlők.***

Bizonyítás: A 243. ábrán az a és b egyenesek párhuzamosak, c pedig az őket metsző egyenes. Bebizonyítjuk, hogy $\angle 1 = \angle 2$.

Legyen $\angle 1 \neq \angle 2$. Ekkor a K ponton keresztül fektetünk egy olyan a_1 egyenest, hogy $\angle 3 = \angle 2$ (243. ábra). A 3-as és a 2-es szögek az a_1 és b, valamint az őket metsző' c egyenesek különböző oldalain fekvő szögei lesznek. Két egyenes párhuzamosságának ismertetőjele alapján (48.1. tétel) az $a_1 \parallel b$. Azt kaptuk, hogy a K pontra két egyenes illeszkedik, melyek párhuzamosak a b egyenessel. Ez ellentmond a párhuzamossági axiómának. Vagyis a feltételezésünk nem igaz, tehát $\angle 1 = \angle 2$.



243. ábra

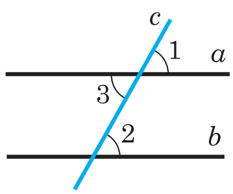
A 15.2. tétel (a 14.3. tétel fordítottja (inverze)). ***Ha két párhuzamos egyenest egy harmadikkal metszünk, akkor a megfelelő szögek (egyállású szögek) egyenlők.***

Bizonyítás: ⊙ A 244. ábrán az a és *b* egyenesek párhuzamosak, a c egyenes pedig metsző egyenes. Bebizonyítjuk, hogy $\angle 1 = \angle 2$.

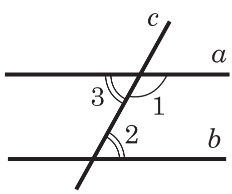
A párhuzamos egyenesek tulajdonsága (15.1. tétel) alapján a 3-as és a 2-es szögek egyenlők, mint az *a* és *b* párhuzamos egyenesek és a c metsző egyenes által alkotott különböző oldali szögek. De a 3-as és az 1-es szögek is egyenlők, mint csúcsszögek. Tehát $\angle 1 = \angle 2$. ●

A 15.3. tétel (a 14.2. tétel fordítottja (inverze)) ***Ha két párhuzamos egyenest egy harmadikkal metsszünk, akkor az egyoldali szögek (társszögek) összege 180°.***

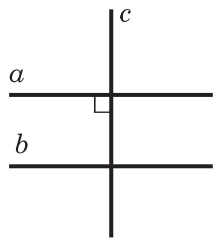
Bizonyítás: ⊙ A 245. ábrán az *a* és *b* párhuzamos egyenesek, a c egyenes pedig metsző egyenes. Bebizonyítjuk, hogy $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.



244. ábra



245.ábra



246.ábra

Az egyenesek párhuzamosságának tulajdonsága alapján (15.1. tétel) a 3-as és a 2-es szögek egyenlők, mint az a és *b* párhuzamos egyenesek és a c metsző egyenes által alkotott különböző oldali szögek. De a 3-as és az 1-es szögek mellékszögek, ezért $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Tehát, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. ●

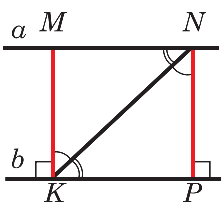
Következmény. ***Ha az egyenes merőleges két párhuzamos egyenes közül az egyikre, akkor merőleges lesz a másikra is (246. ábra).***

Ezt a következményt önállóan bizonyítsátok be!

1. feladat. Bizonyítsátok be, hogy a párhuzamos egyeneseknek minden pontja egyenlő távolságra van a másik egyenestől.

Megoldás. Legyen a és b párhuzamos egyenesek (247. ábra), az M és N pedig az a egyenes két tetszőleges pontja. Ezekből MK és NP merőlegeseket bocsátunk a b egyenesre. Bebizonyítjuk, hogy $MK = NP$.

Megvizsgáljuk az MKN és PNK háromszögeket. A KN szakasz a közös oldaluk. Mivel $MK \perp b$ és $NP \perp b$, ezért $MK \parallel NP$, az MKN és PNK szögek egyenlők, mint az MK és NP párhuzamos egyenesek és a KN metsző egyenese által alkotott különböző oldali szögek.



247.ábra

Hasonlóan az MNK és PKN szögek is egyenlők, mint az MN és KP párhuzamos egyenesek és a KN metsző egyenes által alkotott különböző oldali szögek.

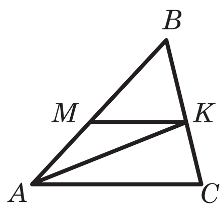
Tehát az MKN és PNK háromszögek egybevágók az oldaluk és a rajtuk lévő két szögük alapján, vagyis a háromszögek egybevágóságának második alapesete szerint. Ezért $MK = NP$. ◀

Meghatározás. Két párhuzamos egyenes közti távolságnak, az egyenes bármely pontja és a másik egyenes közti távolságot nevezzük.

A 247. ábrán például az a és b párhuzamos egyenesek közötti távolság az MK szakasz hossza lesz.

2. feladat. A 248. ábrán az AK szakasz az ABC háromszög szögfelezője, $MK \parallel AC$. Bizonyítsátok be, hogy az AMK háromszög egyenlő szárú.

Megoldás. Mivel az AK az ABC háromszög szögfelezője, ezért $\angle MAK = \angle KAC$. A KAC és MKA szögek egyenlők, mint az MK és AC párhuzamos egyenesek és az AK metsző egyenes által alkotott különböző oldali szögek. Vagyis $\angle MAK = \angle MKA$. Tehát az AMK háromszög egyenlő szárú. ◀



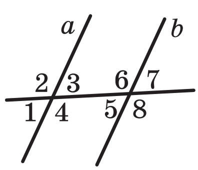
248.ábra

1. Milyen tulajdonsága van a különböző oldalon lévő (váltószögeknek) szögeknek, melyek két párhuzamos egyenes és a metsző egyenes által keletkeznek? **2.** Milyen tulajdonsága van a megfelelő (egyállású) szögeknek, melyek két párhuzamos egyenes és a metsző egyenes által keletkeznek? **3.** Milyen tulajdonsága van az egyoldali belső (társ) szögeknek, melyek két párhuzamos egyenes és a metsző egyenes által keletkeznek? **4.** Ismert, hogy az egyenes merőleges a két párhuzamos egyenes közül az egyikre. Biztosan merőleges lesz-e a másik egyenesre is? **5.** Mit nevezünk két párhuzamos egyenes közötti távolságnak?

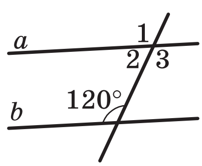
В іменниках жіночого роду однини в орудному відмінку перед закінченням м'які приголосні та шиплячі звуки [ж], [ч], [ш] подовжуються. На письмі подовження приголосного звука передаємо двома однаковими буквами, а закінчення – буквою **ю**: *відстань – відстанню, грань – гранню, вісь – віссю, діагональ – діагоналлю.*

GYAKORLATOK

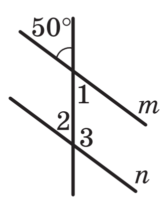
358.° *A* 249. ábrán az *a* és *b* egyenesek párhuzamosak.
1) Egyenlők-e az 1 és 5 szögek? 2) 4 és 6 szögek? 2 és 8 szögek?
2) Mennyi a 3 és 5 szögek összege?
Magyarázzátok meg a választ!



249.ábra



250.ábra



251.ábra

359.° *A* 250.ábrán az a és *b* egyenesek párhuzamosak. Határozzátok meg az **∠1, ∠2** és **∠3.**

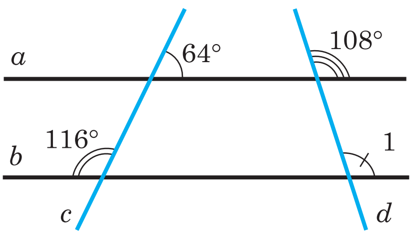
360.° *A* 251.ábrán az m és n egyenesek párhuzamosak. Határozzátok meg az **∠1, ∠2** és **∠3.**

361.° Két párhuzamos egyenes egy harmadikkal való metszésekor kapott szögek egyike 28°. Lehet e a keletkezett szögek között olyan szög, melynek mértéke: 1) 142°; 2) 152°?

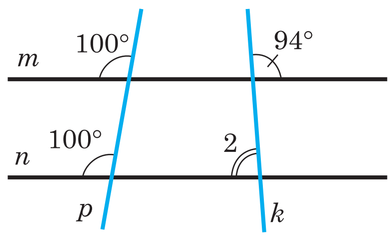
362.° Két párhuzamos egyenesnek egy harmadikkal való metszésekor keletkezett váltószögek összege 290°. Határozzátok meg ezeket a szögeket!

363.° Két párhuzamos egyenesnek harmadikkal való metszésekor keletkezett egyállású szögek összege 56°. Határozzátok meg ezeket a szögeket!

364.° *A* 252.ábrán határozd meg az 1 szöget!



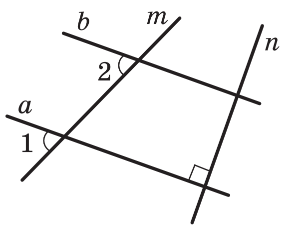
252.ábra



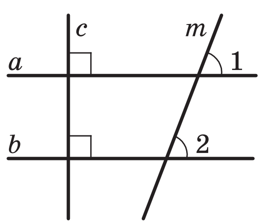
253.ábra

365.° *A* 253.ábrán határozd meg az 2 szöget!

366.° A 254. ábrán az $\angle 1 = \angle 2$, $a \perp n$. Bizonyítsátok be, hogy az $b \perp n$.



254.ábra



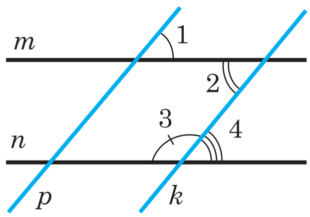
255.ábra

367.° *A* 255. ábrán az $a \perp c$, $b \perp c$. Bizonyítsátok be, hogy az $\angle 1 = \angle 2$.

368.° Két párhuzamos egyenesnek egy harmadikkal való metszésekor kapott társszögek különbsége 50°. Határozzátok meg ezeket a szögeket!

369.° 369. Két párhuzamos egyenesnek egy harmadikkal való metszésekor kapott társszögek egyike 4-szer nagyobb a másiknál. Határozzátok meg ezeket a szögeket!

370.° *A* 256.ábrán $m \parallel n$, $p \parallel k$, $\angle 1 = 50°$. Határozzátok meg a 2, 3 és 4-es szögeket!



256.ábra

371.• Az *ABC* egyenlő szárú háromszögnek az *AC* alapjával párhuzamos egyenes az *AB* és *BC* szárat megfelelően a *D* és *F* pontokban metszi. Bizonyítsátok be, hogy a *DBF* háromszög egyenlő szárú!

372.• Az *ABC* egyenlő szárú háromszög (*AB* = *BC*) *AC* és *BC* oldalainak meghosszabbításán az *A* és *B* pontokon túl egy P és *K* pontot úgy vették fel, hogy $PK \parallel AB$. Bizonyítsátok be, hogy a KPC háromszög egyenlő szárú!

373.• Az *AB* és *CD* szakaszok az *O* pontban metszik egymást, $AO = BO$, $AC \parallel BD$. Bizonyítsátok be, hogy az $CO = DO$.

374.• Az *MK* és *DE* szakaszok az *F* pontban metszik egymást, $DK \parallel ME$, $DK = ME$. Bizonyítsátok be, hogy az $\Delta MEF = \Delta KDF$.

375.• Válaszoljatok a kérdésekre!

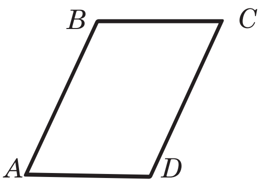
1) Lehetnek-e tompaszögek a két párhuzamos és a metsző egyenesük által keletkezett társszögek?

2) Lehet-e a két párhuzamos és a metsző egyenesük által keletkezett váltószögek összege 180°?

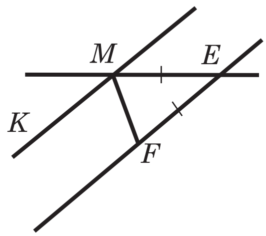
3) Lehetnek-e egyenlő szögek a két párhuzamos és a metsző egyenesük által keletkezett társszögek?

376.• A 257. ábrán $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Bizonyítsátok be, hogy az $BC = AD$.

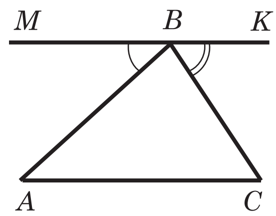
377.• A 257. ábrán $BC = AD$, $BC \parallel AD$. Bizonyítsátok be, hogy az $AB \parallel CD$.



257.ábra



258.ábra



259.ábra

378.• A 258. ábrán $MK \parallel EF$, $ME = EF$, $\angle KMF = 70°$. Határozzátok meg az MEF szöget!

379.• A 259. ábrán. A ABC háromszög B csúcsán keresztül az AC egyenessel párhuzamosan egy MK egyenest húztak, $\angle MBA = = 42°$, $\angle CBK = 56°$. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit!

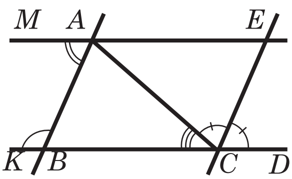
380.• Az ABC háromszög A csúcsán átmenő, a szemközti oldallal párhuzamos egyenes az AC oldallal olyan szöget zár be, amely a BAC szöggel egyenlő. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!

381.• Bizonyítsátok be, hogy két párhuzamos egyenes egy harmadik egyenessel való metszésekor a váltószögek szögfelezői párhuzamosak!

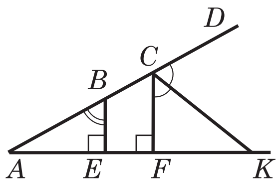
382.• Bizonyítsátok be, hogy két párhuzamos egyenes egy harmadik egyenessel való metszésekor az egyállású szögfelezői párhuzamosak!

383.•• A 260. ábrán $\angle MAB = 50°$, $\angle ABK = 130°$, $\angle ACB = 40°$, CE az ACD szög szögfelezője. Határozzátok meg az ACE háromszög szögeit!

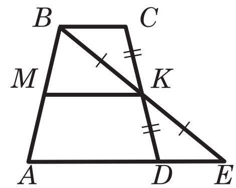
384.•• A 261. ábrán $BE \perp AK$, $CF \perp AK$, CK az FCD szög szögfelezője, $\angle ABE = 62°$. Határozzátok meg az ACK szöget!



260.ábra



261.ábra



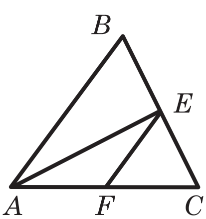
262.ábra

385.** A 262. ábrán $BC \parallel MK$, $BK = KE$, $CK = KD$. Bizonyítsátok be, hogy az $AD \parallel MK$.

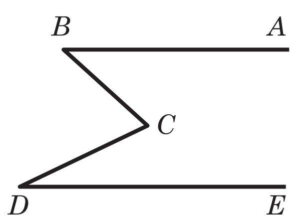
386.** A 263. ábrán $AB = AC$, $AF = FE$, $AB \parallel EF$. Bizonyítsátok be, hogy az $AE \perp BC$.

387.** Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja AC. A BD szögfelezőjének egy tetszőleges M pontján keresztül egyeneseket húztak, melyek párhuzamosak az AB és BC oldalakkal, és az AC oldalt megfelelően az E és F pontokban metszik. Bizonyítsátok be, hogy $DE = DF$.

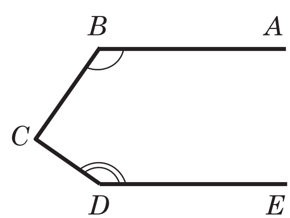
388.** A 264. ábrán $AB \parallel DE$. Bizonyítsátok be, hogy az $\angle BCD = = \angle ABC + \angle CDE$.



263.ábra



264.ábra



265.ábra

389.** A 265. ábrán $AB \parallel DE$, $\angle ABC = 120°$, $\angle CDE = = 150°$. Bizonyítsátok be, hogy az $BC \perp CD$.

390.** Az ABC háromszög B csúcsán át egy egyenest húztak párhuzamosan a háromszög AM szögfelezőjével. Ez az egyenes az AC oldalt egy K pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy a BAK háromszög egyenlőszárú!

391.* Az ABC háromszög AE és CF szögfelezőinek O metszéspontján keresztül az AC egyenessel párhuzamos egyenest húztunk. Ez az egyenes az AB oldalt egy M pontban, a BC oldalt pedig egy K pontban metszi. $MK = AM + CK$.

392.* Az ABC háromszög BAC és BCA szögeinek szögfelezői az O pontban metszik egymást. Ezen a ponton át az AB és BC egyenesekkel párhuzamos egyenesek az AC oldalt rendre egy M és egy K pontban metszik. Bizonyítsátok be, hogy az MOK háromszög kerülete egyenlő az AC oldallal!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

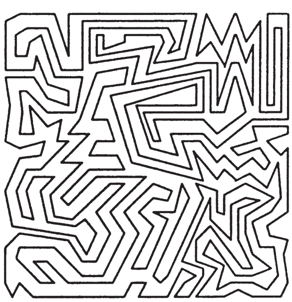
393. Az AB szakaszon úgy vették fel a C pontot, hogy $AC : BC = 2 : 1$. Az AC szakaszon úgy jelöltünk egy D pontot, hogy $AD : CD = 3 : 2$. A D pont milyen arányban osztja az AB szakaszt?

394. Az AC és BD szakaszok az O pontban metszik egymást, $AB = BC = CD = AD$. Bizonyítsátok be, hogy $AC \perp BD$.

395. Az MOE háromszög MO oldalán úgy vettek fel egy A pontot, a TPK háromszög TP oldalán pedig egy B pontot, hogy $AM = TB$. Milyen lesz a BKP szög fokmértéke, ha $MO = TP$, $\angle M = \angle T$, $\angle O = \angle P$, $\angle AEO = 17°$?

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

396. *A* 266. ábrán egy nagyon bonyolult zárt töröttvonal látható. A töröttvonal egy sokszöget határol. A rajzon jelöltek egy tetszőleges pontot. Hogyan lehet leghamarabb meghatározni, hogy a pont a sokszöghöz illeszkedik, vagy nem illeszkedik hozzá?



266.ábra

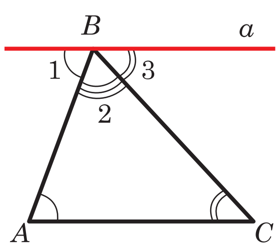
16. A háromszög szögeinek összege

A háromszög a síkmértan legfontosabb alakzatja. A háromszögek világa nagyon változatos, de a következő tulajdonság minden háromszögre jellemző lesz.

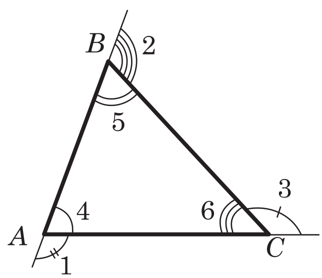
16.1. tétel. ***A háromszög szögeinek összege 180°.***

Bizonyítás: ⊙ Vizsgáljunk meg egy tetszőleges ABC háromszöget. Be kell bizonyítani, hogy $\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

A B csúcsán keresztül egy olyan a egyenest húzunk, amely párhuzamos az AC egyenessel (267. ábra). Azt kaptuk, hogy az $\angle A$ és az $\angle 1$ egyenlők, mint az AC és a párhuzamos egyenesek valamint az AB metsző egyenesek által alkotott (váltószögek) különböző oldalon fekvő szögek. Hasonlóan bizonyítjuk, hogy $\angle C=\angle 3$. De az 1-es, 2-es és 3-as szögek B csúcsú egyenesszöget alkotnak. Tehá $\angle A+\angle ABC+\angle C=\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$. ●



267.ábra



268.ábra

Következmény. ***A háromszög szögei között legalább két hegyesszög van.***

Bizonyítsátok be ezt a következményt önállóan.

Ebből a következményből az is adódik, hogy az egyenlő szárú háromszögnek az alapon fekvő szöge mindig hegyesszög.

Meghatározás. A háromszög külső szögének azt a szöget nevezzük, amely mellékszöge a háromszög szögének.

A 268. ábrán az 1-es, 2-es és 3-as szögek lesznek az ABC háromszög külső szögei.

16.2. tétel. ***A háromszög külső szöge egyenlő a vele mellékszöget nem alkotó két belső szög összegével.***

Bizonyítás: ⊙ A 268. ábrán az 1-es, 2-es és 3-as szögek az ABC háromszög külső szögei. Be kell bizonyítani, hogy $\angle 1 == \angle 5 + \angle 6$, $\angle 2 = \angle 4 + \angle 6$, $\angle 3 = \angle 4 + \angle 5$.

Bebizonyítjuk a három egyenlőség közül például az elsőt (a többi egyenlőség is hasonlóan bizonyítható).

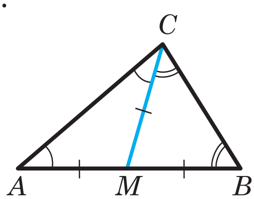
A mellékszögek tulajdonságából következik, hogy $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. A háromszög szögeinek összegéről szóló tétel alapján $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$. Ezekből következik, hogy $\angle 1 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$, innen pedig kapjuk, hogy $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$. ●

Következmény. ***A háromszög külső szöge nagyobb a vele mellékszöget nem alkotó bármely belső szögnél.***

Bizonyítsátok be önállóan ezt a következményt.

Feladat. Az ABC háromszög CM súlyvonala az AB oldal felével egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög derékszögű!

Megoldás. A feladat feltétele alapján $AM = CM$ (269.ábra). Tehát az AMC háromszögben az A és az ACM szögek egyenlők.



269.ábra

A feltétel alapján a $BM = CM$, ebből következik, hogy a BMC háromszög B és BCM szögek egyenlők.

Az ACB háromszögben: $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180°$. Figyelembe véve, hogy $\angle A = \angle ACM$ és $\angle B = \angle BCM$, innen következik, hogy $\angle ACM + \angle BCM + \angle ACB = 180°$.

Mivel $\angle ACM + \angle BCM = \angle ACB$, ebből következik, hogy $2\angle ACB = 180°$. Tehát, $\angle ACB = 90°$.

Az ABC háromszög derékszögű. ◀

1. Mivel egyenlő a háromszög szögeinek összege? 2. Legalább hány hegyesszöge van bármelyik háromszögnek? 3. Mi a háromszög külső szöge? 4. Milyen összefüggés van a háromszög külső szöge és a vele mellékszöget nem alkotó belső szögek között? 5. Hasonlítsátok össze a háromszög külső szögét, a vele mellékszöget nem alkotó belső szögével!

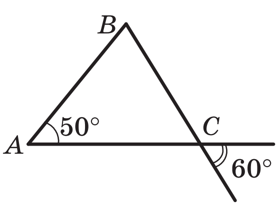
В іменниках жіночого роду однини, основа яких закінчується двома приголосними звуками, в орудному відмінку перед закінченням **-у(-ю)** подовження звуків не відбувається: *властиві**сть** – властиві**стю**, рівні**сть** – рівні**стю**, нерівні**сть** – нерівні**стю**, паралельні**сть** – паралельні**стю**.*

GYAKORLATOK

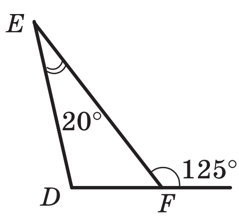
397.° Létezik-e olyan háromszög, melynek szögei:
1) **20Ύ, 60Ύ** és **80Ύ;** 2) **10Ύ, 40Ύ** és **120Ύ?**

398.° Határozzátok meg a háromszög harmadik szögét, ha a másik két szöge **35Ύ** és **96Ύ.**

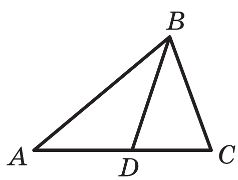
399.° Határozzátok meg 270.ábrán lévő *ABC* háromszög ismeretlen szögeit!



270.ábra



271.ábra

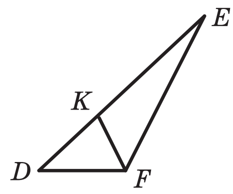


272.ábra

400.° Határozzátok meg 271.ábrán lévő *DEF* háromszög ismeretlen szögeit!

401.° *A BD* szakasz az *ABC* szögfelezője (272.ábra). $\angle A = 40°$, $\angle C = 70°$. Határozzátok meg az *ABD* szöget!

402.° *A FK* szakasz az *DEF* szögfelezője (273.ábra). $\angle EFK = 64°$, $\angle D = 44°$. Határozzátok meg az *E* szöget!



273.ábra

403.° *A* háromszög egyik szöge háromszor kisebb, mint a másik, és 35°-kal kisebb, mint a harmadik szöge. Határozzátok meg a háromszög szögeit!

404.° Határozzátok meg a háromszög szögeit, ha fokmértékük aránya 2:3:7!

405.° Határozzátok meg az egyenlő oldalú háromszög szögeit!

406.° Határozzátok meg az egyenlő szárú derékszögű háromszög szögeit!

407.° Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szöge 63°. Határozzátok meg a csúcsánál lévő szögét (szárszögét)!

408.° Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögét, ha szárszöge 104°!

409.° Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha a szárszöge szöge 4-szer nagyobb, mint az alapon fekvő szöge!

410.° Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha az alapon fekvő szöge 48°-kal kisebb, mint a szárszöge!

411.° Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha az egyik szöge: 1) 110°; 2) 50°. Hány megoldása van a feladatnak?

412.° Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha az egyik szöge: 1) 42°; 2) 94°. Hány megoldása van a feladatnak?

413.° Az *ABC* háromszögben ismert, hogy $\angle C = 90°$, az *AK* szögfelező, $\angle BAK = 18°$. Határozzátok meg az *AKC* és *ABC* szögek mértékeit!

414.° Az *ABC* háromszögben tudjuk, hogy $AB = BC$, *CK* szögfelező, $\angle A = 66°$. Határozzátok meg az *AKC* szög mértékét!

415.° Az ABC háromszög AK és CM szögfelezői az O pontban metszik egymást, $\angle BAC = 116°$, $\angle BCA = 34°$. Határozd meg az AOC szöget!

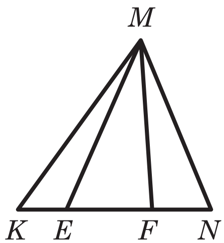
416.° Az egyenlő szárú ABC háromszögben, amelynek B szárszöge 36°-os, meghúzták az AD szögfelezőt. Bizonyítsátok be, hogy az ADB és CAD háromszögek egyenlő szárúak!

417.° Az ABC háromszögben meghúzták a BF szögfelezőt. Határozzátok meg a C szögét, ha $\angle A = 39°$, $\angle AFB = 78°$.

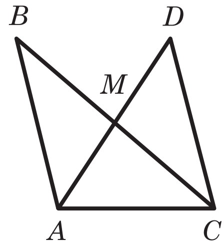
418.° Bizonyítsátok be, hogyha a háromszög egyik szöge egyenlő a másik két szögének összegével, akkor az ilyen háromszög derékszögű lesz!

419.° *A* 274. ábrán nevezzétek meg a külső szögeket:

1) az MEF háromszög E és F csúcsainál;
2) az MKE háromszög E csúcsánál!



274.ábra



275.ábra

420.° *A* 275. ábrán nevezzétek meg azokat a háromszögeket, melyeknek a külső szöge: 1) AMB szög; 2) BMD szög lesz!

421.° *A* háromszög egyik külső szöge 75ϒ. Mivel lesz egyenlő:

1) az ehhez a csúcshoz tartozó belső szöge;
2) a vele mellékszöget nem alkotó szögek összege?

422.° Az ABC háromszögben, az $\angle A = 58°$, $\angle B = 72°$. Mekkora a C szög!

423.° Lehet-e a háromszög külső szöge kisebb, mint a vele mellékszöget alkotó szög? A kérdés megválaszolása után adjátok meg a háromszög típusát!

424.° Állapítsátok meg a háromszög fajtáját, ha az egyik külső szöge egyenlő a vele mellékszöget alkotó belső szögével!

425.° *A* háromszög egyik külső szöge 136°, a háromszög egyik szöge pedig 61°. Határozzátok meg a háromszög ismeretlen szögét, amely nem alkot mellékszöget az adott külső szöggel!

426.° *A* háromszög egyik külső szöge 154°. Határozzátok meg a háromszög azon szögeit, amelyek nem alkotnak mellékszöget az adott szöggel, és az egyik 28°-kal nagyobb a másiknál!

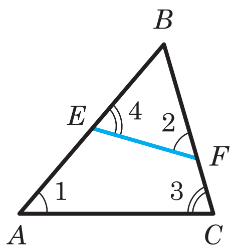
427.° *A* háromszög egyik külső szöge 98°. Határozzátok meg a háromszög azon szögeit, amelyek nem alkotnak mellékszöget az adott szöggel, ha az egyikük 6-szor kisebb, mint a másik!

428.° Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha a szárszögének külső szöge 38°!

429.° Az *ABC* egyenlő szárú háromszög alapja *AC*. Határozzátok meg a háromszög szögeit, ha az *A* csúcsnál lévő külső szöge 115°!

430.° Bizonyítsátok be, hogyha az egyik háromszög két szöge megfelelően egyenlő a másik háromszög két szögével, akkor ezeknek a háromszögeknek a harmadik szögük is egyenlők!

431.° Az *ABC* háromszög oldalain (276. ábra) felvettek egy *E* és *F* pontot úgy, hogy $\angle 1 = \angle 2$. Bizonyítsátok be, hogy az $\angle 3 = \angle 4$.



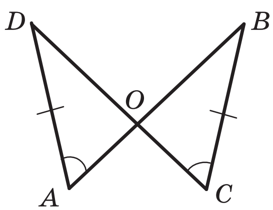
276.ábra

432.° A 277. ábrán $AD = BC$, $\angle A = \angle C$. Bizonyítsátok be, hogy az $\Delta AOD = \Delta COB$.

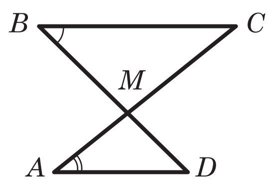
433.• Határozzátok meg az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha az egyik külső szöge egyenlő: 1) 54°; 2) 112°! Hány megoldása lesz a feladatnak?

434.• Az egyenlő szárú háromszög egyik külső szöge 130°. Határozzátok meg a háromszög szögeit. Hány megoldása lesz a feladatnak?

435.• Az ABC egyenlőszárú háromszög alapja AC, szögfelezői az O pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy az AOC szög egyenlő az ABC háromszög A csúcsánál lévő külső szöggel!



277.ábra



278.ábra

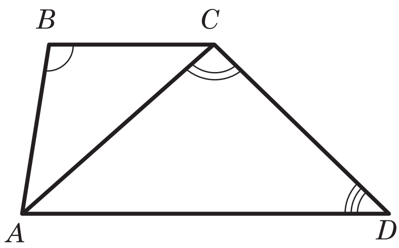
436.• A 278.ábrán $BC \parallel AD$, $\angle A = 25°$, $\angle B = 55°$. Határozzátok meg a CMD szöget!

437.• Az ABC egyenlő szárú háromszög, melynek alapja BC, BKl – a háromszög szögfelezője, $\angle AKB = 105°$. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit!

438.• Az ABC háromszög AB oldalán felvettek egy D pontot úgy, hogy $BD = BC$, $\angle ACD = 15°$, $\angle DCB = 40°$. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit!

439.• Az ABC háromszög C csúcsán át az AM szögfelezővel párhuzamos egyenest húztak, amely az AB oldalt egy K pontban metszi. Határozzátok meg az AKC háromszög szögeit, ha $\angle BAC = 70°$.

440.• A 279.ábrán $BC \parallel AD$, $\angle B = 100°$, $\angle ACD = 95°$, $\angle D = 45°$. Bizonyítsátok be, hogy az $AB = BC$.



279.ábra

441.• Az ABC háromszögben az A és C szögek szögfelezői az O pontban metszik egymást. Határozzátok meg az AOC szöget, ha $\angle B = 100°$.

442.• Bizonyítsátok be, hogy az egyenlőszárú háromszög szárszögénél lévő külső szög szögfelezője párhuzamos az alappal!

443.• Bizonyítsátok be, hogyha az háromszög szárszögénél lévő külső szög szögfelezője párhuzamos az alappal, akkor az ilyen háromszög egyenlőszárú!

444.• Az ABC egyenlőszárú háromszögben, melynek alapja AC, az alapnál lévő szöge 2-szer nagyobb a szárszögénél, az AM szakasz a háromszög szögfelezője. Bizonyítsátok be, hogy $BM = AC$!

445.• Az ABC egyenlőszárú háromszög alapja AC. A BC oldalán úgy vettek fel egy M pontot, hogy $BM = AM = AC$. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit!

446.• Bizonyítsátok be, hogy bármilyen háromszögben van olyan szög, amely: 1) nem kisebb, mint 60°; 2) nem nagyobb, mint 60°!

447.•• Állapítsátok meg a háromszög fajtáját, ha:
1) az egyik szöge nagyobb a két másik szög összegénél;
2) bármelyik szöge kisebb, mint a másik két szög összege!

448.•• 448. Állapítsátok meg a háromszög fajtáját, ha bármelyik két szögének összege nagyobb, mint 90°!

449.•• Létezik-e olyan háromszög, melynek két szögfelezője merőleges egymásra?

450.•• Létezik-e olyan háromszög, melynek egyik szögfelezője felezi a másik szögfelezőjét?

451.•• Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit, ha a B szögének szögfelezője két egyenlő szárú háromszögre osztja azt!

452.* Az ABC háromszögben $\angle A = \alpha$, a B és C szögek külső szögeinek szögfelezői az O pontban metszik egymást. Határozzátok meg a BOC szöget!

453.* Az ABC egyenlő szárú háromszög AB és BC szárain megfelelően felvettek egy E és egy F pontot úgy, hogy AC = AF = EF = BE. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit!

454.* Az ABC háromszögben adott, hogy AB = 2 cm, $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$. Az AC oldalán úgy vettek fel egy D pontot, hogy AD = 1 cm. Határozzátok meg a BDC háromszög szögeit!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

455. Egy egyenesen úgy vették fel az A, B é C pontokat, hogy a B pont az A és C pontok között van és BC = 2 AB. A BC szakaszon pedig a D belső pontjára teljesül, hogy $BD : DC = 3 : 7$. Határozzátok meg az AB és CD szakaszok felezőpontjai távolságát, ha a CD szakasz 16 cm-rel hosszabb a BD szakasznál!

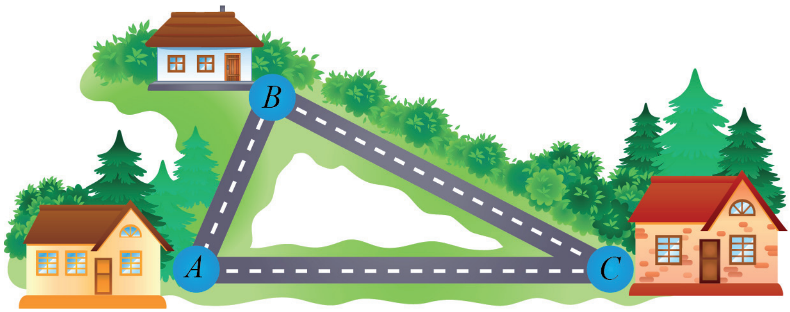
456. Az ABC háromszög BM súlyvonalán úgy vettek fel egy O pontot, hogy $\angle OAC = \angle OCA$. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög egyenlőszárú!

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

457. Létezik-e olyan hatszög, bármelyik két átlójának nincs, a csúcsoktól különböző közös pontja?

17. A háromszög elemeivel kapcsolatos egyenlőtlenségek

Az ABC háromszög oldalai útvonalakat szemléltetnek (280.ábra). Nektek az A pontból el kell jutni a C pontba. Melyik útvonalat választjátok: a B ponton keresztül, vagy az AC útvonalon? A gyakorlat azt mutatja, hogy a második eset rövidebb. A sejtéseteket a következő tétel igazolja.



280.ábra

17.1. tétel (a háromszög egyenlőtlenség). ***A háromszög bármely oldalának hossza kisebb a másik két oldal hosszának összegénél.***

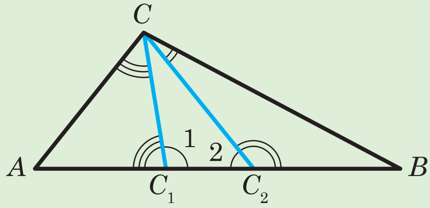
Bizonyítás: Vizsgáljuk meg az ABC háromszöget. Be kell bizonyítani, hogy:

1) $AB < AC + CB$; 2) $AC < AB + BC$; 3) $BC < BA + AC$.

Bebizonyítjuk az első egyenlőtlenséget (a másik két bizonyítás hasonlóan történik).

Feltételezzük, hogy az az egyenlőtlenség, amit be kell bizonyítani nem igaz. Ekkor $AB > AC$ + CB vagy $AB = AC + CB$.

1) Legyen $AB > AC + CB$. Akkor az AB oldalon fel lehet venni a C_1 és C_2 pontokat úgy, hogy $AC = AC_1$ és $BC = BC_2$ (281. ábra). Mivel mi azt feltételeztük, hogyha $AB > AC + CB$, ezért $AB > AC_1 + BC_2$. Tehát az AC_1 és BC_2 szakaszoknak nincs közös pontja.



281.ábra

Az AC_1C és BC_2C hegyesszögek lesznek, mert az AC_1C és BC_2C egyenlő szárú háromszögeknek az alapon fekvő megfelelő szögei. Ekkor az 1-es és 2-es szögek tompaszögek, mint a hegyesszögeknek a mellékszögei. Ellentmondásra jutottunk, mert így a C_1CC_2 háromszögnek két tompaszöge lenne.

2) Hasonlóan bizonyítható (önállóan végezzétek el), hogy az $AB = AC + CB$ egyenlőséggel is ellentmondásra jutunk. ●

A bebizonyított tételből következik, *hogy amikor három szakasz közül az egyiknek a hossza nem kisebb, mint a másik két szakasz hosszának az összege, akkor ezek a szakaszok nem lehetnek egy háromszögnek az oldalai* (282. ábra).

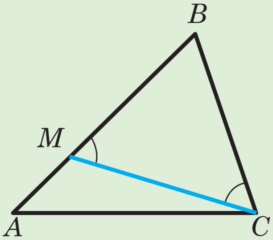
282.ábra

Az 24. pontban fogtok megismerkedni azzal, hogy amikor három adott szakasz közül bármelyik kisebb, mint a másik kettő összege, akkor ezek a szakaszok lehetnek egy háromszög oldalai.

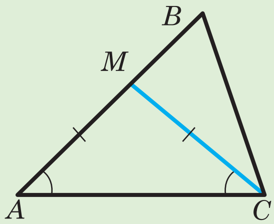
Már tudjátok, hogy a háromszögben egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak, és egyenlő szögekkel szemközt egyenlők a háromszög oldalai (9., 10. pontok). Ezeket a tulajdonságokat a következő tétel egészíti ki.

17.2. tétel. ***Bármely háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, és fordítva, nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik.***

Bizonyítás: 1) Vizsgáljuk meg az ABC háromszöget, melyben $AB > BC$. Be kell bizonyítani, hogy $\angle ACB > \angle A$ (283. ábra).



283.ábra



284.ábra

Mivel $AB > BC$, ezért az AB oldalon van egy olyan M pont, hogy $BM = BC$. Kaptunk egy MBC egyenlő szárú háromszöget, melyben $\angle BMC = \angle BCM$.

Mivel a BMC szög az AMC háromszög külső szöge, ezért $\angle BMC > \angle A$. Az alábbi egyenlőtlenséglánc bizonyítja a tétel első részét:

$$\angle ACB > \angle MCB = \angle BMC > \angle A.$$

2) Vizsgáljuk meg az ABC háromszöget, melyben $\angle C > \angle A$. Be kell bizonyítani, hogy $AB > BC$.

Mivel $\angle ACB > \angle A$, ezért az ACB szöget fel lehet osztani ACM és MCB szögekre úgy, hogy $\angle ACM = \angle A$ (284. ábra). Ekkor az AMC háromszög egyenlőszárú lesz, MA és MC egyenlő oldalakkal.

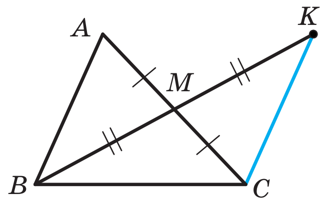
A BC oldalra felírjuk a háromszög -egyenlőtlenséget: $MC + MB > BC$.

Következőt kapjuk: $AB = AM + MB = MC + MB > BC$.

Megjegyezzük, hogy a 17.2. tétel második felét indirekt bizonyítással is be lehet bizonyítani: feltételezzük, hogy $BC \geqslant AB$, és ezután alkalmazzuk a már bebizonyított első részét a tételnek. Végezzétek el önállóan ezt a bizonyítást!

Feladat. Az ABC háromszög BM súlyvonal. Bizonyítsuk be, hogy $2BM < AB + BC$!

Megoldás. A BM félegyenesen felvettek egy K pontot úgy, hogy $MK = BM$ (285.ábra).



285.ábra

Az ABM és KCM háromszögekben: $AM = MC$, $BM = MK$, $\angle AMB = \angle CMK$.

Tehát, az $\Delta ABM = \Delta KCM$ a háromszögek egybevágóságának első alapesete alapján. Tehát $AB = KC$.

A BKC háromszög BK oldalára felírjuk a háromszög egyenlőtlenséget: $BK < BC + CK$. Figyelembe véve, hogy $BK = 2BM$ és $CK = AB$, innen kapjuk, hogy: $2BM < AB + BC$. ◀

1. Fogalmazzátok meg a háromszög-egyenlőtlenségről szóló tételt!
2. Fogalmazzátok meg a háromszög oldalai és szögei közötti összefüggésről szóló tételt!

GYAKORLATOK

458.° Lehetnek e egy háromszögnek az oldalai:
1) 6 cm, 5 cm, 12 cm; 2) 6 cm , 5 cm, 11 cm?

459.° Hasonlítsátok össze az ABC háromszög szögeit, ha:
1) $AB > AC > BC$; 2) $AB = BC$, $BC > AC$.

460.° Az ABC háromszögben ismert, hogy $\angle A = 34°$, $\angle B = 28°$. Hasonlítsátok össze az AB, BC és AC oldalaikat!

461.° Hasonlítsátok össze az ABC háromszög oldalait, ha:
1) $\angle C > \angle A > \angle B$; 2) $\angle B > \angle C$, $\angle A = \angle B$.

462.• Egy háromszög kerülete 30 cm. Lehet-e az egyik oldala: 1) 20 cm; 2) 15 cm?

463.• *E*gy háromszög két oldalának hossza 7 cm és 9 cm. Lehet-e a háromszög kerülete:

1) 20 cm; 2) 32 cm; 3) 18 cm?

464.• *E*gy egyenlő szárú háromszög két oldala 7 cm és 15 cm. Határozzátok meg a háromszög kerületét!

465.• *E*gy egyenlő szárú háromszög kerülete 20 cm. Lehet-e a szárának a hossza 5 cm?

466.• *E*gy háromszög két oldala 3,4 cm és 6,1 cm. Milyen lehet a harmadik oldal legkisebb egész számmal megadható hossza?

467.• *E*gy háromszög két oldala 4,8 cm és 7,6 cm. Milyen lehet a harmadik oldal legnagyobb egész számmal megadható hossza?

468.• Létezik-e olyan háromszög, melynek egyik oldala 2 cm-rel kisebb a másiknál, és 6 cm-rel kisebb a harmadiknál, ha kerülete 20 cm-rel egyenlő?

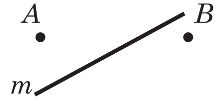
469.• Létezik e olyan háromszög, melynek egyik oldala 1 cm-rel kisebb a másiknál és 3 cm-rel kisebb a harmadik oldalánál, ha a kerülete 22 cm?

470.• Az ABC háromszög B szöge tompaszög. Az AB oldal A pontja utáni meghosszabbításán jelöltünk egy tetszőleges D pontot. Bizonyítsátok be, hogy $CD > AC$!

471.• Az ABC háromszögről ismert, hogy $\angle C > 90°$. A BC felvettek egy tetszőleges D pontot. Bizonyítsátok be, hogy $AD > AC$!

472.•• Az A, B és C pontokra teljesül, hogy $AB = AC + CB$ egyenlőség. Bizonyítsátok be, hogy a C pont az AB szakasz egyik belső pontja!

473.•• Az m egyenesen (286.ábra) határozzatok meg egy olyan C pontot, melynek az A és B pontokig mért távolságainak az összege minimális legyen! Magyarázzátok meg a válaszotokat!



286.ábra

474.* *E*gy háromszög egyik oldala 2,8 cm, a másik 0,6 cm. Határozzátok meg ennek a háromszögnek a harmadik oldalát, ha a hossza centiméterekben egész szám?

475.* Az AM szakasz az ABC háromszög súlyvonala, $\angle CAM > \angle BAM$. Bizonyítsátok be, hogy $AB > AC$!

476.* Bizonyítsátok be, hogy a háromszög két oldalának összege nagyobb, mint a harmadik oldalára bocsátott súlyvonal kétszerese!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

477. Az ABC és CBD mellékszögek fokmértékének aránya 5 : 4. Határozzátok meg az ABC és ABD szög szögfelezőinek hajlásszögét! Hány megoldása van ennek a feladatnak?

478. Az ABC és MKE háromszögekről tudjuk, hogy $AB = MK$, $BC = KE$, $\angle B = \angle K$. Az AB szakaszon felvettek egy F pontot, az MK szakaszon pedig egy P pontot úgy, hogy $\angle ACF = \angle MEP$. Mivel egyenlő a CF szakasz hossza, ha $PE = 15$ cm?

MEGTANULJUK ALKALMAZNI A MÉRTANT

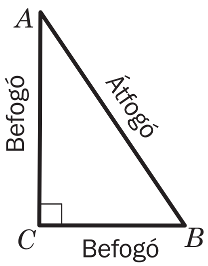
479. *E*gy kórházban a folyosó egyenes szakaszán a kórtermek bejáratai azonos távolságra vannak egymástól. A folyosó melyik részén kell a nővérszobát úgy kialakítani, hogy közte és kórtermek bejáratai közötti távolságok összege a legkisebb legyen, ha a folyosón: 1) két kórterem található; 2) három kórterem található; 3) négy kórterem található?

480. Két csiga egyszerre kezdett egyenes vonalban kúszni egy pontból egy síkfelületen különböző irányokba (nem feltétlenül ellentétes irányba). Egy idő után kiderült, hogy az egyik csiga 2 m-t kúszott, a másik pedig 3 m-t. Mekkora lehet a távolság közöttük ebben a pillanatban?

18. Derékszögű háromszög

A 287. ábrán az ABC derékszögű háromszög látható, melyben a $\angle C = 90°$.

A derékszögű háromszögnek azt az oldalát, amely a derékszöggel szemben fekszik átfogónak, a derékszöget bezáró oldalakat pedig befogóknak nevezzük (287. ábra).

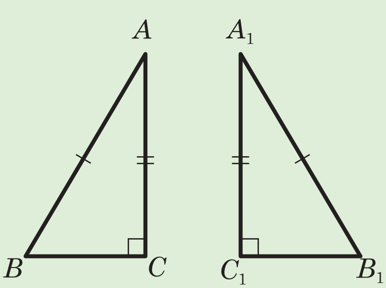


287.ábra

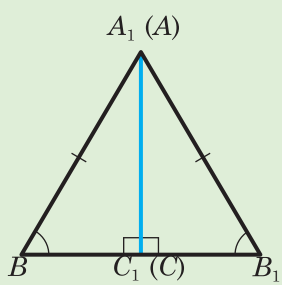
Két háromszög egybevágóságának bizonyításához az egyenlő elemeinek a meghatározása szükséges. Bármilyen két derékszögű háromszög egybevágóságához az egyik elem mindig adott, ez a derékszögük. Ezért a derékszögű háromszögeknek egyediek lesznek az egybevágóság alapesetei.

18.1 tétel.(a derékszögű háromszögek egybevágósága átfogójuk és befogójuk alapján). ***Ha az egyik derékszögű háromszög átfogója és befogója megfelelően egyenlő a másik derékszögű háromszög átfogójával és befogójával, akkor ezek a háromszögek egybevágók.***

Bizonyítás: Megvizsgáljuk az ABC és ABC és $A_1B_1C_1$, háromszögeket, melyeknél $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (288. ábra). Be kell bizonyítani, hogy $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.



288.ábra



289.ábra

Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögeket úgy helyezzük el, hogy az A csúcsa egybeessen az A_1 csúccsal, a C csúcs pedig a C_1 csúccsal, a B és B_1 pontok pedig az A_1C_1 egyeneshez viszonyítva különböző félsíkokhoz tartozzanak (289. ábra).

Ekkor $\angle A_1C_1B + \angle A_1C_1B_1 = 90° + 90° = 180°$. Tehát, BC_1B_1 – szög egyenesszög lesz, ezért a B, C_1, B_1 pontok egy egyenesre illeszkednek. Megkaptuk a BA_1B_1 egyenlő szárú háromszöget, melynek szárai A_1B és A_1B_1 magassága pedig A_1C_1 (289. ábra). Ekkor az A_1C_1 (289. ábra). Ekkor az A_1C_1 a háromszög súlyvonala, vagyis $C_1B = C_1B_1$. Tehát az A_1BC_1 és $A_1B_1C_1$ háromszögek egybevágók az egybevágóság harmadik alapesete alapján. ●

A feladatok megoldása során érdemes még a derékszögű háromszögek egybevágóságának többi alapeseteit is alkalmazni.

A derékszögű háromszögek egybevágósága két befogójuk alapján. ***Ha az egyik derékszögű háromszög befogói megfelelően egyenlők a másik derékszögű háromszög befogóival, akkor ezek a háromszögek egybevágók.***

A derékszögű háromszögek egybevágósága befogójuk és rajta lévő szöge alapján. ***Ha az egyik derékszögű háromszög befogója és a rajta fekvő szöge megfelelően egyenlők a másik derékszögű háromszög befogójával és rajta fekvő szögével, akkor ezek a háromszögek egybevágók.***

Egyértelmű, hogyha az egyik derékszögű háromszög hegyesszöge egyenlő a másik derékszögű háromszög hegyesszögével, akkor mindkét hegyesszögük egyenlők. Alkalmazva ezt a megállapítást, a derékszögű háromszögek egybevágóságának alapeseteit még két alapesettel lehet kiegészíteni.

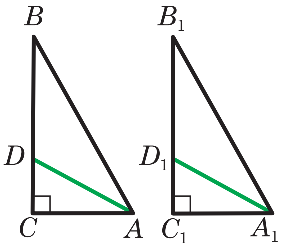
A derékszögű háromszögek egybevágósága befogójuk és szemközti hegyesszögük alapján. ***Ha az egyik derékszögű háromszög befogója és a befogóval szemközti hegyesszöge megfelelően egyenlő a másik háromszög befogójával és szemközti szögével, akkor ezek a háromszögek egybevágók.***

A derékszögű háromszögek egybevágósága az átfogója és hegyesszöge alapján. ***Ha a derékszögű háromszög átfogója és hegyesszöge megfelelően egyenlő a másik háromszög átfogójával és hegyesszögével, akkor ezek a háromszögek egybevágók.***

Feladat. Bizonyítsátok be a derékszögű háromszögek egybevágóságát, hegyesszögük és ennek a szögnek szögfelezője alapján!

Megoldás. Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögeket (290. ábra) $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, az AD és A_1D_1 szakaszok a szögfelezők és $AD = A_1D_1$.

Ekkor: $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1 = \angle C_1A_1D_1$.



290.ábra

Mivel $AD = A_1D_1$, ezért az ACD és $B_1A_1C_1D_1$ derékszögű háromszögek egybevágók, az átfogójuk és a hegyes szögük alapján. Ebből következik $AC = A_1C_1$, és $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, ezért az ABC és $A_1B_1C_1$ derékszögű háromszögek egybevágók a befogójuk és a rajta fekvő hegyesszögük alapján. ◀

?

1. Milyen háromszöget nevezünk derékszögűnek? **2.** A derékszögű háromszög melyik oldalát nevezzük átfogónak? **3.** A derékszögű háromszög melyik oldalát nevezzük befogónak? **4.** Fogalmazzátok meg a derékszögű háromszögek egybevágóságának alapesetét átfogója és befogója alapján. **5.** Fogalmazzátok meg a derékszögű háromszögek egybevágóságának alapesetét két befogója alapján. **6.** Fogalmazzátok meg a derékszögű háromszögek egybevágóságának alapesetét befogója és rajta fekvő szöge alapján. **7.** Fogalmazzátok meg a derékszögű háromszögek egybevágóságának alapesetét befogója és vele szemközti hegyesszöge alapján. **8.** Fogalmazzátok meg a derékszögű háromszögek egybevágóságának alapesetét átfogója és hegyesszöge alapján. **9.** Mennyi a derékszögű háromszög hegyesszögeinek összege?

GYAKORLATI FELADATOK

481.° Derékszögű vonalzó és vonalzó segítségével rajzoljatok derékszögű háromszöget, ha:

1) befogói 3 cm és 4 cm egyenlők;
2) az egyik befogója 2,5 cm, rajta fekvő szöge 40°-os;
3) átfogója 6 cm, az egyik hegyesszöge 70°-os!

Jelöljétek meg a lerajzolt háromszögeket, és nevezzétek meg mindegyiknek a befogóit és az átfogóját!

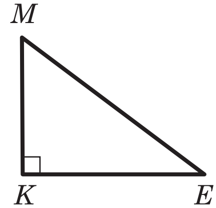
482.° Derékszögű vonalzó és vonalzó segítségével rajzoljatok egyenlő szárú derékszögű háromszöget, ha:

1) a befogói 5 cm egyenlők;
2) az átfogója 4 cm egyenlő!

GYAKORLATOK

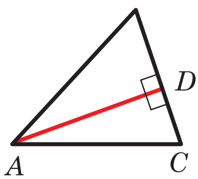
483.° *A* 291. ábrán az *MKE* derékszögű háromszög látható, melynek *K* a derékszöge. Nevezzétek meg:

1) a háromszög befogóit és átfogóját;
2) az *E* szög melletti befogót;
3) az *M* szöggel szembeni befogót!



291.ábra

484.° *A* 292. ábrán az ABC háromszög magassága AD. Keressetek ezen az ábrán derékszögű háromszögeket, mindegyiknek nevezzétek meg a befogóit és átfogóját!



292.ábra

485.° *A* derékszögű háromszög egyik hegyesszögének a fokmértéke 43°. Határozzátok meg a másik hegyesszögét!

486.° Határozzátok meg a derékszögű háromszög hegyesszögeit, ha a fokmértékeinek aránya 7 : 8!

487.° Határozzátok meg a derékszögű háromszög hegyesszögeit, ha az egyikük 32°-kal nagyobb a másiknál!

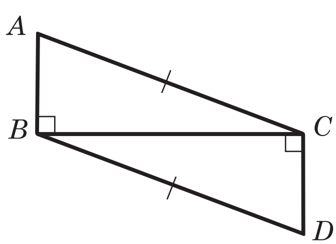
488.° *A* derékszögű háromszög átfogóra bocsátott magassága és az egyik befogója közötti szög 76°. Határozzátok meg a háromszög hegyesszögeit!

489.° Határozzátok meg a derékszögű háromszög derékszögének szögfelezője és az átfogója hajlásszögét, ha a háromszög egyik szöge 54°!

490.° Az ABC egyenlő szárú háromszögben ($AB = BC$) AH a magasság. Határozzátok meg a CAH szöget, ha $\angle B = 76°$.

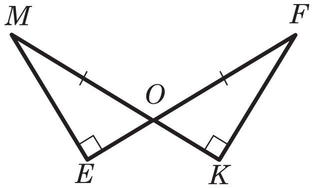
491.° Az egyenlő szárú háromszögben az alapja és a szárhoz húzott magasság közötti szög 19°. Határozzátok meg az adott háromszög szögeit!

492.° *A* 293. ábrán $AB \perp BC$, $CD \perp BC$, $AC = BD$. Bizonyítsátok be, hogy az $AB = CD$.



293.ábra

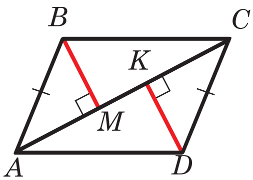
493.° *A* 293. ábrán $MO = FO$, $\angle MEO = \angle FKO = 90°$, Bizonyítsátok be, hogy az $\Delta MEO = \Delta FKO$.



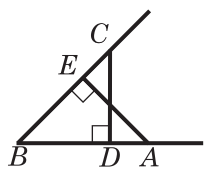
294.ábra

494.° Az A és B pontokból, melyek az a egyeneshez viszonyítva egy félsíkra illeszkednek, AM és BK merőlegeseket bocsátunk erre az egyenesre, $AM = BK$. Bizonyítsátok be, hogy $AK = BM$!

495.° A 295. ábrán $AB = CD$, $AB \parallel CD$, $BM \perp AC$, $DK \perp AC$. Bizonyítsátok be, hogy az $BM = DK$.



295.ábra



296.ábra

496.° A 296. ábrán $AB = BC$, $CD \perp AB$, $AE \perp BC$. Bizonyítsátok be, hogy az $BE = BD$.

497.° A B csúcsú szög szögfelezőjén felvettek egy M pontot, melyből MD és MC merőlegeseket bocsátottak a szög száraira. Bizonyítsátok be, hogy $MD = MC$!

498.° A B csúcsú szög szárain A és C pontokat vettek fel úgy, hogy $AB = BC$. Az A és C pontokon keresztül merőleges egyeneseket húztak a BA és BC szög száraira, melyek az O pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy az ABC szög BO szögfelezője!

499.• Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög szárakhoz tartozó szögfelezői egyenlők egymással!

500.• Bizonyítsátok be, hogyha a háromszög két magassága egyenlő, akkor ez a háromszög egyenlő szárú!

501.• Bizonyítsátok be a derékszögű háromszögek egybevágóságát egyik befogója és a derékszög szögfelezője alapján!

502.• Bizonyítsátok be a derékszögű háromszögek egybevágóságát egy befogójuk és a derékszög csúcsából bocsátott magasság alapján!

503.• Bizonyítsátok be a derékszögű háromszögek egybevágóságát egyik befogójuk és a rajtuk fekvő szög szögfelezője alapján!

504.• Bizonyítsátok be a derékszögű háromszögek egybevágóságát egy befogójuk és a másik befogóhoz tartozó súlyvonal alapján!

505.• Bizonyítsátok be, hogy az egybevágó háromszögekben a megfelelő oldalakra húzott magasságok egyenlők!

506.•• Az ABC háromszög AB és BC oldalait egy egyenes megfelelően egy M és egy K pontban metszi. Ezek a pontok a háromszög oldalainak a felezőpontjai. Bizonyítsátok be, hogy az adott háromszög csúcsai egyenlő távolságra vannak az MK egyenestől!

507.•• Az ABC háromszög AB és BC oldalait egy egyenes megfelelően M és K pontokban metszi. Az adott háromszög csúcsai egyenlő távolságra vannak az MK egyenestől. Bizonyítsátok be, hogy az M és K pontok rendre az AB és BC oldalak megfelelő felezőpontjai!

508.•• Bizonyítsátok be, a hegyesszögű háromszögek egybevágóságát az egyik oldaluk, és a másik két oldalhoz tartozó magasságuk alapján!

509.•• Bizonyítsátok be a háromszögek egybevágóságát az oldaluk és az ezekre az oldalakra bocsátott súlyvonalak és magasságuk alapján!

510.•• Az ABC háromszög AM és CK magasságai egy H pontban metszik egymást, $HK = HM$. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög egyenlőszárú!

511.•• Az MKN háromszög ME és NF magasságai egy O pontban metszik egymást, $OM = ON$. $MF = KE$. Bizonyítsátok be, hogy az MKN háromszög egyenlőoldalú!

512.•• Ki lehet-e jelenteni, hogy az egyik háromszög két oldala és a harmadikhoz tartozó magassága megfelelően egyenlő a másik háromszög két oldalával és a harmadik oldalára húzott magasságával, akkor ezek a háromszögek egybevágók?

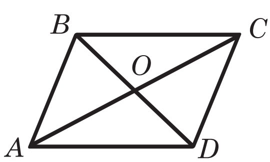
513.•• Bizonyítsátok be a háromszögek egybevágóságát két szögük és a harmadik szög csúcsából bocsátott magassága alapján!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

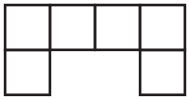
514. Az ABC és DBC szögek mellékszögek, BM félegyenes az ABC szög belső félegyenese, a BK félegyenes pedig a DBC szögé, $\angle MBC = \angle CBK = \mathbf{30°}$, A DBK szög 5-ször nagyobb az ABM szögnél. Határozzátok meg az ABC és DBC szögeket!

515. Az ABC egyenlőszárú háromszög AB és BC szárain rendre felvettek egy M és egy K pontot úgy, hogy $BM = BK$. Az AK és CM szakaszok az O pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy: 1) az AOC háromszög egyenlőszárú; 2) a BO egyenes az AC szakasz felezőmerőlegese lesz!

516. A 297.ábrán $AB = CD$, $BC = AD$. Bizonyítsátok be, hogy az $AO = OC$!



297.ábra



298.ábra

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

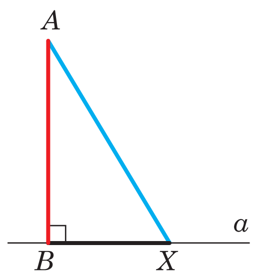
517. Le lehet-e fedni a síkot olyan burkolólapokkal, amely a 298. ábrán látható?

19. A derékszögű három szög tulajdonságai

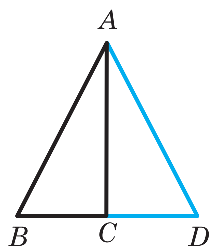
19.1. tétel. ***A derékszögű háromszögben a z átfogó nagyobb, mint a befogó.***

Bizonyítás: ⊙ Bármelyik befogó hegyesszöggel szemben fekszik, az átfogó pedig derékszöggel szemben. A derékszög nagyobb, mint a hegyesszög, és a háromszögben a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik (17.2. tétel). Ezért az átfogó nagyobb bármelyik befogónál. ●

Következmény. ***Ha egypontból, egy merőlegest és egy ferdét húzunk az egyenesre, akkor a merőleges hossza kisebb lesz, mint a ferdéé.***



299.ábra



300.ábra

A 299. ábrán az AB a merőleges, az AX pedig a ferde, AB < AX.

1. feladat. Bizonyítsátok be, a derékszögű háromszögben a 30°-os szöggel szembeni befogó egyenlő az átfogó felével!

Megoldás. Vizsgáljuk meg az ABC háromszöget, melyben $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 30°$. Be kell bizonyítani, hogy $BC = \frac{1}{2}AB$.

A BC félegyenesre felmérjük a CD szakaszt, melynek hossza a BC-vel legyen egyenlő (300. ábra). Megrajzoljuk az AD szakaszt. Ekkor az ABC és ADC háromszögekben kapjuk: $\angle ACB = \angle ACD = \ = 90°$, a BC és CD egyenlők a szerkesztés alapján, az AC szakasz a háromszögek közös oldala. Tehát a háromszögek egybevágóak a két oldaluk alapján. Ekkor $\angle DAC = 30°$, vagyis a $\angle BAD = \angle ABD = 60°$. Az, $\angle ADB = 60°$ és az ABD háromszög egyenlő oldalú.

Vagyis: $BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$. ◀

2. feladat. Bizonyítsátok be, hogy ha a befogó az átfogó felével egyenlő, akkor ezzel a befogóval szemközti szög 30°-os!

Megoldás. Megvizsgáljuk az ABC háromszöget, melyben $\angle ACB = 90°$, $BC = \frac{1}{2}AB$. Be kell bizonyítani, hogy $\angle BAC = 30°$.

A BC félegyenesre felmérjük a BC-vel egyenlő CD szakaszt (300. ábra). Ekkor $AB = BD$. Ezen kívül az AC szakasz a BAD háromszög súlyvonala és magassága, tehát az egyenlő szárú háromszög ismertetőjele alapján $AB = AD$. Innen azt kaptuk, hogy $AB = BD = AD$, vagyis a BAD egyenlő oldalú háromszög, tehát $\angle BAD = 60°$.

Mivel az AC szakasz a BAD szög szögfelezője, ezért $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BAD = 30°$. ◀

?

1. A derékszögű háromszög oldalai közül melyik a legnagyobb? **2.** Milyen tulajdonsága van annak a befogónak, amely a 30°-os szöggel szemben fekszik? **3.** Milyen annak a szögnek a fokmértéke, ami szemben van azzal a befogóval, amely az átfogó felével egyenlő?

GYAKORLATOK

518.° *A* derékszögű háromszög oldalai 24 cm, 10 cm és 26 cm. Mekkora az adott háromszög nagyobb befogója?

519.° *A* derékszögű háromszög oldalai 15 cm, 17 cm és 8 cm. Mekkora az adott háromszög átfogója és a kisebbik befogója?

520.° A DEF derékszögű háromszög DE átfogója 18 cm-rel egyenlő. $\angle D = 30°$. Határozzátok meg az FE befogót!

521.° Az MKC derékszögű háromszögben $\angle M = 90°$, $\angle C = 60°$, CM = 7 cm. Határozzátok meg a CK átfogót!

522.° Az ABC háromszögben adott, hogy $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$, CK – a háromszög magassága, AC = 10 cm. Határozzátok meg az BK szakaszt!

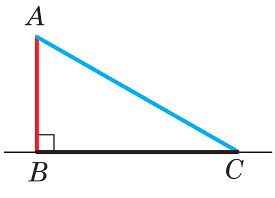
523.° Az ABC háromszögben adott, hogy $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, CD – a háromszög magassága, BD = 7 cm. Határozzátok meg az AB átfogót!

524.° Az ABC háromszögben adott, hogy $\angle C = 90°$, CK– a háromszög magassága, CK = 7 cm, AC = 14 cm. Határozzátok meg az $\angle B$.

525.• Az ABC egyenlő oldalú háromszögben a D pont az AB oldal felezőpontja. Ebből a pontból DE merőlegest állítottak az AC oldalra. Milyen részekre osztja fel az E pont az AC szakaszt, ha a háromszög oldala 16 cm-rel egyenlő?

526.• *A* derékszögű háromszög egyik szöge 30°, az átfogó és a kisebbik befogó különbsége pedig 5 cm. Határozzátok meg a háromszög oldalait!

527.• *A* 301.ábrán az AB merőleges, az AC pedig ferde, AC = 2 cm. Határozzátok meg az ACB szöget és az AB merőleges hosszát, ha ez a hossz centiméterekben kifejezve egész szám lesz!



301.ábra

528.• Az ABC háromszög $(\angle C = 90°)$ AC befogóján úgy vettek fel egy K pontot, hogy AK = BK. Határozzátok meg az A szögét, ha AK = 6 cm, KC = 3 cm!

529.• Az egyenlő szárú háromszög alapja 18 cm, egyik szöge pedig 120°. Határozzátok meg a háromszög alapra illeszkedő csúcsból húzott magasságát!

530.• *A BC* alapú *ABC* egyenlő szárú háromszögben meghúzták a *BM* magasságot, melynek hossza 7,5 cm. $\angle MBC = 15°$. Határozzátok meg a háromszög szárát!

531.• Az *ABC* egyenlő oldalú háromszög *AM* és *BK* szögfelezői egy *O* pontban metszik egymást. Bizonyítsátok be, hogy $AO : OM = 2:1$!

532.•• Az *ABC* háromszögben $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$. Az *AB* szakasz felezőmerőlegese az *AB* szakaszt egy *M* pontban, a *BC* szakaszt pedig egy *K* pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy $MK = \frac{1}{3}BC$.

533.•• Az *MKE* háromszögben adott, hogy $\angle K = 90°$, $\angle E = 30°$, KE = 12 cm. Határozzátok meg az *MC* szögfelező hosszát!

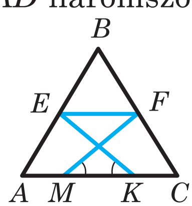
534.•• Az *ABC* háromszögben ismertek: $\angle C = 90°$, $\angle BAC = 60°$, az *AD* szakasz szögfelező, a *CD* szakasz 3 cm-rel rövidebb a *BD*-nél. Határozzátok, meg az *AD* szögfelezőt!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

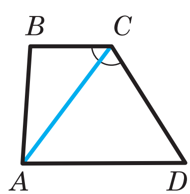
535. A 302.ábrán $AB = BC$, $AM = KC$, $\angle AKE = \angle FMC$. Bizonyítsátok be, hogy az FBE háromszög egyenlő szárú!

536. Az *ABC* háromszög A és *B* csúcsán át olyan egyeneseket húztak, melyek merőlegesek az *ACB* szög szögfelezőjére és a *BC* és *AC* egyeneseket megfelelően *K* és *M* pontokban metszik. Határozzátok meg az *ABC* háromszög kerületét, ha $AC > BC$, CM = 6 cm, BK = 2 cm, AB = 7 cm!

537. A 303.ábrán $BC \parallel AD$, a *CA* félegyenes a *BCD* szög szögfelezője, AD = 9 cm, AC = 8 cm. Határozzátok meg a *CAD* háromszög kerületét!



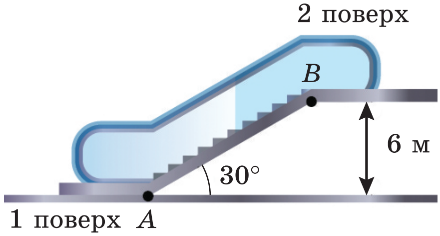
302.ábra



303.ábra

MEGTANULJUK ALKALMAZNI A MÉRTANT

538. *E*gy mozgólépcső viszi fel a repülőtér utasait az első emeletről a második emeletre. Az első emelet magassága 6 m (304. kép). Az *AB* mozgólépcső dőlésszöge az első emelet padlósíkjához képest 30°. Határozza meg az *AB* mozgólépcső hosszát!



304.ábra

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

539. Vágd szét a háromszöget négy részre úgy, hogyha hármat megfordítunk közülük, akkor is össze lehessen rakni egy ugyanilyen háromszöget!

A MATEMATIKA IS A NŐK DOLGA

Miután elolvastátok a matematikatörténeti fejezeteit, különösen a Hogyan épült a híd az algebra és a mértan között történetet, az a benyomásotok támadhat, hogy a matematika tisztán férfiügy. Sajnos ez évszázadok óta így van. A nők azonban – különösen a 19. század közepétől – küzdöttek a természettudományok, különösen a matematika tanulmányozásának lehetőségéért. És manapság a női matematikusok előkelő helyet foglalnak el a világ vezető tudósai között.

Nyina Virchenko
(szül. 1930)

Marina Vjazovszka
(szül. 1984)

Köztük sok honfitársunk is van. Különösen Nyina Virchenko ukrán tudós nevét ismeri az egész világ, akinek a nevével a 271. feladat megoldása közben találkozhattatok, és Marina Vjazovszka nevét, akit Fields-éremmel, a matematika területén a legrangosabb kitüntetéssel tüntettek ki.

A lányok matematika-tanulmányozásának ösztönzését, képességeik bemutatását, olyan kedvező környezet megteremtését, ahol önbizalmat nyerhetnek, és elismerhetik matematikai tehetségüket, támogatja a lányok közötti európai matematikai olimpia. (angolul: European Girls' Mathematical Olympiad, rövidítvel – EGMO) évenkénti matematikai verseny, melyen csak olyan lányok vehetnek részt, akik felsőfokú tanulmányokat végeznek és a korhatár 20 év. Különböző kontinensek képviselői vesznek részt rajta. Minden ország csapata négy résztvevőből áll, akik egyéni versenyben indulnak.

Emblem EGMO

Az olimpiát 2012-ben rendezték meg először Cambridge városában (Nagy-Britannia). Azóta jelentős népszerűségre tett szert. 2019-ben Ukrajnában rendezték meg az olimpiát: április 7. és 13. között 50 ország 196 résztvevője versenyzett Kijevben.

Ukrajna válogatottja a kezdetektől részt vesz ezen az olimpián is jelentős sikereket ért el: 2014-ben, 2015-ben, 2017-ben, 2019-ben és 2023-ban csapatunk vezette a hivatalos (európai) ranglistát. Lányaink 2012-2023 során 15 arany-, 22 ezüst- és 8 bronzérmet szereztek. Hiszünk abban, hogy a jövőben ezen és más matematikai versenyeken is méltón képviselik hazánkat fiatal ukrán nők.

Ukrajna válogatottja – az *E*GMO-2023 győztescsapata
(balról jobbra): Evgeniya Frankevics (Lviv), Polina Genik, Irina Romanyuk (mindkettő – Kijev), Marina Spektrova (Harkiv)

3. SZÁMÚ FELADAT. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁBAN

1. Melyik igaz a következő állítások közül?

A) Ha két szakasznak nincs közös pontjuk, akkor párhuzamosak.

B) Ha két félegyenesnek nincs közös pontjuk, akkor párhuzamosak.

C) Ha a félegyenesnek és a szakasznak nincs közös pontjuk, akkor párhuzamosak.

D) Ha két egyenesnek nincs közös pontjuk, akkor párhuzamosak.

2. A következő állítások közül melyik igaz?

A) Az egyenesre nem illeszkedő ponton át csak egy olyan szakasz húzható, amely párhuzamos ezzel az egyenessel.

B) Az egyenesre nem illeszkedő ponton át csak egy olyan félegyenes húzható, amely párhuzamos ezzel az egyenessel.

C) Az egyenesre nem illeszkedő ponton át végtelen sok egyenes húzható, amely nem párhuzam os ezzel az egyenessel.

D) Az egyenesre nem illeszkedő ponton át csak két olyan egyenes húzható, amely párhuzamos ezzel az egyenessel.

3. A következő állítások közül melyik igaz?

A) Ha $a \parallel b$ és $b \parallel c$, akkor $a \parallel c$.

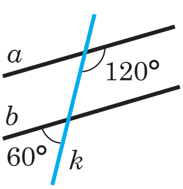
B) Ha $a \perp b$ és $b \perp c$, akkor $a \parallel c$.

C) Ha $a \perp b$ és $b \perp c$, akkor $a \perp c$.

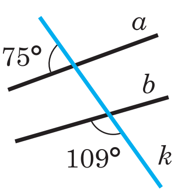
D) Ha $a \parallel b$ és $c \perp b$, akkor $c \perp a$.

4. Melyik rajzon párhuzamosak az a és *b* egyenesek?

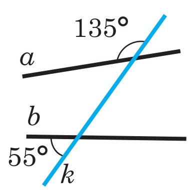
A)



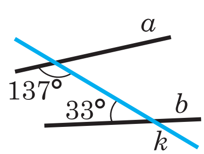
B)



C)



D)



5. Melyik állítás hamis?

A) Ha az egyik különböző oldali szögpár összege megegyezik a másik különböző oldali szögpár összegével, akkor az egyenesek nem párhuzamosak.

B) Ha a különböző oldali szögek nem egyenlők, akkor az egyenesek nem párhuzamosak.

C) Ha az egyoldali szögek összege nem egyenlő 180°-kal, akkor az egyenesek nem párhuzamosak.

D) Ha a megfelelő szögek nem egyenlők, akkor az egyenesek nem párhuzamosak.

6. *E*gy háromszögnek hány külső szöge van?

A) 3; B) 6; C) 4; D) 9.

7. Mennyi a háromszög külső szögeinek összege, ha mindegyik csúcsnál csak az egyiket vesszük?

A) 180°; B) 300°; C) 360°; D) 100°.

8. Az ABC háromszög A és C szögének szögfelezői az O pontban metszik egymást, $\angle ABC = 84°$. Melyik igaz a következő egyenlőségek közül?

A) $\angle AOC = 48°$; C) $\angle AOC = 132°$;

B) $\angle AOC = 138°$; D) $\angle AOC = 174°$.

9. Az ABC háromszögben az A és C csúcsokból húzott magasságok az O pontban metszik egymást, $\angle ABC = 62°$. Melyik igaz a következő egyenlőségek közül?

A) $\angle AOC = 28°$; C) $\angle AOC = 152°$;

B) $\angle AOC = 118°$; D) $\angle AOC = 149°$.

10. Mekkora lehet az ABC háromszög AB oldala a következők közül, ha AC = 3 cm, BC = 10 cm?

A) 3 cm; B) 7 cm; C) 11 cm; D) 15 cm.

11. Az ABC háromszögben ismert, hogy $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$. A következő állítások közül melyik igaz?

A) $CB = \frac{1}{2}AB$; C) $CB = \frac{1}{2}AC$;

B) $AC = \frac{1}{2}AB$; D) $AC = \frac{1}{2}CB$.

A 3. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Párhuzamos egyenesek

Két egyenest párhuzamos, ha nem metszik egymást.

Párhuzamos egyen esek axiómája

Az egyenesre nem illeszkedő ponton át az adott egyenessel egyetlen párhuzamos egyenes húzható.

Két egyen es párhuzamosságának ismertetőjele

- Két egyenes, amelyek merőlegesek egy harmadik egyenesre, párhuzamosak egymással.
- Ha két egyenes külön-külön párhuzamos egy harmadikkal, akkor ez a két egyenes párhuzamos egymással.
- Ha két egyenesnek egy harmadikkal való metszésekor keletkezett különböző oldali szögeik egyenlők, akkor az egyenesek párhuzamosak.
- Ha két egyenesnek egy harmadikkal való metszésekor keletkezett egyoldali szögek összege 180°-kal egyenlő, akkor ezek az egyenesek párhuzamosak.
- Ha két egyenesnek egy harmadikkal való metszésekor keletkezett megfelelő szögek egyenlők, akkor az egyenesek párhuzamosak.

Két egyenes párhuzamosságának tulajdonságai

Ha két párhuzamos egyenest egy harmadikkal metszünk, akkor:

- váltószögek egyenlők;
- egyállású szögek egyenlők;
- váltószögek összege 180°.

Párhuzamos egyenesek távolsága

Két párhuzamos egyenes távolságának az egyik egyenes bármely pontjának és a másik egyenesnek a távolsága.

Háromszög szögeinek összege

A háromszög szögeinek összege 180°.

A háromszög külső szöge

A háromszög külső szögének azt a szöget nevezzük, amely mellékszöge a háromszög szögének.

A háromszög külső szöge egyenlő a háromszög adott szöggel nem szomszédos szögeinek összegével.

A háromszög külső szöge nagyobb bármelyik vele mellékszöget nem alkotó szögénél.

Háromszög-egyenlőtlenség

A háromszög bármely oldala kisebb a másik két oldal összegénél.

Három szögek szögeinek és oldalainak összehasonlítása

Minden háromszögben a nagyobb oldallal szemben nagyobb szög, a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik.

Átfogó és befogó

A derékszögű háromszögben a derékszöggel szemközti oldalt átfogónak, a derékszöget bezáró oldalakat pedig befogóknak nevezzük.

A derékszögű háromszög egybevágóságának alapesetei

- Átfogó és befogó alapján: ha az egyik derékszögű háromszög átfogója és befogója megfelelően egyenlő a másik derékszögű háromszög átfogójával és befogójával, akkor ezek a háromszögek egybevágók.

- A két befogó alapján: ha az egyik derékszögű háromszög két befogója megfelelően egyenlő a másik derékszögű háromszög két befogójával, akkor ezek a három szögek egybevágók.
- A befogó és a rajta fekvő szöge alapján: ha az egyik derékszögű háromszög befogója és rajta fekvő szöge megfelelően egyenlő a másik derékszögű háromszög befogójával és rajta fekvő szögével, akkor ezek a háromszögek egybevágók.
- A befogó és a szemközti szöge alapján: ha az egyik derékszögű háromszög befogója és szemközti szöge megfelelően egyenlő a másik derékszögű háromszög befogójával és szemközti szögével, akkor ezek a háromszögek egybevágók.
- Az átfogó és a hegyesszöge alapján: ha az egyik derékszögű háromszög átfogója és hegyesszöge megfelelően egyenlő a másik derékszögű háromszög befogójával és hegyesszögével, akkor ezek a háromszögek egybevágók.

Derékszögű három szögek tulajdonságai

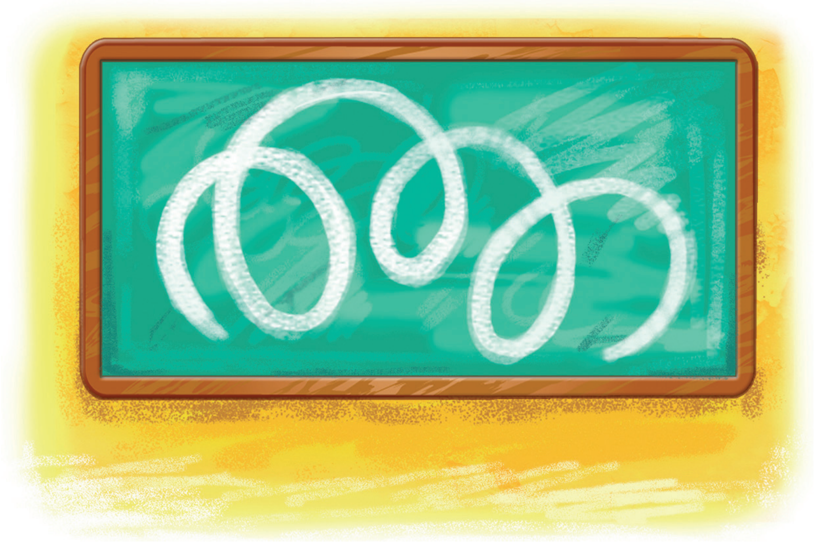
- Az átfogó nagyobb mint a befogó.
- A 30°-os szöggel szemközti befogó egyenlő az átfogó felével.
- Ha a befogó az átfogó felével egyenlő, akkor a befogóval szemközti szög 30°-os.

§4 KÖRVONAL ÉS KÖRLAP

Ebben a paragrafusban a körvonal tulajdonságaival fogtok megismerkedni. Megtanuljátok a körvonal és az egyenes, valamint a körvonal és a háromszög kölcsönös helyzetét. Megismerkedtek olyan különleges alakzatokkal, melyeknek minden pontja egy és ugyanazon tulajdonságokkal rendelkeznek.

20. A pontok mértani helye. Körvonal és körlap

A pontok bármilyen halmaza egy mértani alakzatot határoz meg. Bármilyen alakzatot nagyon egyszerű ábrázolni: bármit amit lerajzoltokl – az egy mértani alakzat lesz (305. ábra). De nem célszerű olyan alakzatot tanulmányozni, mely kaotikus pontokból áll. Ezért célszerű azokkal az alakzatokkal foglalkozni, amelyek közös tulajdonságú pontokból tevődnek össze. Az ilyen alakzatokat a pontok mértani helyének nevezzük.



305.ábra

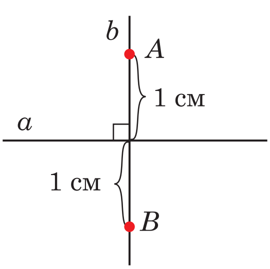
Meghatározás. A pontok mértani helyének (PMH) az összes olyan pont halmazát nevezzük, melyek közös tulajdonsággal rendelkeznek.

A PMH-t ábrázolni a következőképpen lehet: megadnak egy bizonyos tulajdonságot, és ezután a fehér síkra piros színnel ábrázolják azokat a pontokat, amelyek rendelkeznek az adott tulajdonsággal. A kapott „piros alakzat”, lesz a PMH.

306.ábra

Például, jelöljünk két pontot, az A-t és a B-t. Minden pontra megadjuk a tulajdonságot: egyidejűleg illeszkedjenek az *AB* és a *BA* félegyenesekre. Érthető, hogy ezzel a tulajdonsággal csak az *AB* szakasz pontjai rendelkeznek, és csak is ezek (306. ábra). Ezért az *AB* szakasz azon pontok mértani helye lesz, amelyek rendelkeznek a fenti tulajdonsággal.

Megvizsgáljuk az a és *b* merőleges egyeneseket. Minden pontra a következő tulajdonságot adjuk meg: illeszkedjen a b egyenesre, és 1 cm távolságra legyen az a egyenestől. Szemmel látható, hogy az *A* és *B* pontok (306.ábra) kielégítik ezt a feltételt. Az is érthető, hogy az *A* és *B* pontoktól különböző egyetlen más pont sem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Tehát a keresett PMH egy olyan alakzat lesz, amely két pontból áll, az *A* és *B* pontból. (307. ábra).



307.ábra

Ahhoz, hogy valamilyen tulajdonsággal rendelkező pontok halmazát PMH-nek nevezhessük, be kell bizonyítani két, kölcsönösen fordított tételt:

1) **egyenes tétel**: az adott ponthalmaz minden pontja rendelkezik ezzel a tulajdonsággal;

2) **fordított tétel**: ha a pont rendelkezik az adott tulajdonsággal, akkor az adott halmaz eleme.

20.1. tétel. ***A szakasz felezőmerőlegese az adott szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye lesz.***

Egyenes tétel: ***A szakasz felezőmerőlegesének minden pontja egyenlő távolságra van a szakasz két végpontjától.***

Bizonyítás: ⊙ A 8.2. tétel alapján a szakasz felezőmerőlegesének minden pontja rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Fordított tétel: ***Ha a pont egyenlő távolságra van a szakasz végpontjaitól, akkor a szakasz felezőmerőlegesére illeszkedik.***

Bizonyítás: ⊙ A 11.2. tétel alapján, ha a pont rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, akkor a felezőmerőlegesre illeszkedik. ●

20.2. tétel. ***A szögfelező azon pontok mértani helye, melyek egyenlő távolságra vannak a szög száraitól.***

Egyenes tétel: ***A szögfelező minden pontja egyenlő távolságra van a szög száraitól.***

Bizonyítás: ⊙ Természetes, hogy a szög csúcsa rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Megvizsgálunk egy tetszőleges X pontot, amely az ABC szög csúcsával nem esik egybe és illeszkedik a szögfelezőre. XM és XN merőlegeseket bocsátunk megfelelően a BA és a BC szárakra (308. ábra). Bebizonyítjuk, hogy $XM = XN$.

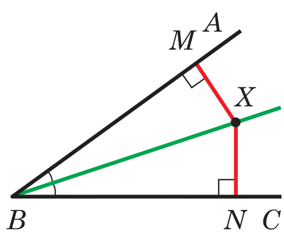
A BXM és BXN derékszögű háromszögekben a BXl – közös, $\angle MBX = \angle NBX$, mivel a BX az ABC szög szögfelezője. Tehát a BXM és BXN háromszögek egybevágók az átfogójuk és a hegyesszögük alapján. Innen következik, hogy $XM = XN$.

Fordított tétel. ***Ha a pont egyenlő távolságra van a szög száraitól, akkor az adott szög szögfelezőjére illeszkedik.***

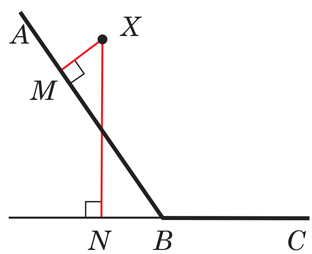
Bizonyítás: Természetesen a szög csúcsa rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Megvizsgálunk egy tetszőleges X pontot, amely az ABC szög csúcsától különböző egyik belső pontja, és egyenlő távolságra van a szög száraitól (308. ábra). A BA és BC szárakra megfelelően XM és XN merőlegeseket bocsátunk. Be kell bizonyítani, hogy $\angle MBX = \angle NBX$.

A BXM és BXN derékszögű három szögekben a BX közös átfogó lesz, az XM és XN szakaszok egyenlők a feltétel alapján. Tehát a BXM és BXN három szögek egybevágók az átfogó és a befogó alapján. Innen $\angle MBX = \angle NBX$.



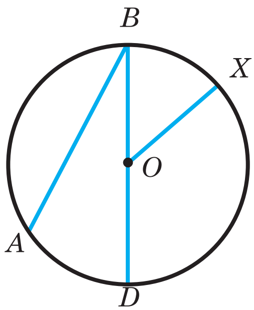
308.ábra



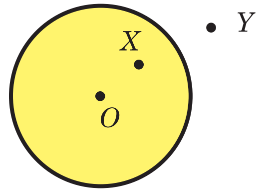
309.ábra

Megjegyezzük, hogy a tétel bizonyítása akkor lesz teljes, ha azt is megmutatjuk, hogy a pont egyenlő távolsága a szög száraitól kizárja azt a lehetőséget, amikor az M vagy N pontok közül az egyik a szög szárának a meghosszabbítására illeszkedik (309. ábra). Ezt az esetet a matematika szakkörön megvizsgálhatjátok.

Megjegyezzük még azt is, hogy a bebizonyított tétel az egyenesszögre is igaz.



310.ábra



311.ábra

Meghatározás. Körvonalnak nevezzük azon pontok mértani helyét, melyek távolsága egy adott ponttól egy adott pozitív számmal lesz egyenlő.

Az adott pontot a körvonal középpontjának nevezzük. A 310. ábrán az O pont a körvonal középpontja.

Bármilyen szakaszt, amely a körvonal pontját a középpontjával köti össze, a körvonal sugarának nevezzük. Ennek a szakasznak a hosszát is a körvonal sugarának szokták nevezni. A 310. ábrán az OX szakasz lesz a sugár. A meghatározásból az is következik, hogy az adott körvonal minden sugara egyenlő.

A körvonal két pontját összekötő szakaszt húrnak nevezzük. A 310. ábrán az AB és BD szakaszok húrok lesznek. Azt a húrt, amely a körvonal középpontján halad át, a körvonal **átmérőjének** nevezzük. A 310. ábrán a BD szakasz a körvonal átmérője. A $BD = 2OX$, vagyis a körvonal átmérője kétszer nagyobb a sugaránál.

A 6. osztályos matematikából már tudjátok, hogy a körvonallal határolt alakzatot körlapnak nevezzük (311. ábra). Most már a pontok mértani helyével is meg lehet adni a körlap meghatározását.

Meghatározás. Körlapnak nevezzük azon pontok mértani helyét, melyek távolsága egy adott ponttól egy megadott pozitív számnál nem lesz nagyobb.

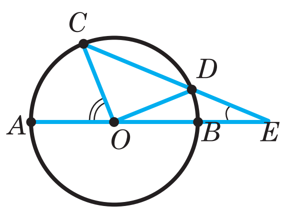
Az adott pontot a körlap középpontjának, a körlapot határoló körvonal sugarát pedig a **körlap sugarának** nevezzük.

Ha X az O középpontú R sugarú körlap tetszőleges pontja, akkor $OX < R$ (311. ábra). Ha $OX < R$, akkor azt mondják, hogy az X pont arra a körlapra illeszkedik, melyet az adott körvonal határol. Az Y pont nem illeszkedik a körlapra (311. ábra). $OY > R$. Ebben az esetben azt mondják, hogy az Y pont a körlapot határoló körvonalon kívül fekszik.

A körlap meghatározásából az is következik, hogy a körlapot határoló körvonal a körlaphoz tartozik.

A **körlap húrja és átmérője** a körlapot határoló körvonal húrja és átmérője lesz.

Feladat. Az O középpontú körvonal CD húrjának meghosszabbításán egy E pontot jelöltek úgy, hogy a DE szakasz hossza egyenlő a körvonal sugarával. Az OE egyenes az adott körvonalat az A és B pontokban metszi (312. ábra). Bizonyítsátok be, hogy $\angle AOC = 3\angle CEO$.



312.ábra

Megoldás. Legyen $\angle CEO = \alpha$.

Mivel az ODE háromszög egyenlő szárú, ezért

$$\angle DOE = \angle CEO = \alpha.$$

Az ODC szög az ODE háromszög külső szöge. Ezért $\angle ODC = \angle DOE + \angle CEO = 2\alpha$.

Mivel a COD három szög egyenlő szárú, ezért $\angle OCD = \angle ODC = 2\alpha$.

Az AOC szög a COE háromszög külső szöge. Tehát $\angle AOC = \angle OCD + \angle CEO = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$, vagyis

$$\angle AOC = 3\angle CEO.$$

?

1. Milyen ponthalmazt nevezünk a pontok mértani helyének? **2.** Milyen két tételt kell ahhoz bebizonyítani, hogy a közös tulajdonsággal rendelkező ponthalmazt a pontok mértani helyének nevezhessük? **3.** Milyen alakzat lesz a szakasz végpontjaitól egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye? **4.** Milyen alakzat lesz azon pontok mértani helye, melyek a szög száraitól egyenlő távolságra lesznek? **5.** Mit nevezünk körvonalnak? **6.** Mit nevezünk a körvonal sugarának? **7.** Mit nevezünk a körvonal húrjának? **8.** Mit nevezünk a körvonal átmérőjének? **9.** Milyen a kapcsolat a körvonal átmérője és a sugara között? **10.** Mit nevezünk körlapnak? **11.** A körvonalhoz tartozik-e a középpontja? **12.** A körlaphoz tartozik-e a középpontja?

GYAKORLATI FELADATOK

540.° Rajzoljatok egy O középpontú és 3,5 cm sugarú körvonalat. Jelöljetek rajta:

1) olyan A és B pontot, melyekre teljesül, hogy $OA < 3{,}5$ cm, $OB < 3{,}5$ cm;
2) olyan C és D pontot, melyekre teljesül, hogy $OC = 3{,}5$ cm, $OD = 3{,}5$ cm;
3) olyan E és F pontot, melyekre teljesül, hogy $OE > 3{,}5$ cm, $OF > 3{,}5$ cm.

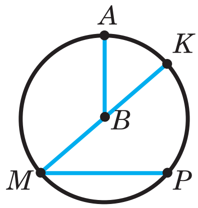
541.° Rajzoljatok egy 3 cm-es AB szakaszt. Határozzátok meg azt a pontot, amely az AB szakasz mindkét végpontjától 2 cm távolságra lesz! Hány ilyen pont létezik?

542.° Rajzoljatok egy 4 cm hosszú CD szakaszt. Keressetek egy olyan pontot, amely 2,5 cm-re van a C ponttól és 3,5 cm-re a D ponttól. Hány ilyen pont van?

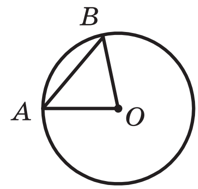
543.• Rajzoljatok egy 7 cm-es átmérőjű körvonalat. Jelöljetek a körvonalon egy A pontot. Határozzátok meg a körvonalnak azt a pontját, amely az A ponttól 4 cm távolságra lesz!

GYAKORLATOK

544.° A 313. ábrán egy B középpontú körvonal látható. Nevezzétek meg a körvonal sugarát, húrját és átmérőjét. Hány sugár látható az ábrán, és hány húr?



313.ábra



314.ábra

545.° Kör belsejébe jelöljetek egy pontot, amely nem a középpontja. Hány 1) húrt; 2) átmérőt lehet húzni ezen a ponton keresztül!

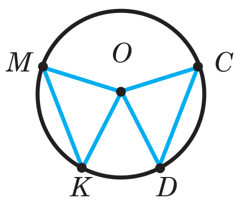
546.° A 314.ábrán az O pont a körvonal középpontja. Határozzátok meg:

1) az O szöget, ha az $\angle A = 42°$;

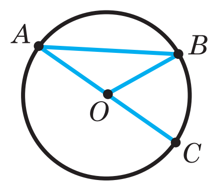
2) a B szöget, ha az $\angle O = 76°$.

547.° Az O középpontú kör AB és CD húrjai egyenlők. Bizonyítsátok be, hogy $\angle AOB = \angle COD$.

548.° A 315.ábrán az O pont a kör középpontja, $\angle COD = \angle MOK$. Bizonyítsátok be, hogy a CD és MK szakaszok egyenlők!



315.ábra



316.ábra

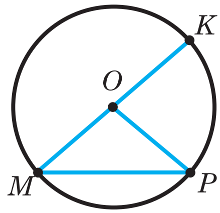
549.° Az AB és CD szakaszok az O középpontú körvonal átmérői. Bizonyítsátok be, hogy $\angle BAC = \angle CDB$.

550.° Az MK és EF az O középpontú körvonal átmérői, MK = 12 cm, ME = 10 cm. Határozzátok meg FOK háromszög kerületét!

551.° Az AC és AB az O középpontú körvonal átmérője és húrja, $\angle BAC = 26°$ Határozattok meg a BOC szöget!

552.° Az MP és MK az O középpontú körvonal húrja és átmérője, $\angle POK = 84°$ (317.ábra). Határozattok meg a MPO szöget!

553.° Az AB és AC megfelelően a körvonal átmérője és húrja, az AC húr a körvonal sugarával egyenlő. Határozattok meg a BAC szöget!



317.ábra

554.° Az AB és BC megfelelően az O középpontú körvonal átmérője és húrja, $\angle ABC = 60°$, AB = 12 cm. Határozzátok meg a BC húr hosszát!

555.° A CD szakasz az O középpontú körvonal átmérője. A körvonalon úgy vettek fel egy E pontot, hogy $\angle COE = 90°$. Bizonyítsátok be, hogy az $CE = DE$.

556.° Az MK szakasz az O középpontú körvonal átmérője. A körvonalon úgy vettek fel egy C pontot, hogy $MC = CK$. Bizonyítsátok be, hogy $\angle MCO = \angle KCO$.

557.° Mekkora annak a körvonalnak az átmérője, melyről tudjuk, hogy 4 cm-rel nagyobb a sugaránál?

558.• Az O középpontú körvonalnak AB átmérője végpontjain át AC és BD húrt rajzoltak úgy, hogy $AC \parallel BD$. Bizonyítsátok be, hogy az $AC = BD$.

559.• Az AB és CD szakaszok a körvonal átmérői. Bizonyítsátok be, hogy $AC \parallel BD$.

560.• A húr a körvonal átmérőjét 30°-os szög alatt metszi, és 4 cm és 10 cm-es szakaszokra osztja. Határozzátok meg a körvonal középpontja és a húr távolságát!

561.• Az AB és CD szakaszok a körvonal átmérői. Az AB és CD egyenesek hajlásszöge 30°. Határozzátok meg a C pont és az AB egyenes távolságát, ha a körvonal átmérője 10 cm!

562.•• Határozzátok meg azon adott sugarú körvonalak középpontjainak mértani helyét, melyek illeszkednek egy adott pontra!

563.•• Határozzátok meg azon körvonalak középpontjainak mértani helyét, melyek adott két pontra illeszkednek!

564.•• Határozzátok meg azon pontok mértani helyét, melyek egyenlő távolságra vannak két egymást metsző egyenestől!

565.•• Határozzátok meg a közös alapú egyenlő szárú háromszögek csúcsainak mértani helyét!

566.•• Határozzátok meg azon pontok mértani helyét, melyek egyenlő távolságra vannak két párhuzamos egyenestől!

567.•• Határozzátok meg azon pontok mértani helyét, melyek egy adott egyenestől egyenlő távolságra vannak!

568.•• Az AB szakasz egy körvonal átmérője, az M pont az adott körvonal tetszőleges pontja, amely különbözik az A és B pontoktól. Bizonyítsátok be, hogy $\angle AMB = 90°$.

569.* Adott az A és B pont. Határozzátok meg azon X pontok mértani helyét, melyekre igaz, hogy $AX > BX$!

570.* Adott az A és B pont. Határozzátok meg azon X pontok mértani helyét, melyekre igaz, hogy $AX > BX$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

571. Az AC alapú ABC egyenlőszárú háromszögben AD és CE szögfelezők. Bizonyítsátok be, hogy $AE = ED$!

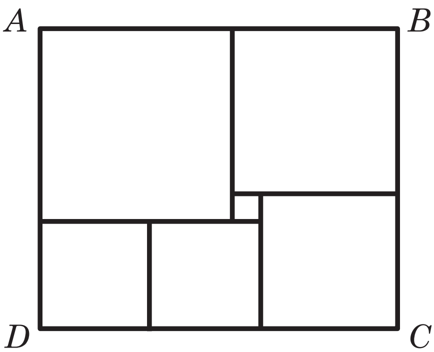
572. Az O pontból az A, B és C pontokon keresztül OA, OB és OC félegyeneseket húztak. Ismert, hogy $OA = OB = OC$, $\angle AOB = 80°$, $\angle BOC = \ = 110°$, $\angle AOC = 170°$. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit!

573. Az ABC háromszög AB oldalán úgy vettek fel egy M pontot, hogy $BM = CM$, az MK félegyenes az AMC szög szögfelezője lesz. Bizonyítsátok be, hogy $MK \parallel BC$.

574. A hegyesszögű háromszög egyik külső szöge 160°. Határozzátok meg a háromszög másik két csúcsából bocsátott magasságait tartalmazó egyenesek hajlásszögét!

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

575. A 318. ábrán egy $ABCD$ téglalap látható, amelyet négyzetekből raktak ki. Határozzátok meg a legnagyobb négyzet oldalát, ha a legkisebb négyzet oldala 1 egység!

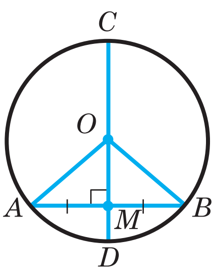


318.ábra

21. A körvonal tulajdonságai. A körvonal érintője

21.1. tétel. ***A körvonal átmérője, amely merőleges a húrra, felezi ezt a húrt.***

Bizonyítás: ⊙ Ha a húr átmérője a körnek, akkor a tétel állítása szemmel látható lesz.



319.ábra

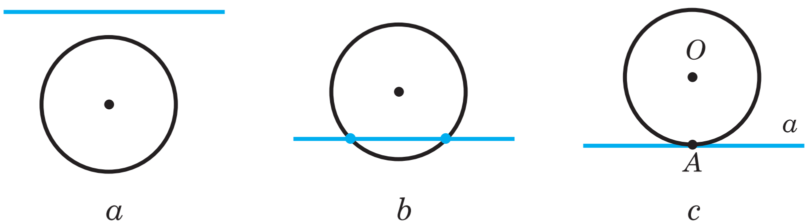
A 319. ábrán egy O középpontú körvonal látható, melynek CD átmérőjét metszi egy M pontban az AB húr, amely nem átmérője a körnek $CD \perp AB$. Bebizonyítjuk, hogy $AM = MB$.

Meghúzzuk az OA és az OB sugarakat. Az AOB háromszög egyenlőszárú ($AO = OB$), melyben az OM szakasz magasság, tehát oldalfelező is, vagyis $AM = MB$. ●

21.2. tétel. ***A körvonal átmérője, amely az átmérőtől különböző húrt felezi, merőleges lesz erre a húrra.***

Bizonyítsátok be ezt a tételt önállóan. Gondolkozzatok el azon, hogy igaz-e ez az állítás akkor is, ha a húr átmérő lesz.

A 320. ábrán látható az egyenes és a kör kölcsönös helyzetének összes esete: nincs közös pontjuk (320. a ábra), két közös pontjuk van (320. *b* ábra), egy közös pontjuk van (320. c. ábra).

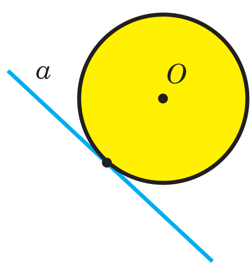


320.ábra

Meghatározás. Azt az egyenest, amelynek a körrel csak egy közös pontja van, a kör érintőjének nevezzük.

A 320. c ábrán az a egyenes érintője az *O* középpontú körvonalnak, az *A* pont pedig az **érintési pont**.

A körvonal érintőjének azzal a körlappal, melyet az adott körvonal határol, csak egy közös pontja van. Ezért úgy is mondhatjuk, hogy ez az egyenes az **adott körvonallal határolt körlap érintője** is. A 321. ábrán az a egyenes az O középpontú körlap érintője.



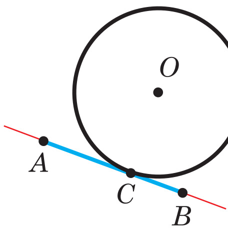
321.ábra

Ha a szakasz (félegyenes) a kör érintőjéhez tartozik, és az adott körrel van közös pontja, akkor úgy is mondhatjuk, hogy a *szakasz (félegyenes) érinti a körvonalat.*

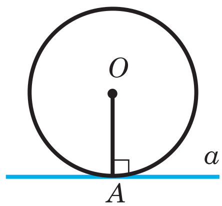
Például a 322. ábrán az AB szakasz a C pontban érinti a körvonalat.

21.3. tétel (az érintő tulajdonsága). ***A körvonal érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.***

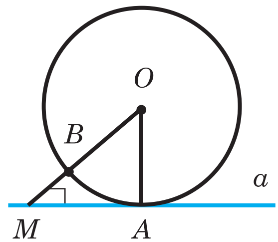
Bizonyítás: ⊙ A 323. ábra egy O középpontú körvonalat ábrázol, ahol az A pont az érintési pontja az a egyenesnek és a körvonalnak. Be kell bizonyítani, hogy $OA \perp a$.



322.ábra



323.ábra



324.ábra

Tételezzük fel, hogy ez nem így van, vagyis az OA szakasz ferde az a egyeneshez viszonyítva. Ekkor az O pontból egy OM merőlegest bocsátunk az a egyenesre 324. ábra). Mivel az A pont az egyetlen közös pontja az a egyenesnek és az O középpontú körlapnak, melyet az adott körvonal határol, ezért az M pont nem illeszkedik erre a körlapra. Innen következik, hogy $OM = MB + OB$, ahol a B pont a körvonal és az OM merőleges metszéspontja. Az OA és az OB szakaszok egyenlők, mivel a kör sugarai. Ezekből azt kapjuk, hogy az $OM > OA$. Ellentmondásra jutottunk: az OM merőleges hosszabb az OA ferdénél. Tehát, $OA \perp a$. ●

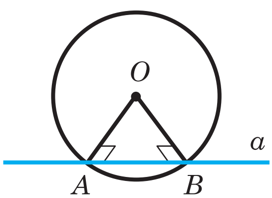
21.4. tétel (az érintő ismertetőjele). ***Ha egy egyenes, amely a körvonal egy pontjára illeszkedik, és merőleges ebbe a pontba húzott sugárra, akkor ez az egyenes az adott körvonal érintője lesz.***

Bizonyítás: ⊙ A 323. ábrán egy O középpontú körvonal látható, melyben az OA az adott kör sugara, és az A pont illeszkedik az a egyenesre, $OA \perp a$. Bebizonyítjuk, hogy az a egyenes az adott körvonal érintője lesz.

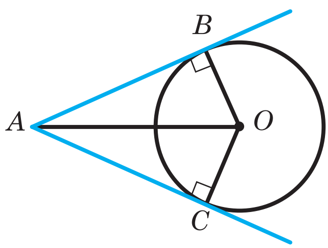
Legyen az a egyenes nem érintő, tehát az adott körvonallal van még egy B közös pontja is (325. ábra). Ekkor az OA és OB szakaszok egyenlők, mint a körvonal sugarai, tehát az AOB háromszög egyenlő szárú. Innen következik, hogy $\angle OBA = \angle OAB = 90°$. Tehát ellentmondásra jutottunk: az AOB háromszögnek két derékszöge van. Vagyis az a egyenes a körvonal érintője lesz. ●

Következmény. ***Ha a körvonal középpontja és az egyenes távolsága a körvonal sugarával egyenlő, akkor ez az egyenes az adott kör érintője lesz.***

Bizonyítsátok be önállóan ezt a következményt.



325.ábra



326.ábra

Feladat. Bizonyítsátok be, hogyha az adott pontból a körhöz két érintőt húzunk, akkor az adott pont és az érintési pontok közötti szakaszok egyenlők!

Megoldás. A 326. ábrán egy O középpontú körvonal látható. Az AB és AC egyenesek az érintői, a B és C pontok az érintési pontok. Be kell bizonyítani, hogy $AB = AC$.

Meghúzzuk az érintési pontokból az OB és OC sugarakat. Az érintő tulajdonsága alapján $OB \perp AB$ és $OC \perp AC$. Az AOB és AOC derékszögű háromszögekben az OB és az OC befogók egyenlők, mint a körvonal sugarai, az AO pedig a közös átfogó lesz. Tehát az AOB és az AOC háromszögek egybevágók az átfogó és a befogó alapján. Ebből következik, hogy $AB = AC$. ◀

?

1. Hogyan ossza fel az átmérő a rá merőleges húrt? **2.** Mivel egyenlő az átmérőtől különböző húr és az adott húrt felező átmérő hajlásszöge? **3.** Írjátok le az egyenes és a körvonal kölcsönös helyzetének összes esetét! **4.** Milyen egyenest nevezünk a körvonal érintőjének? **5.** Milyen tulajdonsággal rendelkezik az a sugár, amelyet a körvonal és az érintője érintési pontjába húztak? **6.** Fogalmazzátok meg a körvonal érintőjének ismertetőjelét! **7.** Milyen tulajdonsággal rendelkeznek a körhöz egy pontból húzott érintőszakaszok?

GYAKORLATI FELADATOK

576.° Rajzoljatok egy O középpontú körvonalat, és egy AB húrt. A derékszögű vonalzó segítségével osszátok fel két egyenlő részre!

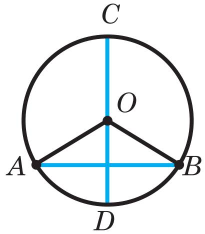
577.° Rajzoljatok egy O középpontú körvonalat, és egy CD húrt. Skálás vonalzó alkalmazásával, húzzátok meg a CD húrra merőleges átmérőt!

578.° Rajzoljatok egy tetszőleges sugarú körvonalat, vegyetek fel rajta egy A és egy B pontot. Kétélű és derékszögű vonalzót felhasználva rajzoljátok meg azokat az egyeneseket, melyek az A és B pontokban érintik a körvonalat!

579.° Rajzoljatok egy a egyenest, melyen vegyetek fel egy M pontot. Felhasználva a derékszögű vonalzót, a kétélű vonalzót és a körzőt, rajzoljatok egy 3 cm-es sugarú kört, amely az M pontban érinti az a egyenest. Hány ilyen kört lehet rajzolni?

GYAKORLATOK

580.° A 327. ábrán egy O középpontú kör látható, melynek CD átmérője merőleges az AB húrra. Bizonyítsátok be, hogy $\angle AOD = \angle BOD$.

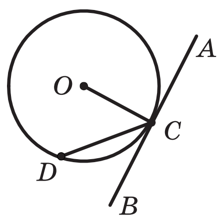


327.ábra

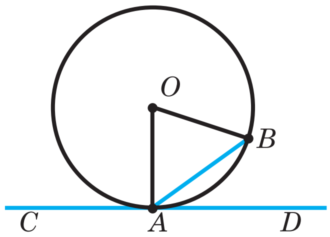
581.° Ki lehet-e jelenteni, hogy az egyenes, amely merőleges a körvonal sugarára, a körvonal érintője lesz?

582.° Az AB egyenes a C pontban érinti az O középpontú körvonalat (328.ábra). Határozzátok meg:

1) az OCD szöget, ha $\angle BCD = 28°$;
2) az ACD szöget, ha $\angle OCD = 55°$.



328.ábra



329.ábra

583.° A CD egyenes az A pontban érinti az O középpontú körvonalat, az AB szakasz a körvonal húrja, $\angle BAD = 35°$ (329. ábra). Határozzátok meg az AOB szöget!

584.° A CD egyenes az A pontban érinti az O középpontú körvonalat, az AB szakasz a körvonal húrja, $\angle AOB = 80°$ (329. ábra). Határozzátok meg a BAC szöget!

585.° Adott egy 6 cm átmérőjű körvonal. Az a egyenes a középpontjától: 1) 2 cm-re; 2) 3 cm-re; 3) 6 cm-re lesz. Melyik esetben lesz az a egyenes a körvonal érintője?

586.° Az ABC háromszögben ismert, hogy $\angle C = 90°$. Bizonyítsátok be, hogy az:

1) a BC egyenes az A középpontú körvonal érintője lesz, amelyre illeszkedik a C pont;
2) az AB egyenes nem lesz a C középpontú körvonal érintője, amelyre az A pont illeszkedik!

587.• Bizonyítsátok be, hogy a körvonal egyenlő húrjai egyenlő távolságra vannak a körvonal középpontjától!

588.• Bizonyítsátok be, hogy amikor a körvonal húrjai egyenlő távolságra vannak a középponttól, akkor ezek a húrok is egyenlők!

589.• Bizonyítsátok be, hogy a körvonal átmérője nagyobb, bármelyik, az átmérőtől különböző húrtól!

590.• Egy körvonal sugara 7 cm. Lehet e a húrjának hossza: 14 cm; 2) 15 cm?

591.• Egy O középpontú körvonalban a sugárra merőleges és azt felező AB húrt húztak. Bizonyítsátok be, hogy az $\angle AOB = 120°$.

592.• Határozzátok meg a körvonal OA és OB sugarai által közbezárt szöget, ha az O pontól az AB húr hossza kétszer kisebb, 1) az AB húr hosszánál; 2) a körvonal sugaránál?

593.• Az AB átmérőjű körben AC és CD húrokat húztak meg, AC = 12 cm, $\angle BAC = 30°$, $AB \perp CD$. Határozzátok meg a CD húr hosszát!

594.• Az AB és AC egyenesek B és C pontokban érintik az O középpontú körvonalat. Bizonyítsátok be, hogy az AO félegyenes a BAC szög szögfelezője!

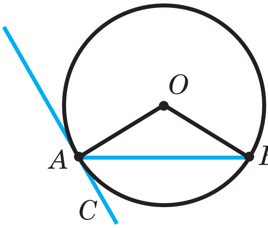
595.• Az O középpontú körvonalhoz az M pontból MA és MB érintőket húztak, melyek az A és B pontokban érintik a kört, az $\angle OAB = 20°$. Határozzátok meg az AMB szöget!

596.• Az AB húr végpontjain át két érintőt húztak, melyek C pontban metszik egymást. Ennek a húrnak a hossza egyenlő a kör sugarával. Határozzátok meg Az ACB szöget!

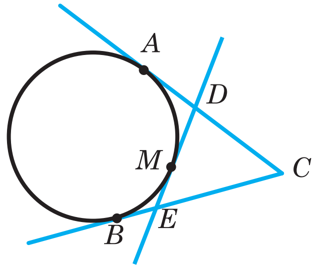
597.• Az O középpontú, AB átmerőjű körvonal C pontján át érintőt húztak ehhez a körhöz. Az A pontba az érintőre AD merőlegest állítottak. Bizonyítsátok be, hogy az AC egyenes a BAD szög szögfelezője!

598.• Az AC egyenes az A pontban érinti az O középpontú kört (330.ábra). Bizonyítsátok be, hogy BAC szög 2-szer kisebb az AOB szögnél!

599.• Az AB és BC szakaszok megfelelően a kör húrja és átmérője, az $\angle ABC = 30°$. Az A ponton át érintőt húztak, amely a BC egyenest egy D pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy az ABD háromszög egyenlőszárú!



330.ábra



331.ábra

600.• Ismert, hogy az AB átmérő felezi a CD húrt, de nem lesz merőleges rá. Bizonyítsátok be, hogy a CD szintén a körvonal átmérője!

601.•• Határozzátok meg az adott egyenest egy adott pontban érintő körvonalak középpontjainak mértani helyét!

602.•• Határozzátok meg az adott szög mindkét szárát érintő körvonalak középpontjainak mértani helyét!

603.•• Határozzátok meg az adott egyenest érintő körvonalak középpontjainak mértani helyét!

604.•• Azok az egyenesek, amelyek az O középpontú körvonalat az A és B pontokban érintik, egy K pontban metszik egymást, $\angle AKB = 120°$. Bizonyítsátok be, hogy az $AK + BK = OK$.

605.•• Az ABC háromszög AB oldalát a körvonal egy M pontban érinti, a másik két oldalának meghosszabbítását is érinti ez a körvonal. Bizonyítsátok be, hogy a BC és BM szakaszok összege az ABC háromszög félkerületével lesz egyenlő!

606.•• A C ponton keresztül a körvonalhoz AC és BC érintőket húztak, A és B pontok az érintési pontok (331. ábra). A körön felvettek egy tetszőleges M pontot, amely egy félsíkban lesz a C ponttal az AB egyeneshez viszonyítva, és az M ponton keresztül is érintőt húztunk a körhöz, amely az AC és BC egyeneseket megfelelően D és E pontokban metszi. Bizonyítsátok be, hogy a DEC háromszög kerülete független az M pont helyzetétől!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

607. Bizonyítsátok be, hogy annak a szakasznak az M felezőpontja, amelynek végpontjai két párhuzamos egyenesre illeszkednek, minden olyan szakasz felezőpontja, amely átmegy az M ponton, és melynek végpontjai ezekre az egyenesekre illeszkednek!

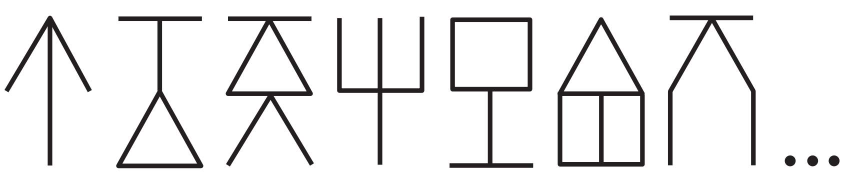
608. Az AB és CD szakaszok ugyanazon az egyenesen fekszenek, és közös felezőpontjuk van. Az M pontot úgy választjuk meg, hogy az AMB háromszög egyenlő szárú legyen, melynek alapja az AB szakasz. Bizonyítsátok be, hogy a CMD háromszög is egyenlő szárú, melynek alapja a CD szakasz!

609. Az MPK háromszög MK oldalán úgy vették fel az E és F pontokat, hogy az E pont az M és F pontok között van, $ME = EP$, $PF = FK$. Határozzátok meg az M szöget, ha $\angle EPF = 92°$, $\angle K = 26°$.

610. Az ABC hegyesszögű háromszögben BM szögfelezőt húztak. Az M pontból a BC oldalra MK merőlegest bocsátottak. Az $\angle ABM = \angle KMC$. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög egyenlőszárú!

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

611. Állapítsátok meg, milyen szabály szerint vannak elhelyezve a 332. ábrán lévő alakzatok. Milyen alakzat következik?

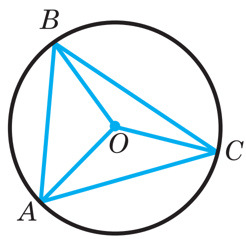


332.ábra

22. A háromszög köré írt és beírt írt körvonalai

Meghatározás. Azt a körvonalat, amely átmegy a háromszög mindhárom csúcsán, a három szög köré írható körvonalának nevezzük.

A 333. ábrán egy olyan körvonal látható, amely a háromszög köré lett írva. Ebben az esetben azt is mondják, **hogy a háromszög körbe van írva**.

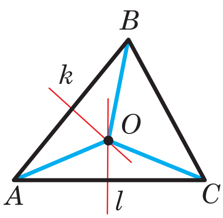


333.ábra

A 333. ábrán az O pont annak a körvonalnak a középpontja, melyet az ABC háromszög köré írtunk. Az OA, OB és OC szakaszok a körvonal sugarai, ezért $OA = OB = OC$. *Tehát a háromszög köré irtható körvonal középpontja egyenlő távolságra van mindegyik csúcsától.*

22.1. tétel. ***Bármely háromszög köré írható kör.***

Bizonyítás: ⊙ A bizonyításhoz elegendő bemutatni, hogy tetszőleges ABC háromszögre létezik egy olyan O pont, amely egyenlő távolságra van mindegyik csúcsától. Ekkor az O pont a háromszög köré írt kör középpontja lesz, az OA, OB és OC szakaszok pedig a sugarai.



334.ábra

A 334. ábrán egy tetszőleges ABC három szög látható. Megrajzoljuk az AB és AC oldalak felezőmerőlegeseit, ezek megfelelően a k és l egyenesek lesznek. Legyen az O pont ezeknek az egyeneseknek a metszéspontja. Mivel az O pont a k felezőmerőlegesre illeszkedik, ezért $OA = OB$. Mivel az O pont az l felezőmerőlegesre illeszkedik, ezért $OA = OC$. Tehát $OA = OB = OC$, vagyis az O pont egyenlő távolságra lesz a háromszög mindegyik csúcsától. ●

Megállapítjuk, hogy a háromszög köré csak egyetlen körvonal írható. Ez abból következik, hogy a k és l felezőmerőlegeseknek csak egy közös metszéspontja van (334. ábra).

Tehát létezik egy és csakis egy pont, amely egyenlő távolságra van a háromszög mindegyik csúcsától..

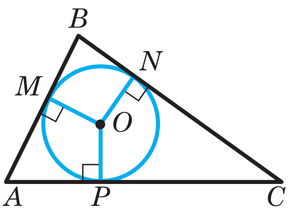
1. következmény. ***A háromszög három oldalfelező merőlegese egy pontban metszik egymást.***

2. következmény. ***A háromszög köré írható körvonal középpontja a háromszög oldalfelező merőlegeseinek a metszéspontja.***

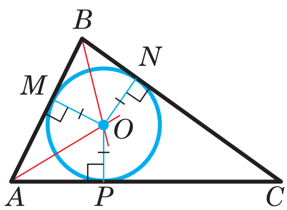
Meghatározás. A háromszög beírt körének azt a körvonalat nevezzük, mely érinti a háromszög minden oldalát.

A 335. ábrán egy háromszög beírt körvonala látható. Ebben az esetben azt is mondják, hogy a **háromszöget a körvonal köré írták.**

A 335. ábrán az O pont az ABC háromszög beírt körvonalának a középpontja lesz, az OM, ON, OP szakaszok a körvonal sugarai, melyek az érintési pontokba vannak húzva, $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp AC$. Mivel $OM = ON = OP$, ezért *a beírt kör középpontja egyenlő távolságra van a háromszög minden oldalától.*



335.ábra



336.ábra

22.2. tétel. ***Bármely háromszögbe kört lehet írni.***

Bizonyítás: A 336. ábrán egy tetszőleges ABC háromszög látható. Megrajzoljuk az A és B szögeinek a szögfelezőit, megjelöljük a metszéspontjukat egy O ponttal. Az ABC háromszög AB, BC és CA oldalaira az O pontból OM, ON és OP merőlegeseket bocsátunk. Mivel az O pont az A szög szögfelezőjére illeszkedik, ezért a szögfelezőről szóló tétel (20.2. tétel) alapján $OM = OP$. Hasonlóan, az O

pont a B szög szögfelezőjére illeszkedik, ezért $OM = ON$. Legyen $OM = \text{r}$. Ekkor $OM = ON = OP = \text{r}$. Ezért az O pont a háromszög minden oldalától r távolságra lesz. Ekkor a körvonal érintője ismertetőjelének következménye (21.4. tétel következménye) alapján az O pont az r sugarú kör középpontja, amely érinti az AB, BC és CA oldalakat. ●

Megjegyezzük, hogy a háromszögbe csak egyetlen kör írható. Ez abból következik, hogy az A és B szögek szögfelezői csak egy pontban metszik egymást (336.ábra). Tehát, csak egy olyan pont létezik, amely egyenlő távolságra van a háromszög oldalaitól.

1. következmény. ***A háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást.***

2. következmény. ***A háromszögbe írt kör középpontja a szögfelezők metszéspontja.***

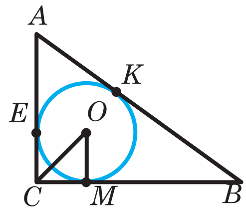
Feladat. Bizonyítsátok be, hogy a derékszögű háromszög beírt körének sugara az $r = \frac{a+b-c}{2}$, ahol r a beírt kör sugara, az a és b – a háromszög befogói, cl – a háromszög átfogója.

Megoldás. Az ABC háromszögben: $\angle ACB = = 90°$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, az O pont a beírt kör középpontja, M, E és K a körvonal megfelelő érintési pontjai a BC, AC és AB oldalakkal (337. ábra).

Az OM szakasz az érintési pontba húzott körvonal sugara. Ezért $OM \perp BC$.

Mivel az O pont a beírt kör sugara, ezért a CO félegyenes az ACB szög szögfelezője, tehát $\angle OCM = 45°$, A CMO háromszög egyenlőszárú háromszög lesz.

Innen $CM = OM = r$.



337.ábra

Az egy pontból húzott érintő szakaszok tulajdonságait felhasználva kapjuk: $CE = CM$. Mivel $CM = r$, ebből következik, hogy $CE = r$. Tehát $AK = AE = b - r$; $BK = BM = a - r$.

Mivel $AK + BK = AB$, ebből azt kapjuk, hogy
$b - r + a - r = c$.
Innen következik, hogy $2r = a + b - c$; $r = \dfrac{a+b-c}{2}$. ◀

? **1.** Mit nevezünk a háromszög köré írható körvonalnak? **2.** Milyen háromszöget nevezünk körbe írt háromszögnek? **3.** Milyen háromszög köré írható körvonal? **4.** Milyen pont lesz a háromszög köré írt kör középpontja? **5.** Milyen kört nevezünk a háromszögbe írtnak? **6.** Milyen háromszöget nevezünk a kör köré írt háromszögnek? **7.** Milyen háromszögbe írható körvonal? **8.** Melyik az a pont, amely a háromszögbe írt kör középpontja lesz?

GYAKORLATI FELADATOK

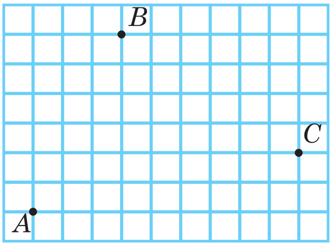
612.° Rajzoljatok egy különböző oldalú hegyesszögű háromszöget!
1) Derékszögű vonalzó és a kétélű vonalzó skáláját felhasználva határozzátok meg az adott háromszög köré írt kör középpontját!
2) írjatok a háromszög köré kört!

Végezzétek el az 1.és 2.feladatokat különböző oldalú derékszögű és tompaszögű háromszögekkel is!

613.° Rajzoljatok:
1) egy egyenlő szárú hegyesszögű háromszöget;
2) egy egyenlő szárú tompaszögű háromszöget.

Végezzétek el az 1. és 2. feladatokat az 612. gyakorlatból!

614.° Rajzoljátok át a füzetbe a 338. ábrát! Az A, B, C pontokon keresztül rajzoljatok egy körvonalat, használhattok kétélű vonalzót, derékszögű vonalzót és körzőt!



338.ábra

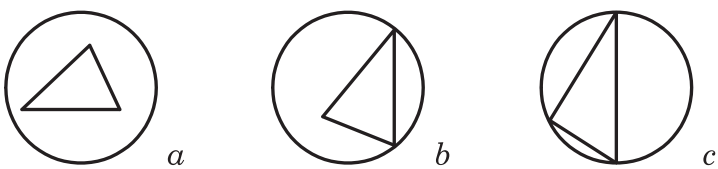
615.° Rajzoljatok egy különböző oldalú háromszöget!

1) Vonalzót és szögmérőt használva határozzátok meg a háromszögbe írt kör középpontját!
2) A derékszögű vonalzó segítségével határozzátok meg a beírt körnek és a háromszög oldalainak az érintési pontjait!
3) Rajzoljátok meg az adott háromszögbe írt körvonalat!

616.° Rajzoljatok egy egyenlő szárú háromszöget. Végezzétek el az 615. gyakorlat 1., 2. és 3. feladatát az adott háromszögön!

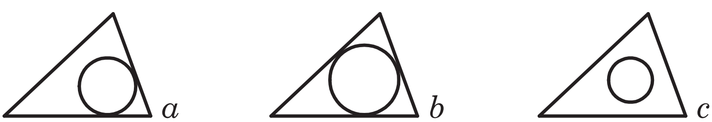
GYAKORLATOK

617.° A 339. *a, b, c* ábrák közül melyiken látható a háromszög köré írt körvonala?



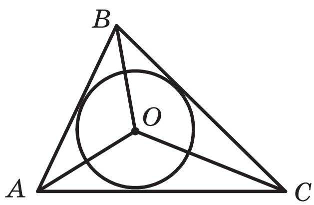
339.ábra

618.° A 340. a, b, c ábrák közül melyiken látható a háromszög beírt körvonala?

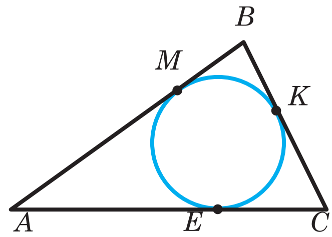


340.ábra

619.° Az O pont az ABC háromszög beírt körvonalának középpontja (341.ábra). Határozzátok meg a háromszög szögeit, ha $\angle ABO = 38°$, $\angle BCO = 22°$.



341.ábra



342.ábra

620.° Az O pont az ABC háromszög beírt körvonalának középpontja (341.ábra). Határozzátok meg az ABO szögét, ha $\angle BAC = 64°$, $\angle ACB = 46°$.

621.° Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög köré írható kör középpontja az alapra bocsátott súlyvonalra illeszkedik!

622.° Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő szárú háromszög köré írható kör középpontja az alapra bocsátott magasságra illeszkedik!

623.° Az ABC háromszög beírt körvonala az M és N pontokban érinti AB és AC oldalait. Határozzátok meg a háromszög A szögét, ha az $\angle AMN = 35°$.

624.° Az ABC háromszög beírt körvonala a D és E pontokban érinti az AB és az AC oldalakat. Határozzátok meg az ADE szöget, ha a $\angle B = 50°$.

625.° Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő oldalú háromszög köré írt kör középpontja a szögfelezők metszéspontja lesz!

626.° Bizonyítsátok be, hogy az egyenlő oldalú háromszög köré írt kör sugara kétszer nagyobb az adott háromszögbe írt körvonal sugaránál!

627.• Az ABC háromszögbe egy olyan kör van írva (342. ábra), amely M, K és E pontokban érinti az oldalait, BK = 2 cm, KC = 4 cm, AM = 8 cm. Határozzátok meg az ABC háromszög kerületét!

628.• Az ABC háromszögbe egy kör van írva (342. ábra), amely M, K és E pontokban érinti az oldalait, $AB = 13$ cm, $BC = 8$ cm, $BK = 3$ cm. Határozzátok meg az AC oldal hosszát!

629.• Az ABC háromszög köré írt körvonalának O középpontján keresztül az AC oldallal merőleges egyenest húztak és ez az AB oldalt egy M pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy $AM = MC$!

630.• Az ABC háromszög beírt körének O középpontján keresztül egy AO egyenest húztak, amely a BC oldalt egy M pontban metszi. Bizonyítsátok be, hogy az M pont egyenlő távolságra lesz AB és AC félegyenesektől

631.• Bizonyítsátok be, hogyha a háromszög köré írt körvonalának középpontja az súlyvonalra illeszkedik, akkor ez a háromszög egyenlőszárú!

632.• Bizonyítsátok be, hogyha a háromszög köré írt körvonalának középpontja a háromszög magasságára illeszkedik, akkor az ilyen háromszög egyenlőszárú!

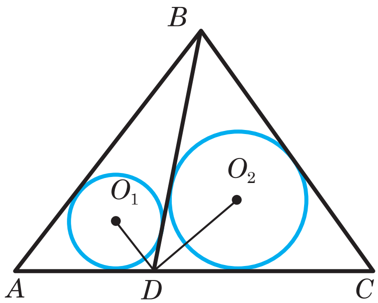
633.• Bizonyítsátok be, hogyha a beírt körvonal középpontja a háromszög magasságára illeszkedik, akkor az ilyen háromszög egyenlőszárú!

634.• Bizonyítsátok be, hogyha a beírt körvonal középpontja a háromszög súlyvonalára illeszkedik, akkor az ilyen háromszög egyenlőszárú!

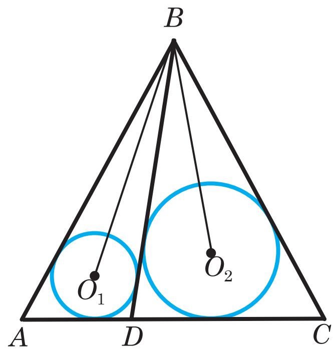
635.• Bizonyítsátok be, hogyha a háromszögbe beírt és a körülírt körvonalának középpontja egybeesik, akkor az ilyen háromszög egyenlő oldalú!

636.• A 343.ábrán az ABD és CBD háromszögekbe köröket írtak, melyeknek megfelelően a középpontjai az O_1 és O_2 pontok lesznek. Bizonyítsátok be, hogy O_1DO_2 szög egyenesszög lesz!

637.• A 344.ábrán az ABD és CBD háromszögekbe köröket írtak, melyeknek megfelelően a középpontjai az O_1 és O_2 pontok lesznek, az $\angle ABC = 50°$. Határozzátok meg O_1BO_2 szöget!



343.ábra



344.ábra

638.• Az egyenlő szárú háromszög beírt körvonala a szárait 7 : 5 arányban osztja, a csúcstól kezdve a számolást. Határozzátok meg a háromszög oldalait, ha a kerülete 68 cm!

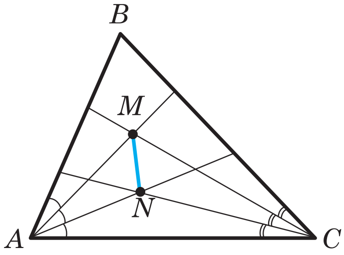
639.• A körvonal köré írt *ABC* háromszög kerülete 52 cm. Az *AB* oldalát az érintési pont a 2 : 3 arányban osztja, az *A* csúcstól számítva. A *BC* oldalának érintési pontja a *C* ponttól 6 cm-re van. Határozzátok meg a háromszög oldalait!

640.• Egy háromszögbe, melynek szögei 30°, 70° és 80°, körvonal van írva. Határozzátok meg annak a háromszögnek a szögeit, melynek csúcsai az adott háromszögbe írt körvonal érintési pontjai lesznek!

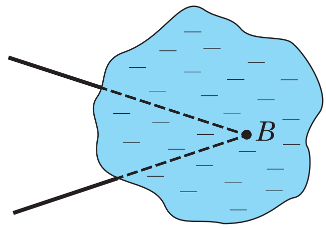
641.• Az *ABC* egyenlő szárú háromszögbe körvonal van írva, a háromszög *AB* és *BC* szárainak az érintési pontjai megfelelően az *M* és *N* pontok. Bizonyítsátok be, hogy $MN \parallel AC$.

Bizonyítsátok be, hogyha a háromszög köré írt körvonal középpontja, a háromszög oldalára illeszkedik, akkor az ilyen háromszög derékszögű!

643.•• Az *ABC* háromszögbe kör van írva, amely az *AB* oldalt az *M* pontban érinti, $BC = a$. Bizonyítsátok be, hogy $AM = p - a$, ahol a p az *ABC* háromszög félkerülete!



345.ábra



346.ábra

644.•• Az egyenlő oldalú háromszögbe, melynek oldala a, kör van írva. Ehhez a körhöz egy érintőt húztak, amely metszi a háromszög két oldalát. Határozzátok meg annak a háromszögnek a kerületét, amelyet ez az érintő vág le az adott háromszögből!

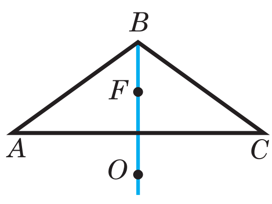
645.* Az ABC egyenlő szárú háromszögnek ($AB = BC$) az alapja 10 cm. Ebbe kört írtak, és ehhez a körhöz három érintőt húztak, amelyek az adott háromszögből az ADK, BEF és CMN háromszögeket vágták le. A keletkezett háromszögek kerületeinek az összege 42 cm. Mekkora az adott háromszög szára?

646.* Az ABC háromszögben a BD súlyvonal, $AB = 7$ cm, $BC = 8$ cm. Az ABD és BDC háromszögekbe körvonalat írtak. Határozzátok meg az érintési pontok távolságát a BD szakasztól!

647.* Az ABC háromszög BAC és ACB szögei három-három egyenlő részre van osztva (345. ábra). Bizonyítsátok be, hogy $\angle AMN = \angle CMN$.

648.* A B szög csúcsát nem tudjuk elérni (346. ábra). Szögmérő és skála nélküli vonalzó felhasználásával szerkesszetek egy egyenest, amely a B szög szögfelezője lesz!

649.* Az ABC egyenlő szárú háromszög beírt és körülírt köreinek középpontjai megfelelően az F é s O pontok (347. ábra). Ezek a pontok a háromszög AC alapjától egyenlő távolságra vannak. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit!

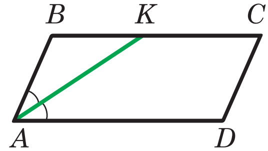


347.ábra

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

650. Az ABC szög szögfelezője a szög szárával olyan szöget zár be, amely az ABC szög mellékszögével egyenlő. Határozzátok meg az ABC szöget!

651. Az egyenlőszárú háromszögben az alapon fekvő szög csúcsából meghúzták a háromszög magasságát, az alapon fekvő másik csúcsból pedig a háromszög szögfelezőjét. A megrajzolt szögfelező és a magasság hajlásszöge 64°. Határozzátok meg a háromszög szögeit!



348. ábra

652. A 348.ábrán $BC \parallel AD$, $AB = 3$ cm, $BC = 10$ cm. A BAD szög szögfelezője a BC szakaszt a K pontban metszi. Határozzátok meg a BK és KC szakaszokat!

653. Az ABC háromszögben ismert, hogy $AB = BC$, az AM és CK szakaszok a háromszög súlyvonalai. Bizonyítsátok be, hogy $MK \parallel AC$.

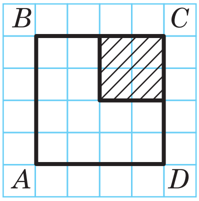
MEGTANULJUK ALKALMAZNI A MÉRTANT

654. Két mobiltorony távolsága 5 km. A kapcsolat akkor stabil, ha az előfizető legfeljebb 3 km távolságra van a toronytól. Ábrázoljátok, hogy a tornyokhoz képest hova mehet egy turista, hogy a stabil lefedettség zónájában legyen: 1) a közelebbi torony; 2) mindkét torony?

655. Három falut a térképen pontokként jelöltek, amelyek nem egy egyenesre illeszkednek. Hol kell elhelyezni a mobiltornyot, hogy egyenlő távolságra legyen ezektől a falvaktól?

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

656. Az $ABCD$ négyzetből kivágták a bevonalkázott alakzatot (349. ábra). A négyzet maradék részét osszátok fel négy egyenlő alakzatra!



349. ábra

23. Szerkesztési feladatok

Skálás kétélű vonalzóval, körzővel, derékszögű vonalzóval szögmérővel, a 350. ábrán látható görbevonalzóval már nagyon sokszor kellett különböző mértani szerkesztéseket végeznetek.

Lehet-e kevesebb eszközzel geometriai szerkesztéseket végezni? Kiderült, nagyon sok esetben *a szerkesztéshez elegendő a körző és a skála nélküli kétélű vonalzó is*. Például ahhoz, hogy megszerkesszük a szög szögfelezőjét, egyáltalán nem szükséges a szögmérő, olyan vonalzóval is el lehet végezni a szakaszt felezését, amelyen nincs skála.

350.ábra

Érdemes-e a mai világban, amikor olyan pontos eszközöket hoztak létre és számítógép programok is rendelkezésünkre állnak, melyek segítségével a legbonyolultabb méréseket és szerkesztéseket is el lehet végezni, olyan egyszerű eszközöket használni, mint a körző és a vonalzó? A gyakorlatban természetesen nem. Ezért a mérnökök, építészek, formatervezők nagyon sok ilyen eszközt használnak.

A mértanban az alakzatok szerkesztésénél a következő szabályokat alkalmazzák:

1) a szerkesztéseket körzővel és olyan kétélű vonalzóval végzik, amelyiken nincsenek beosztások;

2) vonalzó segítségével az adott ponton keresztül lehet egyenest húzni, és két ponton keresztül, például az A és B ponton át meghúzható az AB egyenes;

3) körző segítségével lehet kört rajzolni, ha adott a kör középpontja és sugara, amely egy adott szakasz hosszával egyenlő.

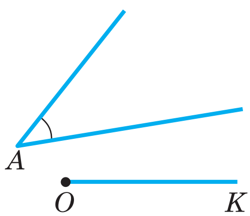
Ha a feladatban meg kell szerkeszteni valamilyen alakzatot, akkor azt csak a fenti szabályok alkalmazásával lehet elvégezni.

A szerkesztési feladatot elvégezni annyit jelent, hogy összeállítani a feladat megoldásához szükséges munkatervet (algoritmust); megvalósítani ezt a munkatervet, elkészíteni a szerkesztést; bebizonyítani, hogy a kapott alakzat lesz a keresett.

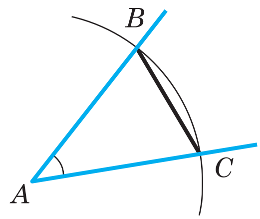
Vizsgáljuk meg a szerkesztési feladatok közül a legfontosabbakat.

1. feladat. Szerkesszetek egy adott szöggel egyenlő szöget, melynek egyik szára az adott félegyenesre illeszkedik!

Megoldás. A 351. ábrán az A szög és egy OK félegyenes látható. Meg kell szerkeszteni egy szöget, amely egyenlő lesz az A-val, az egyik szára pedig az OK félegyenes.

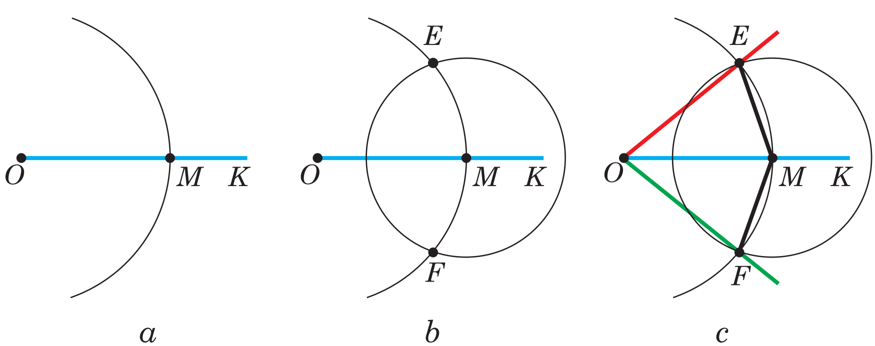


351.ábra



352.ábra

Rajzolunk egy tetszőleges r sugarú kört, melynek középpontja az A pont lesz. A kör és az A szög szárainak metszéspontját jelöljük B és C-vel (352. ábra). Ekkor $AB = AC = r$.



353.ábra

Rajzolunk egy O középpontú és r sugarú kört. Az OK félegyenest a kör egy pontban metszi, legyen ez az M pont

(353. a ábra). Ezután az M pontból rajzolunk egy BC sugarú körvonalat. Legyen az O és M középpontú körvonalak metszéspontja E és F (353. b ábra). Megrajzoljuk az OE és OF félegyeneseket (353. c ábra).

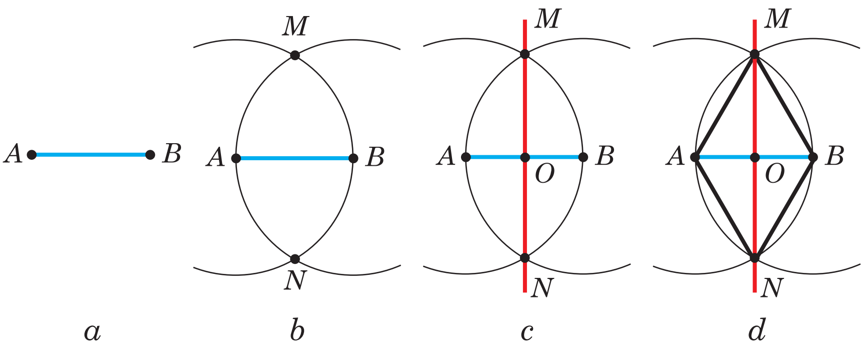
Bebizonyítjuk, hogy az EOM és az FOM szög is a keresett szög lesz. Például, bizonyítsuk be, hogy $\angle EOM = \angle BAC$.

Megvizsgáljuk az ABC (352. ábra) és az OEM (353. c ábra) háromszögeket. Adott: $AB = OE = r = AC = OM$. A szerkesztésből következik, hogy $EM = BC$. Tehát, az ABC és OEM háromszögek egyenlők három oldaluk alapján, vagyis a háromszögek egybevágóságának harmadik alapesete alapján. Ebből következik, hogy $\angle EOM = \angle BAC$. Ehhez hasonlóan azt is be lehet bizonyítani, hogy $\angle BAC = \angle FOM$. ◀

Mi két olyan szöget, az EOM és az FOM szögeket, szerkesztettünk, melyek mindegyike kielégíti a feladat feltételeit. Ezek a szögek egyenlők. Ilyen esetekben úgy tekintik, hogy a szerkesztési feladatnak egy megoldása van.

2. feladat. Szerkesszétek meg az adott szakasz felezőmerőlegesét!

Megoldás . Legyen AB az adott szakasz (354. a ábra). Megrajzolunk két körvonalat, melyeknek a középpontjai az A és B pontok, sugaruk pedig az AB szakasz lesz. Ezeknek a körvonalaknak a metszéspontjai legyenek M és N (354. b ábra). Meghúzzuk az MN egyenest (354. c ábra). Bebizonyítjuk, hogy az MN lesz a keresett egyenes.



354.ábra

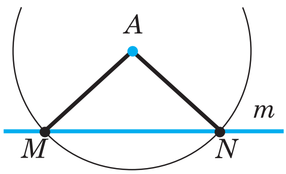
A szerkesztésből következik, hogy $MA = MB = AB$ és $NA = NB = \ = AB$ 354. d ábra). Tehát az M és N pontok az AB szakasz felezőmerőlegesére illeszkednek. Ezért az MA egyenes lesz az AB szakasz felezőmerőlegese. ◀

Megjegyzés. Mivel az MN egyenes az AB szakaszt az O felezőpontjában metszi, ezért a következő feladatokat is a fenti feladatok alapján oldjuk meg..

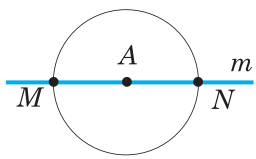
3. feladat. Felezzétek meg az adott szakaszt!

4. feladat. Adott egy egyenes, és egy pont, amely nem illeszkedik az egyenesre. Ezen a ponton keresztül húzzatok egy egyenest, amely merőleges az adott egyenesre!

Megoldás. Legyen m az adott egyenes, A pedig a rajta kívüli pont. Rajzolunk egy olyan kört, melynek a középpontja az A pont, és két pontban metszi az m egyenest. Megjelöljük ezeket a pontokat M-mel és N-nel (355. ábra).



355.ábra



356.ábra

Mivel $AM = AN$, ezért az A pont illeszkedik az MA szakasz felezőmerőlegesére. Megszerkesztve ezt a felezőmerőlegest (lásd a 2. feladatot), ezzel megoldottuk a feladatunkat.◀

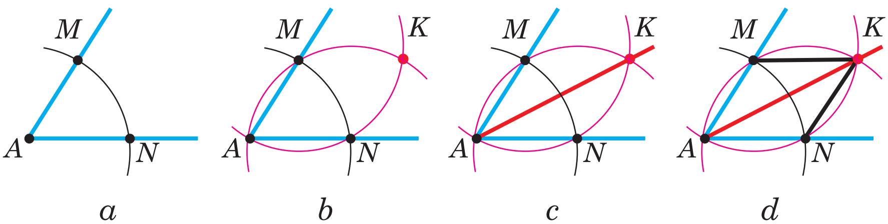
5. feladat. Adott egy egyenes, és egy pont, amely illeszkedik az egyenesre. Ezen a ponton keresztül fektessetek egy egyenest, amely merőleges az adott egyenesre!

Megoldás. Legyen m az adott egyenes, A pedig az egyenesre illeszkedő pont. Rajzoljunk egy tetszőleges sugarú körvonalat, melynek középpontja az A pont. Ez a kör az m egyenest két pontban metszi. Legyenek ezek: M és N. (356. ábra).

Mivel $AM = AN$, ezért mi a feladatunkat átalakítottuk egy olyan feladattá, ahol az MN szakasznak kell megszerkeszteni a felezőmerőlegesét.◀

6. feladat. Szerkesszétek meg az adott szög szögfelezőjét!

Megoldás. Legyen A az adott szög. Rajzolunk egy tetszőleges sugarú körvonalat, melynek középpontja az A pont. Ez a kör a szög szárait két pontban metszi. Jelöljük ezeket a metszéspontokat M-mel és N-nel (357. a ábra). Ugyanezzel a sugárral rajzolunk még két kört, melyeknek a középpontjai az M és az pont. Ezek a körvonalak A és K pontokban metszik egymást (357. *b* ábra). Meghúzzuk az AK félegyenest (357. c ábra).



357.ábra

Bebizonyítjuk, hogy az AK félegyenes lesz a keresett szögfelező.

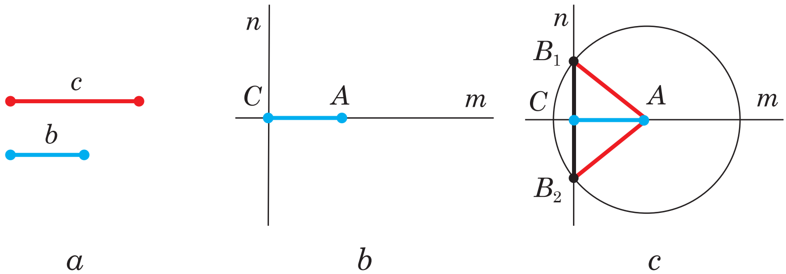
Valóban, az AMK és ANK háromszögek (357. d ábra) egybevágók a három oldaluk alapján, a háromszögek egybevágóságának harmadik alapeste szerint. Tehát $\angle MAK = \angle NAK$.

7. feladat. Szerkesszetek derékszögű háromszöget átfogója és befogója alapján!

Megoldás. Legyen két szakasz b és c, ahol b < c (358. a ábra). Mivel az átfogó nagyobb, mint a befogó, ezért az átfogó a nagyobbik szakasz lesz ezek közül, a befogó pedig a kisebbik. Tehát egy olyan ABC derékszögű háromszöget kell szerkeszteni, melyben $\angle C = 90°$, $AB = c$, $AC = b$.

Szerkesszünk két egymásra kölcsönösen merőleges m és n egyenest. Legyen C pont a metszéspontjuk. Az m egyenesen felmérjük a CA szakaszt, amely a b befogóval lesz egyenlő (358. *b* ábra). Rajzoljunk egy A középpontú körvonalat, melynek sugara megegyezik a c átfogóval.

A körvonal az n egyenest két pontban metszi, ezek legyenek B_1 és B_2 (358. c ábra). Az ACB_1 és ACB_2 háromszögek lesznek a keresett háromszögek.

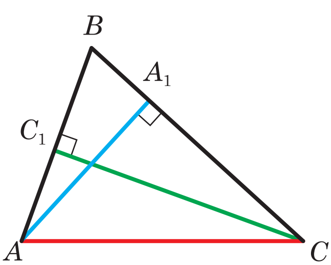


358.ábra

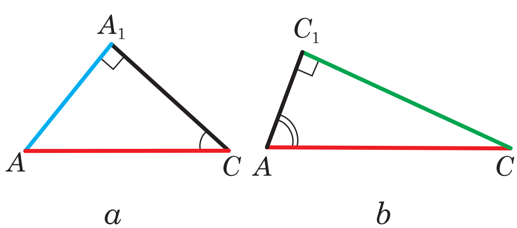
Mivel az ACB_1 és ACB_2 háromszögek egybevágók, ezért a feladatnak egyetlen megoldása lesz.◀

8. feladat. Szerkesszetek háromszöget oldala, és a másik két oldalhoz tartozó magasságok alapján!

Megoldás. A 359. ábrán egy ABC háromszög látható, melynek magasságai AA_1 és CC_1 Ha ismertek az AC, AA_1 és CC_1 szakaszok, akkor meg lehet szerkeszteni az AA_1C és CC_1A háromszögeket az átfogó és a befogó alapján (lásd a 7. feladatot).



359.ábra



360.ábra

A fenti gondolatmenetet a szerkesztési feladat elemzésének (analízisének) nevezzük, amely segít a szerkesztés tervének elkészítésében.

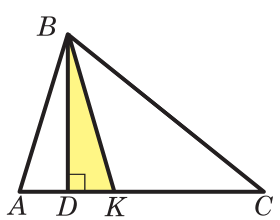
Megszerkesszük az AA_1C derékszögű háromszöget, melyben az AC átfogó megegyezik az adott oldallal, és az AA_1 befogó az egyik adott magassággal (360. *a* ábra). A megszerkesztett ACA_1 háromszögnek egyik szöge, az adott oldal melletti szög, megegyezik a keresett háromszög szögével. Hasonló szerkesztéssel meg lehet kapni a keresett háromszögnek az adott oldalra fekvő másik szögét is. A 360. *b* ábrán ez a szög C_1AC szög lesz.

Most már csak az ABC háromszög megszerkesztése maradt hátra, az AC oldala és a rajta fekvő két szöge alapján. Ezt a szerkesztést önállóan végezzétek el. ◀

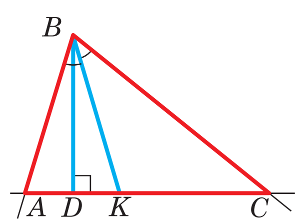
9. feladat. Szerkesszetek háromszöget, ha adott egyik szöge, és ebből a szögből bocsátott szögfelezője és magassága!

Megoldás. Elvégezzük ennek a szerkesztési feladatnak az elemzését. A 361. ábrán egy ABC háromszög látható, melyben a BD szakasz magasság, a BK pedig szögfelező.

Ha ismert a BD és BK szakaszok hossza, akkor a BDK derékszögű háromszöget meg lehet szerkeszteni a befogó és átfogó alapján. Szintén megállapítjuk, hogyha ismert az ABC szög, akkor meg lehet szerkeszteni az ABK és KBC szögeket, melyek mindegyike $\frac{1}{2}\angle ABC$. lesz. Innen megkapjuk a szerkesztés tervét.



361.ábra



362.ábra

Szerkesztünk egy derékszögű BDK háromszöget, melyben a BK átfogó a szögfelezővel lesz egyenlő, a BD befogó pedig a magasság lesz (362. ábra). Szerkesztünk két szöget, melyek mindegyike az adott szög felével egyenlő és ezeknek a szögeknek a közös száruk a *BK* félegyenes. A 362. ábrán ezek az *ABK* és *KBC* szögek lesznek. Az *ABC* háromszög lesz a keresett háromszög. ◀

1. Milyen eszközökkel lehet elvégezni a szerkesztési feladatot? Milyen szerkesztéseket lehet ezekkel végezni? **2.** Mit jelent megoldani egy szerkesztési feladatot?

GYAKORLATOK

657.° Rajzoljatok: 1) hegyesszöget; 2) tompaszöget! Szerkesszetek olyan szöget, amely egyenlő ezekkel a szögekkel!

658.° Rajzoljatok egy *ABC* hegyesszöget és egy *DK* félegyenest. Szerkesszetek egy $\angle MDK$-t, amelyre igaz: $\angle MDK = 2\angle ABC$.

659.° Osszátok fel az adott szakaszt négy egyenlő részre!

660.° Rajzoljatok egy tetszőleges szöget. Osszátok fel azt négy egyenlő részre!

661.° Rajzoljatok: 1) hegyesszögű háromszöget; 2) tompaszögű háromszöget. Szerkesszétek meg ezeknek a háromszögek minden magasságát!

662.° Rajzoljatok egy *ABC* háromszöget! Szerkesszétek meg: 1) az *AM* magasságát; 2) *BD* súlyvonalát; 3) *CK* magasságát!

663.° Szerkesszetek háromszöget:
1) két oldala és a közbezárt szöge alapján;
2) oldala és a rajta fekvő két szöge alapján!

664.° Szerkesszetek derékszögű háromszöget:
1) két befogója alapján;
2) befogója és a rajta fekvő szöge alapján!

665.° Szerkesszetek egyenlőszárú derékszögű háromszöget befogója alapján!

666.° Szerkesszetek egyenlőszárú háromszöget szára és a szárszöge alapján!

667.° Szerkesszetek egyenlőszárú háromszöget alapja és az alapján fekvő szöge alapján!

668.• Szerkesszetek adott sugarú körvonalat, amely érinti az adott egyenest egy megadott pontjában!

669.• Szerkesszetek érintőt adott sugarú körvonalhoz, amely a körvonal adott pontjában érinti azt!

670.• Szerkesszetek: 1) **45°**; 2) **60°**; 3) **75°**; 4) **120°** szöget!

671.• Szerkesszetek: 1) **30°**; 2) **22°30′**; 3) **15°** szöget!

672.• Az adott ponton át, amely nem illeszkedik az adott egyeneshez, szerkesszetek az adott egyenessel párhuzamos egyenest!

673.• A szög belsejében lévő ponton át szerkesszetek olyan egyenest, amely a szög szárából egyenlő szakaszokat fog kimetszeni!

674.• Szerkesszetek körvonalat, amely érinti az adott szög szárait!

675.• Adott egy 30°-os szög. Szerkesszetek egy adott sugarú körvonalat, amelynek középpontja illeszkedik a szög szárára, és érinti a szög másik szárát!

676.• Szerkesszetek körvonalat, amely érinti az adott szög szárait, és az egyik szárát a megadott pontban érintse!

677.• Szerkesszetek derékszögű háromszöget átfogója és hegyes szöge alapján!

678.• Szerkesszetek derékszögű háromszöget befogója és szemközti szöge alapján!

679.• Szerkesszetek egyenlő szárú háromszöget:
1) az alapjára bocsátott magassága és a csúcsnál lévő szöge alapján;
2) az alapja és az alapra bocsátott súlyvonala alapján;
3) az alapja és a szárra bocsátott magasság alapján!

680.• Szerkesszetek egyenlő szárú háromszöget:
1) Szára és az alapján fekvő szöge alapján;
2) a szára és az alapra bocsátott magasság alapján!

681.• Szerkesszetek egyenlő szárú derékszögű háromszöget átfogója alapján!

682.•• Hogyan lehet felezni egy olyan szakaszt, amelynek hossza többszöröse a körző legnagyobb nyilasának?

683.•• Szerkesszetek derékszögű háromszöget:
1) hegyesszöge és ennek a szögnek a szögfelezője alapján;
2) befogója és az átfogóra húzott magassága alapján!

684.•• Szerkesszetek derékszögű háromszöget:
1) befogója és a másik befogóra húzott súlyvonala alapján;
2) hegyesszöge és a derékszög csúcsából bocsátott magassága alapján!

685.•• Szerkesszetek egyenlő szárú háromszöget alapja és a beírt körének sugara alapján!

686.•• Szerkesszetek háromszöget, ha adott az oldala, ezen oldal melletti szöge és ezen szög csúcsából húzott szögfelezője!

687.•• Szerkesszetek háromszöget, ha adott az oldala, és a másik oldalára bocsátott súlyvonala valamint az adott oldal és a súlyvonal által bezárt szög!

688.•• Szerkesszetek háromszöget, ha adott az oldala, ezen oldal melletti szöge és a magassága, amely erre az oldalra van bocsátva!

689.•• Szerkesszetek háromszöget, ha adott az oldala, és ezen oldal egyik végpontjából húzott súlyvonala és magassága! Hány megoldása lehet ennek a feladatnak?

690.•• Szerkesszetek háromszöget, ha adott két oldala és az egyik oldalára bocsátott magassága! Hány megoldása lehet ennek a feladatnak?

691.•• Szerkesszetek háromszöget, ha adott a magassága valamint e magasság és a háromszög oldalai közötti szögek, amelyeknek a magassággal közös csúcsuk van. Hány megoldása lehet ennek a feladatnak?

692.•• Szerkesszetek háromszöget, ha adott két oldala és a harmadik oldalra húzott magassága! Hány megoldása lehet a feladatnak?

693.•• Szerkesszetek háromszöget, ha adott két oldala és az egyik adott oldalával szemközti szöge! Hány megoldása lehet a feladatnak?

694.•• Szerkesszetek háromszöget egy oldal, a rajta fekvő egyik szöge és egy adott oldalra húzott súlyvonal alapján! Hány megoldása lehet a feladatnak?

695.•• Szerkesszetek háromszöget, ha adottak egyik szöge és a másik két szög csúcsából húzott magasságai!

696.•• Szerkesszetek háromszöget, ha adott a két magassága és az a szöge, amelynek a megadott magasságok közül az egyikkel közös csúcsa van! Hány megoldása lehet a feladatnak?

697.* Szerkesszetek derékszögű háromszöget, ha adott a befogója és a beírt körvonal sugara!

698.* Szerkesszetek háromszöget, ha adott az oldala, ezen az oldalon fekvő szöge és a beírt körvonal sugara!

699.* Szerkesszetek háromszöget, ha adott a beírt kör sugara és azok a szakaszok, amelyek a beírt kör érintési pontja osztja fel a háromszög egyik oldalát!

700.* Szerkesszetek háromszöget az adott oldala és ezen oldalra bocsátott magassága és súlyvonala alapján!

701.* Szerkesszetek háromszöget adott három pont alapján, melyek a háromszög és a beírt körvonal érintési pontjai!

702.* Hogyan kell felosztani három egyenlő részre az 54°-os szöget?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

703. Az ABC háromszögben, $AB = BC$, az AE és CF – a háromszög szögfelezői. Bizonyítsátok be, hogy $EF \parallel AC$.

704. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit, ha:

1) $\angle A + \angle B = 110°$, $\angle A + \angle C = 85°$;
2) $\angle C - \angle A = 29°$, $\angle A + \angle C = 121°$.

705. Az ABC háromszög AB oldalának oldalfelezőmerőlegese a BC oldalt az M pontban metszi. Adott, hogy $\angle MAC : \angle MAB = 8:5$. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit!

706. Állapítsátok meg a háromszög fajtáját, melynek az egyik külső szöge nagyobb a nem szomszédos belső szögeknél:

1) 60°-kal, és 40°-kal;
2) 25°-kal, és 35°-kal!

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

707. A lapra rajzoltak egy egyenlő oldalú háromszöget, és teljesen lefedték két másik egyenlő oldalú háromszöggel, melyek különböző méretűek voltak. Bizonyítsátok be, hogy a háromszög teljes lefedéséhez elegendő lenne az egyik háromszög!

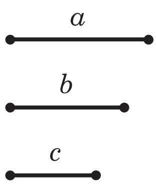
24. A pontok mértani helye módszer alkalmazása a szerkesztési feladatoknál

Az ismert, hogyha a kék és a sárga színt összekeverjük, akkor zöldet fogunk kapni.

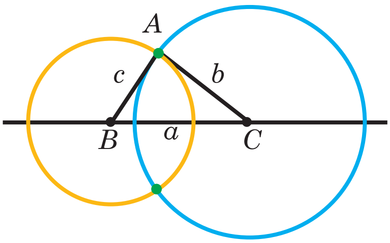
A síkon olyan pontokat kell ábrázolni, melyek egyidejűleg kétféle tulajdonsággal rendelkeznek. Ha az egyik tulajdonsággal rendelkező pontokat kékre festjük, a másik tulajdonsággal rendelkezőket pedig sárgára, akkor érthető, hogy a zöld pontok mindkét tulajdonsággal fognak rendelkezni. Ebben rejlik a pontok mértani helyének (PMH) módszere. Ezzel a módszerrel megoldunk néhány feladatot.

1. feladat. Szerkesszetek háromszöget, ha adott a háromszög három oldala!

Megoldás. Legyen adott három szakasz, melyeknek a hossza a, b, c (363. ábra). Meg kell szerkeszteni az ABC háromszöget, ha $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.



363.ábra



364.ábra

Rajzolunk egy tetszőleges egyenest. Körző segítségével felmérjük rá a BC szakaszt, melynek hossza a (363. ábra). A feladat megoldásához már csak a háromszög harmadik csúcsának, az A pontnak a megszerkesztése szükséges.

Felhasználjuk azt, hogy az A pontnak egyszerre két feltételnek kell megfelelnie:

1) olyan pontnak kell lennie, hogy a B ponttól c távolságra lévő pontok mértani helyéhez tartozzon, vagyis a c sugarú körvonalhoz (a 364. ábrán ez a sárga kör lesz);

2) olyan pontnak kell lennie, hogy a C ponttól b távolságra lévő pontok mértani helyéhez tartozzon, vagyis a b sugarú körvonalhoz (a 364. ábrán ez a kék kör lesz).

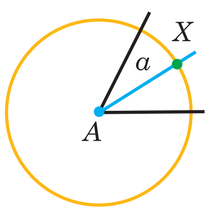
Az A pontnak a keletkezett két zöld pont közül bármelyiket tekinthetjük. A keletkezett ABC háromszög lesz a keresett, mivel megfelel az $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ feltételeknek.◀

A szerkesztés fenti leírásából az következik, ha az adottak közül bármelyik szakasz hossza kisebb, mint a másik két szakasz hosszának összege, akkor ezek a szakaszok a háromszög oldalai lehetnek.

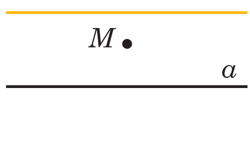
2. feladat. Szerkesszetek egy alakzatot, melynek minden pontja egy adott szöghöz belső pontja, egyenlő távolságra van a szög száraitól és a távolságra a szög csúcsától!

Megoldás. A keresett pont egyszerre két mértani hely pontjaihoz tartozik: a szög szögfelezőjéhez és egy a sugarú körvonalhoz, melynek középpontja a szög csúcsa lesz.

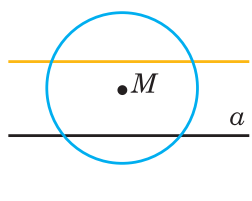
Megszerkesszük a szög szögfelezőjét és az adott körvonalat (365. ábra). Metszéspontjuk a keresett X pont lesz. ◀



365.ábra



366.ábra



367.ábra

3. feladat. Szerkesszétek meg annak az adott R sugarú körvonalnak a középpontját, amelyre illeszkedik az adott M pont és érinti az adott a egyenest!

Megoldás: Mivel a kör érinti az a egyenest, ezért a középpontja R távolságra lesz ettől az egyenestől. Az adott egyenestől adott távolságra lévő pontok mértani helye két párhuzamos egyenes (567. gyakorlat). Tehát a körvonal középpontját a sárga egyeneseken (366. ábra) kell keresni.

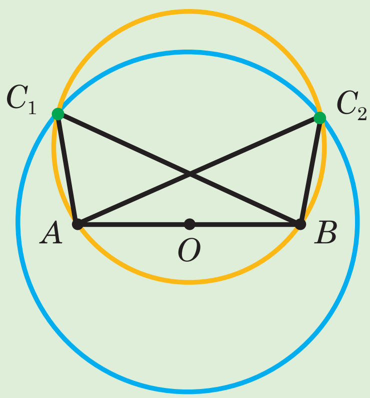
Mivel az adott M pontra illeszkedő R sugarú körvonal középpontjainak mértani helye, az M középpontú R

sugarú körvonal (367. ábra kék körvonala.) Ezért a keresett körvonal középpontjának a kék körvonal és a sárga egyenes metszéspontjai közül bármelyiket tekinthetjük (367. ábra).

Azt az esetet, amikor az adott pont az adott egyenesre illeszkedik, vizsgáljátok meg önállóan! ◀

4. feladat. Szerkesszetek háromszöget egyik oldala, és az erre az oldalra húzott súlyvonala valamint a körülírt körvonalának sugara alapján!

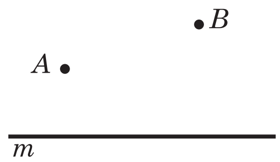
Megoldás: Szerkesszünk meg az adott sugarú körvonalat, és meghúzzuk az AB húrt benne, amelynek hossza megegyezik a keresett háromszög oldalával. Ekkor a húr végpontjai a keresett háromszög két csúcsa lesz. Érthető, hogy a háromszög harmadik csúcsának egyidejűleg illeszkednie kell a megszerkesztett körvonalra (sárga körhöz) és az O középpontú körvonalra is, ha ennek a körnek a középpontja az AB szakasz felezőpontja, és a sugara egyenlő az adott súlyvonal hosszával (ez lesz a kék körvonal). Az ABC_1 és ABC_2 háromszögek (368. ábra) mindegyike a megszerkesztendő háromszög lesz. Mivel ezek egybevágók, ezért a feladatnak egyetlen megoldása van.◀



368.ábra

GYAKORLATOK

708.° Adott az m egyenes, és a rá nem illeszkedő *A* és *B* pont (369. ábra). Szerkesszétek meg az m egyenesen azt a pontot, amely egyenlő távolságra lesz az *A* és *B* pontoktól!



369.ábra

709.° Az *A* és *B* pontok az m egyenesre illeszkednek. Szerkesszetek egy olyan pontot, amely az egyenestől a távolságra lesz, az *A* és *B* pontoktól pedig egyenlő távolságra. Hány megoldása van ennek a feladatnak?

710.° Szerkesszetek egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és a szára!

711.• A *B* és *C* pontok az *A* szög különböző száraira illeszkednek, és $AB \uparrow AC$. Szerkesszétek meg a szöghöz tartozó *M* pontot, amely egyenlő távolságra lesz a száraktól és $MB = MC$!

712.• A *B* és *C* pontok az *A* szög különböző száraira illeszkednek. Szerkesszétek meg azt a *D* pontot, amely a szöghöz tartozik, egyenlő távolságra van a száraitól, valamint teljesül a $DC = BC$ egyenlőséget! Hány megoldása van ennek a feladatnak?

713.• Az adott körvonalnak szerkesszétek meg a középpontját!

714.• Szerkesszetek adott sugarú kört, melynek középpontja egy adott egyenesre illeszkedik, és átmegy egy adott ponton!

715.• Szerkesszetek adott sugarú körvonalat, amelyre két adott pont is illeszkedik!

716.• Határozzátok meg az összes olyan pontot, amely az adott körvonalra illeszkedik, és egyenlő távolságra van az adott szakasz két végpontjától. Hány megoldása van ennek a feladatnak?

717.• Adott két egymást metsző m és n egyenes, és egy AB szakasz. Szerkesszétek meg az m egyenesen azt a pontot, amely az n egyenestől AB távolságra lesz! Hány megoldása van ennek a feladatnak?

718.• Az ABC háromszögben $\angle C = 90°$. Az AC befogóján szerkesszétek meg azt a D pontot, amely az AB egyenestől CD távolságra van!

719.• Szerkesszetek háromszöget, ha adott a két oldala és az egyik oldalhoz tartozó súlyvonala!

720.• Szerkesszetek egy egyenlőszárú háromszöget, ha adott a szára és a szárára bocsátott súlyvonala!

721.•• Szerkesszetek egy egyenlő szárú háromszöget, ha adott az alapja és a körülírt körének sugara. Hány megoldása van ennek a feladatnak?

722.•• Az adott körvonalon szerkesszétek meg azt a pontot, amely adott távolságra lesz egy adott egyenestől! Hány megoldása van ennek a feladatnak?

723.•• Az adott körvonalon szerkesszétek meg azt a pontot, amely egyenlő távolságra lesz két egymást metsző egyenestől! Hány megoldása van ennek a feladatnak?

724.•• Két párhuzamos egyenes között adott egy pont. Szerkesszétek meg azt a körvonalat, amelyre az adott pont illeszkedik, és a körvonal érinti az adott egyeneseket. Hány megoldása van ennek a feladatnak?

725.•• Szerkesszetek egy körvonalat, amelyre az adott A pont illeszkedik, és egy adott B pontban érinti az adott m egyenest!

726.•• 726. Adott két párhuzamos egyenes és egy őket metsző egyenes. Szerkesszetek egy kört, amely érinti ezt a három egyenest!

727.•• Szerkesszetek egy háromszöget, ha adott két oldala és a köré írt körvonal sugara! Hány megoldása van ennek a feladatnak?

728.•• Szerkesszetek egy háromszöget, ha adott egyik oldala, az erre az oldalra bocsátott magassága és a köré írt körvonal sugara! Hány megoldása van ennek a feladatnak?

729.•• Szerkesszetek egyenlő oldalú háromszöget, ha adott a körülírt körvonalának sugara!

730.* Három egyenes nem egy pontban, de páronként metszik egymást. Szerkesszétek meg azt a pontot, amely egyenlő távolságra lesz mindhárom egyenestől. Hány megoldása van ennek a feladatnak?

731.* Szerkesszetek derékszögű háromszöget, ha adott a befogója, valamint az átfogó és a másik befogójának összege!

732.* Szerkesszetek derékszögű háromszöget, ha adott az átfogója és a befogók összege!

733.* Szerkesszetek derékszögű háromszöget, ha adott az átfogója és a befogók különbsége!

734.* Szerkesszetek derékszögű háromszöget, ha adott egyik befogója valamint az átfogó és a másik befogó különbsége!

735.* Szerkesszetek háromszöget, ha adott egyik oldala és a rajta fekvő szöge, valamint a másik két oldal összege!

736.* Szerkesszetek háromszöget, ha adott az egyik oldala, rajta fekvő szöge és a másik két oldal különbsége!

737.* Szerkesszetek háromszöget, ha adott az egyik oldala, ezzel az oldallal szemközti szöge és a másik két oldal különbsége!

738.* Szerkesszetek háromszöget, ha adott az egyik oldala, a szemközti szöge és a másik két oldal összege!

739.* Szerkesszetek háromszöget, ha adott a kerülete és két szöge!

740.* Szerkesszetek háromszöget, ha adott a kerülete, az egyik szöge és a magassága, amely a háromszög másik szögének csúcsából van húzva!

741.* Szerkesszetek háromszöget, ha adott az egyik csúcsából húzott magassága és súlyvonala, valamint a körülírt körvonalának sugara!

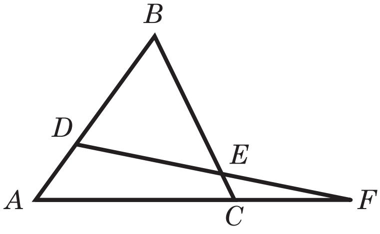
742.* Szerkesszetek háromszöget, ha adott két oldala és a harmadik oldalra húzott súlyvonala!

743.* Szerkesszetek háromszöget, ha adott az oldala, az erre az oldalra húzott magassága, és a másik két oldal közül az egyikhez tartozó súlyvonala!

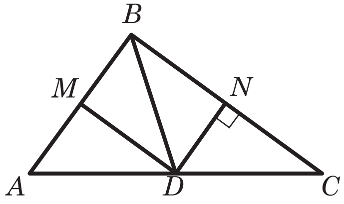
ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

744. A 370.ábrán $\angle A = 46°$, $\angle ACB = 68°$, $\angle DEC = 120°$. Határozzátok meg az *EFC* és *DBE* háromszögek szögeit!

745. Az *MKN* háromszög *MK* oldalának *O* felezőpontjába egy merőlegest állítottak, amely az *MN* oldalt egy *C* pontban metszi. Ismert, hogy $MC = KN$ $\angle N = 50°$. Határozzátok meg az *MC*O szöget!



370.ábra



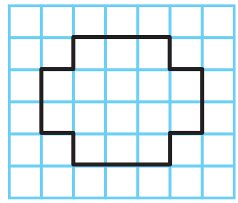
371.ábra

746. Az *ABC* háromszögben a *C* derékszögének csúcsából *CH* magasságot és *CM* szögfelezőt húztak. A *HM* szakasz hossza kétszer kisebb a *CM* szakasz hosszánál. Határozzátok meg az *ABC* háromszög szögeit!

747. A 371. ábrán $BD = DC$, $DN \perp BC$, $\angle BDM = \angle MDA$. Határozzátok meg az MBN és BMD szögeket!

FIGYELJÉTEK MEG, RAJZOLJATOK, SZERKESSZETEK, KÉPZELJÉTEK EL

748. A 372. ábrán lévő alakzatot vágjátok három olyan nem négyzet alakú részre, melyekből ki lehet rakni egy négyzetet!



372.ábra

FEJEZETEK A MÉRTANI SZERKESZTÉSEK TÖRTÉNETÉBŐL

Valamilyen eredmény eléréséhez a legkevesebb eszközt felhasználni mindig is a legmagasabb képzetséget kívánt meg. Az ókori Görögországban nagyon fejlett volt a mértani szerkesztések művészete, ezekhez csak két eszközt használtak: lécet, melynek a széle egyenes volt (vonalzó) és két kihegyezett pálcát, melyek az egyik végükön össze voltak kötve (körző). Az, hogy a használat ezekre az eszközökre korlátozódott az ókori görög tradícióból ered, mert az egyenest és a kört az ókori görögök a legharmonikusabb alakzatoknak tekintették. Így Eukleidész az *E*lemek című könyvében leírja azokat a mértani alakzatokat, amelyeket körzővel és vonalzóval meg lehet rajzolni.

Nagyon sok szerkesztési feladat létezik. Ezek közül néhánnyal már megismerkedtetek. De van három olyan szerkesztési feladat, amelynek nagyon fontos szerepe volt a matematika fejlődésében. Ezek a feladatok híresek lettek.

A kör négyszögesítése. Olyan négyzetet lehet e szerkeszteni, melynek területe az adott körlap területével egyenlő?

Szögharmadolás. Lehet-e az adott szöget három egyenlő részre osztani?

A kocka megkettőzése. Lehet-e olyan kockát szerkeszteni, melynek térfogata az adott kocka térfogatának a duplája.

Ezek a feladatok évezredekig nem hagyták nyugodni az embereket. Az ókori idők olyan híres tudósai próbálták megoldani ezeket, mint koszi Hippokratész, Knidoszi Eudoxosz, Eukleidész, Eratoszthenész Pentatlosz, Pergai Apollóniosz, Hérón, Papposz, Platón, Arkhimédész, valamint az újkor olyan kimagasló tudósai, mint René Descartes, Francois Viéte, Isaac Newton. Csak a XIX. század közepén nyert bizonyítást, hogy ezeket megoldani nem lehet, vagyis csak körző és vonalzó alkalmazásával nem lehet elvégezni a szerkesztést.

Erre az eredményre nem geometriai, hanem algebrai módszerekkel jutottak, vagyis egyenletekre vezették vissza a geometriai feladatokat.

Amikor a szerkesztési feladatokat oldottátok meg, különösen a csillagos feladatoknál, gyakran találkoztatok azzal a nehézséggel, hogy a szerkesztő eszközök száma korlátozva van. Ezért az a javaslat, hogy tovább kell szűkíteni az eszközök felhasználását, elég furcsának tűnhet. A X. században egy perzsa matematikus, Abu 1-Vafá Muhammad ibn Muham mad al-Búzdzsáni, olyan feladatok megoldását írta le, amelyben a szerkesztést vonalzóval és körzővel úgy is el lehet végezni, hogy a szerkesztés közben a körző szárainak nyílását nem változtatjuk meg. Elég furcsának tűnik az a tétel, melyet 1797-ben egy olasz matematikus, Lorenzo Mascheroni (1750– 1800) *tett közzé: minden, ami megszerkeszthető körzővel és vonalzóval, az megszerkeszthető csak körzővel is*. Mascheroni bevezette a következőt: mivel csak körzővel egyenes nem rajzolható, ezért az egyenest akkor tekintjük megszerkesztettnek, ha meg van szerkesztve bármilyen két pontja.

A XX. században találták meg a Georg Mohr (1640-1697) dán tudós könyvét, melyben ő szintén leírja a csak körzővel való szerkesztéseket. Ezért a fentebb megfogalmazott tételt Mohrl – Mascheroni tételnek nevezik.

4. SZÁMÚ FELADAT. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁBAN

1. Adott három nem egy egyenesre illeszkedő pont. Hány pontból áll a tőlük egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye?

A) végtelen sok; B) 2; C) 1; D) egyetlen egy sem.

2. Adott három egy egyenesen fekvő pont. Hány pontból áll a tőlük egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye?

A) 1; B) 2; C) végtelen sok; D) egyetlen egy sem.

3. Hány pontot tartalmaz azoknak a pontoknak a mértani helye, melyek a szög száraitól és a csúcsától is egyenlő távolságra van?

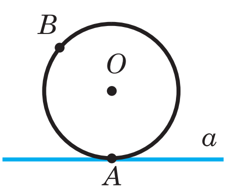
A) 1; B) 2; C) végtelen sok; D) egyetlen egy sem.

4. Az X pont egy O középpontú R sugarú körvonal egyik pontja. A következő állítások közül melyik a hamis?

A) $OX \leqslant R$; B) $OX \geqslant R$; C) $OX < R$; D) $OX = R$.

5. Az egyenesnek és az O középpontú R sugarú körnek két közös pontja van. Milyen alakzatot képeznek az egyenesnek azon X pontjai, melyekre teljesül az $OX \geqslant R$?

A) szakasz; C) félegyenes;
B) két félegyenes; D) egyenes.



6. A rajzon egy a egyenes látható, amely A pontban érinti az O középpontú kört. A körvonalon megjelöltünk egy B pontot, az X az a egyenes tetszőleges pontja. A következő állítások közül melyik a hamis?

A) $OX > OB$; C) $OX \geqslant OB$;
B) $OX \geqslant OA$; D) $OA = OB$.

7. Melyik állítás igaz?

A) Ha két húr merőleges egymásra, akkor az egyik átmérő lesz.

B) Ha két húr metszéspontjuk által feleződik, akkor egymásra merőlegesek lesznek.

C) Ha a húr végpontján áthaladó érintő merőleges rá, akkor ez a húr átmérő lesz.

D) Ha az egyik húr felezi a másikat, akkor ez a húr átmérő is.

8. A háromszög köré írt körvonal középpontja, metszéspontja:

A) a háromszög magasságainak;
B) a háromszög súlyvonalainak;
C) a háromszög oldalfelező merőlegeseinek;
D) a háromszög szögfelezőinek.

9. A háromszögbe írt körvonal középpontja, metszéspontja:

A) a háromszög magasságainak;
B) a háromszög súlyvonalainak;
C) a háromszög az oldalfelező merőlegeseinek;
D) a háromszög szögfelezőinek.

10. A háromszög beírt és köré írt körének a középpontjai egybeesnek:

A) az egyenlő szárú háromszögben;
B) az egyenlő oldalú háromszögben;
C) a derékszögű háromszögben;
D) a különböző oldalú háromszögben.

11. A szerkesztési feladat megoldása során a következő eszközöket alkalmazzák:

A) körző, szögmérő, vonalzó;
B) vonalzó, derékszögű vonalzó;
C) vonalzó, derékszögű vonalzó, körző, szögmérő;
D) körző, vonalzó.

A 4. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

A pontok mértani helye (PMH)

A pontok mértani helyének (PMH) nevezzük az adott tulajdonsággal rendelkező összes pont halmazát.

A szakasz felezőmerőlegese, mint PMH

A szakasz felezőmerőlegesének azon pontok mértani helyét nevezzük, melyek egyenlő távolságra vannak a szakasz végpontjaitól.

A szögfelező, mint PMH

A szög szögfelezője azon pontok mértani helye, melyek a szög belső pontjai, és egyenlő távolságra vannak a szög száraitól.

Körvonal

Körvonalnak nevezzük azoknak a pontoknak a mértani helyét, melyek egyenlő távolságra vannak egy adott ponttól.

Körlap

Körlapnak nevezzük azon pontok mértani helyét, melyek egy adott ponttól adott pozitív számnál nem nagyobb távolságra vannak.

Körvonal húrja

Azt a szakaszt, amely a körvonal két pontját köti össze, húrnak nevezzük.

Körvonal átmérője

Azt a húrt, amely keresztülmegy a körvonal középpontján, átmérőnek nevezzük.

A körvonal tulajdonságai

A körvonal átmérője, amely merőleges a húrra felezi azt.
Ha a kör átmérője felezi az átmérőtől különböző húrt, akkor merőleges erre a húrra.

Körvonal érintője

Azt az egyenest, melynek a körvonallal csak egy közös pontja van, a körvonal érintőjének nevezzük.

Körvonal érintőjének tulajdonsága

A körvonal érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.

A körvonal érintőjének ismertetőjele

Az az egyenes, amely illeszkedik a körvonal egyik pontjára és merőleges az ebbe a pontba húzott sugárra, az adott körvonalnak érintője lesz.
Ha a körvonal középpontja és az egyenes távolság a kör sugarával egyenlő, akkor ez az egyenes az adott kör érintője lesz.

A körvonalhoz egy pontból húzott érintők tulajdonsága

Ha egy adott pontból a körhöz két érintőt húznak, akkor az adott pontot az érintési pontokkal összekötő szakaszok egymással egyenlők.

Háromszög köré írt körvonal

A körvonalat a háromszög köré írtnak nevezzük, ha a háromszög mindegyik csúcsa illeszkedik a körre.

Háromszög köré írt körvonal középpontja

A háromszög köré írt körvonal középpontja a háromszög oldalfelezőmerőlegeseinek a metszéspontja.

Háromszögbe írt körvonal

A körvonalat a háromszögbe írtnak nevezzük, ha a háromszög mindegyik oldalát érinti.
Bármelyik háromszögbe írható kör.

Háromszögbe írt körvonal középpontja

Háromszögbe írt körvonal középpontja a szögfelezőinek a metszéspontja.

A 7.OSTÁLYOS MÉRTAN ISMÉTLŐ GYAKORLATAI

Legegyszerűbb mértani alakzatok és tulajdonságaik

749. Egy a hosszúságú szakaszt felosztottak öt egyenlő részre. Határozzátok meg a két szélső szakasz felezőpontja közötti távolságot!

750. A C pont az AB szakasz felezőpontja. $AB = 10$ cm. Az AB egyenesen határozzatok meg minden olyan X pontot, melyre teljesül, hogy $AX + BX + CX = 12$ cm!

751. A D pont az MK szakasz felezőpontja, $MK = 16$ cm. Az MK egyenesen határozzátok meg az összes olyan Y pontot, melyre teljesül, hogy $MY + KY + DY = 30$ cm!

752. Egy egyenesen felvettek 10 pontot: *A, B, C, D, E, F, M, N, K, P*. Hány olyan szakasz keletkezett, amelyeknek egyik végpontja az A pont? Hány olyan szakasz keletkezett, melynek a végpontjai az adott pontok valamelyike? A szakaszok száma függ e attól, hogy a megjelölt pontok ugyanazon az egyenesen fekszenek-e vagy sem?

753. A 373. ábrán az AN = 24 cm, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FK$, $KM = MN$, $DF = 6$ cm. Határozzátok meg a BM szakasz hosszát!

373.ábra

754. Rajzoljatok egy 120°-os MKE szöget! Húzzátok meg úgy a KC félegyenest, hogy $\angle MKC = 60°$. Határozzátok meg a CKE szöget, és állapítsátok meg a fajtáját! Hány megoldása van a feladatnak?

755. Két szögnek közös a szára, és más közös pontjuk nincs. Mellékszögek-e ezek a szögek, ha:

1) arányuk 11 : 19 és az egyik szög 32°-kal nagyobb a másiknál;
2) arányuk 7 : 3, és az egyikük 72°-kal kisebb, mint a másik?

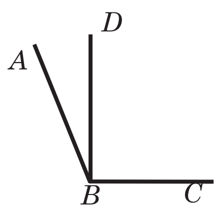
756. Az 500.ábrán a $BD \perp BC$. Az ABD és DBC szögek szögfelezői által közbe zárt szög 55°-os. Határozzátok meg az ABD szöget!

Háromszögek

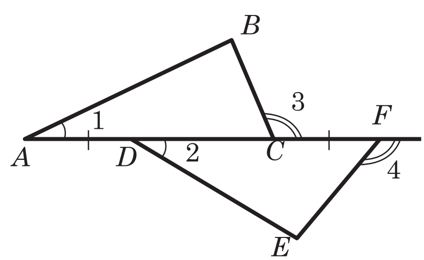
757. 757. A háromszög kerülete 87 cm, az egyik oldala a cm, a másikl – b cm. Állítsatok össze egy kifejezést a harmadik oldal meghatározására! Számítsátok ki a harmadik oldalának hosszát, ha $a = 27$, $b = 21$!

758. A Határozzátok meg az ABC háromszög kerületét, ha $AB + BC = 27$ cm, $AB + AC = 28$ cm, $BC + AC = 29$ cm!

759. Az 375.ábrán $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AD = CF$.
Bizonyítsátok be, hogy az $\Delta ABC = \Delta DEF$.



374.ábra



375.ábra

760. Az ABC és DEF háromszögekben meghúztuk a megfelelő BM és EK súlyvonalakat. Ismert, hogy $BC = EF$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle C = \angle F$. Bizonyítsátok be, hogy az: 1) $\Delta BMC = \Delta EFK$; 2) $\Delta ABM = \; = \Delta DEK$.

761. Az ABC és $A_1B_1C_1$ hegyesszögű háromszögekben meghúztuk a megfelelő BD és B_1D_1 magasságokat. Bizonyítsátok be, hogy az $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, ha $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$, $CD = C_1D_1$.

762. Az ABC és DEF háromszögekről ismert, hogy $AC = DF$, $BC = EF$, $\angle C = \angle F$. A BAC és ABC szögek szögfelezői az O pontban metszik egymást, és a DEF és EDF szögek szögfelezői pedig az M pontban, Bizonyítsátok be, hogy $\Delta AOB = \Delta DME$.

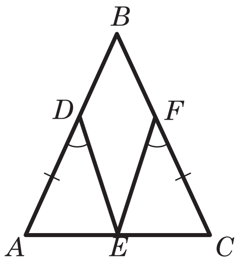
763. Az egyenlő szárú háromszög egyik oldala 4 cm, kerülete 20 cm. Határozzátok meg a háromszög másik két oldalát!

764. Az AC alapú ABC egyenlő szárú háromszögnek két szögfelezője AM és CK. Bizonyítsátok be, hogy $AK = CM$!

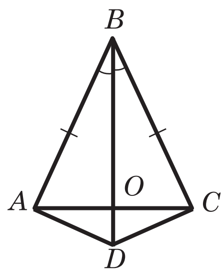
765. Az ABC egyenlőszárú háromszög BC alapjának B ponton túli meghosszabbításán úgy jelöltek egy M pontot, hogy $\angle MBA = 128°$. Határozzátok meg az AC szár és az ACB szög szögfelezője által közbe zárt szöget!

766. Az A és B pontokból, melyek az m egyenes által határolt ugyanazon félsíkra illeszkednek, erre az egyenesre megfelelően AC és BD merőlegeseket húztak. Az A és B pontok egyenlő távolságra vannak az m egyenestől, az O pont a CD szakasz felezőpontja. Bizonyítsátok be, hogy az AOB háromszög egyenlőszárú!

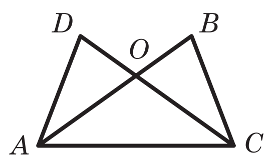
767. Az 376. ábrán $AB = BC, AD = DF$, $\angle ADE = \angle CFE$. Bizonyítsátok be, hogy az E pont az AC szakasz felezőpontja!



376.ábra



377.ábra



378.ábra

768. Az ABC és ADC egyenlőszárú háromszögnek közös az AC alapja. Bizonyítsátok be, hogy a BD egyenes az AC szakasz felezőmerőlegese lesz!

769. Az 377.ábrán $AB = BC$, $\angle ABO = \angle CBO$. Bizonyítsátok be, hogy $\angle DAO = \angle DCO$.

770. Az 378.ábrán $OA = OC$, $OD = OB$. Bizonyítsátok be, hogy $\angle DAC = \angle BCA$.

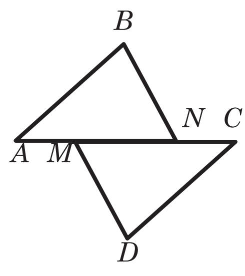
771. Az ABC háromszögben az AC és BC oldalak felezőmerőlegesei az O pontban metszik egymást, amely az AB oldalra illeszkedik. Bizonyítsátok be, hogy: 1) az O pont az AB szakasz felezőpontja; 2) $\angle ACB = \angle A + \angle B$.!

772. Az ABC háromszög súlyvonala a háromszöget két háromszögre osztja, melyek kerületei egyenlők. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög egyenlőszárú!

773. Az ABC háromszögben $AB = BC$, a BD szakasz –súlyvonal. Az ABC háromszög kerülete 50 cm, az ABD háromszögé pedig 40 cm. Határozzátok meg a BD súlyvonalat!

774. Az ABC háromszög AC és BC oldalain rendre felvettek egy F és egy K pontot. Bizonyítsátok be, hogyha az AFB és AKB háromszögek egybevágók, és az AK és BF megfelelő oldalak, akkor az ABC háromszög egyenlőszárú lesz!

775. A 379.ábrán az $AM = CN$, $AB = CD$, $BN = DM$. Bizonyítsátok be, hogy $\angle ABN = = \angle CDM$.



379.ábra

776. Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögekben AM és A_1M_1 súlyvonalak egyenlők, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Bizonyítsátok be, hogy $\Delta ABC == \Delta A_1B_1C_1$.

Párhuzamos egyenesek. A háromszög szögeinek összege

777. Az a egyenesre nem illeszkedő ponton át, három egyenest húztak. Bizonyítsátok be, hogy legalább két egyenes ezek közül metszik az a egyenest!

778. Az ABC háromszög AB és AC oldalain úgy vették fel az M és K pontokat, hogy $\angle AMK = \angle ABC$. Bizonyítsátok be, hogy az $\angle AKM = \angle ACB$.

779. Bizonyítsátok be, hogy két párhuzamos egyenest egy harmadikkal való metszésekor, az egyoldali szögek szögfelezői merőlegesek egymásra!

780. Egy egyenes, amelyre a háromszög egyik csúcsa illeszkedik, párhuzamos a háromszög szemközti oldalával, és a másik két oldallal egyenlő szögeket zár be. Bizonyítsátok be, hogy a háromszög egyenlő szárú!

781. Az ABC háromszög C csúcsán át egy egyenest húztak, amely párhuzamos a háromszög AM szögfelezőjével és az AB egyenest egy K pontban metszi. Határozzátok meg az ACK szöget, ha a $\angle BKC = 28°$.

782. Az ABC egyenlő szárú háromszög AC és BC szárainak a C csúcs utáni meghosszabbításán rendre felvették az E és D pontokat úgy, hogy $DE \parallel AB$. Bizonyítsátok be, hogy a CDE háromszög egyenlő szárú!

783. Az ABC háromszög BC oldalán úgy vették fel az M és a K pontokat (az M pont a B és K pontok között van), hogy $\angle KAC = \angle B$, $\angle BAM = \angle C$. Bizonyítsátok be, hogy az MAK háromszög egyenlőszárú!

784. Az egyenlő szárú háromszög alapra bocsátott magassága 2-szer kisebb, mint a háromszög alapja. Határozzátok meg az adott háromszög szögeit!

785. Az ABC háromszög AK és CM szögfelezői az O pontban metszik egymást. Ismert, hogy $\angle BAC = 64°$, $\angle MOK = 132°$. Határozzátok meg az ACB szöget!

786. Az ABC háromszög AC oldalán úgy vettek fel egy O pontot, hogy $AB = AO$. Tudjuk, hogy az ABC háromszög A szögének külső szöge 160° és $\angle C = 40°$. Bizonyítsátok be, hogy az $BO = CO$.

787. Az ABC háromszög AC oldalának folytatásán az A és C pontokat az M és K pontokkal jelöljük, így $AM=AB$, $CK=BC$. Határozzuk meg az MBK háromszög szögeit, ha $\angle BAC = 60°$, $\angle ACB = 80°$.

788. Az ABC háromszög AC oldalával párhuzamos egyenes az AB é BC oldalakat megfelelően az M és K pontokban metszi úgy, hogy $AM = MK$. Ismert, hogy $\angle B = 65°$, $\angle C = 45°$. Határozzátok meg a KAC szöget!

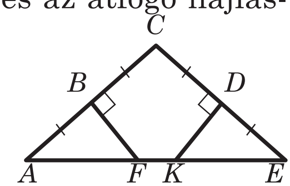
789. Az ABC háromszögben $\angle A = 55°$, $\angle B = 75°$. Határozzátok meg a C csúcsából húzott magasság és szögfelező által bezárt szöget!

790. Az ABC egyenlő szárú háromszög ($AB = BC$) az AD és BK magasságai az H pontban metszik egymást, $\angle AHB = 128°$. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit!

791. Az ABC egyenlő szárú háromszög ($AB = BC$) az AD és CM magasságai az H pontban metszik egymást, $\angle AHC = 140°$. Határozzátok meg az ABC háromszög szögeit!

792. A derékszögű háromszög egyik hegyes szöge 42°. Határozzátok meg derékszög szögfelezője és az átfogó hajlásszögét!

793. Az m egyeneshez viszonyítva egy félsíkra illeszkedő C és D pontokból CE és DF merőlegeseket bocsátottak erre az egyenesre, CF = DE. Bizonyítsátok be, hogy $CE = DF$!



380.ábra

794. A 380.ábrán $AB = BC = CD = DE$, $BF \perp AC$, $DK \perp CE$. Bizonyítsátok be, hogy $AF = EK$.

795. Az ABC háromszög BM és CK magasságai a H pontban metszik egymást. $\angle ABC = 35°$, $\angle ACB = 83°$. Határozzátok meg a BHC szöget!

796. A derékszögű háromszög derékszögének csúcsából bocsátott magassága és szögfelezője által közbezárt szög 12°-os. Határozzátok meg az adott háromszög a hegyes szögeit!

797. Az *ABC* egyenlőszárú háromszög *AB* átfogóján úgy vették fel az *M* és *K* pontot úgy, hogy $AC = AM$ és $BC = BK$. Határozzátok meg az *MCK* szöget!

798. Egy derékszögű háromszögben meghúzzuk az átfogóhoz tartozó magasságot. Bizonyítsátok be, hogy a keletkezett két háromszögnek és az adott háromszögnek a szögei megfelelően egyenlők!

799. Az *ABC* és *DEF* háromszögekről ismert, hogy $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, a *BM* és *EK* magasságaik egyenlők. Bizonyítsátok be, hogy az $\Delta ABC = \ = \Delta DEF$.

800. Az *ABC* háromszög *AM* és *CK* magasságai az *O* pontban metszik egymást, $OK = OM$, $\angle BAM = \angle ACK$. Bizonyítsátok be, hogy az *ABC* háromszög egyenlő oldalú!

801. Egy egyenlő szárú háromszög két magassága által bezárt szög 100°. Határozzátok meg az adott háromszög szögeit!

802. Az *ABC* háromszögben az *ACB* szög derékszög, a *CH* – az adott háromszöge magassága, a *CD* szakasz a *BCH* szög szögfelezője. Bizonyítsátok be, hogy $AC = AD$!

803. Egy egyenlőszárú háromszög egyik csúcsából húzott magassága és szögfelezője 15°-os szöget zár be. Határozzátok meg az adott háromszög szögeit! Hány megoldása van ennek a feladatnak?

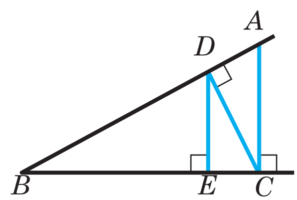
804. Az *ABC* háromszög *AB* átfogójának meghosszabbítására az *A* és *B* pontokon túl megfelelően úgy vették fel a *D* és az *E* pontokat úgy, hogy $AC = AD$, $BC = BE$. Határozzátok meg a *DCE* szöget!

805. Az *ABC* egyenlőoldalú háromszög *AC* oldalának felezőpontja *M*, ebből a pontból a *BC* oldalra *MK* merőlegest bocsátottak. Határozzátok meg az *ABC* háromszög kerületét, ha $KC = 3$ cm!

806. A derékszögű háromszög egyik szöge 60°, az átfogója és a kisebbik befogójának összege 27 cm. Határozzátok meg a háromszög ezen oldalait!

807. Az ABC háromszögben, $\angle C = 90°$, $\angle A = 15°$, $BC = 11$ cm. Az AC befogóján úgy jelöltek egy M pontot, hogy $\angle BMC = 30°$. Határozzátok meg az MK szakaszt!

808. A B szög egyik szárán jelölték a D és A, a másik szárára pedig az E és C pontokat (381.ábra) úgy, hogy $AC \perp BC$, $DE \perp BC$, $CD \perp AB$. Határozzátok meg a DE szakaszt, ha $\angle B = = 30°$, $AC = 12$ cm.



381.ábra

809. Határozzátok meg az egyenlő oldalú háromszögben a súlyvonalak hajlásszögét!

Körvonal és körlap

810. Az O középpontú körvonalon az AC átmérő, az AB és BC húrokra pedig teljesül, hogy $AB = BC$. Határozzátok meg az AOB szöget!

811. Az O középpontú kör AB és CD átmérői merőlegesek egymásra. Az AB átmérőn, az O pont különböző oldalain, úgy vették fel az E és F pontokat, hogy $CE = DF$. Bizonyítsátok be, hogy $OE = OF$!

812. Az O középpontú körvonal MK és NP nem párhuzamos húrjai, $MK = NP$, az A és B pontok az MK és NP húrok megfelelő felezőpontjai. Bizonyítsátok be, hogy $\angle OAB = \angle OBA$.

813. A körben az AB és BC húrok mindegyike egyenlő a kör sugarával: Határozzátok meg az ABC szöget!

814. Bizonyítsátok be, hogy a kör átmérőjére merőleges érintők párhuzamosak!

815. A kör AB átmérője felezi az MN és PK húrokat, melyek nem átmérők. Bizonyítsátok be, hogy $MN \parallel PK$.

816. Bizonyítsátok be, hogy a kör középpontja egyenlő távolságra van a körvonal bármelyik érintőjétől!

817. Az A pontból az O középpontú körhöz AM és AK érintőket húzunk, M és K érintési pontok. Az OA szakasz és a körvonal metszéspontja ennek a szakasznak a felezőpontja lesz. Határozzátok meg az MAK szöget!

818. A kör AC húrjával párhuzamos egyenes a B pontban érinti a körvonalat. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!

819. Az O középpontú körvonal OC sugara felezi az AB húrt, ami nem a kör átmérője. A C ponton át érintőt húztunk a körhöz. Bizonyítsátok be, hogy ez az érintő párhuzamos az AB húrral!

820. Egy körvonal, amelynek a középpontja az adott szög szögfelezőjére illeszkedik, két pontban metszi a szög szárait. Bizonyítsátok be, hogy a kör által kimetszett szakaszok egyenlők!

821. Az M ponton át az O középpontú körvonalhoz MK és ME érintőket húztak, melyek a K, E pontokban érintik a körvonalat. Az $\angle OMK = 30°$, MK = 6 cm. Határozzátok meg a KE húr hosszát!

822. Bizonyítsátok be, hogy a kör húrja, amely merőleges az adott körvonal másik húrjára és felezi azt, a kör átmérője lesz!

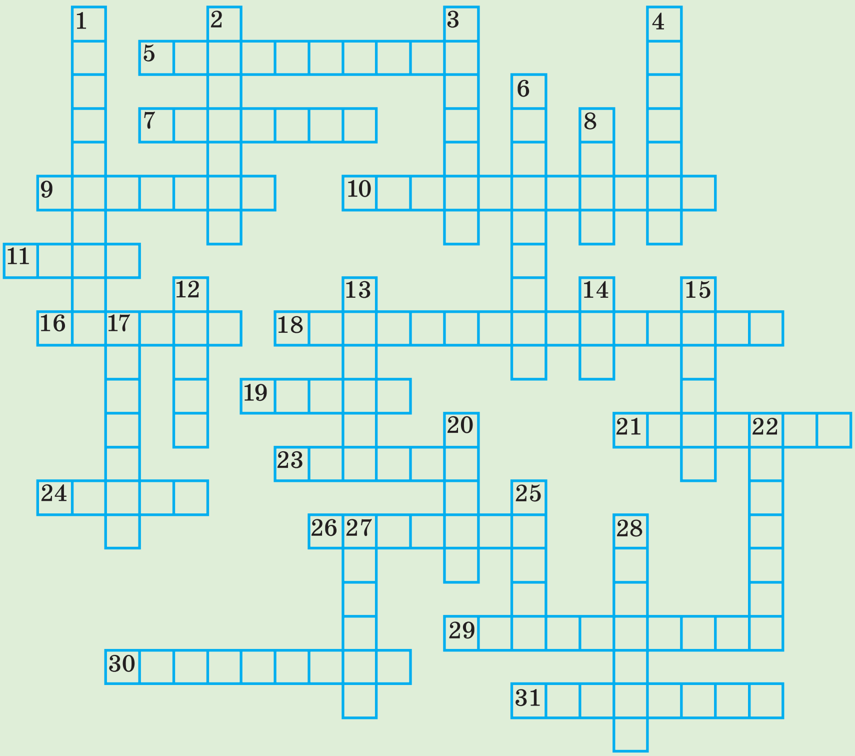
823. A körben úgy húzták meg az AB átmérőt, és az AC és BD húrokat, hogy $AC \parallel BD$. Bizonyítsátok be, hogy a CD szakasz a körvonal átmérője lesz!

824. Az ABC egyenlőszárú háromszögben adott, hogy $AB = BC$, az O pont a beírt körvonal középpontja, a D és E pontok pedig a beírt körvonal AC és AB oldalak érintési pontjai, az $\angle ABC = 48°$. Határozzátok meg a DOE szöget!

825. Az ABC háromszögbe kör van írva, amely az AB, BC és AC oldalait megfelelően a K, M és E pontokban érinti, $AK = BM = CE$. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög egyenlő oldalú lesz!

826. Az ABC háromszög AD és CE szögfelezői az O_1 pontban metszik egymást, a DEB háromszög EF és DK szögfelezői pedig az O_2 pontban. Bizonyítsátok be, hogy a B, O_1 és O_2 pontok egy egyenesre illeszkednek!

827. Fejtsétek meg a keresztrejtvényt!



По горизонталі: 5. Прямі, які не перетинаються. **7.** Два кути, одна сторона яких спільна, а дві інші – доповняльні промені. **9.** Відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони. **10.** Два кути, сторони одного з яких є доповняльними променями сторін другого. **11.** Геометричне місце точок, відстань від яких до даної точки не більша за дане число. **16.** Відрізок, який сполучає точку кола з його центром. **18.** Прямі, при перетині яких утворюються прямі кути. **19.** Відрізок, що сполучає дві точки кола. **21.** Коло, яке проходить через усі вершини трикутника. **23.** Перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону. **24.** Точка, рівновіддалена від усіх точок кола. **26.** Твердження, правильність якого встановлюють за допомогою доведення. **29.** Промінь з початком у вершині кута, який ділить кут на два рівних кути. **30.** Кут, суміжний із кутом трикутника. **31.** Сума довжин усіх сторін трикутника.

По вертикалі: **1.** Сторона прямокутного трикутника, протилежна прямому куту. **2.** Одна із частин, на які довільна точка розбиває пряму. **3.** Хорда, яка проходить через центр кола. **4.** Коло, яке дотикається до всіх сторін трикутника. **6.** Геометрична фігура. **8.** Геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки. **12.** Кут, градусна міра якого більша за 90°, але менша від 180°. **13.** Одиниця виміру кутів. **14.** Геометрична фігура. **15.** Кут, градусна міра якого дорівнює 90°. **17.** Пряма, яка має з колом одну спільну точку. **20.** Сторона прямокутного трикутника, прилегла до прямого кута. **22.** Твердження, правильність якого приймають без доведення. **25.** Давньогрецький математик. **27.** Автор книги «Начала». **28.** Кут, градусна міра якого менша від 90°.

BARÁTKOZUNK A SZÁMÍTÓGÉPPEL

A 6. osztályos matematika tanulmányozása közben már számítógépet használtatok, és értékeltétek, milyen megbízható segítőtárs lehet. Segít a geometria elsajátításában is.

A mértan alakzatokat tanulmányoz: szakaszok, háromszögek, téglalapok, téglatestek, gömbök stb. Ezért hasznos megtanulni a grafikus szerkesztő használatát, amellyel geometriai alakzatokkal dolgozhattok és rajzokat készíthettek. Ilyen szerkesztők például a CorelDraw, Visio stb. Ezen rész feladatainak a megoldásához szükséges rajzok elkészítéséhez a tanár segítségével válasszatok grafikus szerkesztőt. Ezen feladatokon kívül a kiválasztott grafikus szerkesztő segítségével lehet szemléltetni a megoldandó feladatokat. Ha pedig beszámolót vagy érdekes üzenetet szeretnél készíteni a barátaidnak, akkor a geometriai formák "életéből" akár rajzfilmet is készíthetsz prezentáció-szerkesztő programok (például PowerPoint) segítségével.

Nagyon sok olyan iskolásoknak való program létezik, amelyek segítik a matematika elsajátítását: multimédiás oktató programok, geometriai szerkesztő programok. Az Interneten találhattok ilyen programokat is. A megszerzett ismeretek és készségek birtokában a geometria tanulmányozására ti is hasznos programokat dolgozhattok ki.

A következő feladatokat tudjátok majd elvégezni a számítógép segítségével, az adott témák feldolgozásakor. Legtöbbjük szerkesztési feladat, melyet a kiválasztott programmal tudtok megoldani.

Pontok és egyenesek

1. Már tudjátok, hogy a mértanban a pontnak nincs mérete. Ezért a pontot csak feltételesen kis körlapként ábrázolják, a grafikus szerkesztés során (lásd az 35. pont ábráit) vagy pixelként (képpont) a képernyőn. Ugyanígy a monitoron ábrázolt egyenesnek van szélessége (a vonal a geometriában szélesség nélküli). Sajátítsátok el a grafikai szoftver lehetőségeit a pont és az egyenesek ábrázolására, tanuljátok meg, hogyan kell két ponton keresztül egyenest szerkeszteni!

2. Sajátítsátok el, hogyan kell a pontokat és az egyeneseket a latin ábécé nagy- és kisbetűivel jelölni!

A szakasz és hossza

3. Ábrázoljatok két pontot, szerkesszetek szakaszt, melynek az adott két pont lesz a végpontja!

4. Állapítsátok meg, hogy a grafikai szoftver hogyan adja meg a szakasz hosszát!

5. Szerkesszetek adott hosszúságú szakaszt!

6. Határozzátok meg azt az eszközt, amely segítségével mozgatni és forgatni lehet az adott alakzatot!

7. Szerkesszetek két szakaszt, majd egymásra helyezéssel hozzátok fedésbe őket!

8. Készítsetek rajzot a szakasz hossza szemléltetésére! Állapítsátok meg, hogy teljesül-e a szakaszok mérésének alapigazsága a megrajzolt szakaszokra!

9. Az általatok választott grafikai program rendelkezik-e olyan eszközzel, amely képes meghatározni a szakasz felezőpontját?

Félegyenes. Szög

10. Rajzoljatok különböző szögeket! Keressétek meg azt az eszközt, amellyel meg lehet határozni szögek mértékét, és adott fokmértékű szöget lehet szerkeszteni!

11. Készítsetek olyan ábrát, amely bemutatja a szög mérésének alapigazságát! Állapítsátok meg, hogy teljesül-e ez a tulajdonság, a megszerkesztett szög mértékének megállapításakor!

12. Keressétek meg azt a rajzeszközt, amelynek segítségével tudtok körívet rajzolni! Rajzoljatok néhány szöget, és az azonos méretű szögeket azonos számú körívekkel jelöljétek! Figyeljétek meg, hogy a rajzokon különböző alakzatok más-más vastagsággal vannak jelölve! Keressétek meg azt az eszközt, amely lehetőséget ad a vonal vastagságának megváltoztatására!

13. Ábrázoljatok mellékszögeket és csúcsszögeket.

Merőleges egyenesek

14. Keressétek meg a grafikai szoftver azon eszközét, mellyel merőleges egyeneseket lehet húzni! Szerkesszetek merőleges egyeneseket ezzel az eszközzel!

15. Rajzoljatok egy egyenest és az egyenesre illeszkedő pontot! Ezen a ponton keresztül rajzoljatok merőleges egyenest az adott egyenesre!

16. Rajzoljatok egy egyenest és az egyenesre nem illeszkedő pontot! Ezen a ponton keresztül rajzoljatok merőleges egyenest az adott egyenesre!

Háromszög. A háromszög magassága, súlyvonala, szögfelezője

17. Ahhoz, hogy megrajzoljunk egy háromszöget, általában először megrajzolunk három szakaszt, melyek a háromszög oldalai lesznek. Rajzoljátok meg ezt a három szakaszt! Keressétek meg azt az eszközt, amely lehetőséget ad egy alakzattá, háromszöggé összeragasztani a szakaszokat!

18. Rajzoljatok egy hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszöget!

19. Keressétek meg azt az eszközt, amely lehetőséget ad lemásolni a már elkészített alakzatot, és azt az eszközt, amellyel lehetséges mozgatni és elforgatni az alakzatot! Segítségükkel ábrázoljatok egybevágó háromszögeket!

20. Szerkesszetek egy tetszőleges háromszöget, és mindegyik csúcsából húzzátok meg a magasságát, súlyvonalait és szögfelezőjét. Milyen eszközöket kellene alkalmazni, hogy a szerkesztés pontos legyen? Végezzétek el ezt a szerkesztést a hegyesszögű, a derékszögű és a tompaszögű háromszögekre is!

Egyenlő szárú három szög

21. Szerkesszetek egyenlő szárú és egyenlő oldalú háromszögeket! A rajzszerkesztő milyen lehetőségei teszik egyszerűbbé a szerkesztést?

22. Hogyan lehet alkalmazni a 44.3. tételt az egyenlő szárú háromszögek szerkesztésénél?

A háromszögek egybevágóságának alapesetei

23. Szerkesszetek két olyan háromszöget, melyeknek a két oldaluk és a közbezárt szögük megfelelően egyenlő egymással! Hogyan lehetne szemléltetni azt, hogy a háromszögek egybevágók?

24. Rajzoljatok egy szakaszt, és szerkesszétek meg a felezőmerőlegesét!

25. Szerkesszetek két háromszöget, melyeknek egyik oldala és a rajta fekvő szögei megfelelően egyenlők egymással! Hogyan lehetne szemléltetni azt, hogy a háromszögek egybevágók?

26. Készítsetek olyan rajzot, amely bemutatja a felezőmerőleges tulajdonságát. Vegyetek fel néhány pontot a felezőmerőlegesen! Milyen eszközzel ellenőrizhető, hogy ezek a pontok egyenlő távolságra vannak-e a szakasz végpontjaitól?

Párhuzamos egyenesek

27. Az előző feladatokat végrehajtva megismerkedtetek azokkal az eszközökkel, melyek segítségével mértani alakzatokat tudtok másolni, mozgatni és szerkeszteni. Hogyan kell ezeknek az eszközöknek az alkalmazásával párhuzamos egyeneseket rajzolni?

28. Találjátok ki, hogyan szerkeszthetők párhuzamos egyenesek a 13.1. tétel alapján!

29. Rajzoljatok egy egyenest, és egy rá nem illeszkedő pontot! Rajzoljátok meg az adott egyenessel párhuzamos egyenest, amely illeszkedik erre a pontra! Nagyobbítsátok meg a keletkezett rajzot! Lehet-e ezzel a rajzzal meggyőzően illusztrálni az egyenesek párhuzamossági axiómáját? Miért?

Ez a példa azt mutatja, hogy minden mértani szerkesztés, amit a papíron vagy a számítógépen készítünk, eléggé esetleges. Ezért hiába a legcsodálatosabb rajz, nem a rajzra kell támaszkodni, hanem a matematikai tényekre és bizonyításra.

30. Alkalmazva a 48.1.l – 48.3. tételeket, szerkesszetek néhány párpárhuzamos egyenest! A grafikus program segítségével győződjetek meg arról, hogy az egyenesek tényleg párhuzamosak-e!

31. Készítsetek néhány olyan rajzot, melyek illusztrálják a párhuzamos egyenesek tulajdonságait! A grafikus program alkalmazásával győződjetek meg arról, hogy ezek a tulajdonságok tényleg teljesülnek!

32. Rajzoljatok két párhuzamos egyenest! Hogyan állapítható meg a köztük lévő távolság?

A háromszög szögeinek összege

33. Rajzoljatok egy tetszőleges háromszöget! Szerkesszétek meg az összes külső szögét! Alkalmazva a grafikus program eszközeit, állapítsátok meg a megszerkesztett szögek fokmértékét!

Derékszögű három szög

34. Rajzoljatok egy derékszögű háromszöget, és jelöljétek vékony ívvel a derékszögét (lásd a 380. ábrát)!

35. Rajzoljatok két derékszögű háromszöget, melyekkel szemléltethető a derékszögű háromszögek egybevágósága! Jelöljétek a rajzon azonos számú vonalkával az egyenlő oldalakat, és azonos számú ívvel az egyenlő szögeket!.

36. Szerkesszetek derékszögű háromszöget, melynek hegyesszöge 30°! Ellenőrizzétek, hogy igaz-e 19.1. tétel állítása és a 19. pont 1. alap feladatának állítása!

Kör és körlap

37. Ismerkedjetek meg a körvonalat és a körlapot ábrázoló eszközökkel! Mivel különbözik a körvonal és a körlap ábrázolása? Milyen eszköz szükséges ahhoz, hogy az ábrázolt körvonalból körlapot készítsünk?

38. Rajzoljatok körvonalat, és húzzátok meg húrját és átmérőjét. A körvonal ábrázolásakor milyen eleme szükséges ahhoz, hogy az átmérőt pontosan megrajzolhassuk?

39. Rajzoljatok körvonalat és jelöljetek rajta egy pontot! Milyen eszközt kell alkalmazni ahhoz, hogy megrajzolhassuk az adott pontban a körvonal érintőjét?

A háromszögbe beírt és köré írt körvonal

40. Rajzoljatok egy tetszőleges háromszöget. Szerkesszétek meg a háromszögbe és a köré írt körvonalat úgy, hogy nem alkalmazzátok a 22. pontban tanult elméleti ismereteket. Ezután szerkesszétek meg ugyanezeket a köröket, alkalmazva az 22.1 és 22.2. tételeket! Sikerül-e a szerkesztést gyorsabban és pontosabban elkészíteni?

Szerkesztési feladatok

41. A szerkesztési feladatok megoldása során körzőt és vonalzót használunk. Ha grafikus szoftverrel akarjátok elkészíteni a szerkesztést, akkor milyen eszközöket lehet felhasználni a körző és a vonalzó helyett?

42. Ismerjétek meg azokat az eszközöket, amelyekkel különböző mértani alakzatok különböző színben ábrázolhatók!

43. Az általatok választott rajzszerkesztő rendelkezik-e olyan eszközzel, amely lehetővé teszi a mértani testek metszetének automatikus meghatározását?

PROJEKTMUNKA

Ez a rész elsősorban azoknak szól, akik szeretnék megtanulni az önálló tudásszerzést, kreatív gondolkodást, álláspontjuk formálását, kifejezését és védelmét, hipotézisek felállítását, valamint a legracionálisabb és legszokatlanabb megoldások megtalálását.

Az első lépés, amely segíthet e célok elérésében, a projektmunkában való részvétel.

A projektl – a kiválasztott téma független tanulmányozása, melyet egyénileg és csoportosan is el lehet végezni.

Néhány tanácsot adunk a projekttel kapcsolatos munka megszervezéséhez és a kutatási eredmények tervezéséhez.

1. A téma kiválasztásakor figyelembe kell venni annak relevanciáját, a szakirodalomban és az internetes forrásokban található információforrások elérhetőségét. Ugyanakkor nagyon fontos az a vágy, hogy a választott témával kapcsolatos munkát kutatóként szeretnétek elvégezni.

2. A munka egy előzetes terv elkészítésével kezdődik, melyben körvonalazódik az elképzelés és a terv megvalósításának szakaszai. A főbb információforrások megismerése után a projekt vezetője segítségével elkészítjük a végleges tervet.

3. Fontos a kutatási célok világos megfogalmazása. Felírhatók például a következő módon: tanulmányozd, írd le, elemezd, bizonyítsd, hasonlítsd össze stb.

4. A munka a kutatás eredményeinek összegzésével, következtetések levonásával, a téma további tanulmányozására vonatkozó kilátások megrajzolásával zárul.

5. A munka hozzávetőleges terjedelme 10-15 oldal. Ezen kívül szemléltető anyag is alkalmazható.

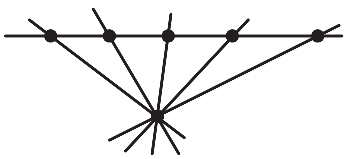
6. A munka bemutatható referátum, beszámoló vagy számítógépes prezentáció formájában is.

Az alábbiakban a projektmunkához ajánlott választható témák vannak felsorolva.

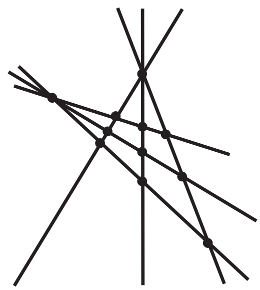
1. Geometria a környezetünkben
2. Olló egy geometrikus kezében
3. Geometria és művészet
4. Eukleidész és figyelemre méltó könyve "Elemek"
5. A geometria az egyik legrégebbi tudomány
6. Az ókor három híres problémája – szögharmadolása, kör négyszögesítése, kocka kettőzése.
7. Egy probléma – két megoldás
8. A PMH módszer a szerkesztési feladatokban
9. Szerkesztések a terepenl – speciális eszközök segítségével
10. A geometria, mint tudomány kialakulása és fejlődésének főbb állomásai

MEGOLDÁSOK ÉS ÚTMUTATÁSOK

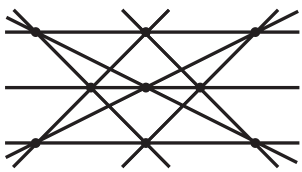
12. 382.ábra. **14.** 1 pont, vagy 4 pont, vagy 6 pont. **15.** A lehetséges legkevesebb metszéspontok számal – 1, a legtöbbl – 10. **16.** 383.ábra. **17.** 12 pont. **18.** 384. ábra.. **41.** 8 cm vagy 56 cm. **43.** 1) Az *EF* szakasz összes pontja; 2) az *A* és *B* pontok (385. ábra); 3) nem léteznek ilyen pontok.



382.ábra



383.ábra



384.ábra

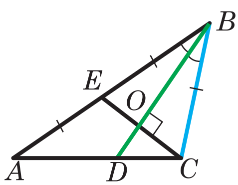
385.ábra

44. Ilyen pontból kettő van. Az egyik *AB* szakasz olyan belső pontja, hogy *AC* : *BC* = 1 : 2, a másik pont pedig olyan, hogy az *A* pont lesz a *BC* szakasz felezőpontja. **45.** 4 cm. **49.** *Útmutatás.* Alkalmazzátok a következő egyenlőséget: 1) $13 - 2 \cdot 5 = 3$; 2) $3 \cdot 5 - 13 = 2$; 3) $2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 = 1$. **50.** *Útmutatás.* Alkalmazzátok a következő egyenlőséget: 1) $2 \cdot 11 - 2 \cdot 7 = 8$; 2) $3 \cdot 11 - 4 \cdot 7 = 5$. **74.** 60°. **75.** 108°. **78.** 68°. **79.** 153°. **80.** 1) 6°. 2) 0,5°. **82.** 50° vagy 110°. **83.** 77° vagy 163°. **87.** *Útmutatás.* Bármilyen félegyenesre mérjétek fel 14-szer az adott szöget. Alkalmazzátok azt, hogy az így kapott szög 2° -kal lesz nagyobb, mint az egyenesszög. **88.** 1) *Útmutatás.*

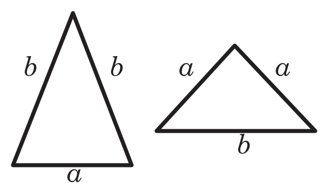
Alkalmazzátok azt, hogy az így kapott szög 19°·19 = 361°. **89.** Igen. *Útmutatás.* Tételezzük fel, hogy nincs ilyen szög, ellentmondást kapunk. **91.** 1) Nyugati vagy keleti; 2) északnyugatra vagy északkeletre. **113.** 90°. **114.** 180°. **115.** 75°. **116.** 108°, 72°. **117.** 136°, 44°. **136.** 1) 124°; 2) 98°. **137.** 126°. **141.** 70°, 160°. **142.** 130°. **143.** 1) *Útmutatás.* 90° =17° · 5 +5°.

168. 48 cm. **169.** 13 cm. **171. 120ϒ. 206.** 3 cm. **207.** 10 cm. **209.** 2) 2) *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy $\angle AOM = \angle BOK$. AOB szög – egyenesszög. Ekkor $\angle AOM + \angle MOB = 180°$. Ebből következik, hogy $\angle MOB + \angle BOK = 180°$. **214. 20ϒ, 70ϒ. 243.** 4 cm vagy 7 cm **244.** 4 см és 6 см vagy 5 см és 5 cm. **248.** 26 см vagy 14 cm. **250.** 1) $\frac{5a}{7}$; 2) $\frac{9a}{14}$.

260. 6 cm. **265.** *Útmutatás.* Alkalmazzátok azt, hogy ha a háromszög szögfelezője magasság is, akkor a háromszög egyenlő szárú, az *MAD* és *KBD* háromszögek egyenlőszárúak. **266.** 8 cm. **267.** *AB* : *AC* = 1 : 2. **269.** 2 cm, 3 cm, 4 cm. *Útmutatás.* A *BD* szakasz– az *ABC* háromszög szögfelezője lesz (386.ábra), *CE* szakaszl – az oldalfelezője, $BD \perp CE$. Bizonyítsátok be, hogy ∅*CBE* egyenlőszárú ($BC = = BE$). Ekkor $AB = 2BC$ és a következő esetek lehetne: *AB* – *BC* = 1 см vagy *AB* – *BC* = 2 cm, vagyis *BC* = 1 см vagy *BC* = 2 cm.



386.ábra



387.ábra

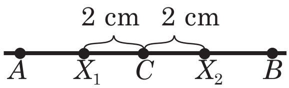
270. 2 cm. *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy a K*MC* és KDA háromszögek egyenlőszárúak. **288.** Nem. *Útmutatás.* Vizsgáljátok meg az 387. ábrán lévő háromszöget.

289. *Útmutatás.* Legyen az *ABC* és $A_1B_1C_1$ – az adott háromszögek, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, az *AM* és A_1M_1 – az *ABC* és $A_1B_1C_1$ megfelelő oldalfelezői. Az *AM* és A_1M_1 szakaszok *M* és M_1 pontjaik utáni meghosszabbításaira felmérjük megfelelően az MD és M_1D_1 olyan szakaszokat, hogy *MD* = *AM* és $M_1D_1 = A_1M_1$. Bizonyítsátok be, hogy *AC* = *BD* és $A_1C_1 = B_1D_1$. Ezek után bizonyítsátok be, hogy *ABD* és $A_1B_1D_1$, M*BD* és $M_1B_1D_1$ és végül az *ABC* és $A_1B_1C_1$ háromszögek egybevágók. **316.** Végtelen sok. **322.** *Útmutatás.* Feltételezzük, hogy az a és *b* egyenesek metszik egymást. Az a egyenesen felveszünk egy bármilyen pontot, amely különbözik az a és *b* egyenesek metszéspontjától. Az adott ponton át egyenest fektetünk, amely metszi az a egyenest, és párhuzamos a b egyenessel, ez ellentmond a feltétellel. **323.** 6 cm. **324.** 35°. **325.** 90°. **349.** Nem. **352.** *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy a Δ*BKM* egyenlőszárú. **353.** *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy $BF \parallel AC$ és $BD \parallel AC$, és alkalmazzátok a párhuzamossági axiómát. 354. 111° vagy 69°. **378.** 40°. **378.** 40°, 70°, 70°. **384.** 121°. **385.** *Útmutatás.* A *C* ponton keresztül fektessetek egy egyenest, amely párhuzamos az *AB*-vel. . **391.** *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy az AMO és *CK*Ol – egyenlőszárúak. **393.** *AD* : DB = 2 : 3. **438.** 25°, 55°, 100°. **439.** 35°, 35°, 110°. **441.** 140°. **444.** *Útmutatás.* Határozzátok meg az *ABC* háromszög szögeit és bizonyítsátok be, hogy az *AMB* és *MAC* egyenlőszárú háromszögek. **445.** 36°, 72°, 72°. **446.** *Útmutatás.* Alkalmazzátok az indirekt bizonyítási módszert. **448.** Hegyesszögű. *Útmutatás.* Vizsgáljátok meg sorban a háromszög szögeit. Mivel a két másik szög összege nagyobb, mint 90°, ezért a vizsgált szög kisebb lesz 90°-nál. Mivel a háromszög minden szöge kisebb 90°-nál, ezért hegyeszögű lesz. **449.** Nem. **451.** 36°, 72°, 72°

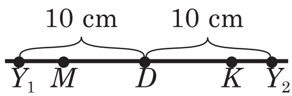
vagy 90°, 45°, 45°. **452.** $90°-\frac{\alpha}{2}$. **453.** $\left(\frac{540}{7}\right)^{\circ}$, $\left(\frac{540}{7}\right)^{\circ}$, $\left(\frac{180}{7}\right)^{\circ}$. **454. 90ϒ, 40ϒ, 50ϒ.** .*Útmutatás.* Vizsgáljátok meg a *DAK* háromszöget ahol a *K* pont az *AB* szakasz felezőpontja. **455.** 36 cm. **464.** 37 cm. **466.** 3 cm. **467.** 12 cm. **469.** Igen. **470.** *Útmutatás.* A D*AC* háromszögben a D*AC* szög tompaszög. Tehát, *DC* > *AC*. **473.** *Útmutatás.* Vegyetek fel az m egyenesen egy bármilyen *X* pontot és hasonlítsátok össze az AX + *BX* összeget az *AB* szakasz hosszával. **474.** 3 cm. **475.** *Útmutatás.* Az *AM* oldalfelezőn az *M* ponton túl vegyétek fel az MD szakaszt, amely egyenlő ezzel az oldalfelezővel, és vizsgáljátok meg az *ABD* háromszöget! **477.** 40° vagy 140°. Két megoldás lesz. **479.** 1) A folyosó bármely pontján a kórtermek bejáratai között (beleértve a kórtermek bejárataihoz közeli pontokat is); 2) a közepén található körterem bejáratánál; 3) a folyosó bármely pontján a második és harmadik kórterem bejáratai között (beleértve a kórtermek bejárataihoz közeli pontokat is). **480.** Nagyobb, mint 1 m nem nagyobb, mint 5 m. **510.** *Útmutatás.* Bizonyítsátok be az AKH és *CM*H háromszögek egybevágóságát. **511.** *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy $\Delta MEN = \Delta NFM$. ebből következik, hogy *MK* = NK. Ezen kívül, *KE* = *FM* =NE. Tehát, *MK* = *MN*. **512.** Nem. **514.** 50°, 130°. **527.** 30°, 1 cm. **528.** 30°. **529.** 9 cm. **530.** 15 cm. **533.** 8 cm. **534.** 6 cm. *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy *ADB* háromszög egyenlőszárú. **536.** 21 cm. **554.** 6 cm. **560.** 1,5 cm. **561.** 2,5 cm. **562.** Adott sugarú és adott középpontú körvonal. **563.** Az adott pontokat összekötő szakasz felezőmerőlegese. **564.** Két egyenes, melyek a négy szög szögfelezője lesz. **565.** Az adott alap felezőmerőlegességének az összes pontja, kivéve a felezőmerőleges és az alap metszéspontját. **566.** Olyan egyenes, amely az adott egyenesekre merőleges szakasz felezőmerőlegese, és amelynek végpontjai az adott egyenesekhez tartoznak. **567.** Párhuzamos egyenes pár, amelyek mindegyike adott távolságra van egy adott egyenestől. **568.** *Útmutatás.* Kössétek össze az *M* pontot és a kör *O* középpontját, vizsgáljátok meg az *AOM* és a B*OM* háromszögeket. **569.** Annak a félsíknak az összes pontja, amelyhez a *B* pont tartozik, és amelynek határa az *AB* szakasz felezőmerőlegese, kivéve ennek a félsíknak a határát. **570.** A sík összes olyan pontja, amely nem tartozik az *A* középpontú és *AB* sugarú körhöz. **572.** 55°, 85°, 40°. **574.** 20°. **592.** 1) 90°; 2) 120°. **593.** 12 cm. 595. 40°. **596.** 120°. **601.** Az adott ponton átmenő egyenes minden pontja merőleges az adott egyenesre, kivéve az adott pontot. **602.** A szögfelező minden pontja, kivéve a szög csúcsát. **603.** A sík összes pontja, kivéve ezt az egyenest. **604.** *Útmutatás.* Az *OA*K háromszög figyelembevétele után bizonyítsuk be, hogy *OK* = 2AK. **605.** *Útmutatás.* Alkalmazzátok a körhöz egy ponton keresztül húzott érintők tulajdonságát. **609.** 18°. **638.** 24 cm, 24 cm, 20 cm. **639.** 20 cm, 14 cm, 18 cm. **640.** 50°, 55°, 75°. **643.** *Útmutatás.* Alkalmazzátok a körhöz egy ponton keresztül húzott érintők tulajdonságát. **644.** a. **645.** 16 cm. *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy a kialakított háromszögek kerületeinek összege egyenlő az adott háromszög kerületével. **646.** 0,5 cm. *Útmutatás.* Legyen az M_1 i M_2 az érintési pontjai *ABD* és *DBC* háromszögekbe írt körvonalnak. A DM_1 és DM_2 szakaszokhoz alkalmazzátok az 643. feladatot. **647.** *Útmutatás.* Alkalmazzátok azt, hogy hogy az *AMC* háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást. **648.** *Útmutatás.* A szög különböző oldalain jelöljétek be az *M* és *N* pontokat. Rajzoljátok meg a *BM*N és BNM szögek szögfelezőit! Ezután jelöljétek meg az *E* és *F* pontokat a szög különböző oldalain. Rajzolja meg a *BEF* és BFE szögek szögfelezőit! **649.** 36°, 36°, 108°. *Útmutatás.* Használjátok azt a tényt, hogy az FAO és B*OA* háromszögek egyenlőszárúak!

651. 52°, 52°, 76°. **652.** 3 cm, 7 cm. **683.** 1) *Útmutatás.* Szerkesszünk olyan derékszögű háromszöget, amelyben az átfogó egyenlő az adott szögfelezővel, a hegyesszöge pedig a fele a megadott szögnek. **685.** *Útmutatás.* Szerkesszünk olyan derékszögű háromszöget, amelyben az egyik befogó egyenlő a megadott alap felével, a másik pedig a kör sugara. **688.** *Útmutatás.* Szerkesszünk olyan derékszögű háromszöget, amelynek a befogója megegyezik az adott magassággal, és a vele szemben lévő hegyesszög az adottval egyenlő! **689.** *Útmutatás.* Szerkesszünk olyan derékszögű háromszöget, amelyben az átfogó az adott oldallal, a befogó pedig a megadott magassággal egyenlő. **697.** *Útmutatás.* Szerkesszünk derékszögű háromszöget, melynek egyik befogója egyenlő a befogó és a sugár különbségével, a másik pedig a sugárral. Ekkor a befogóval szemközti szöge egyenlő a keresett háromszög hegyesszögének felével. **701.** *Útmutatás.* Szerkesszünk egy kört, amely áthalad a három megadott ponton. **702.** Szerkesszünk egy szöget, amely 60°. Ezután alkalmazzátok a következő egyenlőséget: 6° = 60° − 54°. 704. 1) 15°, 95°, 70°; 2) 46°, 59°, 75°. 705. 25°, 65°. **706.** 1) Hegyesszögű; 2) tompaszögű. **717.** *Útmutatás.* A keresett pont a PMH-hez tartozik, amelyet *AB* távolságra lesz az n egyenestől. A jelzett PMH az n egyenessel párhuzamos egyenes pár. Ezen egyeneseknek az m egyenessel való metszéspontjai mindegyike teljesíti a feltételt. A feladatnak két megoldása lesz. **724.** *Útmutatás.* Rajzolj egy szakaszt, amely merőleges két párhuzamos egyenesre, a szakasznak az *A* és *B* végpontjai ezekhez az egyenesekhez tartoznak. Ekkor a keresett kör középpontja két PMH -hez tartozik: az első egyenlő távolságra van az *A* és *B* ponttól, a második pedig $\frac{1}{2}AB$. távolságra van az adott ponttól. **725.** *Útmutatás.* Az adott *B* pontban adott egyenest érintő körök középpontjainak geometriai helye az adott pontra merőleges és ezen a ponton átmenő egyenes (az adott B pont nem tartozik a PMH-hez). Az A és B pontokon átmenő körök középpontjainak mértani helye az AB szakasz felezőmerőlegese. **731.** *Útmutatás.* Szerkesszünk meg egy BCD derékszögű háromszöget, amelyben a BC befogó egyenlő az adott befogóval, a DC pedig az átfogó és a második befogó összege. Ekkor a keresett ABC háromszög A csúcsa a BD szakasz felezőmerőlegeséhez tartozik. **732.** *Útmutatás.* Szerkesszetek egy ADB háromszöget, melyben a $\angle D = 45°$, a DB oldal egyenlő a befogók összegével, az AB oldal pedig az átfogóval! **733.** *Útmutatás.* Szerkesszétek meg az ADB háromszöget, melyben $\angle D = 135°$,, a DB oldala az adott befogók különbsége legyen, az AB pedig az adott átfogó. **734.** *Útmutatás.* Szerkesszétek meg a DBC háromszöget, melyben a $\angle C = 90°$,, a CB befogó az adott befogóval legyen egyenlő a CD befogó pedig az Átfogó és a másik befogó különbsége. Ekkor a keresett A csúcs a DB szakasz felezőmerőlegesére illeszkedik. **735.** *Útmutatás.* Szerkesszünk meg egy ADC háromszöget, amelyben az AC oldal egyenlő az adott oldallal, a DC oldal a másik két oldal összegével, és a DCA szög egyenlő az adott szöggel! **736.** *Útmutatás.* Szerkesszük meg az ADC háromszöget, ha adott az AC oldal, a megadott C szög és a DC oldal egyenlő az adott oldalak különbséggel. A keresett ABC háromszög B csúcsa az AD szakasz felezőmerőlegesén fekszik. A leírt szerkesztés arra az esetre alkalmazható, ha az adott C szög a két ismeretlen oldal közül a nagyobbikkal szomszédos. **737.** *Útmutatás.* Szerkesszétek meg az ADC háromszöget, melynek $\angle D = 90° + \frac{\beta}{2}$, ahol a β – az adott szög, az AC –az adott oldal, AD a két adott oldal különbsége. Ekkor a keresett B pont a DC szakasz felezőmerőlegesére illeszkedik. **738.** *Útmutatás.* Szerkesszétek meg az ADC háromszöget, melyben $\angle D = \frac{\beta}{2}$, ahol a β – az adott szög, az *AC* oldallal egyenlő, az *AD* oldal pedig az adott oldalak összege. Ekkor a keresett *B* csúcs a *DC* oldal felezőmerőlegesére illeszkedik. **740.** *Útmutatás.* Szerkesszetek derékszögű háromszöget, befogója, amely a magassággal egyenlő és a szemközti szöge alapján, amely az adott szöggel lesz egyenlő. Ennek a háromszögnek az átfogója lesz a keresett egyik oldal. Ezzel az adott feladat az 735. feladat alapján oldható meg. **741.** *Útmutatás.* Szerkesszetek *BDM* derékszögű háromszöget, melynek a *BM* az adott oldalfelező, a *BD* befogó pedig az adott magasság. A keresett háromszög köré írt körvonalának középpontja a DM egyenesre merőleges egyenesre illeszkedik, amely az *M* ponton halad át. **742.** *Útmutatás.* Szerkesszetek *ABD* háromszöget, melynek *AB* és *AD* oldalai az adott két oldallal egyenlő, a *BD* pedig 2-szer nagyobb, mint az adott oldalfelező. **743.** *Útmutatás.* Szerkesszetek *ADC* háromszöget, melynek *AC* oldala az adott oldal, az *AD* pedig 2-szer nagyobb az oldalfelezőjénél és a *D* pontból húzott magassága az adott magassággal legyen egyenlő. Bizonyítsátok be, hogy a *DC* oldal a keresett háromszög egyik oldala lesz. **745.** 65°. **746.** 15°, 75°. **747.** 180°.

749. $\frac{4a}{5}$. **750.** Az X_1 és X_2 pontok a 388.ábrán láthatók. **751.** Az Y_1 és Y_2 pontok a 389.ábrán láthatók. **754.** 60° vagy 180°. Két megoldása van. **756.** 20°. **758.** 42 cm. **773.** 15 cm. **784.** 45°, 45°, 90°. **787.** 30°, 40°, 110°. **788.** 35°. **789.** 10°. **790.** 52°, 52°, 76°. **791.** 70°, 70°, 40°. **796.** 33°, 57°. **797.** 45°. **801.** 50°, 50°, 80° vagy 80°, 80°, 20°. **803.** 70°, 70°, 40° vagy 50°, 50°, 80°. **804.** 135°. **807.** 22 cm. **808.** 9 cm. **809.** 60°. **813.** 120°. **817.** 60°. **821.** 6 cm. **823.** *Útmutatás.* Legyen az *O* pont a körvonal középpontja. Bizonyítsátok be, hogy $\angle COD = 180°$. **824.** 114°. **826.** *Útmutatás.* Bizonyítsátok be, hogy az O_1 és O_2 pontok a *B* szög szögfelezőjére illeszkednek.



388.ábra



389.ábra

A TESZTKÉRDÉSEK MEGOLDÁSA

A feladatsor száma	A feladat sorszáma										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	C	D	A	C	C	C	B	B	C	B	C
2	B	B	D	D	B	C	B	B	A	C	B
3	D	C	C	A	A	B	C	C	B	C	A
4	C	D	A	C	B	A	C	C	D	B	D

A MATEMATIKAI KIFEJEZÉSEK EREDETE

Axióma Аксіома
görög: axiosl – elismerésre méltó

Szögfelező Бісектриса
latin: bisl – kétszer és sectrix – metsző

Geometria, mértan Геометрія
latin: geo– föld és metreol – mérés

Átfogó Гіпотенуза
latin: giptenusal – az, ami összeköt

Fok Градус
latin: gradusl – lépés, lépcsőfok

Átló Діагональ
görög: dia– át és gonium szög

Átmérő Діаметр
görög: diametros– átmérő

Befogó Катет
görög: katetosl – függőleges, merőleges

Négyzet Квадрат
latin: quadratus– négyszögű (a quattuor–négy)

Kocka Куб
görög: kybos– játékkocka

Matematika Математика
görög: mathematike (mathema– tudás, tudomány)

Oldalfelező Медіана
latin: mediusl – középső

Méter Метр
francia: mètre –mérőpálca, vagy görög metron– mérték

Párhuzamosság Паралельність
görög: parallelosl – ami mellette van

Kerület Периметр
görög: peri– körül és a metreo mérni

Merőleges Перпендикуляр
latin: perpendicularisl – merőleges

Síkmértan Планіметрія
görög: planum –sík

Arány Пропорція
latin: proportio –összefüggés

Sugár Радіус
latin: radiusl – küllő a kerékben, küllő

Tétel Теорема
görög: theoreo –mérlegelni, megvizsgálni

Szögmérő Транспортир
latin: transportarol – átvinni, lefordítani

Alakzat Фігура
latin: figura – megjelenés, kép

Képlet Формула
latin: formula – alak, szabály

Húr Хорда
görög: chorde – húr, íjhúr

Középpont Центр
latin: centruml – az iránytű mutatójának hegye

Körző Циркуль
latin: circulus –Körvonal

TÁRGYMUTATÓ

Adott egyenesre merőleges egyenes szerkesztése....216
Adott háromszöggel egybevágó háromszög létezésének axiómája.....65
Adott oldalakkal háromszög szerkesztése 217–219
Adott szöggel egyenlő szög szerkesztése 214
Alaptulajdonság 52
Átfogó..................164
Axióma 52

Befogó 164

Csúcsszögek tulajdonsága 40
Csúcsszögek 40

Derékszög 32
Derékszögű háromszög ismertetőjelei .... 164 –166
Derékszögű háromszög tulajdonságai...........172
Derékszögű háromszög 64

Egybevágó alakzatok 106
Egybevőgó háromszögek............64
Egyenes alaptulajdonsága 12
Egyenes- tétel 107
Egyenes 11
Egyenesek közti szög 45
Egyenesek párhuzamosságának ismertetőjelei 125, 131
Egyenesszög 29
Egyenlő szakaszok 17
Egyenlő szárú háromszög szára.........86
Egyenlő szögek 29
Egyenlőoldalú háromszög..............86
Egyenlőszárú háromszög alapja 86
Egyenlőszárú háromszög alapján lévő szöge 86
Egyenlőszárú háromszög csúcsa 86
Egyenlőszárú háromszög csúcsnál lévő szöge 86
Egyenlőszárú háromszög ismertetőjelei 94–96
Egyenlőszárú háromszög tulajdonságai............86
Egyenlőszárú háromszög..............86
Egymást metsző egyenesek 12
Egyoldali szögek tulajdonsága 132
Egyoldali szögek 131
Egységnyi szög 30
Egységszakasz 17
Érintési pont 195
Érintő tulajdonsága.......196

Félegyenes kezdőpontja.....26
Félegyenes...............26
Félegyenes...............26
Félsík határa 29

Félsík .29
Ferde 46
Fok 30
Fordított tétel. 107

Geometria (Mértan) 10

Háromszög csúcsa 63
Háromszög egyenlőtlenség 158
Háromszög kerülete 64
Háromszög köré írt körvonal középpontja. . . .204
Háromszög köré írt körvonal 203
Háromszög köré írt körvonal 203
Háromszög külső szöge 149
Háromszög külső szögének tulajdonságai. 150
Háromszög magassága 68
Háromszög oldala. 63
Háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja. 204
Háromszög oldalfelezője . . .68
Háromszög szárai 27
Háromszög szöge 63
Háromszög szögeinek összege 149
Háromszög szögfelezőinek metszéspontja. 205
Háromszög szögfelezője. . . .68
Háromszög. 63
Háromszögbe írt körvonal középpontja. 205
Háromszögbe írt körvonal .204
Háromszögbe írt körvonal 204
Háromszögek egybevágóságának ismertetőjelei . . . 74, 76, 100
Hegyesszög 32
Hegyesszögű háromszög. 64
Hosszegység 107

Indirekt bizonyítási módszer. 107
Ismertetőjel-tétel. 106

Kiegészítő félegyenesek. 27
Kisegítő szerkesztés módszere. 108
Kölcsönösen fordított tétel 107
Kör érintőjének ismertetőjelei 196
Körbe írt háromszög. 203
Körlap átmérője 189
Körlap átmérője 195
Körlap húrja. 189
Körlap középpontja. 189
Körlap sugara 189
Körlap 188
Körvonal átmérője 188
Körvonal érintője 195
Körvonal húrja. 188
Körvonal köré írt háromszög 204
Körvonal középpontja. 188
Körvonal sugara 188
Körvonal tulajdonságai. 194, 195
Körvonal 188
Következmény. 107
Következmény-tétel. 107

Különböző oldali szögek tulajdonsága.... 131
Különböző oldalú háromszög..............87
Különböző oldalú szögek 131

Másodperc................32
Megfelelő szögek tulajdonsága 132
Megfelelő szögek 131
Meghatározás 12
Mellékszögek tulajdonsága 39
Mellékszögek.............39
Merőleges egyenesek......45
Merőleges félegyenesek....46
Merőleges szakaszok......45
Merőleges talppontja......46
Merőleges 46
Mérőszalag 18
Metsző egyenes 131

Párhuzamos egyenesek axiómája 127
Párhuzamos egyenesek közti távolság 142
Párhuzamos egyenesek tulajdonságai...... 140, 141
Párhuzamos egyenesek 125
Párhuzamos félegyenesek...........125
Párhuzamos szakaszok 125
Perc 32
Planimetria (síkmértan)....10
Pont távolsága az egyenestől 46
Pont 11
Pontok közötti távolság 19
Pontok mértani helye.....185
Pontok mértani helyének módszere......224
Posztulátum...............55

Szakasz belső pontja 17
Szakasz felezése.........216
Szakasz felezőmerőlegese 75
Szakasz felezőmerőlegesének szerkesztése 215
Szakasz felezőpontja 19
Szakasz hossza...........18
Szakasz hosszának alaptulajdonsága 19
Szakasz végpontjai........17
Szakasz 17
Szakaszok összege........33
Szerkesztési feladat jellemzése 219
Szög csúcsa..............27
Szög elhelyezésének alaptulajdonsága 30
Szög fokmértéke..........30
Szög mértéke 30
Szög mértékének alaptulajdonsága 33
Szög 27
Szögfelező szerkesztése 217
Szögfelező 30

Tétel feltétele 106
Tétel következménye 106
Tétel 13
Tompaszög...............32
Tompaszögű háromszög..............64
Tulajdonság-tétel.........106

TARTALOM

Szerzőktől 3
Feltételes jelölés 7
Bevezetés. Mit tanulmányoz a mértan? 8

1.§ Legegyszerűbb mértani alakzatok és tulajdonságaik 11
1. Pontok és egyenesek 11
2. Szakasz és a szakasz hossza 17
3. Félegyenes. Szög. Szögek mérése 26
4. Csúcsszögek és mellékszögek 39
5. Merőleges egyenesek 45
6. Axiómák 51
A mértan történetéből 54
1. Sz. Feladat. Önellenőrzés teszt formában 59
Az 5 paragrafus összefoglalása 60

2. § Háromszögek 63
7. Egybevágó háromszögek. A háromszög magassága, oldalfelezője, szögfelezője 63
8. A háromszög egybevágóságának első és második alapesete 73
9. Egyenlőszárú háromszög és a tulajdonságai 86
10. Az egyenlőszárú háromszög ismertetőjelei 94
11. A háromszögek egybevágóságának harmadik alapesete 100
12. Tételek 106
Ukrán geometriai iskola 112
2. Sz. Feladat. Önellenőrzés teszt formában 120
A 2 paragrafus összefoglalása 122

3. § Párhuzamos egyenesek. Háromszög szögeinek összege 125
13. Párhuzamos egyenesek 125
14. Két egyenes párhuzamosságának ismertetőjelei 131
Eukleidész ötödik posztulátuma 139
15. Párhuzamos egyenesek tulajdonságai 140

16. Háromszögek szögeinek összege 149
17. Háromszögekkel kapcsolatos egyenlőtlenségek 158
18. Derékszögű háromszögek. 164
19. A derékszögű háromszögek tulajdonságai 172
Matematika is a nők dolga 176
3. Sz. Feladat. Önellenőrzés teszt formában 179
A 3 paragrafus összefoglalása 181

4. § Körvonal és körlap 184
20. Pontok mértani helye. Körvonal és körlap. 184
21. Körvonal néhány tulajdonsága. Körvonal érintője 194
22. Háromszög köré és háromszögbe írt körvonal 203
23. Szerkesztési feladatok 213
59. Mértani helyek módszere a szerkesztési feladatokban 224
Mértani szerkesztések története 232
4. Sz. Feladat. Önellenőrzés teszt formában 234
A 4 paragrafus összefoglalása 235
A 7.Ostályos *ma*te*ma*tika ismétlő gyakorlatai. 238
Barátkozzunk a számítógéppel 249
Projekt munka 255
Megoldások és útmutatások. 257
A tesztkérdés*ek* megoldása 265
A *ma*te*ma*tikai kifejezés*ek* er*ede*te 266
Tárgymutató 267

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ
підручник для 7 класу
з навчанням угорською мовою
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Переклад з української мови
Перекладач Поллої Дезидер Федорович
Угорською мовою

Видано за рахунок державних коштів
Продаж заборонено

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

У підручнику з навчальною метою використано
фотоматеріали, розміщені у вільному доступі в мережі
«Інтернет».

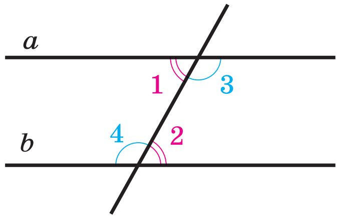
Редакторка *О. Литвин*
Обкладинка *Н. Мінєєва*
Комп'ютерне верстання *М. Карпенко*
Художнє оформлення *С. Северин*
Коректори *Д. Поллої, К. Кучінка*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 17,00. Обл.-вид. арк. 15,53.
Тираж 1,568 прим. **Зам.** № 24-11-1109

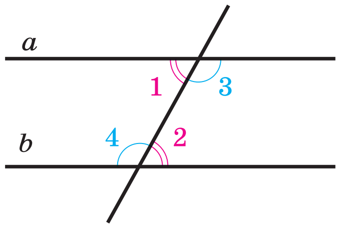
ТОВ «ВИДАВИЦТВО АТЛАНТ»,
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7928 ВІД 08.09.2023. Адреса
редакції: 02095, м. Київ, вул. Княжий затон, 9а, офіс 369.
E-mail: atlant_publishing@ukr.net

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ»,
вул. Максиміліанівська, 17,м. Харків, 61024
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6847 від 19.07.2019 р.

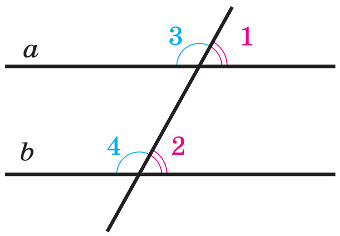
ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ



Якщо $\angle 1 = \angle 2$ ($\angle 3 = \angle 4$), то $a \parallel b$

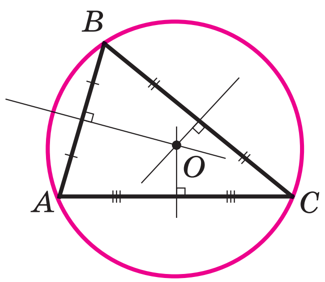


Якщо $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ ($\angle 2 + \angle 3 = 180°$), то $a \parallel b$



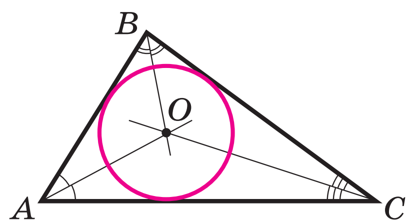
Якщо $\angle 1 = \angle 2$ ($\angle 3 = \angle 4$), то $a \parallel b$

КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА



Центр O кола — точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника

КОЛО, ВПИСАНЕ В ТРИКУТНИК



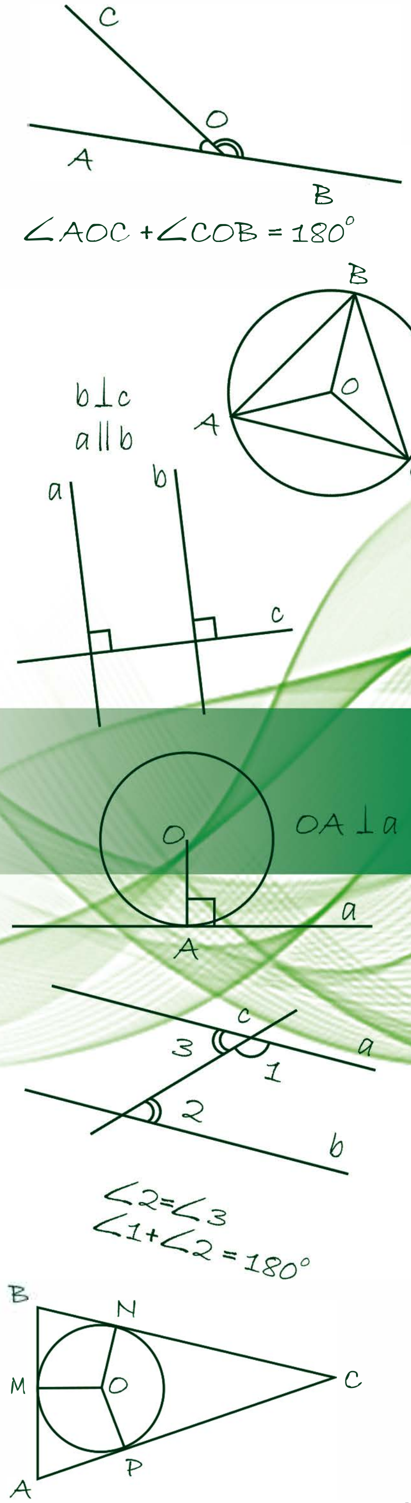
Центр O кола — точка перетину бісектрис кутів трикутника

ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

Друковані літери		Назви літер
A	a	а
B	b	бе
C	c	це
D	d	де
E	e	є
F	f	еф
G	g	ге
H	h	аш
I	i	і
J	j	йот
K	k	ка
L	l	ель
M	m	ем
N	n	ен
O	o	о
P	p	пе
Q	q	ку
R	r	ер
S	s	ес
T	t	те
U	u	у
V	v	ве
W	w	дубль-ве
X	x	ікс
Y	y	ігрек
Z	z	зет

ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТ

Друковані літери		Назви літер
Α	α	альфа
Β	β	бета
Γ	γ	гамма
Δ	δ	дельта
Ε	ε	епсилон
Ζ	ζ	дзета
Η	η	ета
Θ	θ, ϑ	тета
Ι	ι	йота
Κ	κ	каппа
Λ	λ	ламбда
Μ	μ	мю
Ν	ν	ню
Ξ	ξ	ксі
Ο	ο	омікрон
Π	π	пі
Ρ	ρ	ро
Σ	σ	сигма
Τ	τ	тау
Υ	υ	іпсилон
Φ	φ	фі
Χ	χ	хі
Ψ	ψ	псі
Ω	ω	омега



Arkagyij Merzljak
Mihajlo Jakir

MÉRTAN

7

9 789664 743768

видавництво
АТЛАНТ