Arcadie **Merzleac**
Mihail **Iakir**

GEOMETRIA 7

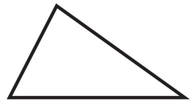
видавництво
АТЛАНТ

Форзац 1

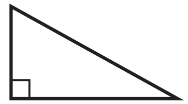
«Моя любов — Україна і математика» — викарбовано на гранітному постаменті пам’ятника науковцеві Михайлу Пилиповичу Кравчуку (1892–1942).

Ми сподіваємося, що це патріотичне висловлювання видатного українського математика стане для вас надійним дороговказом на шляху до професіоналізму.

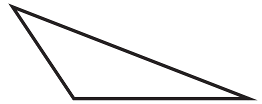
Форзац 2



Гострокутний трикутник



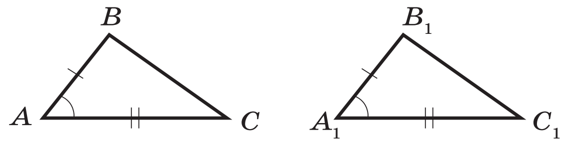
Прямокутний трикутник



Тупокутний трикутник

ПЕРША ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ:

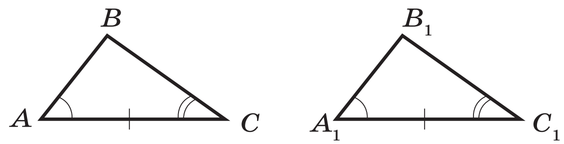
за двома сторонами та кутом між ними



Якщо $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

ДРУГА ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ:

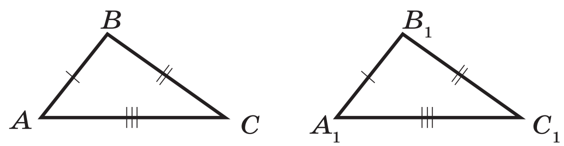
за стороною та двома прилеглими до неї кутами



Якщо $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

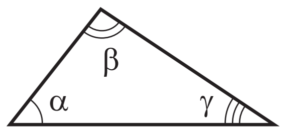
ТРЕТЯ ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ:

за трьома сторонами



Якщо $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Arcadie Merzleac
Mihail Iakir

GEOMETRIA

Manual pentru clasa a 7-a
a instituțiilor de învățământ mediu
general cu predare în limba română

Recomandat de
Ministerul Învățământului și Științei al Ucrainei

ВИДАВНИЦТВО АТЛАНТ
КИЇВ 2024

УДК 373.167.1:514
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 05.02.2024 № 124)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Підручник відповідає модельній навчальній програмі «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.)

Перекладено за виданням:

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрія : підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти /А. Г. Мерзляк, М. С. Якір.; переклад Сучеван М.Ш. — Київ : ВИДАВНИЦТВО АТЛАНТ, 2024. — 272 с. : іл.

ISBN 978-966-474-376-8.(укр.)
ISBN 978-617-8159-38-2(румун.)

УДК 373.167.1:514

© А. Г. Мерзляк, М. С. Якір, 2024
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет, художнє оформлення, 2024
© Сучеван М. Ш. переклад румунською мовою, 2024

ISBN 978-966-474-376-8.(укр.)
ISBN 978-617-8159-38-2(румун.)

DIN PARTEA AUTORILOR

Dragi elevi!

Voi începeți să studiați un nou obiect școlar — **geometria**. Atrageți atenția că cuvintele „geografie” și „geometrie” au rădăcina comună — „geo” (în greacă înseamnă „pământ”). Dar dacă la lecțiile de geografie din clasa a 6-a făceați descrierea pământului („grafie” în greacă înseamnă „descriere”), la lecțiile de geometrie vă ve-ți ocupa direct cu măsurarea pământului („metreo” în greacă înseamnă „a măsura”).

Geometria este una dintre cele mai vechi științe. Denumirea ei se poate explica prin faptul că nașterea și dezvoltarea geometriei au fost strâns legate de activitățile practice ale oamenilor: delimitarea granițelor loturilor de pământ, construcția drumurilor, canalelor de irigație și a altor construcții, adică, geometria a fost o știință aplicativă. Treptat, pas cu pas, omenirea a acumulat cunoștințe și geometria s-a transformat într-o frumoasă și desăvârșită, strictă și consecutivă teorie matematică. La lecțiile de geometrie veți face cunoștință cu această știință și o să vă învățați să aplicați cunoștințele obținute în practică.

Să cunoști geometria este foarte important. Într-adevăr, priviți în jur — peste tot este geometrie, mai exact, **figuri geometrice**: segmente, triunghiuri, dreptunghiuri, paralelipipede dreptunghice, sfere etc.

Fără cunoștințe aprofundate în geometrie, n-ar fi putut să apară construcții arhitectonice complicate (fig. 1, 2), corăbii maritime și avioanele (fig. 3) și chiar detaliile unui constructor pentru copii și modelele pentru broderii (fig. 4). Crearea modelelor pentru cusut cere de la meșteriță să posede imaginația despre astfel de noțiuni geometrice, ca simetria, translația. Fără a cunoaște geometria, este imposibil să devii un bun inginer, constructor sau arhitect, nu poți lucra în domeniul graficii computaționale, designului, modelării hainelor și încălțămintei etc. În general, cunoștințele din geometrie sunt un component important a culturii omenești.

a

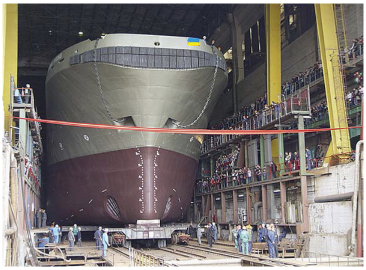
b

Fig. 1. Construcții arhitectonice:
a — hotelul „Salut” (or. Kiev);
b — o clădire administrativă (or. Londra)

Fig. 2. Turnul de televiziune „Sâreț” (or. Kiev)

Geometria este un obiect foarte interesant. Sperăm că voi vă veți convinge de aceasta în curând, ajutați de manualul pe care îl aveți în față. Faceți cunoștință cu structura lui.

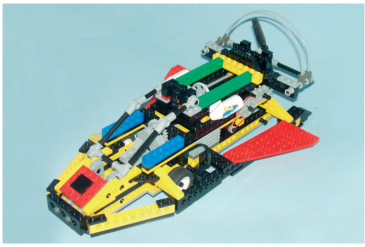
Manualul este împărțit în patru paragrafe, fiecare fiind alcătuit din puncte. În aceste puncte este expus materialul teoretic. Studiindu-l, acordați atenție deosebită textului scris cu caractere **grase**, ***cursive grase*** și *cursive*; astfel în manual sunt evidențiate definițiile, regulile și cele mai importante afirmații matematice.



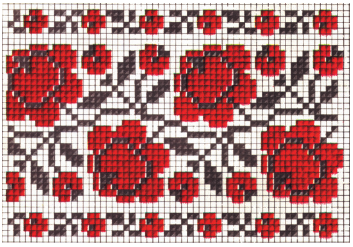
a

b

Fig. 3. Construcții din domeniul construcțiilor de mașini:
a — o corabie a uzinei navale din Nicolaev;
b — avionul AN-225 („Mria”)



a



b

Fig. 4. Geometria în viața de zi cu zi:
a — constructor pentru copii; *b* — model de cusătură

De obicei, expunerea materialului teoretic se încheie cu exemple de rezolvare a problemelor. Aceste scrieri pot fi considerate ca una din variantele posibile de perfectare a rezolvării.

Pentru fiecare punct sunt selectate probleme pentru rezolvare independentă, la rezolvarea cărora vă sfătuim să treceți doar după ce ați însușit materialul teoretic. Printre aceste însărcinări sunt exerciții de complexitate simplă și mijlocie, atât și probleme complicate (marcate cu un asterisc (*)).

Fiecare punct se termină cu rubrica „Observați, desenați, construiți, inventați”. Aici găsiți probleme pentru rezolvarea cărora sunt necesare nu cunoștințe speciale de geometrie, ci doar gândire sănătoasă, inventivitate și pricepere. Aceste probleme dezvoltă „viziunea geometrică” și intuiția.

În plus, în rubrica „După ce ați terminat lecțiile” veți citi povestiri interesante din istoria geometriei, inclusiv despre contribuția oamenilor de știință ucraineni la dezvoltarea acestei științe.

Vă dorim succes!

Stimați colegi!

În limitele școlii generale, este imposibil de a realiza principiul formal-logic de construire a structurii cursului de geometrie: de pus la bază sistemul de axiome și de a construi apoi expunerea deductivă, adică de a demonstra teoremele strict logic, bazându-se pe axiome și pe fapte demonstrate anterior. Acest lucru se explică prin faptul, că numărul elevilor care au înclinație spre gândirea deductivă este limitat. În realitate, majoritatea elevilor au un tip de gândire vizual-ilustrativ. De aceea, pentru copil, apelarea la claritatea vizuală este în general naturală și înțeleasă.

Reieșind din cele expuse în baza acestui manual este pus principiul **vizual-deductiv în combinație cu axiomatizarea parțială**.

Noi considerăm, că scopul studierii geometriei în școală nu este doar dezvoltarea gândirii logice și a abilității de a efectua demonstrații. Autorii manualului pun scopuri mai largi: de a preciza închipuirea elevilor despre obiectele geometrice elementare (punctul, dreapta, semidreapta, segmentul, unghiul), să le facem cunoștință cu cele mai importante proprietăți ale figurilor de bază ale geometriei elementare (triunghiul, circumferința, patrulaterul etc.), să dezvoltăm la ei necesitatea de a demonstra, adică a pune bazele gândirii deductive și euristice, iar cel mai important – **să învățăm elevii să aplice proprietățile figurilor geometrice în procesul de rezolvare a problemelor practice și teoretice**. Noi sperăm că voi veți aprecia acest manual ca un ajutor în realizarea scopurilor menționate.

În manual este cules un mare și divers material didactic. Însă, <u>într-un an școlar este imposibil de rezolvat toate problemele, dar nici nu este necesar</u>. Totodată, este cu mult mai comod de lucrat când este o rezervă mare de probleme. Aceasta oferă posibilitatea realizării diferențierii pe nivele și a individualizării în învățământ.

Cu culoare **albastră** sunt marcate numerele problemelor, care sunt recomandate pentru temele pentru acasă, iar cu culoare **purpurie** sunt marcate numerele problemelor recomandate pentru rezolvarea orală.

În unele puncte, o parte din text este plasată pe un fundal colorat. Acest lucru evidențiază materialul care, după părerea dumneavoastră, poate fi considerat opțional pentru studiu.

Deci să transformăm împreună cursul de geometrie într-o materie înțeleasă și atrăgătoare.

Vă dorim inspirație creativă și răbdare.

ÎNSEMNĂRI CONVENȚIONALE

n° însărcinări, ce corespund nivelului inițial și mijlociu de pregătire;

$n^{\bullet}$ însărcinări, ce corespund nivelului suficient de pregătire;

$n^{\bullet\bullet}$ însărcinări, ce corespund nivelului înalt de pregătire;

n^{*} probleme pentru cercurile și facultativele de matematică;

probleme-cheie, rezultatul cărora poate fi folosit în timpul rezolvării altor probleme;

⊙ demonstrația teoremei ce corespunde nivelului suficient de pregătire;

demonstrația teoremei ce corespunde nivelului înalt de pregătire;

demonstrația teoremei, ce nu este obligatorie pentru studiere;

● terminarea demonstrației teoremei;

◀ terminarea rezolvării problemei;

рубрика «Говоримо та пишемо українською правильно»;

rubrica „Când temele sunt îndeplinite”.

Segmentele egale pe desene sunt marcate cu același număr de liniuțe, unghiurile egale — cu același număr de arcuri, cu excepția segmentelor și unghiurilor care trebuie aflate.

INTRODUCERE

Ce studiază geometria?

Cu toate că geometria este pentru voi un obiect nou, însă la lecțiile de matematică din clasele precedente, deja ați făcut cunoștință cu noțiunile de bază ale acestei științe înțelepte. Astfel, toate figurile geometrice prezentate în figura 5, vă sunt bine cunoscute.

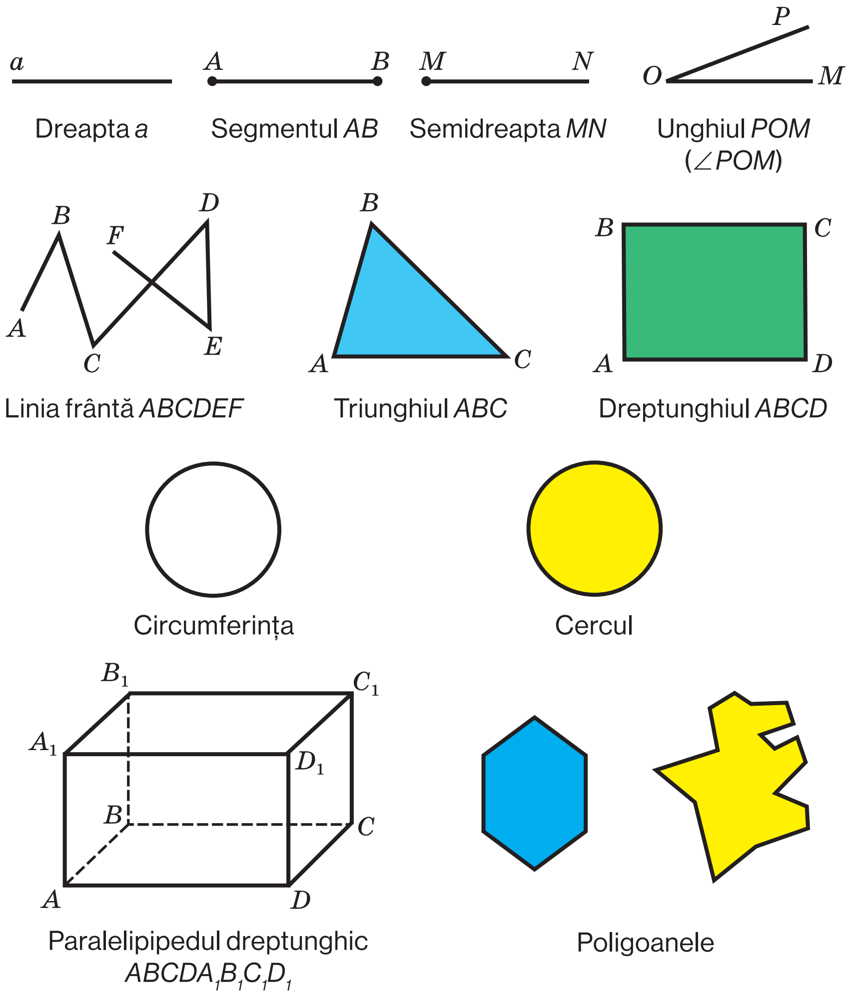


Fig. 5

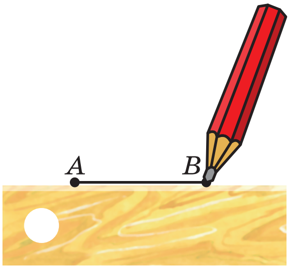


Fig. 6

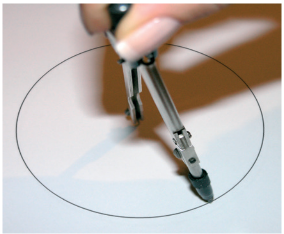


Fig. 7

Puteți uni, cu ajutorul riglei două puncte cu un segment (fig. 6); cu ajutorul compasului construiți o circumferință (fig. 7); cu ajutorul riglei și echerului să construiți drepte perpendiculare și paralele (fig. 8); să măsurați lungimea segmentului și să construiți segmentul cu lungimea dată, folosind o riglă cu diviziuni milimetrice (fig. 9); să aflați mărimea unghiului și să construiți un unghi de mărimea dată cu ajutorul raportorullui (fig. 10); să clasificați triunghiurile (vezi forzațul).

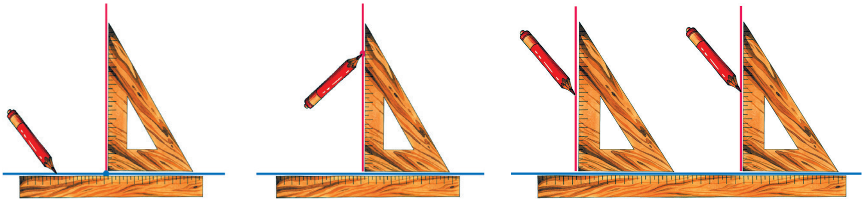


Fig. 8

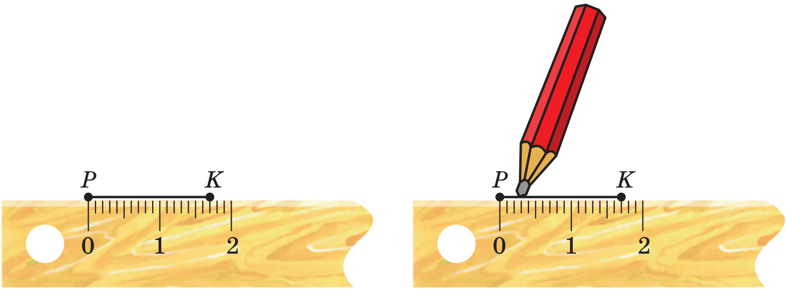


Fig. 9

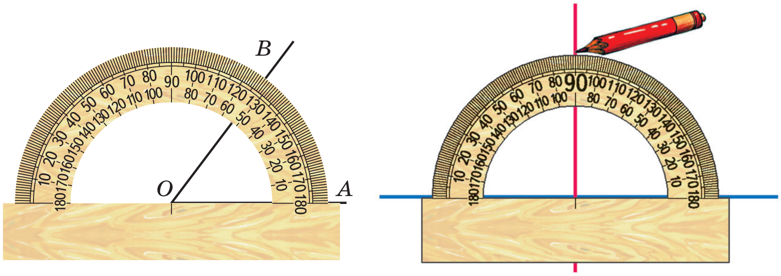


Fig. 10

Însă, determinarea aspectului figurii și executarea construcțiilor simple sunt doar cunoaștințe începătoare ale științei despre proprietățile figurilor geometrice, adică *geometriei*.

În timpul studierii *cursului sistematic* de geometrie, voi treptat, într-o anumită succesiune, veți învăța proprietățile figurilor geometrice, și totodată, și figurile, care sunt deja cunoscute, cât și pe cele noi. Aceasta înseamnă, că va trebui să vă învățați, reieșind din unele proprietăți ale figurii să stabiliți și, principalul, să **demonstrați** alte proprietăți ale ei.

Cursul școlar de geometrie tradițional se împarte în **planimetrie** și **stereometrie**. Planimetria studiază figurile pe plan (lat. *planum* – plan), iar stereometria studiază figurile în spațiu (grec. *stereos* – spațial).

Deci, noi începem studierea planimetriei.

CELE MAI SIMPLE FIGURI GEOMETRICE ȘI PROPRIETĂȚILE LOR

§1

În acest paragraf vom studia figurile geometrice cunoscute de voi din clasele precedente și anume: puncte, drepte, segmente, semidrepte și unghiuri.

Veți afla mai mult despre proprietățile acestor figuri. Unele din aceste proprietăți veți învăța să le **demonstrați**. Cuvintele **definiție**, **teoremă**, **axiomă** vor deveni obișnuite, înțelese și des folosite de voi.

1. Puncte și drepte

Punctul – cea mai simplă figură geometrică. Aceasta este unica figură care nu poate fi divizată în părți. De exemplu, fiecare dintre figurile reprezentate în figura 11 este divizată în părți. Chiar și despre figura reprezentată în figura 12, care constă din două puncte, se poate spune că este compusă din două părți: punctul A și punctul B.

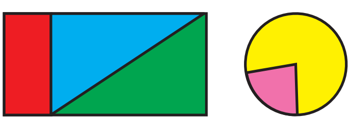


Fig. 11

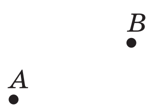


Fig. 12

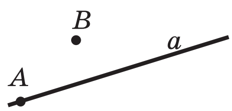


Fig. 13

În figura 13 este reprezentată dreapta a și două puncte A și B. Se spune că *punctul A aparține dreptei a; sau punctul A se află pe dreapta a; sau dreapta a trece prin punctul A, și, respectiv, punctul B nu aparține dreptei a; sau punctul B nu se află pe dreapta a; sau dreapta a nu trece prin punctul B.*

Dreapta – figură geometrică care are anumite proprietăți.

Proprietatea fundamentală a dreptei. Prin orice două puncte[1] se poate duce o dreaptă și numai singură.

De ce această proprietate a dreptei este considerată fundamentală?

Fie că despre o *linie* se știe doar că ea trece prin punctele A și B. Pentru a avea o imagine clară despre această figură, această informație nu este de ajuns, deoarece prin punctele A și B se poate de dus o mulțime de linii diferite (fig. 14). Dreapta este definită în mod unic de aceste puncte. Aceasta și este sensul proprietății fundamentale a dreptei.

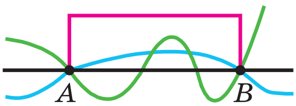


Fig. 14

Această proprietate permite a însemna dreapta, numind două oricare puncte ale ei. Astfel, dreapta care trece prin punctele M și N se numește „dreapta MN" (sau „dreapta NM").

Proprietatea fundamentală a figurii geometrice mai este numită axiomă (veți afla mai multe despre axiome în punctul 6).

Dacă este necesar de explicat sensul unor noțiuni (termeni), se folosește **definiția**. De exemplu:

1) ceas se numește aparatul pentru măsurarea timpului;

2) geometria — ramură a matematicii care studiază proprietățile figurilor.

Definițiile se folosesc și în geometrie.

Definiție. Două drepte care au un punct comun se numesc drepte care se intersectează.

În figura 15 sunt reprezentate dreptele a și b, care se intersectează în punctul O.

---

[1] Aici și pe parcurs, vorbind despre „două puncte", „trei puncte", „două drepte" etc., vom considera, că acestea sunt puncte și drepte diferite. Cazul suprapunerii lor îl vom considera aparte.

Adesea, justețea (adevărul) unui fapt este stabilită cu ajutorul *raționamentului logic*.

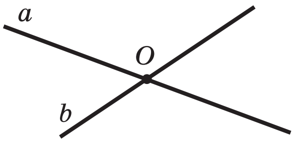


Fig. 15

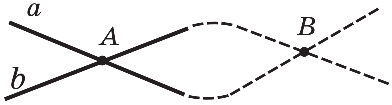


Fig. 16

Examinăm următoarea problemă: Se știe că toți locuitorii de pe Strada Geometrică sunt matematicieni. Eugen locuiește la adresa str. Geometrică 5. Este oare Eugen matematician?

După condițiile problemei Eugen locuiește pe strada Geometrică. Deoarece toți locuitorii acestei străzi sunt matematicieni, rezultă că Eugen este matematician.

Aceste raționamente logice sunt numite **demonstrația** faptului că Eugen este matematician.

În matematică afirmația, adevărul căreia este stabilit cu ajutorul demonstrației se numește **teoremă**.

Teorema 1.1. ***Oricare două drepte care se intersectează au un singur punct comun.***

Demonstrație. ⊙ Fie că dreptele a și b, care se intersectează, au pe lângă punctul comun A, încă un punct comun B (fig. 16). Atunci, prin două puncte A și B trec două drepte. Aceasta este contrar proprietății fundamentale a dreptei. Așadar, presupunerea că ar exista un alt punct de intersecție al dreptelor a și b este incorectă. ●

?

1. Ce figură nu poate fi divizată în părți? **2.** Formulați proprietatea fundamentală a dreptei. **3.** Care proprietate a dreptei permite de a o nota, numind oricare două puncte ale ei? **4.** Pentru ce se folosește definiția? **5.** Care două drepte se numesc drepte care se intersectează? **6.** Cum se numește afirmația, adevărul căreia este stabilit cu ajutorul demonstrației? **7.** Formulați teorema despre două drepte care se intersectează.

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

1.° Duceți o dreaptă, notați-o cu litera *m*. Notați punctele *A* și *B* care sunt situate pe această dreaptă și punctele *C*, *D*, *E*, care nu sunt situate pe ea.

2.° Notați punctele *M* și *K* și duceți o dreaptă prin ele. Notați punctul *E* pe această dreaptă. Scrieți toate însemnările posibile ale dreptei obținute.

3° Duceți dreptele *a* și *b* așa, ca ele să se intersecteze. Notați punctul lor de intersecție cu litera *C*. Aparține oare punctul *C* dreptei *a*; dreptei *b*?

4.° Notați trei puncte astfel, încât acestea să nu se afle pe o dreaptă și prin fiecare pereche de puncte duceți o dreaptă. Câte drepte s-au format?

5.° Notați patru puncte astfel, ca oricare trei din ele să nu se afle pe o dreaptă.

6.• Duceți trei drepte astfel, încât fiecare două din ele să se intersecteze. Notați punctele de intersecție ale acestor drepte. Câte puncte de intersecție se pot obține?

7.• Notați patru puncte astfel, încât la trasarea dreptei prin fiecare două din ele pe desen: 1) se formează o singură dreaptă; 2) se formează patru drepte; 3) se formează șase drepte. Duceți aceste drepte.

EXERCIȚII

8.° Folosind figura 17:

1) determinați dacă dreptele *a* și *MK* se intersectează;
2) indicați toate punctele notate care aparțin dreptei *a*; dreptei *MK*;

3) indicați toate punctele notate care nu aparțin dreptei a; dreptei MK;
4) indicați toate punctele notate care aparțin dreptei a, dar nu aparțin dreptei MK.

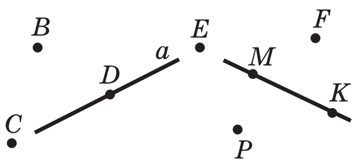


Fig. 17

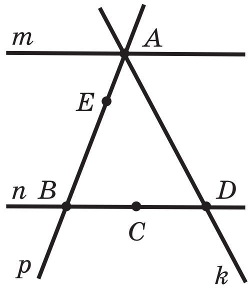


Fig. 18

9.° Folosind figura 18, indicați:
1) care dintre punctele notate aparțin dreptei p și care nu aparțin ei?
2) căror drepte aparține punctul A; punctul B; punctul C; punctul D; punctul E?
3) care drepte trec prin punctul C; punctul B; punctul A?
4) în ce punct se intersectează dreptele k și p; dreptele m și k?
5) în ce punct se intersectează trei dintre cele patru drepte reprezentate în figură?

10.• Punctul C aparține dreptei AB. Sunt oare diferite dreptele AB și AC? Argumentați răspunsul.

11.• Sunt duse patru drepte, fiecare două dintre ele se intersectează, totodată prin fiecare punct de intersecție trec numai două drepte. Câte puncte de intersecție s-au format?

12.•• Cum trebuie aranjate șase puncte ca ele să determine șase drepte?

13.•• Dreapta dată este intersectată de patru drepte. Câte puncte de intersecție pot fi formate de aceste drepte cu această dreaptă?

14.•• Sunt duse patru drepte, fiecare două dintre ele se intersectează. Câte puncte de intersecție pot fi formate?

15.•• Sunt duse cinci drepte, fiecare două dintre ele se intersectează. Care este cel mai mic număr posibil de puncte de intersecție a acestor drepte? Care este cel mai mare număr posibil de puncte de intersecție a acestor drepte?

16.* Se poate oare de dus șase drepte și de notat pe ele 11 puncte astfel, încât pe fiecare dreaptă să fie notate exact patru puncte?

17.* Pe plan sunt duse trei drepte. Pe prima dreaptă sunt notate cinci puncte, pe a doua – șapte puncte, iar pe a treia – trei puncte. Care este cel mai mic număr de puncte ce poate fi notat?

18.* Se poate oare de notat câteva puncte și de dus câteva drepte astfel, încât pe fiecare dreaptă să fie exact trei puncte notate și prin fiecare punct să treacă exact trei din dreptele duse?

ÎNVĂȚĂM SĂ APLICĂM GEOMETRIA

19. Corectitudinea fabricației unei rigle poate fi verificată astfel: prin două puncte cu ajutorul riglei duceți o linie. Apoi întoarceți rigla și prin aceleași două puncte duceți o altă linie de-a lungul aceleiași margini a riglei. Dacă liniile coincid, atunci rigla a fost fabricată corect. Explicați de ce?

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

20. Formați un pătrat din câteva figuri identice cu cea din figura 19.

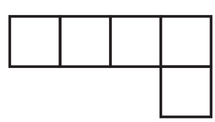


Fig. 19

2. Segmentul și lungimea lui

În figura 20 este reprezentată dreapta a, care trece prin punctele A și B. Aceste puncte limitează o parte a dreptei a, care este marcată cu roșu. Această parte a dreptei, împreună cu punctele A și B, se numește **segment**, iar punctele A și B – **extremitățile (capetele)** acestui segment.

Fig. 20

Fig. 21

Fig. 22

Pentru orice două puncte există *unicul* segment, pentru care aceste puncte sunt capete, adică *segmentul cu extremitățile lui este dat univoc*. De aceea, segmentul se notează, numind extremitățile lui. De exemplu, segmentul desenat în figura 21 este notat astfel: MN sau NM (se citește: „segmentul MN” sau „segmentul NM”).

În figura 22 este desenat segmentul AB și punctul X, care aparține acestui segment, dar nu coincide cu nici o extremitate a acestui segment. Punctul X se numește **punct interior** al segmentului AB. În acest caz, se spune, că punctul X **se află între punctele** A și B.

Astfel segmentul AB este format din punctele A și B, precum și din toate punctele de pe dreapta AB care se află între punctele A și B.

Definiție. Două segmente se numesc egale, dacă ele coincid prin suprapunere.

În figura 23 sunt reprezentate segmentele egale AB și CD. Se scrie: $AB = CD$.

Deja știți că fiecare segment are o anumită lungime și pentru a-l măsura este necesar de ales **segmentul unitar**. Ca segment unitar poate fi luat orice segment.

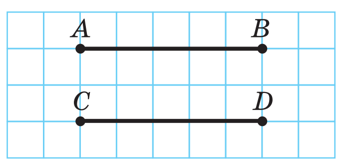


Fig. 23

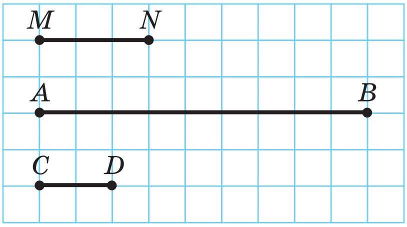


Fig. 24

De exemplu, presupunem că segmentul MN în figura 24 este unitar. Acest fapt se scrie astfel: $MN = 1$ unitate. Atunci se consideră că lungimea segmentului AB este egală cu trei **unități de lungime**, și se scrie: $AB = 3$ unități. De asemenea se scrie $AB = 3$, se citește: „segmentul AB este egal cu trei”.

Pentru segmentul CD avem: $CD = \frac{2}{3}$.

În practică, cel mai des se folosesc astfel de segmente unitare: 1 mm, 1 cm, 1 dm, 1 m, 1 km.

În dependență de alegerea unității de lungime se schimbă **valoarea numerică a lungimii** segmentului. De exemplu, în figura 25 avem: $AB = 17$ mm, sau $AB = 1{,}7$ cm, sau $AB = 0{,}17$ dm și altele.

Fig. 25

În producție și în viața cotidiană se folosesc diferite dispozitive și instrumente pentru măsurarea lungimii segmentului (fig. 26): rigla gradată, ruleta, șublerul, micrometrul, compasul de câmp (teren).

Segmentele egale au lungimi egale, și invers, *dacă lungimile segmentelor sunt egale, atunci sunt egale și însăși segmentele.*

Dacă lungimea segmentului AB este mai mare decât lungimea segmentului MN, ca de exemplu, în figura 24, atunci se spune că segmentul AB este mai mare decât segmentul MN, și se scrie: $AB > MN$. De asemenea, se poate spune că segmentul MN este mai mic decât segmentul AB, și se scrie: $MN < AB$.

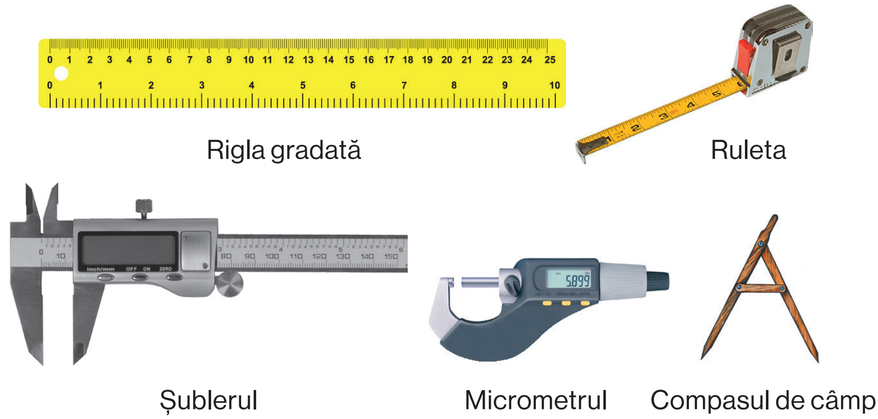


Fig. 26

Pe parcurs, vorbind de „suma segmentelor”, vom considera suma lungimilor acestor segmente.

Proprietatea fundamentală a lungimii segmentului. Dacă punctul *C* este un punct interior al segmentului *AB*, atunci segmentul *AB* este egal cu suma segmentelor *AC* și *CB* (fig. 27), adică

$$AB = AC + CB.$$

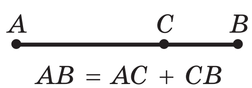


Fig. 27

Fig. 28

Definiție. Distanța dintre punctele *A* și *B* se numește lungimea segmentului *AB*. Dacă punctele *A* și *B* coincid, se consideră că distanța dintre ele este egală cu zero.

Definiție. Mijlocul segmentului *AB* se numește un punct interior *C*, pentru care $AC = CB$.

În figura 28 punctul *C* este mijlocul segmentului *AB*.

Adesea, în loc de „Aflați lungimea segmentului...”, se spune „Aflați segmentul...”.

Problemă. Punctele A, B și C aparțin unei drepte. $AB = 8$ cm, iar segmentul AC este cu 2 cm mai lung decât segmentul BC. Aflați segmentele AC și BC.

Rezolvare. În condiție nu este indicată care este amplasarea relativă a punctelor pe dreaptă. De aceea, analizăm trei cazuri posibile.

1) Punctul B – punct interior al segmentului AC (fig. 29). Atunci, segmentul AC este mai lung decât segmentul BC cu lungimea segmentului AB, adică cu 8 cm. Aceasta contrazice condiția. Deci, acest caz este imposibil.

2) Punctul C – punct interior al segmentului AB (fig. 30). În acest caz $AC + BC = AB$. Fie $BC = x$ cm, atunci $AC = (x + 2)$ cm. Avem:

$$x + 2 + x = 8;$$
$$x = 3.$$

Deci, $BC = 3$ cm, $AC = 5$ cm.

Fig. 29

Fig. 30

Fig. 31

3) Punctul A – punct interior al segmentului BC (fig. 31). În acest caz $AB + AC = BC$ și atunci $AC < BC$. Aceasta contrazice condiției. Deci, acest caz este imposibil.

Răspuns: $AC = 5$ cm, $BC = 3$ cm. ◄

?

1. Câte segmente există extremitățile cărora sunt două puncte date? **2.** Care două segmente se numesc egale? **3.** Se poate oare de luat ca segment unitar orice segment? **4.** Ce știți despre lungimile segmentelor egale? **5.** Ce știți despre segmentele, care au lungimi egale? **6.** Formulați proprietatea fundamentală a lungimii segmentului. **7.** Ce se numește distanţă între două puncte? **8.** Care punct se numește mijlocul segmentului AB?

У словах на означення довжини, складовою частиною яких є слово «метр», наголошуємо останній склад: *міліме́тр, сантиме́тр, дециме́тр*. А от у назвах вимірювальних приладів наголос падає на передостанній склад: *баро́метр, спідо́метр, термо́метр, мікро́метр*.

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

21.° Notați două puncte A si B și duceti prin ele o dreaptă. Notați punctele C, D și E, care aparțin segmentului AB si punctele F, M și K care nu aparțin segmentului AB, dar aparțin dreptei AB.

22.° Duceți o dreaptă și notați pe ea trei puncte. Câte segmente s-au format?

23.° Notați pe dreaptă punctele A, B, C și D astfel, ca punctul C să fie situat între punctele A și B, iar punctul D – intre punctele B și C.

24.° Notați pe dreaptă punctele A, B și C astfel, ca egalitatea dată sa fie corectă $AC = AB + BC$.

EXERCIȚII

25.° Numiți toate segmentele care sunt prezentate în figura 32.

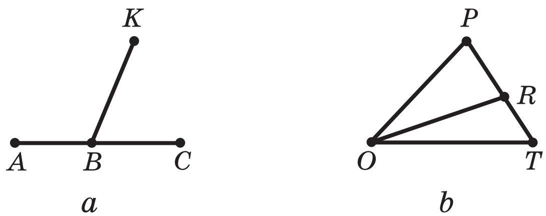


Fig. 32

26.° Scrieți toate segmentele care sunt prezentate în figura 33.

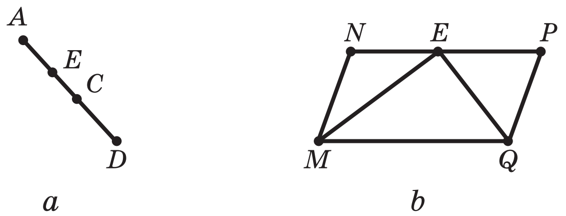


Fig. 33

27.° Aflați lungimea fiecărui segment desenat în figura 34, dacă segmentul unitar este egal cu segmentul: 1) *AB*; 2) *MN*.

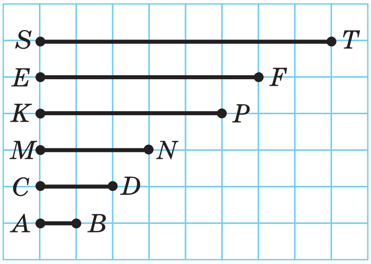


Fig. 34

28.° Care din punctele notate in figura 35, este situat intre celelalte două? Scrieți egalitatea corespunzătoare, care rezultă din proprietatea fundamentală a lungimii segmentului.

29.° Între care puncte se află punctul *B* (fig. 36)? Pentru fiecare caz scrieți egalitatea corespunzătoare, care reiese din proprietatea fundamentală a lungimii segmentului.

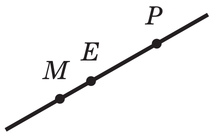


Fig. 35

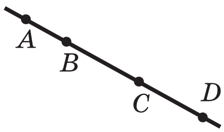


Fig. 36

30.° Punctul D – punctul interior al segmentului ME. Afați:

1) distanța dintre punctele M și E, dacă $MD = 1{,}8$ dm, $DE = 2{,}6$ dm;
2) lungimea segmentului MD, dacă $ME = 42$ mm, $DE = 1{,}5$ cm.

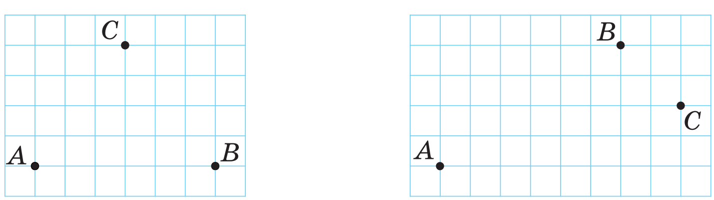
31.° Punctele A, B și C sunt situate pe o dreaptă (fig. 37). Care din afirmațiile date este corectă:
1) $AB + BC = AC$; 2) $AC + AB = BC$?

Fig. 37

32.° Punctul K este mijlocul segmentului MN. Pot oare coincide prin suprapunere: 1) segmentele MK și KN; 2) segmentele MK și MN?

33.° Punctul K – mijlocul segmentului MN, punctul E – mijlocul segmentului KN, $EN = 5$ cm. Aflați segmentele MK, ME si MN.

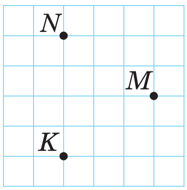
34.° Pe o foaie cu pătrățele sunt notate punctele A, B și C (fig. 38). Aflați distanța de la punctul C până la mijlocul segmentului AB, dacă lungimea laturii unui pătrățel este egală cu 5 mm.



a *b*

Fig. 38

35.° Pe o foaie cu pătrățele sunt notate punctele *M*, *N* și *K* (fig. 39). Aflați distanța de la punctul *M* până la mijlocul segmentului *NK*, dacă lungimea laturii unui pătrățel este egală cu 5 mm.



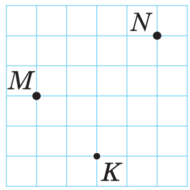


Fig. 39

36.° Punctul *C* – punct interior al segmentului *AB*, lungimea căruia este egală cu 20 cm. Aflați segmentele *AC* și *BC*, dacă:

1) segmentul *AC* este cu 5 cm mai mare decât segmentul *BC*;
2) segmentul *AC* este de 4 ori mai mic decât segmentul *BC*;
3) $AC : BC = 9 : 11$.

37.° Punctul *K* aparține segmentului *CD*, lungimea căruia este egală cu 28 cm. Aflați segmentele *CK* și *KD*, dacă:

1) segmentul *CK* este cu 4 cm mai mic decât segmentul *KD*;
2) segmentul *CK* este de 6 ori mai mare decât segmentul *KD*;
3) $CK : KD = 3 : 4$.

38.• Segmentele *AB* și *CD* sunt egale (fig. 40). Demonstrați că segmentele *AC* și *BD* tot sunt egale.

Fig. 40

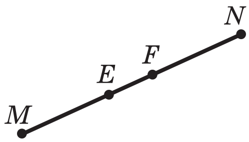


Fig. 41

39.• Segmentele *ME* și *FN* sunt egale (fig. 41). Demonstrați că $MF = EN$.

40.• Punctul C împarte segmentul AB, lungimea căruia este egală cu a, în două segmente. Aflați distanța dintre mijlocurile segmentelor AC și BC.

41.• Punctele A, B și C se află pe o dreaptă. Aflați segmentul BC, dacă $AB = 24$ cm, $AC = 32$ cm. Câte rezolvări are problema?

42.•• Pe o dreapta s-au notat punctele A, B și C astfel, că $AB = 15$ cm, $AC = 9$ cm. Aflați distanța dintre mijlocurile segmentelor AB și AC.

43.•• Segmentul EF este egal cu 12 cm. Găsiți pe dreapta EF toate punctele, suma distanțelor de la fiecare din ele până la extremitățile segmentului EF să fie egală cu: 1) 12 cm; 2) 15 cm; 3) 10 cm.

44.•• Prin punctul A și B este dusă o dreaptă. Unde pe această dreaptă este situat punctul C, distanța de la care până la punctul B este de 2 ori mai mare, decât distanța de la el până la punctul A?

45.•• Segmentul, lungimea căruia este egală cu 32 cm, s-a împărțit în trei segmente inegale. Distanța dintre mijlocurile segmentelor extreme este egală cu 18 cm. Aflați lungimea segmentului mijlociu.

46.•• Câte puncte trebuie de notat pe dreapta AB între punctele A și B astfel, încât împreună cu segmentul AB să se formeze șase segmente?

ÎNVĂȚĂM SĂ APLICĂM GEOMETRIA

47. Comparați vizual segmentele AB și CD (fig. 42). Verificați concluzia prin măsurare.

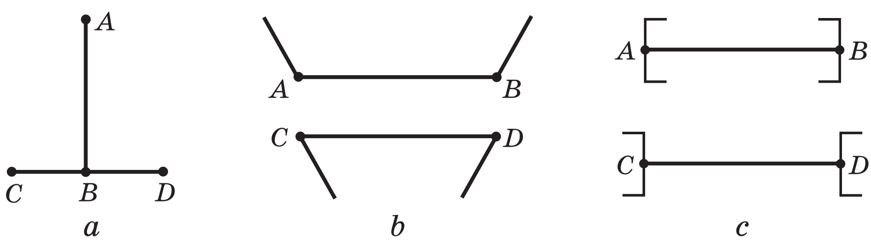


Fig. 42

48. Comparați vizual segmentele *AB* și *BC* (fig. 43). Verificați concluzia prin măsurare.

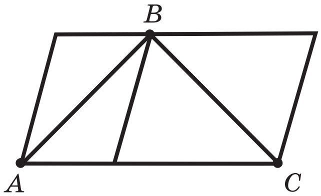


Fig. 43

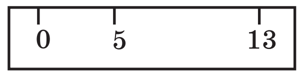


Fig. 44

49. Gradația riglei conține numai diviziunile 0 cm, 5 cm și 13 cm (fig. 44). Folosind această riglă, cum se pot construi segmentele cu lungimea de: 1) 3 cm; 2) 2 cm; 3) 1 cm?

50. Gradația riglei conține numai diviziunile 0 cm, 7 cm și 11 cm. Folosind această riglă, cum se pot construi segmentele cu lungimea de: 1) 8 cm; 2) 5 cm?

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

51. Din dreptunghiurile cu dimensiunile 1×1, 1×2, 1×3, ..., 1×13, formați un dreptunghi, fiecare latură a căruia este mai mare de 1.

3. Semidreaptă. Unghiul. Măsurarea unghiurilor

Ducem dreapta *AB* și notăm pe ea un punct arbitrar *O*. Aceast punct împarte dreapta în două părți, care sunt evidențiate în figura 45 cu diferite culori. Fiecare din aceste părți împreună cu punctul *O* se numește **semidreaptă**. Punctul *O* se numește **originea** semidreptei.

Fiecare din semidreptele, reprezentate în figura 45, sunt formate din punctul *O* și toate punctele dreptei *AB*, care *sunt situate de aceeași parte față de punctul O*.

Aceasta permite de notat semidreapta, numind două puncte ale ei: primul indică întotdeauna originea semidreptei, iar al doilea – orice alt punct care aparține semidreptei. Astfel, semidreapta cu originea în punctul *O* (fig. 46) poate fi notată *OM* sau *ON*.

Fig. 45

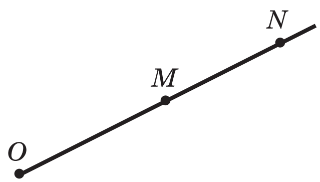


Fig. 46

Semidreptele *OA* și *OB* (fig. 45) se completează una pe alta până la o dreaptă. De asemenea se poate spune, că reuniunea acestor semidrepte este o dreaptă.

Definiție. **Două semidrepte care au originea comună și se află pe o dreaptă se numesc complementare.**

De exemplu, semidreptele *BC* și *BA* – complementare (fig. 47). Reuniunea lor este dreapta *AC*. Atragem atenția că reuniunea semidreptelor *CA* și *AC* este dreapta *AC*. Însă aceste semidrepte nu sunt complementare: ele nu au origine comună.

Fig. 47

În figura 48, *a* este desenată figura, care este formată din două semidrepte *OA* și *OB*, care au origine comună. Această figură împarte planul în două părți, care sunt marcate cu diferite culori. Fiecare din aceste părți împreună cu semidreptele *OA* și *OB*, se numește **unghi**.

Semidreptele *OA* și *OB* se numesc **laturile unghiului**, iar punctul *O* – **vârful unghiului.**

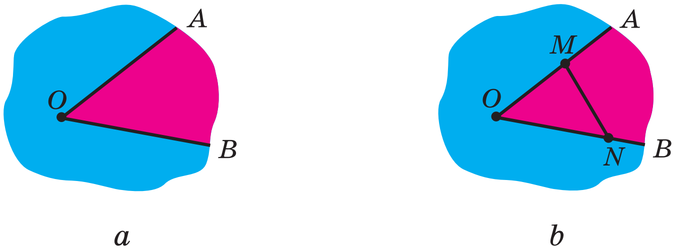


Fig. 48

După cum observați, unghiurile din figura 48, *a* se deosebesc. Această diferență este determinată de o astfel de proprietate. Pe semidreptele *OA* și *OB* alegem punctele arbitrare *M* și *N* (fig. 48, b). Segmentul *MN* aparține unghiului „**purpuriu**", iar unghiului „**albastru**" aparțin doar extremitățile segmentului.

În viitor spunând „unghi", avem în vedere numai acela, care conține orice segment cu extremitățile pe laturile lui. Situațiile, când se vor analiza unghiurile pentru care această condiție nu se îndeplinește, vor fi concretizate special.

Există câteva metode de a nota unghiurile. Unghiul în figura 49 se poate nota astfel: $\angle MON$, sau $\angle NOM$, sau $\angle O$ (se citește corespunzător: „unghiul *MON*", „unghiul *NOM*", „unghiul *O*").

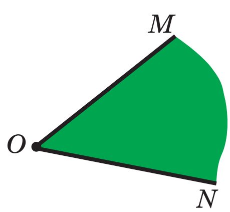


Fig. 49

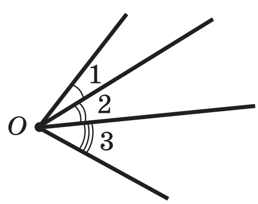


Fig. 50

În figura 50 sunt reprezentate câteva unghiuri, cu vârful comun. Notarea unghiului cu o singură literă poate duce la o încurcătură. În aceste cazuri unghiurile le vom nota cu ajutorul numerelor: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ (se citește corespunzător: „unghiul unu”, „unghiul doi”, „unghiul trei”).

Definiție. Unghiul, laturile căruia sunt semidrepte complementare, se numește desfășurat.

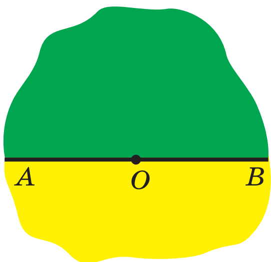


Fig. 51

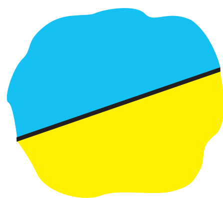


Fig. 52

În figura 51 semidreptele OA și OB sunt complementare, de aceea unghiurile marcate cu culorile verde și galben sunt desfășurate.

Orice dreaptă împarte planul în două **semiplane**, pentru care această dreaptă este **graniță** (fig. 52). Se consideră, că dreapta aparține fiecăruia din aceste semiplane pentru care ea este graniță. Și deoarece laturile unghiului desfășurat formează o dreaptă, se poate spune că unghiul desfășurat este semiplan, pe granița căruia este notat punctul – vârful unghiului.

Definiție. Două unghiuri se numesc egale, dacă ele coincid prin suprapunere.

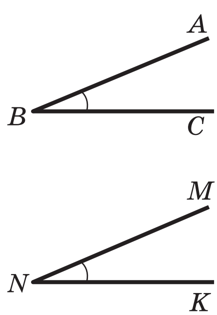


Fig. 53

În figura 53 sunt reprezentate unghiurile egale ABC și MNK.

Se scrie: $\angle ABC = \angle MNK$.

Orice două unghiuri desfășurate coincid prin suprapunere, deci toate unghiurile desfășurate sunt egale.

Proprietatea fundamentală de depunere a unghiurilor. Pentru unghiul dat ABC și semidreapta dată B_1C_1 există un singur unghi $A_1B_1C_1$ care este egal cu unghiul ABC astfel, încât punctul A_1 să fie situat în semiplanul dat față de dreapta B_1C_1 (fig. 54).

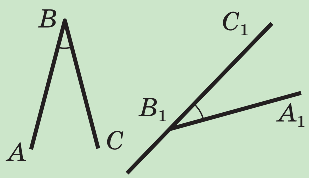


Fig. 54

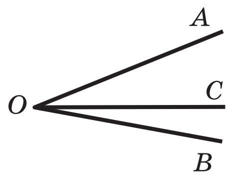


Fig. 55

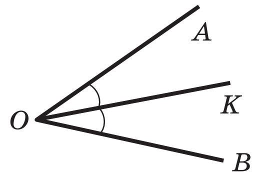


Fig. 56

În figura 55 este dat unghiul AOB și semidreapta OC, care aparține acestui unghi, dar este diferită de laturile lui. Se spune că semidreapta *OC trece între laturile unghiului AOB* și îl împarte în două unghiuri AOC și COB.

Definiție. Bisectoarea unghiului se numește semidreapta cu originea în vârful unghiului, care împarte acest unghi în două unghiuri egale.

În figura 56 semidreapta OK – bisectoarea unghiului AOB. Deci, $\angle AOK = \angle KOB$.

Deja cunoașteți, că fiecare unghi are o mărime. Pentru a o măsura este necesar de ales unitatea de măsurare – **unghi unitar**. Îl putem alege astfel: împărțim unghiul desfășurat în 180 de unghiuri egale (fig. 57). Unghiul format din două semidrepte vecine se ia ca unitate. Mărimea lui se numește **grad** și se scire: $1°$.

De exemplu, măsura în grade (mărimea) a unghiului AOB (fig. 58) este egală cu $20°$ (acest fapt este ușor de stabilit cu ajutorul raportorului). În acest caz se spune, că „unghiul AOB este egal cu $20°$" și se scrie: $\angle AOB = 20°$.

Din definiția de grad rezultă, că *măsura în grade a unghiului desfășurat este egală cu* $180°$.

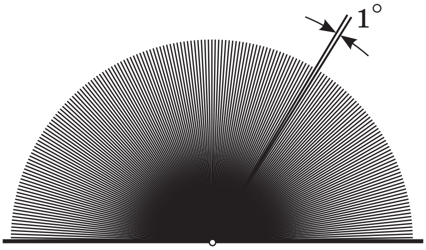


Fig. 57

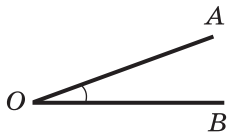


Fig. 58

În figura 59, *a* este reprezentat un aparat antic pentru măsurarea unghiurilor: astrolabul (din greaca veche, înseamnă „cel care apucă stele”). De-a lungul multor secole acest aparat ajuta marinarilor să găsească calea, astronomilor – să determine poziția stelelor. În zilele noastre pentru măsurarea unghiurilor în practică se folosește astrolabul (fig. 59, *b*), de asemenea și alte aparate speciale: teodolitul (fig. 60) – pentru măsurarea pe teren, busola (fig. 61) – în artilerie, sextantul (fig. 62) – în chestiile maritime.

a

b

Fig. 59. Astrolabul: *a* – antic; *b* – modern

Fig. 60. Teodolitul

Fig. 61. Busola

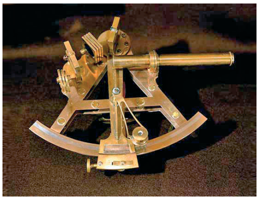


Fig. 62. Sextantul

Pentru obținerea rezultatelor exacte ale măsurărilor unghiurilor se folosesc părți din grad: $\frac{1}{60}$ din grad este egală cu o minută (1′), adică $1° = 60'$; $\frac{1}{60}$ din minută se numește secundă (1″), adică $1' = 60''$.

De exemplu, scrierea $23°15'11''$ înseamnă, că măsura în grade a unghiului alcătuiește 23 de grade, 15 minute și 11 secunde.

Există de asemenea și alte unități de măsură a unghiurilor: de exemplu, pentru necesitățile maritime se folosește unitatea rumb (1 rumb = $11°15'$).

Definiție. Unghiul, măsura în grade a căruia este de 90° se numește drept. Unghiul, măsura în grade a căruia este mai mică de 90°, se numește ascuțit. Unghiul, măsura în grade a căruia este mai mare de 90° și mai mică de 180°, se numește obtuz.

În figura 63 sunt reprezentate unghiurile celor trei tipuri date.

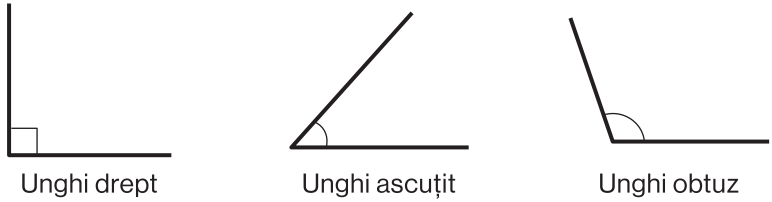


Fig. 63

Unghiurile egale au mărimi egale și invers, dacă mărimile unghiurilor sunt egale, atunci și unghiurile sunt egale.

Dacă mărimea unghiului ABC este mai mare decât mărimea unghiului MNP, atunci se spune că unghiul ABC este mai mare decât unghiul MNP și se scrie: $\angle ABC > \angle MNP$. De asemenea se spune, că unghiul MNP este mai mic decât unghiul ABC și se scrie:

$$\angle MNP < \angle ABC$$

Mai departe, spunând „suma unghiurilor”, vom avea în vedere suma mărimilor acestor unghiuri.

Proprietatea fundamentală a mărimii unghiurilor. Dacă semidreapta *OC* împarte unghiul *AOB* în două unghiuri *AOC* și *COB*, atunci $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ (fig. 64).

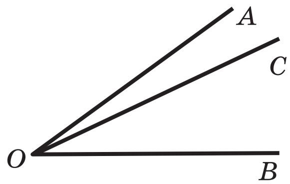


Fig. 64

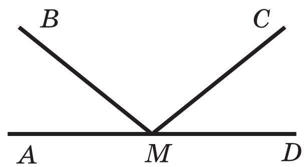


Fig. 65

Problemă. În figura 65 unghiul *AMD* este un unghi desfășurat, $\angle AMC = \angle DMB$, $\angle BMC = 118°$. Aflați unghiul[1] *AMB*.

Rezolvare: Avem: $\angle AMC = \angle AMB + \angle BMC$,

$\angle DMB = \angle DMC + \angle BMC$.

Deoarece $\angle AMC = \angle DMB$, atunci $\angle AMB = \angle DMC$.

Scriem: $\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD = \angle AMD = 180°$.

Atunci $2\angle AMB + 118° = 180°$. De aici $\angle AMB = 31°$.

Răspuns: 31°. ◀

?

1. Care două semidrepte se numesc complementare? **2.** Care unghi se numește desfășurat? **3.** Care două unghiuri se numesc egale? **4.** Ce se numește bisectoarea unghiului? **5.** În ce unități se măsoară unghiurile? **6.** Care este măsura în grade a unghiului desfășurat? **7.** Cum se numește unghiul, măsura în grade a căruia este de 90°? **8.** Care unghi se numește ascuțit? Care unghi se numește obtuz? **9.** Ce știți despre mărimile unghiurilor egale? **10.** Ce știți despre unghiurile, mărimile cărora sunt egale? **11.** Formulați proprietatea fundamentală a mărimii unghiului.

---

[1] Adesea în loc de „Aflați măsura unghiului...”, se spune „Aflați unghiul...”.

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

52.° Duceți două semidrepte *AB* și *AC* astfel, încât ele să nu fie complementare. Construiți pentru fiecare din aceste semidrepte, semidreaptele complementare. Notați și scrieți toate semidreptele formate.

53.° Duceți segmentul *AB* și două semidrepte *AB* și *BA*. Sunt oare aceste semidrepte complementare? Argumentați răspunsul.

54.° Desenați unghiul *MNE* și duceți semidreptele *NA* și *NC* între laturile lui. Scrieți toate unghiurile ce s-au format.

55.° Duceți semidreptele *OA*, *OB*, *OC* și *OD* astfel, încât semidreapta *OC* să treacă între laturile unghiului *AOB*, iar semidreapta *OD* între laturile unghiului *BOC*.

56.• Desenați două semidrepte astfel, încât partea lor comună să fie: 1) un punct; 2) un segment; 3) o semidreaptă.

EXERCIȚII

57.° Dreapta *EF* intersectează dreptele *AB* și *CD* (fig. 66). Indicați:

1) toate semidreptele, care s-au format cu originea în punctul *M*;
2) toate perechile de semidrepte complementare cu originea în punctul *K*.

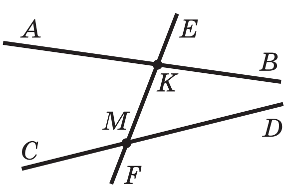


Fig. 66

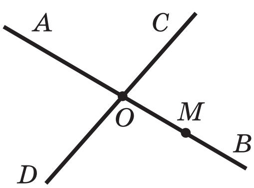


Fig. 67

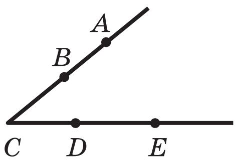


Fig. 68

58.° Scrieți toate semidreptele care sunt desenate în figura 67. Indicați care din ele sunt semidrepte complementare cu originea în punctul *O*.

59.° Se poate oare ca unghiul, reprezentat în figura 68, să fie notat astfel:

1) $\angle ABC$; 3) $\angle ADC$; 5) $\angle ACE$; 7) $\angle BDE$;
2) $\angle ACD$; 4) $\angle DCA$; 6) $\angle BCD$; 8) $\angle ECD$?

60.° Scrieți toate unghiurile reprezentate în figura 69.

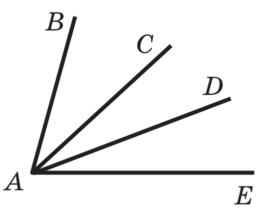


Fig. 69

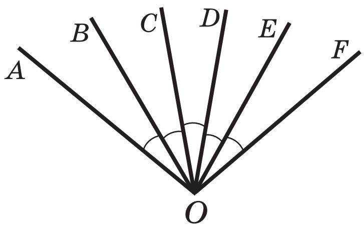


Fig. 70

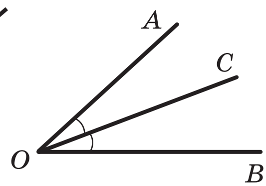


Fig. 71

61.° În figura 70 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF$.

1) Care din semidrepte este bisectoarea unghiului AOC; unghiului DOF; unghiului BOF?
2) Pentru care unghiuri semidreapta OC este bisectoare?

62.° Semidreapta OC – bisectoarea unghiului AOB (fig. 71). Pot oare coincide prin suprapunere: 1) unghiul AOC și BOC; 2) unghiul AOC și AOB?

63.° Semidreapta BD împarte unghiul ABC în două unghiuri. Aflați:

1) unghiul ABC, dacă $\angle ABD = 54°$, $\angle CBD = 72°$;
2) unghiul CBD, dacă $\angle ABC = 158°$, $\angle ABD = 93°$.

64.° Semidreapta OP trece între laturile unghiului MOK. Aflați unghiul MOP, dacă $\angle MOK = 172°$, $\angle POK = 85°$.

65.° Mărimea unui unghi este egală cu: 1) 28°; 2) 162°. Care este mărimea unghiului format de bisectoarea acestui unghi și latura lui?

66.° Aflați unghiul, a cărui bisectoare formează cu una dintre laturile lui un unghi de: 1) 43°; 2) 65°.

67.° Este oare corectă afirmația:
1) orice unghi mai mic decât cel obtuz este ascuțit;
2) unghiul mai mic decât cel desfășurat este obtuz;
3) unghiul mai mic decât cel obtuz de 2 ori este ascuțit;
4) suma a două unghiuri ascuțite este mai mare decât unghiul drept;
5) unghiul care este mai mic decât cel desfășurat de 2 ori este mai mare decât orice unghi ascuțit;
6) unghiul mai mare decât cel drept este obtuz?

68.° Unghiul *CEF* este de $152°$, semidreapta *EM* trece între laturile lui, unghiul *CEM* este cu $18°$ mai mare decât unghiul *FEM*. Aflați unghiurile *CEM* și *FEM*.

69.° Semidreapta *AK* aparține unghiului *BAD*. Aflați unghiurile *BAK* și *DAK*, dacă unghiul *BAK* este de 7 ori mai mic decât unghiul *DAK* și $\angle BAD = 72°$.

70.° În figura 72 unghiurile egale sunt notate cu paranteze. Aflați unghiurile *ABC*, *MKE* și *STK*, dacă ca unghi unitar este luat: 1) unghiul *ABC*; 2) unghiul *MKE*.

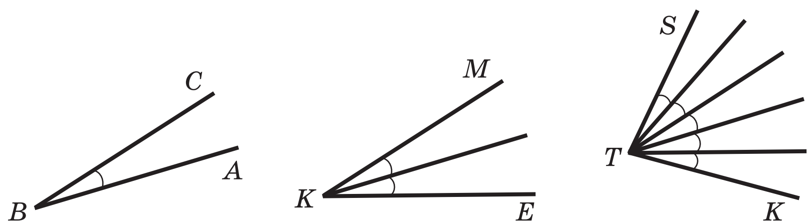


Fig. 72

71.• Din vârful unghiului drept *BOM* (fig. 73) sunt duse două semidrepte *OA* și *OC* astfel încât $\angle BOC = 74°$, $\angle AOM = 62°$. Aflați unghiul *AOC*.

72.• Din vârful unghiului desfășurat *ACP* (fig. 74) sunt duse două semidrepte *CT* și *CF* astfel, încât $\angle ACF = 158°$, $\angle TCP = 134°$. Aflați unghiul *TCF*.

73.• Punctele *A*, *B* și *C* sunt situate pe o dreaptă astfel, încât $AB = 3{,}2$ cm, $AC = 4{,}8$ cm, $BC = 8$ cm. Sunt oare semidreptele *AB* și *AC* complementare?

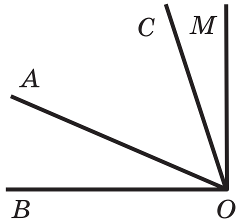


Fig. 73

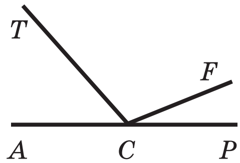


Fig. 74

74.• În figura 75 unghiul ABC este drept, $\angle ABE = \angle EBF = \angle FBC$, semidreptele BD și BK — bisectoarele unghiurilor ABE și FBC, corespunzător. Aflați unghiul DBK.

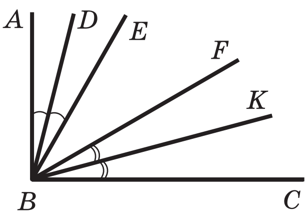


Fig. 75

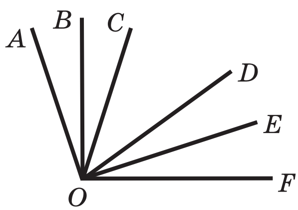


Fig. 76

75.• În figura 76 $\angle AOC = \angle COD = \angle DOF$, semidreapta OB — bisectoarea unghiului AOC, semidreapta OE — bisectoarea unghiului DOF, $\angle BOE = 72°$. Aflați unghiul AOF.

76.• În figura 77 $\angle AOB = \angle DOC$. Există oare alte unghiuri egale în această figură? Argumentați răspunsul.

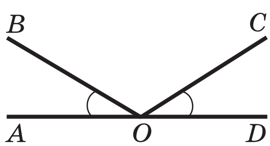


Fig. 77

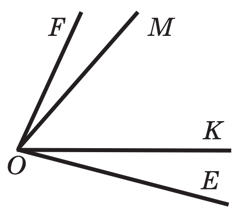


Fig. 78

77.• Unghiurile FOK și MOE sunt egale (fig. 78). Sunt oare egale unghiurile FOM și KOE?

78.• Unghiul ABC — desfășurat, iar semidreapta BK este bisectoarea unghiului CBD, $\angle ABK = 146°$ (fig. 79). Aflați unghiul CBD.

79.• Unghiul ABC — desfășurat, iar semidreapta BK este bisectoarea unghiului CBD, $\angle CBD = 54°$ (fig. 79). Aflați unghiul ABK.

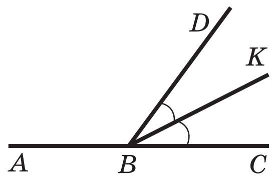


Fig. 79

80.• Cu câte grade se rotește într-un minut: 1) acul care indică minutele; 2) acul care indică ora?

81.• Aflați unghiul dintre acele ceasornicului când acestea indică: 1) ora 3; 2) ora 6; 3) ora 4; 4) ora 11; 5) ora 7.

82.•• Unghiul ABC este egal cu $30°$, unghiul CBD — $80°$. Aflați unghiul ABD. Câte soluții are problema?

83.•• Aflați unghiul MOK, dacă $\angle MON = 120°$, $\angle KON = 43°$. Câte soluții are problema?

84.•• Semidreapta dusă din vârful unghiului drept îl împarte în două unghiuri. Demonstrați că unghiul dintre bisectoarele unghiurilor formate este egal cu $45°$.

85.•• Având șablonul unghiului de $70°$, cum putem construi un unghi de $40°$?

86.•• Având șablonul unghiului de $40°$, cum putem construi un unghi de: 1) $80°$; 2) $160°$; 3) $20°$?

87.•• Având șablonul unghiului de $13°$, cum putem construi un unghi de $2°$?

88.* Cum vom construi unghiul de $1°$, folosind șablonul unghiului egal cu: 1) $19°$; 2) $7°$?

89.* Duceți șase drepte care se intersectează într-un punct. Este oare corect, că între unghiurile formate este un unghi mai mic de $31°$?

ÎNVĂȚĂM SĂ APLICĂM GEOMETRIA

90. Vântul sudic a schimbat direcția spre: 1) vest; 2) sud-est. Aflați unghiul de schimbare a direcției vântului.

91. Bătea un vânt nordic. Apoi, direcția s-a schimbat cu un unghi de: 1) 90°; 2) 45°. Ce direcție va avea vântul după aceasta?

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

92. Fără a ridica creionul de pe hârtie, duceți prin cele nouă puncte (fig. 80) patru segmente (nu este necesar de se întors la punctul de plecare).

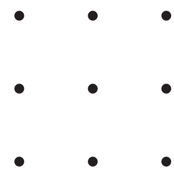


Fig. 80

4. Unghiuri adiacente și opuse la vârf

Definiție. Două unghiuri se numesc adiacente, dacă ele au o latură comună, iar altele două sunt semidrepte complementare.

În figura 81 unghiurile MOE și EON sunt adiacente.

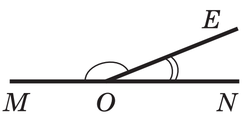


Fig. 81

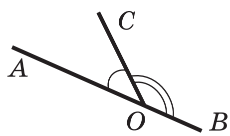


Fig. 82

Teorema 4.1. ***Suma unghiurilor adiacente este egală cu 180°.***

Demonstrație. ⊙ Fie, că unghiurile AOC și COB sunt adiacente (fig. 82). Trebuie de demonstrat, că $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$.

Deoarece unghiurile AOC și COB sunt adiacente, atunci semidreptele OA și OB sunt complementare. Atunci unghiul AOB este desfășurat. Deci, $\angle AOB = 180^\circ$. Semidreapta OC aparține unghiului AOB. Conform proprietății fundamentale a mărimii unghiurilor avem: $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 180^\circ$. ●

Definiție. Două unghiuri se numesc opuse la vârf, dacă laturile unui unghi sunt semidrepte complementare ale celuilalt unghi.

În figura 83 unghiurile AOB și COD sunt opuse la vârf.

Evident, că la intersecția a două drepte se formează două perechi de unghiuri opuse la vârf, diferite de cel desfășurat. În figura 83 unghiurile AOC și BOD de asemenea sunt opuse la vârf.

Teorema 4.2. ***Unghiurile opuse la vârf sunt egale.***

Demonstrație. ⊙ Dacă unghiurile opuse la vârf sunt unghiuri desfășurate, atunci ele sunt egale.

În figura 84, unghiurile 1 și 2 sunt opuse la vârf și diferite de cel desfășurat. Trebuie de demonstrat, că $\angle 1 = \angle 2$.

Fiecare din unghiurile 1 și 2 este adiacent cu unghiul 3. Atunci $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ și $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. De aici $\angle 1 = 180° - \angle 3$ și $\angle 2 = 180° - \angle 3$. Obținem că măsurile în grade a unghiurilor 1 și 2 sunt egale, deci și unghiurile sunt egale. ●

Problemă. În figura 85 $\angle ABE = \angle DCP$. Demonstrați că $\angle FBC + \angle BCP = 180°$.

Rezolvare. $\angle DCP + \angle BCP = 180°$, deoarece unghiurile DCP și BCP sunt adiacente. Unghiurile DCP și ABE sunt egale conform condiției. Unghiurile ABE și FBC sunt egale fiind opuse la vârf.

Deci, $\angle DCP = \angle FBC$. Atunci, $\angle FBC + \angle BCP = 180°$. ◀

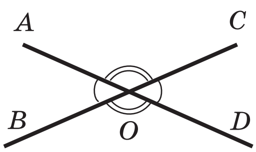


Fig. 83

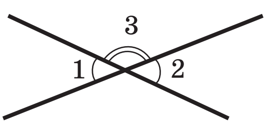


Fig. 84

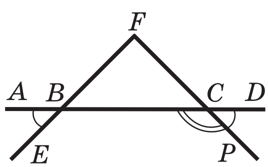


Fig. 85

1. Care două unghiuri se numesc adiacente? **2.** Cu ce este egală suma unghiurilor adiacente? **3.** Care două unghiuri se numesc opuse la vârf? **4.** Formulați teorema despre proprietatea unghiurilor opuse la vârf.

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

93.° Desenați trei unghiuri: ascuțit, drept și obtuz. Pentru fiecare din ele construiți unghiul adiacent.

94.° Desenați două unghiuri adiacente inegale astfel, încât latura lor comună să fie verticală.

EXERCIȚII

95.° Indicați perechile unghiurilor adiacente (fig. 86).

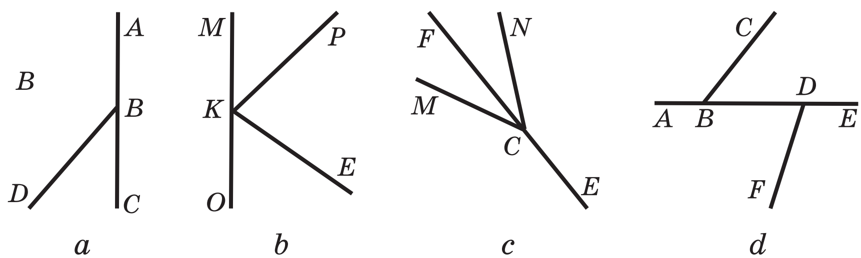


Fig. 86

96.° Sunt oare unghiurile *ABC* și *DBE* opuse la vârf (fig. 87)?

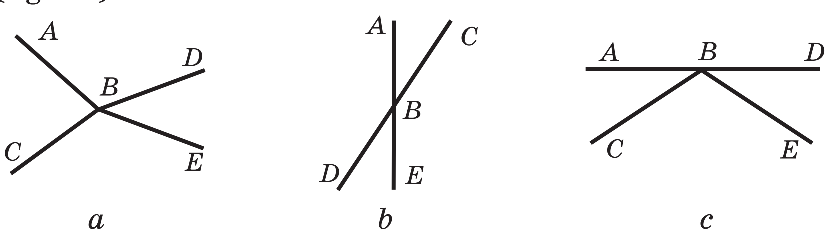


Fig. 87

97.° Câte perechi de unghiuri adiacente sunt reprezentate în figura 88? Numiți-le. Indicați perechile de unghiuri opuse la vârf.

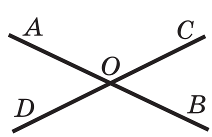


Fig. 88

98.° Se poate oare ca două unghiuri adiacente să fie egale cu: 1) 24° și 156°; 2) 63° și 107°? Argumentați răspunsul.

99.° Aflați unghiul adiacent cu unghiul de: 1) 29°; 2) 84°; 3) 98°; 4) 135°.

100.° Poate oare o pereche de unghiuri adiacente să fie formată din:

1) două unghiuri ascuțite;
2) două unghiuri obtuze;
3) un unghi drept și un unghi obtuz;
4) un unghi drept și un unghi ascuțit?

101.° Unul din unghiurile adiacente este unghi drept. Cum este al doilea unghi?

102.° Aflați unghiul adiacent cu unghiul ABC, dacă: 1) $\angle ABC = 36^\circ$; 2) $\angle ABC = 102^\circ$.

103.° Aflați unghiurile 2, 3 și 4 (fig. 89), dacă $\angle 1 = 42^\circ$.

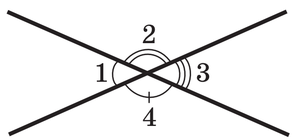


Fig. 89

104.° Aflați unghiurile adiacente, dacă:

1) unul din ele este cu 70° mai mare decât celălalt;
2) unul din ele este de 8 ori mai mic decât celălalt;
3) măsurile lor în grade se raportă ca $3:2$.

105.° Aflați unghiurile adiacente, dacă:

1) unul din ele este de 17 ori mai mare decât celălalt;
2) măsurile lor în grade se raportă ca $19:26$.

106.° Este oare corectă afirmația:

1) pentru fiecare unghi se poate construi doar un unghi opus la vârf;
2) pentru fiecare unghi se poate construi doar un unghi adiacent;
3) dacă unghiurile sunt egale, atunci ele sunt opuse la vârf;
4) dacă unghiurile nu sunt egale, atunci ele nu sunt opuse la vârf;
5) dacă unghiurile nu sunt opuse la vârf, atunci ele nu sunt egale;
6) dacă două unghiuri sunt adiacente, atunci unul din ele este ascuțit, iar celălalt – obtuz;

7) dacă două unghiuri sunt adiacente, atunci unul din ele este mai mare decât celălalt;
8) dacă suma a două unghiuri este egală cu 180°, atunci ele sunt adiacente;
9) dacă suma a două unghiuri nu este egală cu 180°, atunci ele nu sunt adiacente;
10) dacă unghiurile adiacente sunt egale, atunci ele sunt drepte;
11) dacă unghiurile egale au o vârf comun, atunci ele sunt opuse la vârf;
12) dacă două unghiuri au o latură comună, atunci ele sunt adiacente?

107.• Demonstrați că atunci când două unghiuri sunt egale, unghiurile adiacente acestora sunt de asemenea egale.

108.• Suma a două unghiuri, formate la intersecția a două drepte, este egală cu 140°. Demonstrați că aceste unghiuri sunt opuse la vârf.

109.• Aflați unghiurile formate la intersecția a două drepte, dacă:
1) suma a două din ele este egală cu 106°;
2) suma a trei din ele este egală cu 305°.

110.• Aflați unghiurile care se formează la intersecția a două drepte, dacă diferența a două din ele este egală cu 64°.

111.• Trei drepte se intersectează într-un singur punct (fig. 90). Aflați suma $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

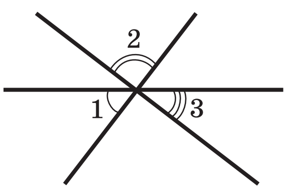


Fig. 90

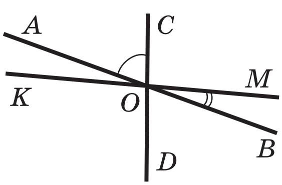


Fig. 91

112.• Dreptele AB, CD și MK se intersectează în punctul O (fig. 91), $\angle AOC = 70^\circ$, $\angle MOB = 15^\circ$. Aflați unghiurile DOK, AOM și AOD.

113. Aflați unghiul dintre bisectoarele unghiurilor adiacente.

114. Aflați unghiul dintre bisectoarele unghiurilor opuse la vârf.

115. Unghiurile ABF și FBC sunt adiacente, $\angle ABF = 80^\circ$, semidreapta BD aparține unghiului ABF, $\angle ABD = 30^\circ$. Aflați unghiul dintre bisectoarele unghiurilor DBF și FBC.

116. Unghiurile AOB și BOC – adiacente, semidreapta OD – bisectoarea unghiului AOB, unghiul BOD este cu 18° mai mic decât unghiul BOC. Aflați unghiurile AOB și BOC.

117. Aflați unghiurile adiacente MKE și PKE, dacă unghiul FKE este cu 24° mai mare decât unghiul PKE, unde semidreapta KF – bisectoarea unghiului MKE.

118. În figura 92 $\angle MAB + \angle ACB = 180^\circ$. Demonstrați că $\angle MAB = \angle KCB$.

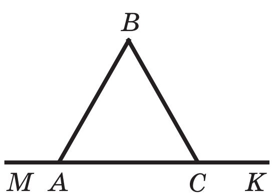


Fig. 92

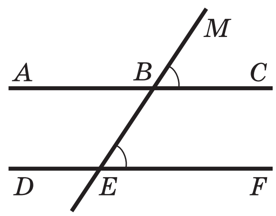


Fig. 93

119. În figura 93 $\angle MBC = \angle BEF$. Demonstrați că $\angle ABE + \angle BED = 180^\circ$.

120. Două unghiuri au o latură comună, iar suma lor este egală cu 180°. Se poate oare afirma că aceste unghiuri sunt adiacente?

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

121. Tăiați figura desenată în figura 94 în șase părți cu două drepte.

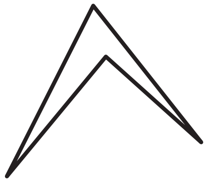


Fig. 94

5. Drepte perpendiculare

În figura 95 sunt notate patru unghiuri, formate la intersecția dreptelor a și b. Este ușor de arătat (încercați singuri), că dacă unul dintre unghiuri este drept (de exemplu, unghiul 1), atunci și unghiurile 2, 3 și 4 sunt de asemenea drepte.

Definiție. Două drepte se numesc perpendiculare, dacă la intersecție ele formează unghi drept.

În figura 95 dreptele a și b sunt perpendiculare. Se scrie: $a \perp b$ sau $b \perp a$.

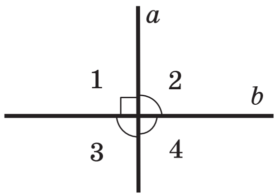


Fig. 95

În figura 96 dreptele AD și BC nu sunt perpendiculare. La intersecția lor s-a format o pereche de unghiuri ascuțite egale și o pereche de unghiuri obtuze egale. Mărimea unghiului ascuțit format se numește **unghiul dintre dreptele** AD și BC.

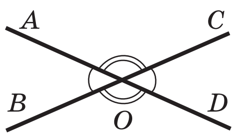


Fig. 96

Dacă dreptele sunt perpendiculare, se consideră că unghiul dintre ele este egal cu 90°.

Din cele spuse rezultă că unghiul dintre două drepte nu depășește 90°.

Definiție: Două segmente se numesc perpendiculare, dacă ele se află pe drepte perpendiculare.

În figura 97 segmentele AB și CD sunt perpendiculare. Se scrie: $AB \perp CD$.

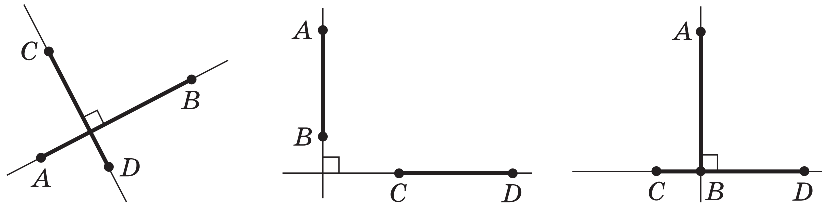


Fig. 97

Tot asa se poate de cercetat perpendicularitatea a două semidrepte, semidreaptei și segmentului, dreaptei și semidreaptei, segmentului și dreaptei. De exemplu, în figura 98 este reprezentat segmentul CD perpendicular la semidreapta AB.

În figura 99 este reprezentată dreapta a și segmentul AB, perpendicular la ea, extremitatea B a căruia aparține dreptei a. În acest caz se spune, că din punctul A pe dreapta a este **coborâtă perpendiculara** AB. Punctul B se numește **piciorul perpendicularei** AB.

Lungimea perpendicularei AB se numește **distanța de la punctul** A **până la dreapta** a. Dacă punctul A aparține dreptei a se consideră, că distanța de la punctul A până la dreapta a este egală cu zero.

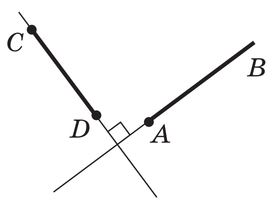


Fig. 98

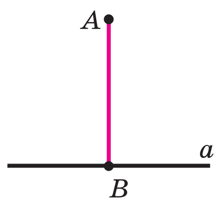


Fig. 99

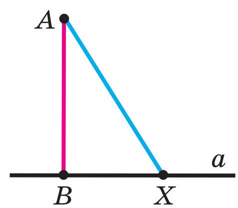


Fig. 100

Coborâm din punctul A pe dreapta a perpendiculara AB (fig. 100). Fie X – un punct oarecare al dreptei a, diferit de punctul B. Segmentul AX se umește **oblică**, dusă din punctul A la dreapta a.

Teorema 5.1. ***Prin fiecare punct al dreptei se poate duce o dreaptă perpendiculară la cea dată și numai una singură.***

Demonstrație Notăm pe dreapta AB un punct arbitrar M. Mai întâi arătăm că prin punctul M se poate duce o dreaptă perpendiculară la dreapta AB. De la semidreapta MB (fig. 101) construim unghiul drept CMB (aceasta se poate realiza folosind proprietatea fundamentală de depunere a unghiurilor). Atunci, dreapta CM este perpendiculară la dreapta AB.

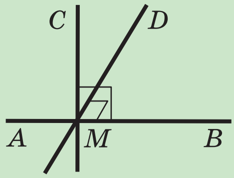


Fig. 101

Presupunem că prin punctul M trece încă o dreaptă, diferită de dreapta CM și este perpendiculară la dreapta AB. Fie, că punctul D al acestei drepte se află în același semiplan față de dreapta AB ca și punctul C (fig. 101). Atunci avem că de la semidreapta MB în același semiplan au fost depuse două unghiuri CMB și DMB, care sunt drepte, ceea ce contrazice proprietății fundamentale de depunere a unghiurilor. ●

1. Care două drepte se numesc perpendiculare? **2.** Ce simbol se folosește pentru a nota dreptele perpendiculare? **3.** Ce se numește unghi dintre două drepte care se intersectează? **4.** Care două segmente se numesc perpendiculare? **5.** Ce se numește distanța de la punct până la dreaptă? **6.** Câte drepte perpendiculare pot fi duse prin fiecare punct al unei drepte date la ea?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

122.° Copiați figura 102 în caiet. Folosind un echer, duceți prin punctul M o dreaptă perpendiculară la dreapta a.

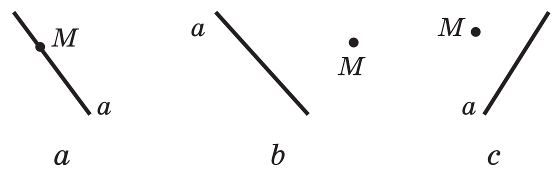


Fig. 102

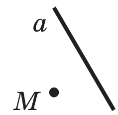


Fig. 103

123.° Copiați figura 103 în caiet. Folosind echerul, duceți o perpendiculară din punctul M la dreapta a. Duceți din punctul M două oblice la dreapta a.

124.° Duceți dreapta c și notați pe ea punctul K. Folosind echerul, duceți o dreaptă prin punctul K, perpendiculară la dreapta c.

125.° Duceți dreapta d și notați un punct M care nu aparține dreptei. Cu ajutorul echerului, duceți prin punctul M o dreaptă perpendiculară la dreapta d. Duceți din punctul M două oblice la dreapta d.

126.° Desenați unghiul ABK care este egal cu: 1) $73°$; 2) $146°$. Notați pe semidreapta BK punctul C și duceți prin el drepte perpendiculare la dreptele AB și BK.

127.° Desenați două segmente perpendiculare astfel ca: 1) să se intersecteze, dar să nu aibă extremitate comună; 2) să nu aibă puncte comune; 3) să aibă o extremitate comună.

128.° Desenați două semidrepte perpendiculare astfel ca: 1) să se intersecteze; 2) să nu aibă puncte comune.

EXERCIȚII

129.° În figura 104 dreptele AC și DK sunt perpendiculare. Sunt oare perpendiculare:

1) segmentele AB și BK;
2) segmentele BC și DF;
3) semidreptele BC și BK;
4) segmentul AB și semidreapta FD?

130.° Poate oare unghiul dintre două drepte să fie egal cu: 1) 1°; 2) 80°; 3) 90°; 4) 92°; 5) 101°?

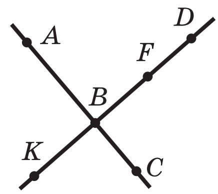


Fig. 104

131.° Nazar a construit două drepte care se intersectează. Cu ajutorul transportorului, a determinat că unul dintre unghiurile formate la intersecția dreptelor este egal cu 110° și a afirmat că unghiul dintre aceste drepte este egal cu 110°. Are oare dreptate Nazar? Argumentați răspunsul.

132.° Dreptele EF și MK se intersectează în punctul A, $EAK = 142^\circ$ (fig. 105). Aflați unghiul dintre dreptele EF și MK.

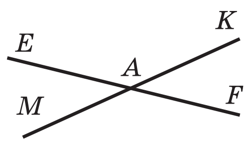
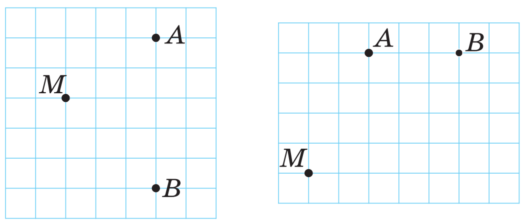


Fig. 105



a *b*

Fig. 106

133.° Considerând că lungimea laturii unui pătrățel este egală cu 0,5 cm, aflați distanța de la punctul M până la dreapta AB (fig. 106).

134.° Considerând că lungimea laturii unui pătrățel este egală cu 0,5 cm, aflați distanța de la punctul O până la dreapta CD (fig. 107).

a *b*

Fig. 107

135.• Demonstrați că dacă bisectoarele unghiurilor AOB și BOC sunt perpendiculare, atunci punctele A, O și C sunt situate pe o dreaptă.

136.• În figura 108 $AB \perp CD$, $\angle COK = 42°$, $\angle MOC + \angle BOK = 130°$. Aflați: 1) unghiul MOK; 2) unghiul MOD.

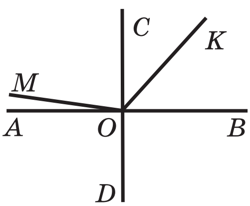


Fig. 108

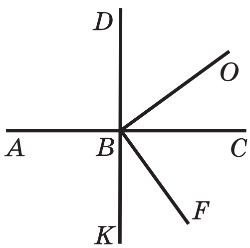


Fig. 109

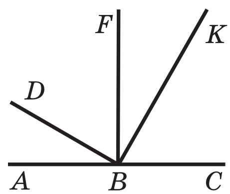


Fig. 110

137.• În figura 109 $AC \perp DK$, $OB \perp BF$, $\angle DBO = 54°$. Aflați unghiul ABF.

138.• Unghiul ABC este egal cu 160°, semidreptele BK și BM trec între laturile acestui unghi și sunt perpendiculare la ele. Aflați unghiul MBK.

139.• În figura 110 $BF \perp AC$, $BD \perp BK$. Demonstrați că $\angle ABD = \angle FBK$.

140.• În figura 110 $\angle ABD = \angle FBK$, $\angle DBF = \angle KBC$. Demonstrați că $BF \perp AC$.

141.•• Din vârful unghiului ABC, care este egal cu 70°, sunt duse semidreptele BD și BF astfel, încât $BD \perp BA$, $BF \perp BC$, semidreptele BD și BC aparțin unghiului ABF. Aflați unghiurile DBF și ABF.

142.•• Din vârful unghiului ABC, care este egal cu 130°, sunt duse semidreptele BD și BF astfel, încât $BD \perp AB$, $BF \perp BC$, semidreapta BF aparține unghiului ABC, iar semidreapta BA aparține unghiului DBF. Aflați unghiul DBF.

143.* Folosind echerul și șablonul unghiului egal cu 17°, construiți un unghi care este egal cu: 1) 5°; 2) 12°.

144.* Folosind echerul și șablonul unghiului egal cu 20°, construiți un unghi care este egal cu 10°.

ÎNVĂȚĂM SĂ APLICĂM GEOMETRIA

145. Folosind ambele părți ale echerului, Maria a dus prin punctul A două perpendiculare la dreapta a (fig. 111). Ce se poate spune despre acest echer?

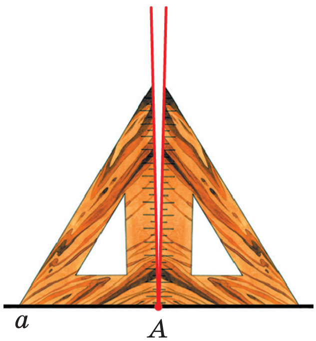


Fig. 111

Fig. 112

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

146. În figura 112 dreapta intersectează toate laturile octagonului. Poate oare o dreaptă să intersecteze toate laturile unui poligon cu treisprezece laturi fără să treacă nici printr-un vârf al lui?

6. Axiome

În punctele precedente, au fost demonstrate patru teoreme. De fiecare dată, demonstrând o nouă proprietate a figurii, noi ne bazam pe fapte geometrice deja cunoscute. De exemplu, în timpul demonstrației teoremei despre unghiurile opuse la vârf s-a folosit proprietatea unghiurilor adiacente. Folosindu-ne de acest principiu, noi vom demonstra încă multe teoreme noi. Însă chiar acum, la etapa începătoare de studiere a geometriei, apare o întrebare firească: dacă proprietățile figurilor geometrice sunt studiate conform principiului „de la cunoscut la necunoscut”, atunci trebuie să existe fapte apriori, și atunci pe ce se bazează argumentarea adevărului lor? Deoarece până la ele nu au fost alte afirmații adevărate. Această problemă poate fi rezolvată într-un singur mod: acceptând primele proprietăți fără demonstrare. Așa procedează matematicienii. Aceste proprietăți se numesc **axiome**.

Ca axiomele sunt alese afirmații simple, evidente și nu trezesc îndoieli. Nu în zădar termenul „axiomă”, ce provine de la cuvântul grecesc *„axios”*, înseamnă „recunoaștere demnă”.

Unele axiome au fost formulate în punctele precedente. Ele se numeau **proprietăți fundamentale.**

O parte din axiome nu le-am evidențiat într-o formă specială, dar pur și simplu le-am formulat ca afirmații clare și evidente. De exemplu, în punctele 2 și 3 au fost formulate următoarele axiome:

pentru orice două puncte există un singur segment, pentru care aceste puncte sunt extremități;

fiecare segment are o anumită lungime;

fiecare unghi are o anumită mărime.

Noi ne-am bazat și pe alte afirmații adevărate, acceptate fără demonstrare, adică, după conținut pe axiome, dar formulate în formă neevidentă. De exemplu, în punctul 1, descriind figura 13, noi am folosit de fapt următoarea axiomă:

care nu ar fi dreapta există puncte ce aparțin acestei drepte și puncte ce nu-i aparțin.

Axiomele sunt folosite nu numai în matematică. Adesea, în viața cotidiană, orice afirmație adevărată care nu necesită argumentare este numită axiomă. De exemplu, se spune: „După martie va urma aprilie. Aceasta este axiomă”.

Axiomele apar nu numai din practică sau observații.

Pentru orice cetățean al Ucrainei, Constituția reprezintă un șir de axiome. De aceea axioma poate fi considerată ca o lege sau o regulă. Însă legile (regulile de joacă) sunt primite, adică ele apar în rezultatul unor înțelegeri ale oamenilor între ei. Deci, axiomele geometriei se pot considera, de asemenea, ca reguli stabilite, pe baza cărora geometricienii ca și zidarii, ridică edificiul științei (fig. 113).

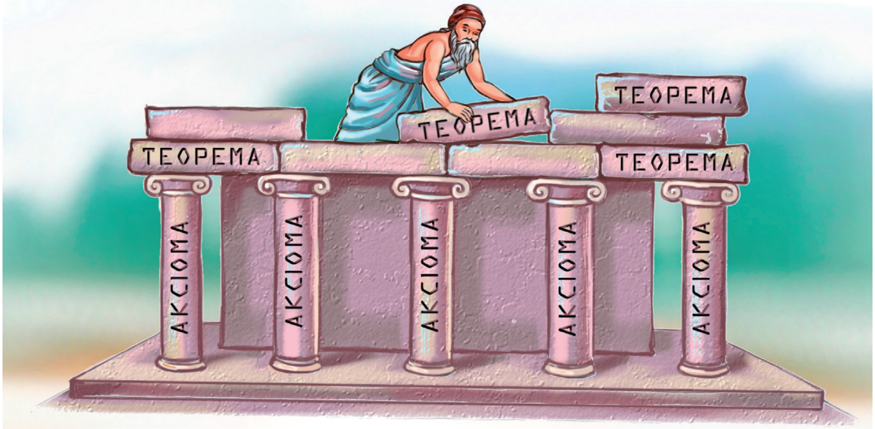


Fig. 113

Atunci poate apărea întrebarea: „Oare geometria poate fi acceptată ca o joacă, de exemplu așa, ca șahul?” Într-o oarecare măsură — da. Însă totodată trebuie de înțeles faptul, că regulile șahului, și deci însăși jocul, a apărut datorită fanteziei oamenilor. Odată cu aceasta, regulile geometriei (axiomele) au apărut din practică și observații. De aceea, spre deosebire de șah, geometria este aplicată foarte larg.

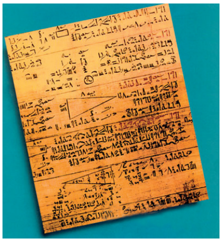
Dacă o să alegeți profesia legată de matematică, atunci veți putea face cunoștință cu alte geometrii, care se deosebesc de cea pe care o studiați în școală prin aceea, că ele sunt construite pe alte axiome.

DIN ISTORIA GEOMETRIEI

Când și unde au apărut primele informații geometrice? Specialiștii nu răspund univoc la această întrebare. Unii consideră că primii înaintași au fost lucrătorii agricoli din Egipt și Babilon care au trăit prin anii 4000 î.e.n.; alții presupun că geometria s-a născut în Egiptul Antic cu 5000 de ani în urmă.

Poate părea ciudat, dar întrebarea când a apărut **știința „Geometria”** nu provoacă conflicte. Istoricii s-au conformat cu gândul: în secolul VI î.e.n. Această unanimitate, este de mirare, deoarece chiar și înainte de acele timpuri, popoarele lumii antice au acumulat un volum destul de mare de cunoștințe geometrice. De exemplu, este clar că fără experiență geometrică egiptenii nu ar fi putut oferi lumii una dintre „cele șapte minuni ale lumii” – piramidele. Și totuși, de ce un mare număr de fapte geometrice acumulate nu este echivalent cu existența științei geometrice?

Geometria a devenit știință doar atunci, când adevărul faptelor ei a început să se stabilească prin calea demonstrației.



Papirus antic

Piramidele Egiptene

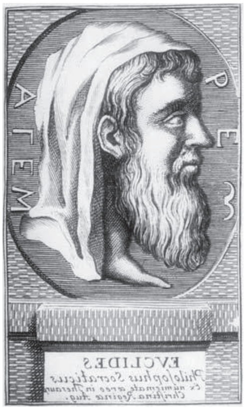
Apariția „geometriei demonstrative” este legată cu numele primului dintre „cei șapte înțelepți” – Thales din Milet[1] (aproximativ 625–547 î.e.n) – filozof, savant, negustor și om de stat.

Thales din Milet

Cu mult înainte de Thales, se știa că unghiurile opuse la vârf sunt egale, că diametrul împarte cercul în două părți egale. Nimeni nu se îndoia în adevărul acestor fapte. Dar Thales le-a demonstrat, și prin asta a devenit celebru.

În secolele VI-III î.e.n., datorită savanților din Grecia Antică, așa ca Pitagora, Eudoxus, Archytas, Theaetetus, Euclid și Arhimede, geometria s-a transformat dintr-o știință aplicată într-o teorie matematică.

Cartea din care se studia geometria peste 2000 de ani, fără exagerare, poate fi numită excelentă. Ea are denumirea „Elementele”, autorul ei este Euclid (aproximativ 365–300 î.e.n.). Din păcate, date despre Euclid aproape nimic nu s-au păstrat. În așa cazuri personalitatea este însoțită de diferite legende, una din care este deosebit de educativă. Regele Ptolemeu I l-a întrebat pe Euclid dacă există o cale mai simplă de a însuși geometria decât cea prezentată în „Elementele”. Euclid i-a răspuns: „în geometrie nu există căi împărătești”.



Euclid

Dar care cale în geometrie a ales Euclid în „Elementele” sale? Cea axiomatică. Fundamentul științei lui este enumerarea celor mai simple fapte. Ele sunt numite postulate (din latină *postulatum*, – „cerință”) și axiome.

[1] Milet – un port în Asia Mică, situat pe coasta Mării Egee.

Apoi, bazându-se pe ele, pe calea raționamentelor logice, se demonstrează toate celelalte proprietăți – teoreme.

Euclid a anunțat cinci postulate. Prezentăm primele patru:

I postulat. Este necesar, ca de la fiecare punct până la orice alt punct, să se poată duce o linie dreaptă;

II postulat. Și că fiecare dreaptă să se poată prelungi fără margini;

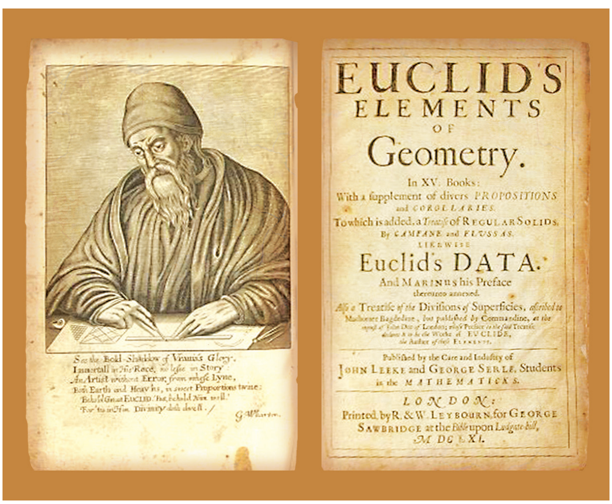
III postulat. Și că din orice centru să se poată descrie o circumferință de orice rază;

IV postulat. Și ca toate unghiurile drepte să fie egale.

Despre al cincelea postulat vom vorbi după p. 14.

Pe parcursul a multor secole, după popularitate, cu „Elementele” lui Euclid s-ar putea egala doar „Biblia”. Astfel, încă pe la sfârșitul sec. al XIX în multe țări europene geometria se preda după o ediție simplificată a „Elementelor” .

Și acum geometria, care se studiază în școală, în multe cazuri urmează ideile lui Euclid.



„Elementele” lui Euclid

Puteți afla mai multe despre istoria dezvoltării geometriei, participând la proiectele „Euclid și marea sa carte „Elementele” și „Apariția geometriei ca știință și etapele ei de dezvoltare” (vezi p. 256).

Școala de matematică din Alexandria, fondată de Euclid, a unit timp de 700 de ani oameni de știință care lucrau în domeniile de matematică, fizică, astronomie, mecanică și inginerie. Printre savanții de renume mondial activitatea cărora este legată de această școală sunt: Arhimede (aprox. 287–212 î.e.n.), Eratostene (aprox. 276–194 î.e.n.), Apollonius din Perga (aprox. 260–170 î.e.n.), Conon din Samos (aprox. 280–220 î.e.n.), Nicomedes (secolul al III-lea î.e.n.), Ctisibius din Alexandria, fondatorul tradițiilor inginerești din Alexandria (secolele II–I î.e.n.) și Heron din Alexandria (aprox. secolul I), Pappus din Alexandria (sfârșitul secolului al III-lea) și Diofant din Alexandria (aprox. secolul III). Centrele de învățătură importante au fost Muzeul Alexandriei (din limba greacă „museion” — „Templul Muzelor”) și Biblioteca Alexandriei.

Una dintre ultimele personalități ilustre ale acestei epoci a fost Hypatia din Alexandria, prima femeie-matematician cunoscută, care a trăit la sfârșitul secolului al IV-lea și începutul secolului al V-lea. Ea era fiica renumitului astronom, matematician, mecanic și ultimul director al Bibliotecii Alexandriei — Theon din Alexandria, care i-a dat fiicei o educație profundă și diversificată. De la vârsta de 20 de ani, Hypatia a început să-și ajute pe tatăl său, predând astronomia, matematica și filosofia la Muzeion, s-a alăturat la lucrările științifice ale lui și a fost considerată de contemporani mai capabilă decât tatăl său.

Hypatia.
Pictură de Jules Maurice Gaspard, 1908

După moartea tatălui, Hypatia a preluat conducerea școlii, care a fost redenumită „Școala lui Theon și Hypatia”.

Hypatia a ținut lecții nu doar în Muzeion, dar și în fața mulțimii, care se aduna ca să învețe la porțile casei sale. De asemenea, a participat activ în viața politică a orașului.

Istoricii științei consideră că Hypatia a fost coautor tatălui a următoarelor lucrări științifice „Canonul Astronomic”, comentarii la „Elementele” și la „Optica” lui Euclid, la „Aritmetica” lui Diofant, la învățăturile lui Ptolemeu despre trigonometria coardei. Hypatia se ocupa cu calcularea tabelelor astronomice, a participat la crearea dispozitivelor de inginerie: astrolabul, areometrul (un instrument pentru măsurarea densității lichidelor). Din păcate, toate lucrările Hypatiei au dispărut în epoca Evului Mediu, împreună cu lucrările multor altor savanți antici.

În apogeul puterilor sale creatoare, femeia-savant a fost ucisă de o mulțime de fanatici creștini. Nu se știe exact ce a cauzat acest lucru – motive religioase, implicarea Hypatiei în politică sau atitudinea poporului față de savantă ce era considerată „vrăjitoare”, dar ea a devenit una dintre primele victime istorice ale creștinismului.

Școala din Atena. *Fragment din fresca lui Rafael Santi*

Interesul la personalitatea Hypatiei a fost reînnoit în Epoca Luminilor, când a început să fie considerată o jertfă în numele științei. Despre prima femeie-savant s-au scris poeme, romane, filme (inclusiv nuvela scriitorului ucrainean Oles Berdnyk „Prometeu”). În cinstea ei a fost numit un crater pe Lună, un asteroid și o planetă în constelația Dragonului.

ÎNSĂRCINAREA № 1 „CONTROLEAZĂ-TE” ÎN FORMĂ DE TEST

1. Câte drepte sunt determinate de trei puncte care nu se află pe o dreaptă?

A) 2; B) 4; C) 3; D) 1.

2. Câte segmente, care conțin două puncte date, se pot construi?

A) 1; B) 2; C) 3; D) o mulțime.

3. Punctul M este punct interior al segmentului PQ. Care din afirmațiile date este corectă?

A) $PM + MQ = PQ$; C) $MQ = PQ + PM$;
B) $PQ = PM - MQ$; D) $PM = PQ + MQ$.

4. Punctele A, B și C se află pe o dreaptă, și totodată $BC = 8$ cm, $AB - BC = 8$ cm. Care din afirmațiile date este corectă?

A) Punctul A este mijlocul segmentului BC;
B) Punctul B este mijlocul segmentului AC;
C) Punctul C este mijlocul segmentului AB;
D) Punctele A și B coincid.

5. Lungimea segmentului AB este egală cu 12 cm. Câte puncte există pe dreapta AB pentru care suma distanțelor de la fiecare dintre aceste puncte până la extremitățile segmentului AB să fie egală cu 14 cm?

A) O mulțime; B) 1; C) 2; D) niciunul.

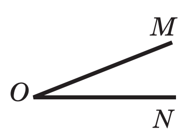
6. Lungimea segmentului AB este egală cu 12 cm. Câte puncte există pe dreapta AB pentru care suma distanțelor de la fiecare dintre aceste puncte până la extremitățile segmentului AB să fie egală cu 12 cm?

A) Niciunul; B) 2; C) o mulțime; D) 1.

7. Două semidrepte sunt complementare, dacă:

A) au origine comună;
B) reuniunea lor este o dreaptă și ele au origine comună;
C) ele aparțin unei drepte;
D) reuniunea lor este o dreaptă.

8. Care notare a unghiului, reprezentat în figură, este necorectă?



A) $\angle O$; C) $\angle MON$;
B) $\angle OMN$; D) $\angle NOM$.

9. Care din afirmațiile date este greșită?
A) Unghiurile adiacente au un vârf comun;
B) Unghiurile adiacente au o latură comună;
C) Întotdeauna unul dintre unghiurile adiacente este ascuțit, iar celălalt obtuz;
D) Dacă unghiurile AOC și COB sunt adiacente, atunci semidreptele OA și OB sunt complementare.

10. Care din afirmațiile date este greșită?
A) Unghiurile opuse la vârf sunt egale;
B) Dacă unghiurile sunt egale, atunci ele sunt opuse la vârf;
C) Unghiurile opuse la vârf au un vârf comun;
D) Laturile unghiurilor opuse la vârf formează două perechi de semidrepte complementare.

11. Care din afirmațiile date este corectă?
A) Segmentele perpendiculare au întotdeauna un punct comun;
B) Semidreptele perpendiculare au întotdeauna un punct comun;
C) Dreptele perpendiculare au întotdeauna un punct comun;
D) Semidreapta și segmentul perpendiculare au întotdeauna un punct comun.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 1

Proprietatea fundamentală a dreptei

Prin orice două puncte se poate duce o dreaptă și numai una singură.

Dreptele ce se intersectează

Două drepte, care au un punct comun, se numesc acele care se intersectează.

Teorema despre două drepte ce se intersectează

Orice două drepte, care se intersectează, au numai un punct comun.

Segmente egale

Două segmente se numesc egale, dacă ele coincid prin suprapunere.

Segmentele egale au lungimi egale și invers, dacă lungimile segmentelor sunt egale, atunci și însăși segmentele sunt egale.

Proprietatea fundamental a lungimii segmentului

Dacă punctul C este punct interior al segmentului AB, atunci segmentul AB este egal cu suma segmentelor AC și CB, adică $AB = AC + CB$.

Distanța dintre puncte

Distanța dintre punctele A și B se numește lungimea segmentului AB.

Semidrepte complementare

Două semidrepte, care au origine comună și se află pe o dreaptă, se numesc complementare.

Unghi desfășurat

Unghiul, laturile căruia sunt semidrepte complementare, se numește unghi desfășurat.

Unghiuri egale

Două unghiuri se numesc egale, dacă ele coincid prin suprapunere.

Unghiurile egale au mărimi egale și invers, dacă mărimile unghiurilor sunt egale, atunci și unghiurile sunt egale.

Proprietatea fundamentală de depunere a unghiurilor

Pentru unghiul dat ABC și semidreapta dată B_1C_1 există un singur unghi $A_1B_1C_1$ care este egal cu unghiul ABC, astfel încât punctul A_1 să fie situat în semiplanul dat față de dreapta B_1C_1.

Bisectoarea unghiului

Bisectoarea unghiului se numește semidreapta cu originea în vârful unghiului, care împarte acest unghi în două unghiuri egale.

Unghi ascuțit, drept, obtuz

Unghiul, măsura în grade a căruia este mai mică de 90° se numește ascuțit.
Unghiul, măsura în grade a căruia este egală cu 90° se numește drept.
Unghiul, măsura în grade a căruia este mai mare de 90°, dar mai mică de 180° se numește obtuz.

Proprietatea fundamentală a mărimii unghiului

Dacă semidreapta OC împarte unghiul AOB în două unghiuri AOC și COB, atunci $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

Unghiuri adiacente

Două unghiuri se numesc adiacente, dacă una din laturile lor este comună, iar altele două sunt semidrepte complementare.

Proprietatea unghiurilor adiacente

Suma unghiurilor adiacente este egală cu 180°.

Unghiuri opuse la vârf

Două unghiuri se numesc opuse la vârf, dacă laturile unuia sunt semidrepte complementare ale laturilor celuilalt.

Proprietatea unghiurilor opuse la vârf

Unghiurile opuse la vârf sunt egale.

Drepte perpendiculare

Două drepte se numesc perpendiculare, dacă la intersecția lor se formează unghi drept.

Teorema despre existența și unicitatea dreptei perpendiculare la cea dată

Prin fiecare punct al dreptei se poate duce o dreaptă perpendiculară la cea dată și numai una singură.

TRIUNGHIURI §2

Cum să aflăm dacă două triunghiuri sunt egale fără să le suprapunem? Ce proprietăți au triunghiurile isoscele și echilaterale? Ce „Construcție” are teorema? Răspunsurile la aceste și multe alte întrebări le veți găsi în acest paragraf.

7. Triunghiuri egale. Înălțimea, mediana, bisectoarea triunghiului

Cercetăm trei puncte A, B, C, care nu sunt situate pe o dreaptă. Le unim cu segmentele AB, BC, CA. Figura formată mărginește o parte a planului, evidențiată în figura 114 cu culoare verde. Această parte a planului, împreună cu segmentele AB, BC și CA, se numește triunghi. Punctele A, B, C se numesc **vârfurile triunghiului**, iar segmentele AB, BC, CA – **laturile triunghiului**.

Triunghiul se numește și se notează conform vârfurilor lui. Triunghiul din figura 114 este notat astfel: ΔABC (se citește: „triunghiul ABC”), sau ΔBCA (se citește: „triunghiul BCA”), sau ΔACB ș.a.m.d.

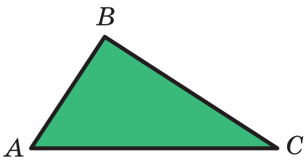


Fig. 114

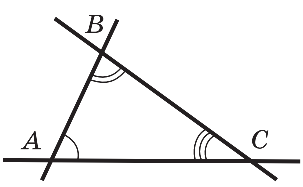


Fig. 115

Unghiurile BAC, ABC, BCA (fig. 115) se numesc **unghiurile triunghiului** ABC.

În triunghiul ABC (fig. 115), de exemplu, unghiul B se numește *unghiul opus laturii* AC, iar unghiurile A

și C — *unghiuri alăturate laturii AC*, latura AC — *latura opusă unghiului B*, laturile AB și AC — *laturi alăturate unghiului A*.

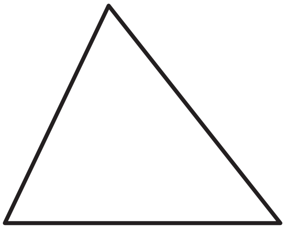
Definiție. Perimetrul triunghiului se numește suma lungimilor tuturor laturilor lui.

Perimetrul se notează cu litera P. De exemplu, pentru perimetrul triunghiului MNK se folosește notarea P_{MNK}.

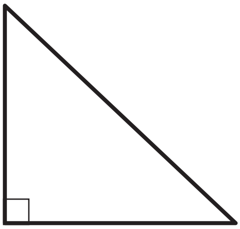
Definiție. Triunghiul se numește ascuțitunghic, dacă toate unghiurile lui sunt ascuțite.

Triunghiul se numește dreptunghic dacă unul din unghiurile lui este drept.

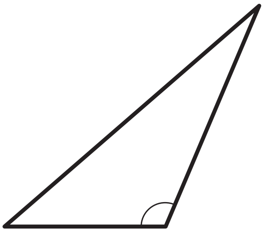
Triunghiul se numește obtuzunghic dacă unul din unghiurile lui este obtuz (fig. 116).



Triunghi ascuțitunghic



Triunghi dreptunghic



Triunghi optuzunghic

Fig. 116

Definiție. Două triunghiuri se numesc egale dacă ele coincid prin suprapunere.

În figura 117 sunt prezentate două triunghiuri egale ABC și $A_1B_1C_1$. Se scrie: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Aceste triunghiuri se pot suprapune astfel, încât vârfurile A și A_1, B și B_1, C și C_1 să coincidă. Atunci se poate scrie: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$.

Laturile și unghiurile, care coincid prin suprapunerea triunghiurilor egale se numesc **laturi corespunzătoare și unghiuri corespunzătoare**. Astfel, în figura 117, laturile AC și A_1C_1, unghiurile A și A_1 – corespunzătoare.

De obicei, pe desene, laturile egale se însemnă cu același număr de liniuțe, iar unghiurile egale cu același număr de arcuri (fig. 117).

Menționăm, că în triunghiuri egale, *unghiurilor corespunzătoare li se opun laturi corespunzătoare* și invers: *laturilor corespunzătoare li se opun unghiuri corespunzătoare*.

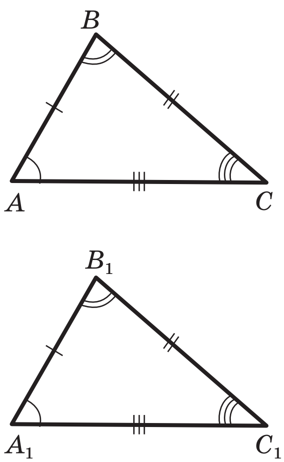


Fig. 117

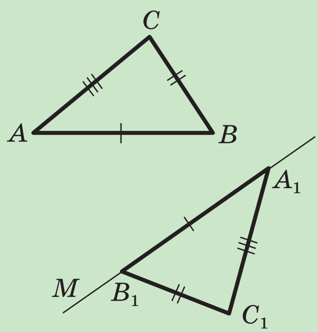


Fig. 118

Axioma despre existența unui triunghi egal cu cel dat. **Pentru triunghiul dat ABC și semidreapta dată A_1M, există un astfel de triunghi $A_1B_1C_1$, care este egal cu triunghiul ABC, astfel încât $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ și latura A_1B_1 aparține semidreptei A_1M, iar vârful C_1 se află în semiplanul dat față de dreapta A_1M** (fig. 118).

Teorema 7.1. ***Printr-un punct ce nu aparține dreptei date se poate duce o dreaptă perpendiculară pe cea dată și numai una singură.***

Demonstrație. Să cercetăm dreapta MN și punctul O care nu aparține ei.

Mai întâi vom arăta că prin punctul O se poate duce o dreaptă perpendiculară pe dreapta MN.

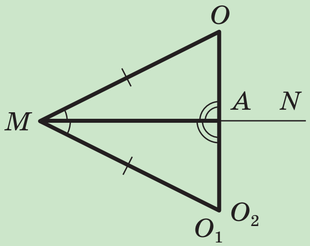


Fig. 119

De la semidreapta MN vom depune unghiul O_1MN ce este egal cu unghiul OMN. Fie că punctul O_1 este astfel încât $MO = MO_1$ (fig. 119). Punctul de intersecție al dreptelor OO_1 și MN îl vom nota cu litera A.

De la semidreapta MA vom depune triunghiul O_2MA, care este egal cu triunghiul OMA. Fiecare din unghiurile AMO_1 și AMO_2 este egal cu unghiul AMO, deci unghiurile AMO_1 și AMO_2 sunt egale. Deci, punctul O_2 aparține semidreptei MO_1. În afară de aceasta, fiecare din segmentele MO_1 și MO_2 este egal cu segmentul MO. Deci punctele O_1 și O_2 coincid. Astfel, triunghiurile AMO_1 și AMO_2 coincid. Din egalitatea triunghiurilor AMO și AMO_1 rezultă egalitatea unghiurilor OAM și O_1AM. Deoarece aceste unghiuri sunt adiacente, atunci fiecare din ele este drept. Deci, dreapta OO_1 este perpendiculară pe dreapta MN.

Presupunem că prin punctul O trec două drepte OA și OB perpendiculare pe dreapta MN (fig. 120, *a*).

Conform axiomei despre existența unui triunghi egal cu cel dat, există un triunghi O_1AB care este egal cu triunghiul OAB (fig. 120, *b*). Atunci $\angle OAB = \angle O_1AB = 90°$. De aici rezultă că $\angle OAO_1 = 180°$, deci punctele O, A, O_1 se află pe aceeași dreaptă. În mod analogic, se poate demonstra că punctele *O*, *B*, O_1 de asemenea se află pe o dreaptă. Dar atunci dreptele *OA* și *OB* au două puncte de intersecție – punctele *O* și O_1, dar aceasta contrazice teoremei 1.1. Deci, presupunerea noastră nu este corectă. Atunci, prin punctul *O* trece numai o singură dreaptă perpendiculară pe dreapta *MN*. ●

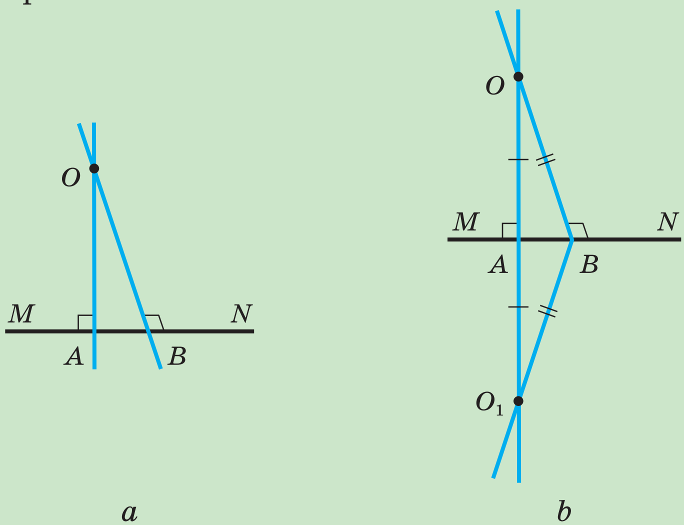


Fig. 120

Posibil, voi ați observat, că definițiile segmentelor egale, unghiurilor egale și triunghiurilor egale sunt foarte asemănătoare. De aceea, este rațional de acceptat următoarea definiție a figurilor egale:

Definiție. Două figuri se numesc egale dacă ele coincid prin suprapunere.

În figura 121 sunt reprezentate două figuri egale F_1 și F_2. Se scrie: $F_1 = F_2$.

Este clar că orice două drepte (două semidrepte, două puncte) sunt egale.

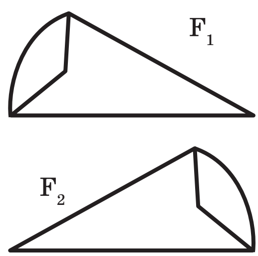


Fig. 121

Definiție. Perpendiculara coborâtă din vârful triunghiului pe dreapta care conține latura opusă se numește înălțimea triunghiului.

În figura 122 segmentele BB_1 și CC_1 – înălțimile triunghiului ABC.

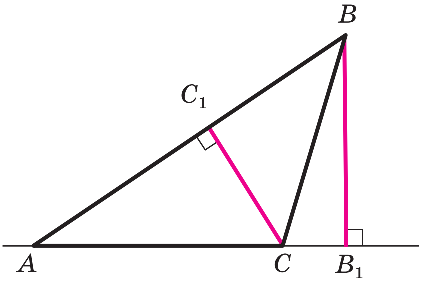


Fig. 122

Definiție. Segmentul care unește vârful triunghiului cu mijlocul laturii opuse se numește mediana triunghiului.

În figura 123 segmentul AM – mediana triunghiului ABC.

Definiție. Segmentul bisectoarei unghiului triunghiului, care unește vârful triunghiului cu un punct al laturei opuse, se numește bisectoarea triunghiului.

În figura 124 segmentul BL este bisectoarea triunghiului ABC. Fiecare triunghi are trei înălțimi, trei mediane și trei bisectoare.

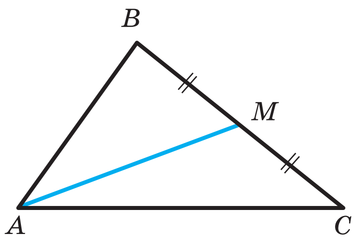


Fig. 123

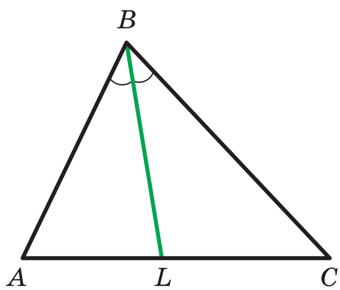


Fig. 124

1. Cum numim și cum notăm triunghiul? **2.** Ce se numește perimetrul triunghiului? **3.** Ce tipuri de triunghiuri există în dependență de felul unghiurilor lor? **4.** Care triunghi se numește triunghi dreptunghic; Obtuzunghic; Ascuțitunghic? **5.** Care două triunghiuri se numesc egale? **6.** Cum se numesc perechile de laturi și perechile de unghiuri ale triunghiurilor egale care coincid la suprapunere? **7.** Care două figuri se numesc egale? **8.** Ce se numește înălțimea triunghiului? **9.** Ce se numește mediana triunghiului? **10.** Ce se numește bisectoarea triunghiului? **11.** Câte înălțimi are fiecare triunghi; Mediane; Bisectoare?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

147.° Desenați un triunghi:

1) ascuțitunghic;
2) dreptunghic;
3) obtuzunghic.

Duceți din fiecare vârf al triunghiului înălțimea.

148.° Desenați în caiet figura 125, duceți înălțimea comună pentru toate cele trei triunghiuri reprezentate pe desen. La care dintre ele această înălțime este situată în afara triunghiului?

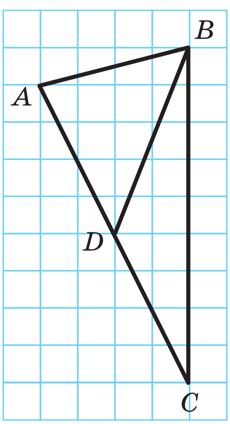


Fig. 125

149.° Desenați în caiet triunghiurile, reprezentate în figura 126, duceți în fiecare din ele toate înălțimile.

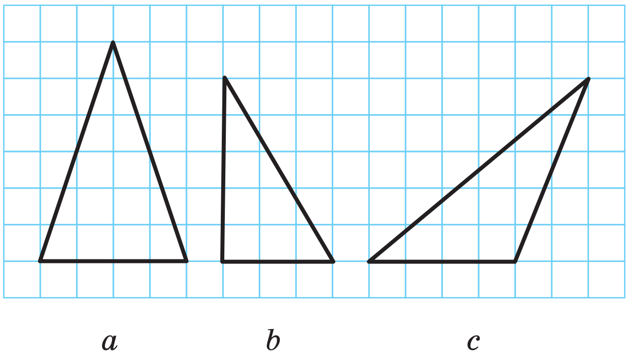


Fig. 126

150.° Desenați un triunghi arbitrar și trasați toate medianele lui.

151.° Desenați un triunghi arbitrar și trasați toate bisectoarele lui.

EXERCIȚII

152.° Desenați un triunghi arbitrar, notați vârfurile lui cu literele M, K și E. Indicați:

1) latura opusă unghiului M;
2) unghiul opus laturii MK;
3) laturile alăturate unghiului K;
4) unghiurile alăturate laturii KE.

153.° Scrieți laturile, vârfurile și unghiurile triunghiului CEF (fig. 127). Indicați:

1) unghiul opus laturii CF;
2) unghiurile alăturate laturii CE;
3) latura opusă unghiului E;
4) laturile alăturate unghiului F.

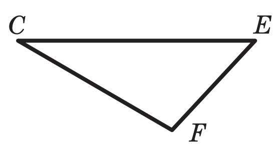


Fig. 127

154.° Una din laturile triunghiului este de 5 ori mai mică decât a doua și cu 25 cm mai mică decât a treia. Aflați laturile triunghiului, dacă perimetrul lui este egal cu 74 cm.

155.° Laturile triunghiului se raportă ca $5:7:11$, iar suma celei mai mari și celei mai mici laturi este egală cu 80 cm. Calculați perimetrul triunghiului.

156.° Perimetrul triunghiului este egal cu 48 cm, iar laturile lui se raportă ca $7:9:8$. Aflați laturile triunghiului.

157.° Triunghiurile APK și MCE sunt egale, unghiurile A și C corespunzătoare, $PK = 10$ cm. Aflați latura ME.

158.° Triunghiurile ABC și DEF sunt egale, laturile AB și DE, BC și DF – corespunzătoare, $\angle B = 32°$. Aflați unghiul D.

159.° Triunghiurile ABC și KTM sunt egale, unghiurile A și M, B și K sunt corespunzătoare, $\angle C = 40°$, $MK = 5$ cm. Aflați unghiul T și latura AB.

160.° Este oare corectă afirmația:
1) dacă triunghiurile sunt egale, atunci perimetrele lor tot sunt egale;
2) dacă perimetrele a două triunghiuri sunt egale, atunci și triunghiurile date sunt egale?

161.° Indicați elementul comun al triunghiurilor reprezentate în figura 128.

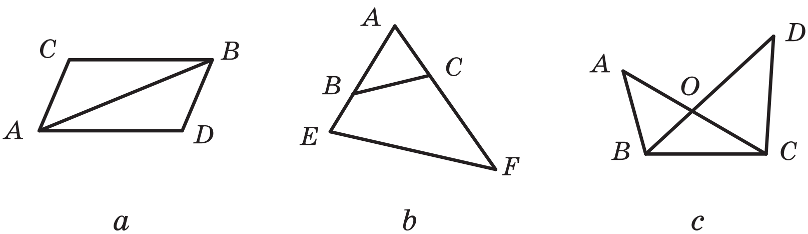


Fig. 128

162.° Segmentul CH – înălțimea triunghiului ABC (fig. 129). Aflați măsurile în grade a unghiurilor AHC și BHC.

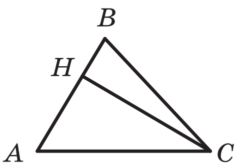


Fig. 129

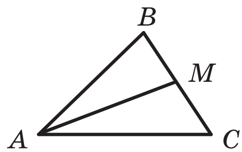


Fig. 130

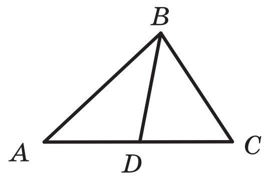


Fig. 131

163.° Segmentul AM – mediana triunghiului ABC (fig. 130), $BM = 8$ cm. Aflați segmentele CM și BC.

164.° Segmentul BD – bisectoarea triunghiului ABC (fig. 131), $\angle ABD = 42°$. Aflați măsurile în grade a unghiurilor CBD și ABC.

165.° Care dintre elementele triunghiului – bisectoarea, mediana, înălțimea – aparțin întotdeauna triunghiului?

166.° Care dintre elementele triunghiului – bisectoarea, mediana, înălțimea – poate coincide cu latura lui? Indicați tipul triunghiului, pentru care aceasta este posibil.

167.° 1) Se poate oare ca una din înălțimi să aparțină triunghiului, iar altele două să nu aparțină?

2) Se poate oare ca numai o înălțime a triunghiului să coincidă cu o latură a lui?

3) În care triunghi trei înălțimi ale lui se intersectează în vârful lui?

168.• Pe latura AC a triunghiului ABC s-a notat punctul D. Segmentul BD împarte triunghiul ABC în două triunghiuri, perimetrele cărora sunt egale cu 32 cm și 36 cm. Aflați perimetrul triunghiului ABC, dacă $BD = 10$ cm.

169.• Pe latura BC a triunghiului ABC s-a notat punctul M. Perimetrele triunghiurilor ABC, AMC și AMB sunt respectiv egale cu 60 cm, 36 cm și 50 cm. Aflați segmentul AM.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

170. În figura 132 $KP = PE = EF = FT = 1$ cm. Care segmente mai sunt egale în această figură? Aflați lungimile lor.

Fig. 132

171. Semidreapta BD împarte unghiul ABC, care este egal cu 72°, în două unghiuri ABD și CBD astfel, încât $\angle ABD = 5\angle CBD$. Semidreapta BK trece astfel, că semidreapta BA este bisectoarea unghiului DBK. Determinați măsura în grade și tipul unghiului DBK.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

172. Tăiați fiecare din figurile reprezentate în figura 133 în două figuri egale (nu este obligatoriu de tăiat în lungul liniilor grilei).

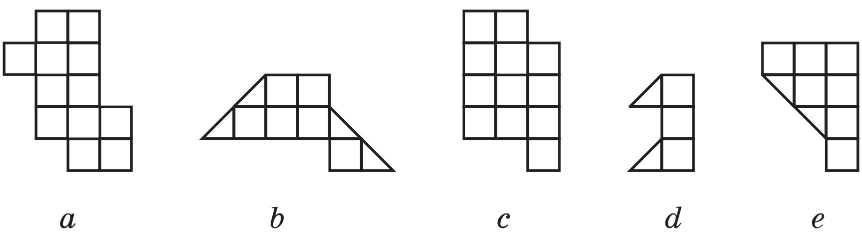


Fig. 133

8. Primul și al doilea criteriu de egalitate a triunghiurilor

Dacă pentru triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ se îndeplinesc șase condiții: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, atunci evident, că aceste triunghiuri vor coincide prin suprapunere. Deci, ele sunt egale.

Încercăm să micșorăm numărul de condiții. De exemplu, lăsăm doar două egalități: $AB = A_1B_1$ și $BC = B_1C_1$. În acest caz, triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ pot să nu fie egale (fig. 134).

Cum putem micșora lista cerințelor la minimum, păstrând, totodată, egalitatea triunghiurilor? La această întrebare răspund teoremele care se numesc **criteriile de egalitate a triunghiurilor**.

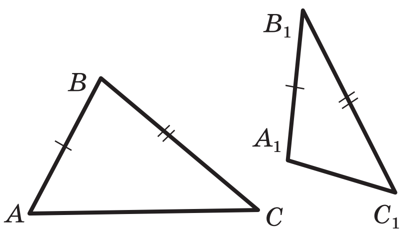


Fig. 134

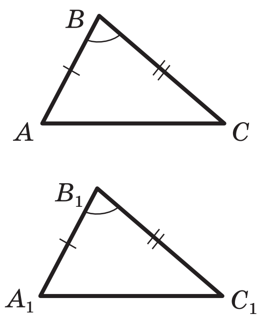


Fig. 135

Teorema 8.1 (Primul criteriu de egalitate a triunghiurilor: după două laturi și unghiul dintre ele). ***Dacă două laturi și unghiul dintre ele ale unui triunghi sunt egale corespunzător cu două laturi și unghiul dintre ele ale altui triunghi, atunci astfel de triunghiuri sunt egale.***

Demonstrație. Cercetăm triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, unde $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ și $\angle B = \angle B_1$ (fig. 135). Vom demonstra, că $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Suprapunem triunghiul ABC triunghiului $A_1B_1C_1$ astfel, încât semidreapta BA să coincidă cu semidreapta B_1A_1 și semidreapta BC să coincidă cu semidreapta B_1C_1. Putem face acest lucru deoarece, conform condiției, $\angle B = \angle B_1$. Deoarece conform condiției $AB = A_1B_1$ și $BC = B_1C_1$, atunci la o astfel de suprapunere latura BA va coincide cu latura B_1A_1, iar latura BC – cu latura B_1C_1. Deci triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ coincid complet și de aceea ele sunt egale. ●

Definiție. Dreapta, care este perpendiculară pe un segment și trece prin mijlocul lui, se numește mediatoarea segmentului.

În figura 136 dreapta a este mediatoarea segmentului AB. Menționăm, că punctele A și B sunt egal depărtate de la dreapta a.

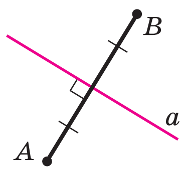


Fig. 136

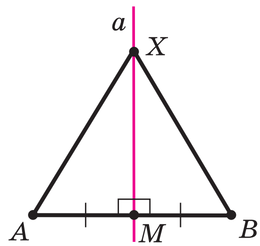


Fig. 137

Teorema 8.2. Fiecare punct al mediatoarei segmentului este egal depărtat de la extremitățile acestui segment.

Demonstrație. Fie X – un punct arbitrar al mediatoarei a segmentului AB. Trebuie de demonstrat că $XA = XB$. Fie punctul M – mijlocul segmentului AB. Dacă punctul X coincide cu punctul M (ceea ce este posibil, deoarece X este un punct arbitrar al dreptei a), atunci $XA = XB$.

Dacă punctele X și M nu coincid, atunci cercetăm triunghiurile AXM și BXM (fig. 137). În aceste triunghiuri $AM = MB$, deoarece punctul M este mijlocul segmentului AB, latura XM – comună, $\angle AMX = \angle BMX = 90°$. Deci, triunghiurile AXM și BXM sunt egale după două laturi și unghiul dintre ele, adică conform primului criteriu de egalitate a triunghiurilor. Atunci segmentele XA și XB sunt egale ca laturi corespunzătoare ale triunghiurilor egale. ●

Teorema 8.3 (al doilea criteriu de egalitate a triunghiurilor: după o latură și două unghiuri alăturate ei). ***Dacă o latură și două unghiuri alăturate ei ale unui triunghi sunt egale corespunzător cu o latura și două unghiuri alăturate ei ale altui triunghi, atunci astfel de triunghiuri sunt egale.***

Demonstrație. ⊙ Cercetăm triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, unde $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ și $\angle C = \angle C_1$ (fig. 138). Vom demonstra, că $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

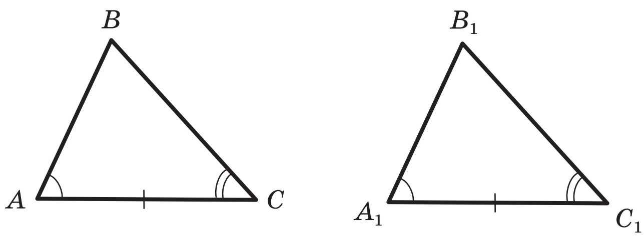


Fig. 138

Suprapunem triunghiul ABC triunghiului $A_1B_1C_1$ astfel, încât punctul A să coincidă cu punctul A_1, segmentul AC – cu segmentul A_1C_1 (acest lucru este posibil deoarece $AC = A_1C_1$) și punctele B și B_1 să se afle într-un semiplan față de dreapta A_1C_1. Deoarece $\angle A = \angle A_1$ și $\angle C = \angle C_1$, atunci semidreapta AB va coincide cu semidreapta A_1B_1, iar semidreapta CB – cu semidreapta C_1B_1. Atunci, punctul B – punct comun al semidreptelor AB și CB va coincide cu punctul B_1 – punct comun al semidreptelor A_1B_1 și C_1B_1. Deci, triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ vor coincide în întregime și de aceea sunt egale. ●

Problemă. În figura 139 punctul O – mijlocul segmentului BD, $\angle ABO = \angle CDO$. Demonstrați că $BC = AD$.

Rezolvare. Să cercetăm triunghiurile AOB și COD. Deoarece punctul O – mijlocul segmentului BD, avem că $BO = OD$.

Conform condiției $\angle ABO = \angle CDO$. Unghiurile AOB și COD sunt egale ca unghiuri opuse la vârf. Deci, $\Delta AOB = \Delta COD$ după o latură și două unghiuri alăturate ei, adică conform criteriului al doilea de egalitate a triunghiurilor. De aici, $AB = CD$ ca laturi corespunzătoare ale triunghiurilor egale.

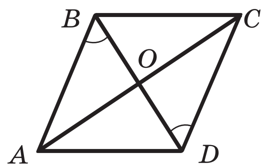


Fig. 139

Menționăm că BD este latură comună a triunghiurilor ABD și CDB. De asemenea conform condiției, $\angle ABD = \angle CDB$. Deci, triunghiurile ABD și CDB sunt egale după două laturi și unghiul dintre ele, adică conform primului criteriu de egalitate a triunghiurilor. Atunci $BC = AD$. ◀

1. Formulați primul criteriu de egalitate a triunghiurilor. **2.** Care dreaptă se numește mediatoarea segmentului? **3.** Ce proprietate posedă punctele mediatoarei segmentului? **4.** Formulați al doilea criteriu de egalitate a triunghiurilor.

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

173.° Cu ajutorul riglei și a raportorului construiți un triunghi, două laturi ale căruia sunt egale cu 3 cm și 6 cm, iar unghiul dintre ele — 40°.

174.° Cu ajutorul riglei și a raportorului construiți un triunghi, două laturi ale căruia sunt egale cu 3 cm și 4 cm, iar unghiul dintre ele — 90°. Indicați tipul acestui triunghi.

175.° Cu ajutorul riglei și a raportorului construiți un triunghi, o latură a căruia este egală cu 3 cm, iar unghiurile alăturate acestei laturi — 100° și 20°. Indicați tipul acestui triunghi.

176.° Cu ajutorul riglei și a raportorului construiți un triunghi, o latură a căruia este egală cu 6 cm, iar unghiurile alăturate acestei laturi — 90° și 45°.

177.° Desenați în caiet figura 140. Cu ajutorul echerului și a riglei, găsiți pe dreapta l punctul ce este egal depărtat de la extremitățile segmentului AB.

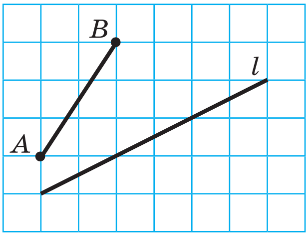


Fig. 140

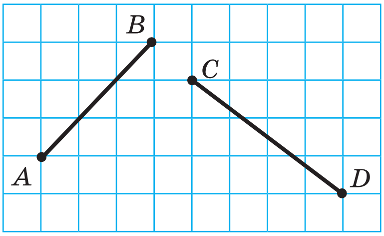


Fig. 141

178.° Desenați în caiet figura 141. Cu ajutorul echerului și a riglei, găsiți punctul care este egal depărtat de la punctele A și B și, totodată, egal depărtat de la punctele C și D.

EXERCIȚII

179.° Sunt oare egale triunghiurile reprezentate în figura 142? Dacă răspunsul este pozitiv, indicați conform cărui criteriu de egalitate a triunghiurilor ele sunt egale.

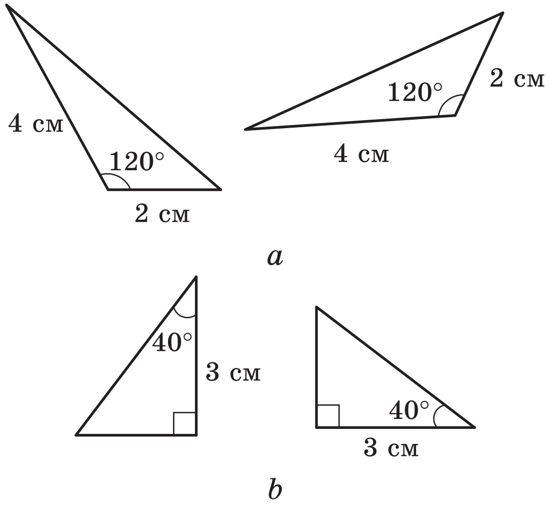


Fig. 142

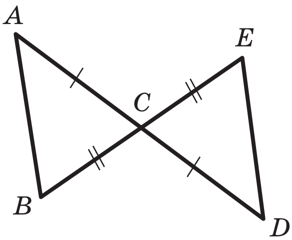


Fig. 143

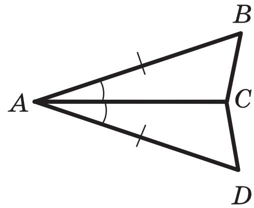


Fig. 144

180.° În figura 143 $AC = DC$ și $BC = EC$. Demonstrați că $\Delta ABC = \Delta DEC$.

181.° În figura 144 $AB = AD$ și $\angle BAC = \angle DAC$. Demonstrați că $\Delta ABC = \Delta ADC$.

182.° În figura 145 $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 7$ cm, $\angle C = 34°$. Aflați segmentul BC și unghiul A.

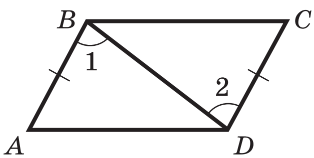


Fig. 145

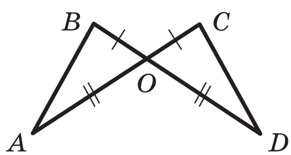


Fig. 146

183.° În figura 146 $AO = OD$, $BO = OC$. Aflați latura CD și unghiul OCD al triunghiului OCD, dacă $AB = 8$ cm, $\angle OBA = 43°$.

184.° Se dă: $OA = OC$, $OB = OD$ (fig. 147). Demonstrați că $\angle OAD = \angle OCB$.

185.° Se dă: $AC = BD$, $\angle BAC = \angle ABD$ (fig. 148). Demonstrați că $AD = BC$.

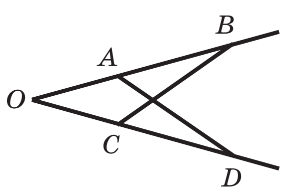


Fig. 147

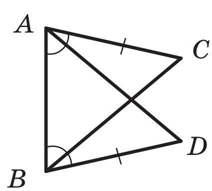


Fig. 148

186.° Se dă: $\angle ADC = \angle ADB$, $BD = CD$ (fig. 149). Demonstrați că $AB = AC$.

187.° În figura 150 $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, punctul O — mijlocul segmentului BD. Demonstrați că $\Delta ABO = \Delta CDO$.

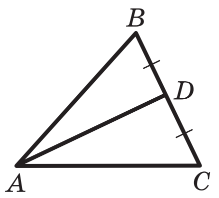


Fig. 149

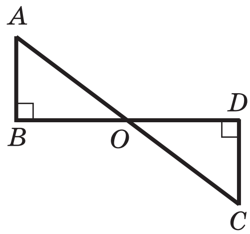


Fig. 150

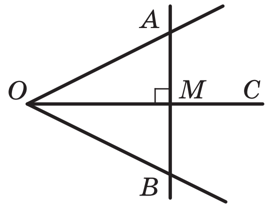


Fig. 151

188.° În figura 151 semidreapta OC — bisectoarea unghiului AOB, dreptele AB și OC sunt perpendiculare. Demonstrați că $\Delta AMO = \Delta BMO$.

189.° În figura 152 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm. Aflați laturile AD și CD ale triunghiului ADC.

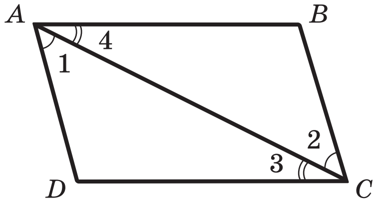


Fig. 152

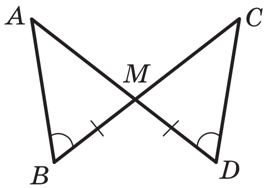


Fig. 153

190.° În figura 153 $\angle B = \angle D$, $BM = DM$, $CD = 7$ cm, $CM = 4$ cm. Aflați laturile AB și AM ale triunghiului ABM.

191.° În figura 154 $\angle ABC = \angle DEF$, $BO = OE$. Demonstrați că $\Delta BCO = \Delta EFO$.

192.° În figura 155 $\angle BAO = \angle DCO$, $\angle BAC = \angle DCA$. Demonstrați că $\Delta ABC = \Delta CDA$.

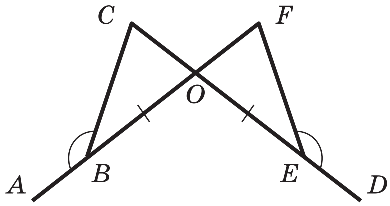


Fig. 154

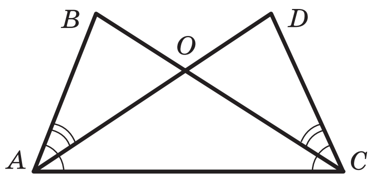


Fig. 155

193.• Din punctele A și B, care se află într-un semiplan față de dreapta a la aceeași distanță de la ea, s-au coborât pe această dreaptă perpendicularele AC și BD. Aflați unghiul ACB, dacă $\angle ADC = 25°$.

194.• Segmentele AD și BC se intersectează în punctul O și se împărt de acest punct în jumătăți. Aflați unghiul ACD, dacă $\angle ABC = 64°$, $\angle ACO = 56°$.

195.• Pe laturile unghiului cu vârful în punctul B sunt notate punctele A și C, iar pe bisectoarea acestui unghi este notat punctul D astfel, încât $\angle ADB = \angle CDB$. Demonstrați că $AB = BC$.

196.• Prin punctul M, ce aparține bisectoarei unghiului cu vârful în punctul O, s-a dus o dreaptă perpendiculară pe această bisectoare. Această dreaptă intersectează laturile unghiului dat în punctele A și B. Demonstrați că $AM = MB$.

197.• În figura 156 $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$. Demonstrați că $\Delta DBC = \Delta D_1B_1C_1$.

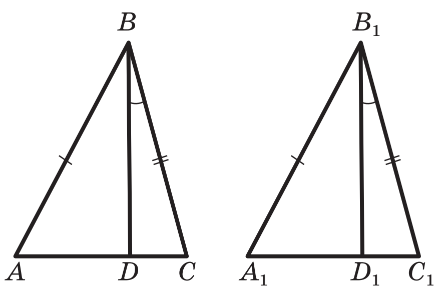


Fig. 156

198.$^{\bullet}$ În figura 157 $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, $AD = A_1D_1$. Demonstrați că $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$.

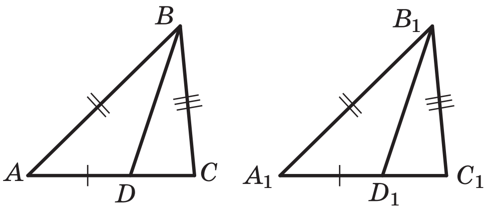


Fig. 157

199.$^{\bullet}$ În figura 158 $\Delta ABC = \Delta ADC$. Demonstrați că $\Delta ABK = \Delta ADK$.

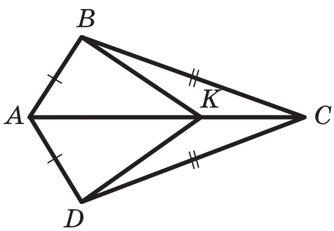


Fig. 158

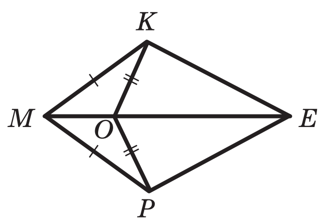


Fig. 159

200.$^{\bullet}$ În figura 159 $\Delta MKO = \Delta MPO$. Demonstrați că $\Delta KOE = \Delta POE$.

201.$^{\bullet}$ Pe prelungirea medianei AM a triunghiului ABC după punctul M, s-a depus segmentul MK, care este egal cu AM. Aflați distanța de la punctul K până la vârful C, dacă $AB = 6$ cm.

202.$^{\bullet}$ Segmentele AB și CD se intersectează în punctul O și se împărt de punctul de intersecție în jumătăți. Demonstrați că $\Delta ABC = \Delta BAD$.

203.$^{\bullet}$ În figura 160 dreptele m și n — mediatoarele laturilor AB și AC ale triunghiului ABC. Demonstrați că punctul O este egal depărtat de la toate vârfurile triunghiului dat.

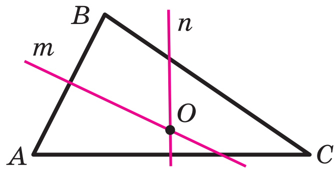


Fig. 160

204.•• Demonstrați că bisectoarele triunghiurilor egale, duse din vârfurile unghiurilor corespunzătoare, sunt egale.

205.•• Demonstrați că în triunghiurile egale, medianele, duse la laturile corespunzătoare, sunt egale.

206.•• Mediatoarea laturii BC a triunghiului ABC intersectează latura AB în punctul D. Aflați segmentul AD, dacă $CD = 4$ cm, $AB = 7$ cm.

207.•• Mediatoarea laturii AB a triunghiului ABC intersectează latura BC în punctul M. Aflați lungimea laturii AC a triunghiului ABC, dacă $BC = 16$ cm, iar perimetrul triunghiului AMC este egal cu 26 cm.

208.•• În figura 161 $OA = OD$. Adăugați încă o condiție, ca triunghiurile AOC și DOB să fie egale:

1) conform primului criteriu de egalitate a triunghiurilor;
2) conform celui de-al doilea criteriu de egalitate a triunghiurilor.

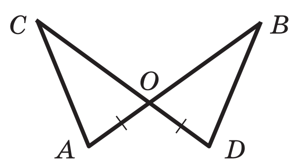


Fig. 161

209.* Segmentele AB și CD se intersectează în punctul O și se împart de acest punct în jumătăți. Pe segmentul AC este notat punctul M, iar pe segmentul BD punctul K astfel, încât $AM = BK$. Demonstrați că: 1) $OM = OK$; 2) punctele M, O și K se află pe o dreaptă.

210.* Pe o latură a unghiului cu vârful în punctul O (fig. 162) sunt notate punctele A și B, iar pe a doua – punctele C și D astfel, încât $OA = OC$, $AB = CD$. Demonstrați că semidreapta OM este bisectoarea unghiului BOD, unde M este punctul de intersecție al segmentelor AD și BC.

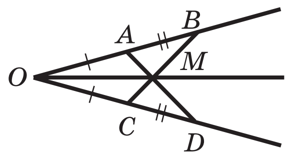


Fig. 162

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

213. Este oare adevărată afirmația: dacă prin fiecare două puncte din cele trei date de dus o dreaptă, atunci vom obține trei drepte?

214. Semidreptele OD și OF sunt bisectoarele unghiurilor adiacente AOB și BOC corespunzător, $\angle AOD : \angle FOC = 2 : 7$. Aflați unghiurile AOD și FOC.

ÎNVĂȚĂM SĂ APLICĂM GEOMETRIA

211. Pentru a afla distanța de la punctul B până la clopotnița A, care este situată pe celălalt mal al râului (fig. 163),

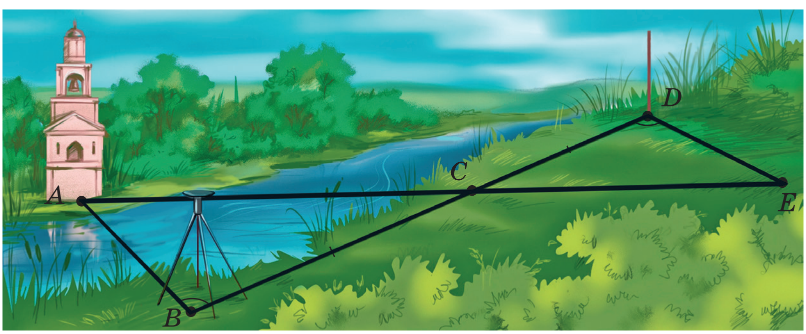


Fig. 163

cu ajutorul jaloanelor, ruletei și a astrolabului s-au însemnat pe teren punctele C, D și E astfel, încât punctele B, C și D se află pe o dreaptă, totodată punctul C este mijlocul segmentului BD. Apoi s-a însemnat dreapta AE, care trece prin punctul C, și totodată $\angle ABC = \angle CDE$. Apoi, măsurând una din laturile triunghiului CDE, s-a determinat distanța de la B până la A. Care latură s-a măsurat? Argumentați răspunsul.

212. Pentru a determina lățimea iazului (fig. 164), pe malul lui s-au însemnat punctele A și B, iar apoi încă punctele C, D și O astfel, încât punctul O să fie mijlocul comun al segmentelor AC și BD. Cum se poate determina lățimea iazului? Argumentați răspunsul.

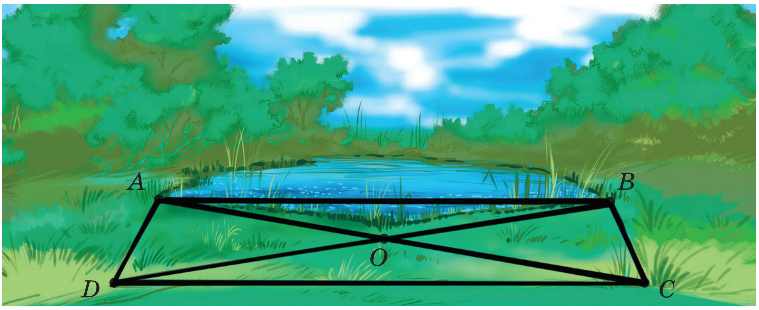


Fig. 164

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

215. Împărțiți fiecare din figurile prezentate în figura 165 în lungul liniilor grilei în patru părți egale astfel, ca în fiecare parte să fie doar o singură circumferință.

Fig. 165

9. Triunghiul isoscel și proprietățile lui

Definiție. Triunghiul, în care două laturi sunt egale, se numește isoscel.

În figura 166 este reprezentat triunghiul isoscel ABC, în care $AB = BC$.

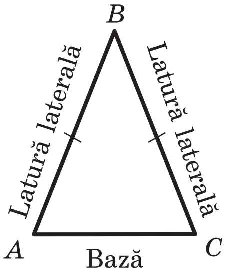


Fig. 166

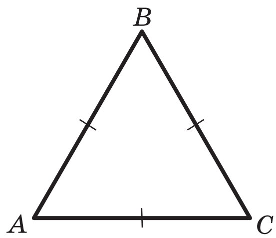


Fig. 167

Laturile egale ale triunghiului isoscel sunt numite **laturi laterale**, iar a treia latură – **baza** triunghiului isoscel.

Vârful triunghiului isoscel este numit punctul comun al laturilor laterale (punctul B în figura 166). Totodată unghiul B se numește **unghiul de la vârf**, iar unghiurile A și C – **unghiurile de la bază** ale triunghiului isoscel.

Definiție. Triunghiul, în care toate laturile sunt egale, se numește echilateral.

În figura 167 este reprezentat triunghiul echilateral ABC. Triunghiul echilateral este un tip aparte de triunghi isoscel.

Teorema 9.1 (Proprietățile triunghiului isoscel). ***În triunghiul isoscel: 1) unghiurile de la bază sunt egale; 2) bisectoarea triunghiului, dusă la baza lui, este mediană și înălțime.***

Demonstrație. Să cercetăm triunghiul isoscel ABC, în care $AB = BC$, segmentul BL — bisectoarea lui (fig. 168). Demonstrăm că unghiurile $\angle A = \angle C$, $AL = LC$, $BL \perp AC$.

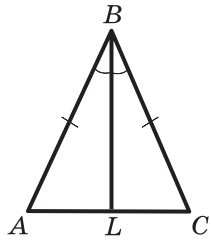


Fig. 168

În triunghiurile ABL și CBL latura BL este comună, $\angle ABL = \angle CBL$, deoarece conform condiției BL este bisectoarea unghiului ABC, laturile AB și BC sunt egale ca laturi laterale ale triunghiului isoscel. Deci, $\Delta ABL = \Delta CBL$ conform primului criteriu de egalitate a triunghiurilor. De aici facem următoarele concluzii: 1) $\angle A = \angle C$; 2) $AL = LC$; 3) $\angle ALB = \angle CLB$.

Deoarece segmentele AL și LC sunt egale, atunci segmentul BL este mediana triunghiului ABC.

Unghiurile ALB și CLB sunt adiacente, deci $\angle ALB + \angle CLB = 180°$. Ținând cont de faptul, că $\angle ALB = \angle CLB$, obținem: $\angle ALB = \angle CLB = 90°$. Deci, segmentul BL este înălțimea triunghiului ABC. ●

Din teorema 9.1 reiese, că:

1) ***în triunghi laturilor egale li se opun unghiuri egale;***

2) ***în triunghiul isoscel bisectoarea, înălțimea și mediana, duse la baza lui, coincid;***

3) ***în triunghiul echilateral toate unghiurile sunt egale;***

4) ***în triunghiul echilateral, bisectoarea, înălțimea și mediana, duse dintr-un vârf, coincid.***

Definiție. Dacă triunghiul are laturile de diferite lungimi, atunci astfel de triunghi se numește scalen.

Problemă. Segmentul AD este mediana triunghiului isoscel ABC, dusă la bază. Pe laturile AB și AC sunt notate corespunzător punctele M și K astfel, încât $BM = CK$. Demonstrați egalitatea triunghiurilor AMD și AKD.

Rezolvare. Punctul M aparține segmentului AB, iar punctul K — segmentului AC, deci $AB = AM + BM$ și $AC = AK + CK$ (fig. 169).

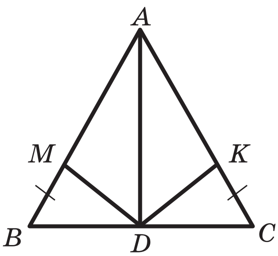


Fig. 169

Deoarece $AB = AC$ și $BM = CK$, atunci $AM = AK$.

Unghiurile BAD și CAD sunt egale, deoarece mediana triunghiului isoscel care este dusă la bază, este și bisectoarea lui.

Menționăm, că segmentul AD — latura comună a triunghiurilor AMD și AKD.

Deci, triunghiurile AMD și AKD sunt egale după două laturi și unghiul dintre ele, adică conform primului criteriu de egalitate a triunghiurilor. ◀

?

11. Ce tipuri de triunghiuri există în dependență de numărul laturilor egale? **2.** Care triunghi se numește isoscel; echilateral; scalen? **3.** Care laturi ale triunghiului isoscel se numesc laterale? **4.** Care latură a triunghiului isoscel se numește bază? **5.** Formulați proprietatea unghiurilor triunghiului isoscel. **6.** Formulați proprietatea bisectoarei triunghiului isoscel, dusă la bază. **7.** Ce proprietate au unghiurile triunghiului, care sunt opuse laturilor egale ale lui? **8.** Formulați proprietatea unghiurilor ale triunghiului echilateral. **9.** Ce proprietate au bisectoarea, înălțimea și mediana triunghiului echilateral, duse dintr-un vârf?

Якщо прикметник утворюється приєднанням суфікса -н- до іменника з основою на **-н**, то пишемо його з двома буквами **нн**: *сторона* + -н- = *односторонній*, *середина* + -н- = *серединний*.

Якщо прикметник утворюється приєднанням суфікса -н- до іменника з основою на будь-яку іншу букву, то пишемо його з однією буквою **н**: *паралель* + -н- = *паралельний*, *кут* + -н- = *прямокутний*.

Тому пишемо: *рівносторонній* і *різносторонній*, але *рівнобедрений трикутник*.

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

216.° Desenați:

1) un triunghi ascuțitunghic scalen;
2) un triunghi dreptunghic isoscel;
3) un triunghi obtuzunghic isoscel.

217.° Desenați:

1) un triunghi dreptunghic scalen.
2) un triunghi obtuzunghic scalen.

218.° Desenați un triunghi isoscel cu latura laterală egală cu 3 cm astfel, încât unghiul de la vârf să fie: 1) ascuțit; 2) drept; 3) obtuz. În triunghiurile construite duceți înălțimile la laturile laterale.

EXERCIȚII

219.° 1) Aflați perimetrul triunghiului isoscel, baza căruia este egală cu 13 cm, iar latura laterală — 8 cm.

2) Perimetrul triunghiului isoscel este egal cu 39 cm, iar baza — 15 cm. Aflați laturile laterale ale triunghiului.

220.° Perimetrul triunghiului isoscel este egal cu 28 cm, iar latura laterală — 10 cm. Aflați baza triunghiului.

221.° Aflați laturile triunghiului isoscel, perimetrul căruia este egal cu 32 cm, iar baza este cu 5 cm mai mare decât latura laterală.

222.° Aflați laturile triunghiului isoscel, perimetrul căruia este egal cu 54 cm, iar baza este de 4 ori mai mică decât latura laterală.

223.° În triunghiul isoscel ABC, latura AC — baza triunghiului, $\angle BCA = 40°$, $\angle ABC = 100°$, segmentul BD — mediană. Aflați unghiurile triunghiului ABD.

224.° În figura 170 $AB = BC$, segmentul BD — mediana a triunghiului ABC, $\angle ABD = 53°$. Aflați unghiurile ABC și ADE.

225.° În figura 171 $MK = KE$, $OE = 6$ cm, $\angle MKE = 48°$, $\angle POE = 90°$. Aflați latura ME și unghiul MKO.

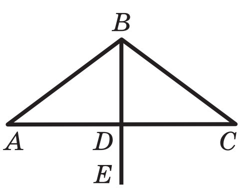


Fig. 170

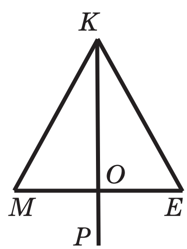


Fig. 171

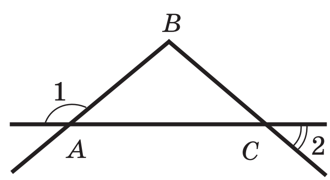


Fig. 172

226.° În figura 172 $AB = BC$, $\angle 1 = 140°$. Aflați unghiul 2.

227.° Unghiul opus unghiului de la vârful triunghiului isoscel, este egal cu 68°. Aflați unghiul dintre latura laterală a triunghiului și mediana dusă la bază.

228.° Unghiul adiacent cu unghiul de la vârful triunghiului isoscel este egal cu 76°. Aflați unghiul dintre latura laterală a triunghiului și înălțimea coborâtă pe bază.

229.° În figura 173 $AB = BC$, $DC = DE$. Demonstrați că $\angle A = \angle E$.

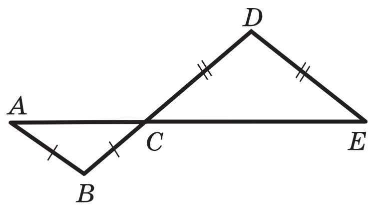


Fig. 173

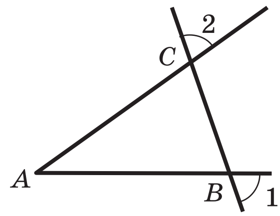


Fig. 174

230.° Dreapta intersectează laturile unghiului A în punctele B și C astfel, încât $AB = AC$ (fig. 174). Demonstrați că $\angle 1 = \angle 2$.

231.° În figura 175 $AO = CO$, $\angle AOB = \angle COB$. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

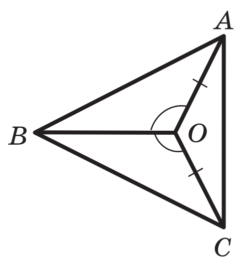


Fig. 175

232.• Triunghiul ABC — isoscel cu baza AC, BD este bisectoarea lui, DM — bisectoarea triunghiului BDC. Aflați unghiul ADM.

233.• Un elev afirmă că un triunghi oarecare este isoscel, iar o elevă — că acest triunghi este echilateral.

1) Se poate oare ca ambii elevi să aibă dreptate?
2) În care caz are dreptate doar unul din ei și cine anume?

234.• Folosind criteriile de egalitate a triunghiurilor, demonstrați criteriul de egalitate a triunghiurilor isoscele după latura laterală și unghiul de la vârf.

235.• Folosind criteriile de egalitate a triunghiurilor, demonstrați criteriul de egalitate a triunghiurilor isoscele după bază și unghiul alăturat ei.

236.• În triunghiul MKE se cunoaște că $MK = ME$. Pe latura KE sunt notate punctele F și N astfel, încât punctul N se află între punctele F și E, totodată $\angle KMF = \angle EMN$. Demonstrați că $\angle MFN = \angle MNF$.

237.$^{\bullet}$ Pe baza AC a triunghiului isoscel ABC sunt notate punctele M și K astfel, încât punctul M se află între punctele A și K, totodată $AM = CK$. Demonstrați că triunghiul MBK este isoscel.

238.$^{\bullet}$ Pe laturile laterale CA și CB ale triunghiului isoscel ABC sunt depuse corespunzător segmente egale CK și CM. Demonstrați că: 1) $\Delta AMC = \Delta BKC$; 2) $\Delta AMB = \Delta BKA$

239.$^{\bullet}$ În triunghiul isoscel ABC cu baza AC pe mediană BD s-a notat un punct arbitrar M. Demonstrați că: 1) $\Delta AMB = \Delta CMB$; 2) $\Delta AMD = \Delta CMD$

240.$^{\bullet}$ Demonstrați că bisectoarele triunghiului isoscel, duse din vârfurile unghiurilor de la bază sunt egale.

241.$^{\bullet}$ Demonstrați că medianele triunghiului isoscel, duse la laturile laterale sunt egale.

242.$^{\bullet}$ Demonstrați că mijlocurile laturilor triunghiului isoscel sunt vârfurile altui triunghi isoscel.

243.$^{\bullet}$ Aflați a treia latură a triunghiului isoscel dacă celelalte două laturi sunt egale cu 7 cm și 4 cm. Câte rezolvări are problema?

244.$^{\bullet}$ Una din laturile triunghiului isoscel este egală cu 4 cm. Aflați celelalte două laturi dacă perimetrul triunghiului este egal cu 14 cm.

245.$^{\bullet}$ Este oare adevărată afirmația:

1) bisectoarea triunghiului isoscel este înălțimea și mediana lui;
2) bisectoarea triunghiului echilateral este înălțimea și mediana lui;
3) dacă perimetrul triunghiului este de 3 ori mai mare decât una din laturile lui, atunci acest triunghi este echilateral?

246.$^{\bullet\bullet}$ Pe prelungirile laturilor AB, BC și AC ale triunghiului echilateral ABC (fig. 176) după punctele A, B și C

corespunzător s-au depus segmentele egale *AD, BK* și *CE*. Demonstrați că triunghiul *DEK* este echilateral.

247.•• Pe laturile triunghiului echilateral *ABC* (fig. 177) s-au notat punctele *M, K* și *D* astfel, încât $AD = BM = CK$. Demonstrați că triunghiul *MKD* este echilateral.

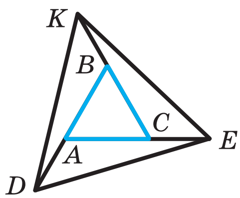


Fig. 176

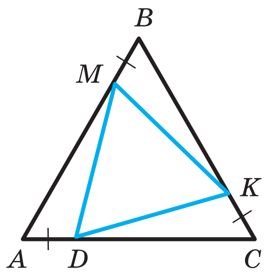


Fig. 177

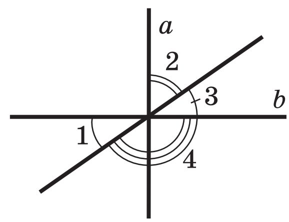


Fig. 178

248.•• Baza triunghiului isoscel este egală cu 20 cm, iar mediana lui împarte acest triunghi în două triunghiuri astfel, că perimetrul unuia din ele este cu 6 cm mai mic decât perimetrul celuilalt. Aflați latura laterală a triunghiului dat. Câte rezolvări are problema?

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

249. În figura 178 $a \perp b$, $\angle 1 = 35°$. Aflați unghiurile 2, 3, 4.

250. Punctele *C* și *D* au divizat segmentul *AB*, lungimea căruia este egală cu *a*, în trei segmente *AC, CD* și *DB* astfel, că $AC = 2CD$, $CD = 2DB$. Aflați distanța dintre: 1) punctul *A* și mijlocul segmentului *CD*; 2) mijlocurile segmentelor *AC* și *DB*.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

251. Desenați un hexagon care poate fi împărțit în două triunghiuri printr-o singură tăietură.

10. Criteriile triunghiului isoscel

În punctul precedent am cercetat proprietățile triunghiului isoscel. Cum putem identifica triunghiurile isoscele? La această întrebare răspund următoarele teoreme-criterii.

Teorema 10.1. ***Dacă mediana triunghiului este înălțimea lui, atunci acest triunghi este isoscel.***

Demonstrație. ⊙ Cercetăm triunghiul ABC, în care segmentul BM este mediana și înălțimea lui. Demonstrăm că $AB = BC$ (fig. 179).

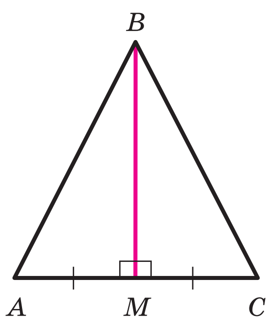


Fig. 179

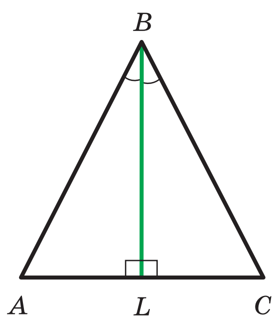


Fig. 180

Din condiția teoremei reiese, că dreapta BM este mediatoarea segmentului AC.

Atunci, conform proprietății mediatoarei $AB = BC$. ●

Teorema 10.2. ***Dacă bisectoarea triunghiului este înălțimea lui, atunci acest triunghi este isoscel.***

Demonstrație. ⊙ Cercetăm triunghiul ABC, în care segmentul BL este bisectoarea și înălțimea lui. Demonstrăm că $AB = BC$ (fig. 180).

În triunghiurile ABL și CBL latura BL este comună; $\angle ABL = \angle CBL$ (deoarece conform condiției semidreapta BL este bisectoarea unghiului ABC), $\angle ALB = \angle CLB = 90°$ (deoarece conform condiției BL — înălțime). Deci, triunghiurile

ABL și *CBL* sunt egale conform criteriului al doilea de egalitate a triunghiurilor. Atunci laturile *AB* și *BC* sunt egale ca laturi corespunzătoare ale triunghiurilor egale. ●

Teorema 10.3. ***Dacă într-un triunghi două unghiuri sunt egale, atunci acest triunghi este isoscel.***

Demonstrație. Cercetăm triunghiul *ABC*, în care $\angle A = \angle C$. Demonstrăm că $AB = BC$.

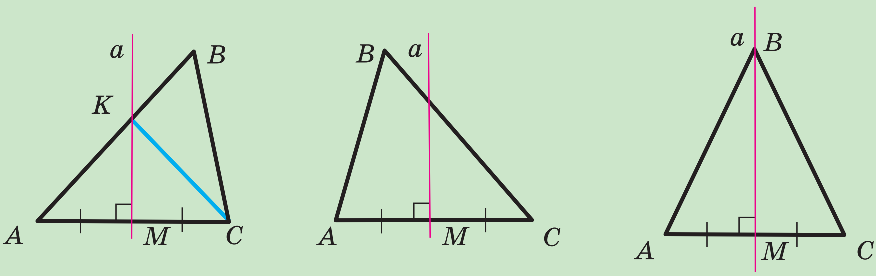


Fig. 181 **Fig. 182** **Fig. 183**

Ducem mediatoarea *a* a laturei *AC*. Demonstrăm că dreapta *a* trece prin vârful *B*.

Presupunem, că aceasta nu este așa. Atunci dreapta *a* intersectează într-un punct interior latura *AB* (fig. 181) sau latura *BC* (fig. 182).

Cercetăm primul din aceste cazuri. Fie *K* — punctul de intersecție al dreptei *a* cu latura *AB*. Atunci conform proprietății mediatoarei (teorema 8.2) $AK = CK$. Deci, triunghiul *AKC* este isoscel, de aici $\angle A = \angle ACK$. Însă conform condiției $\angle A = \angle ACB$. Atunci avem: $\angle ACB = \angle ACK$, ceea ce contrazice proprietății fundamentale a mărimii unghiului (punctul 3).

Analogic vom obține contradicție și pentru al doilea caz (fig. 182).

Deci, presupunerea noastră este greșită. Dreapta *a* trece prin punctul *B* (fig. 183). Atunci conform proprietății mediatoarei, $BA = BC$. ●

Din această teoremă reiese că:

1) ***în triunghi unghiurilor egale li se opun laturi egale;***

2) ***dacă într-un triunghi toate unghiurile sunt egale, atunci acest triunghi este echilateral.***

Teorema 10.4. ***Dacă mediană triunghiului este bisectoarea lui, atunci acest triunghi este isoscel.***

Demonstrație. Cercetăm triunghiul ABC, în care segmentul BM este mediana și bisectoarea lui. Demonstrăm că $AB = BC$.

Pe semidreapta BM depunem segmentul MD, care este egal cu segmentul BM (fig. 184).

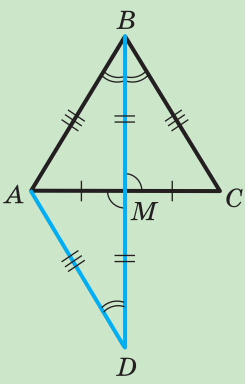


Fig. 184

În triunghiurile AMD și CMB avem: $AM = MC$ (deoarece conform condiției BM – mediană); $BM = MD$ (conform construcției); unghiurile AMD și CMB sunt egale, ca unghiuri opuse la vârf. Deci, triunghiurile AMD și CMB sunt egale conform primului criteriu de egalitate a triunghiurilor. Atunci laturile AD și BC, unghiurile ADM și CBM sunt egale ca elemente corespunzătoare ale triunghiurilor egale.

Deoarece semidreapta BD este bisectoarea unghiului ABC, atunci $\angle ABM = \angle CBM$. Deoarece $\angle CBM = \angle ADM$, atunci avem $\angle ABM = \angle ADM$. Atunci conform criteriului triunghiului isoscel (teorema 10.3) obținem, că triunghiul DAB este isoscel, de unde $AD = AB$. Și deja s-a demonstrat că $AD = BC$. Deci, $AB = BC$. ●

Problemă. În triunghiul ABC s-a dus bisectoarea BM (fig. 185), $\angle BAK = 70°$, $\angle AKC = 110°$. Demonstrați că $BM \perp AK$.

Rezolvare. Deoarece unghiurile BKA și AKC sunt adiacente, atunci $\angle BKA = 180° - \angle AKC$.

Atunci, $\angle BKA = 180° - 110° = 70°$.

Deci, în triunghiul ABK, avem că $\angle BAK = \angle BKA = 70°$. De aceea triunghiul ABK este isoscel cu baza AK și bisectoarea lui BO (O este punctul de intersecție al segmentelor AK și BM) este de asemeni și înălțime, adică $BM \perp AK$. ◀

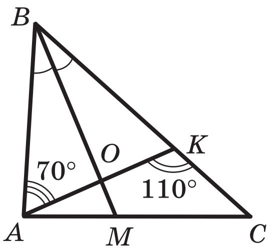


Fig. 185

1. Formulați criteriile triunghiului isoscel. **2.** Care este legătura dintre unghiurile egale și laturile egale ale triunghiului? **3.** Ce se poate spune despre triunghi, dacă toate unghiurile lui sunt egale?

EXERCIȚII

252.° În triunghiul ABC mediana BK este perpendiculară la latura AC. Aflați unghiul ABC, dacă $\angle ABK = 25°$.

253.° Mediatoarea laturei AC a triunghiului ABC trece prin vârful B. Aflați unghiul C, dacă $\angle A = 17°$.

254.° În triunghiul ABC, se știe că $\angle ACB = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$, iar segmentul CK — înălțime. Aflați latura AB, dacă $CK = 7$ cm.

255.° În figura 186 $\angle AMK = \angle ACB$, $AK = MK$. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

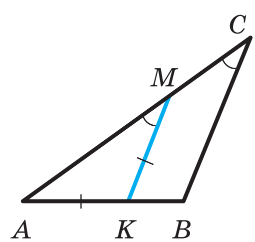


Fig. 186

256.° În figura 187 $\angle 1 = \angle 2$. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

257.° O dreaptă este perpendiculară la bisectoarea unghiului A și intersectează laturile lui în punctele B și C. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

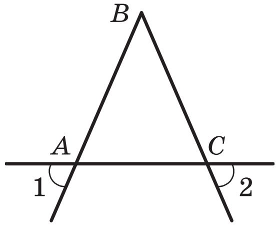


Fig. 187

258.° Bisectoarele AM și CK ale unghiurilor de la baza AC a triunghiului isoscel ABC se intersectează în punctul O. Demonstrați că triunghiul AOC este isoscel.

259.• În triunghiul ABC bisectoarea BK este înălțimea lui. Aflați perimetrul triunghiului ABC, dacă perimetrul triunghiului ABK este egal cu 16 cm și $BK = 5$ cm.

260.• În triunghiul ABC mediana BM este bisectoarea lui. Perimetrul triunghiului ABC este egal cu 48 cm, iar perimetrul triunghiului ABM – 30 cm. Aflați lungimea segmentului BM.

261.• Este oare adevărată afirmația:

1) dacă mediana și înălțimea triunghiului, duse dintr-un vârf, nu coincid, atunci acest triunghi nu este isoscel;
2) dacă bisectoarea triunghiului împarte latura opusă în jumătate, atunci acest triunghi este isoscel?

262.• Medianele AE și CF, duse la laturile laterale BC și AB ale triunghiului isoscel ABC, se intersectează în punctul M. Demonstrați că triunghiul AMC este isoscel.

263.• Punctele M și K aparțin corespunzător laturilor laterale AB și BC ale triunghiului isoscel ABC, $AM = CK$. Segmentele AK și CM se intersectează în punctul O. Demonstrați că triunghiul AOC este isoscel.

264.•• Pe laturile AB și BC ale triunghiului ABC s-au notat corespunzător punctele D și E astfel, încât $\angle EAC = \angle DCA$. Segmentele AE și CD se intersectează în punctul F, $DF = EF$. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

265.•• Prin punctul D, care este mijlocul laturii AB a triunghiului ABC s-au dus drepte perpendiculare la bisectoarele unghiurilor ABC și BAC. Aceste drepte intersectează laturile AC și BC în punctele M și K corespunzător. Demonstrați că $AM = BK$.

266.•• Mediana AM a triunghiului ABC este perpendiculară pe bisectoarea BK. Aflați latura AB dacă $BC = 16$ cm.

267.•• O dreaptă trece prin vârful A al triunghiului ABC perpendiculară pe mediana BD și împarte această mediană în două părți egale. Aflați raportul lungimilor laturilor AB și AC ale triunghiului ABC.

268.•• În triunghiul ABC se știe că $\angle C = 90°$, $\angle A = 67{,}5°$, $\angle B = 22{,}5°$, segmentul CK este bisectoarea triunghiului ABC, segmentul CM — bisectoarea triunghiului BCK (fig. 188). Demonstrați că punctul M este mijlocul segmentului AB.

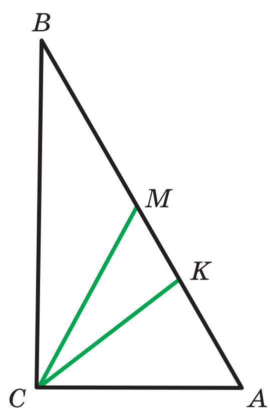


Fig. 188

269.* Lungimile laturilor unui triunghi, exprimate în centimetri, sunt egale cu trei numere naturale consecutive. Aflați laturile acestui triunghi, dacă una din medianele lui este perpendiculară pe una din bisectoare lui.

270.* În triunghiul ABC se știe că $AB = 3$ cm, $AC = 6$ cm. Pe latura BC este notat punctul M astfel, încât $CM = 1$ cm. Dreapta, care trece prin punctul M, este perpendiculară la bisectoarea unghiului ACB, și intersectează segmentul AC în punctul K, iar dreapta care trece prin punctul K este perpendiculară pe bisectoarea unghiului BAC, și intersectează dreapta AB în punctul D. Aflați segmentul BD.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

271. Pe o dreaptă consecutiv s-au notat punctele A, B, C, D, E și F astfel, încât $AB = BC = CD = DE = EF$. Aflați rapoartele $AB : CF$, $AB : BF$, $BD : AE$.

272. Aflați unghiurile, care s-au format la intersecția a două drepte, dacă unul din unghiuri este cu $42°$ mai mare decât jumătatea altui unghi.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

273. Tăiați un dreptunghi cu dimensiunile 4×9 în două părți egale, din care se poate alcătui un pătrat.

11. Al treilea criteriu de egalitate a triunghiurilor

Teorema 11.1 (al treilea criteriu de egalitate a triunghiurilor: după trei laturi). ***Dacă trei laturi ale unui triunghi sunt egale corespunzător cu trei laturi ale altui triunghi, atunci astfel de triunghiuri sunt egale.***

Demonstrație. Cercetăm triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ (fig. 189), în care $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (aceste egalități indică care laturi ale triunghiurilor corespund una alteia). Vom demonstra, că $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Amplasăm triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ astfel, ca vârful A să coincidă cu vârful A_1, vârful B — cu vârful B_1, iar vârfurile C și C_1 să se afle în diferite semiplane față de dreapta AB (fig. 190). Ducem segmentul CC_1. Deoarece $AC = A_1C_1$, atunci triunghiul C_1A_1C este isoscel, așadar $\angle 1 = \angle 2$. Analogic, se poate demonstra, că $\angle 3 = \angle 4$. Deci, $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$. Atunci triunghiurile $A_1C_1B_1$ și A_1CB_1 sunt egale după două laturi și unghiul dintre ele, adică conform primului criteriu de egalitate a triunghiurilor.

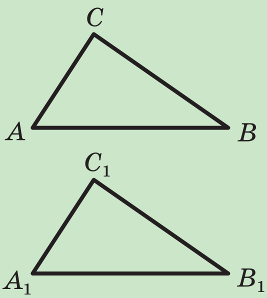


Fig. 189

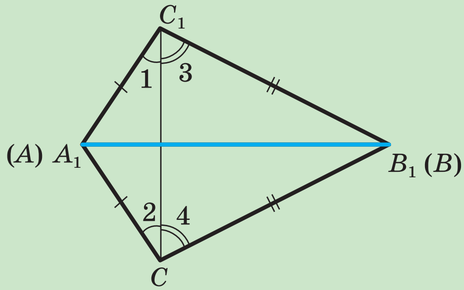


Fig. 190

S-ar părea că demonstrarea s-a terminat. Însă, am cercetat numai cazul în care segmentul CC_1 intersectează segmentul A_1B_1 într-un punct interior. Dar în realitate, segmentul CC_1 poate trece prin una din extremitățile segmentului A_1B_1, de exemplu prin punctul A_1 (fig. 191), sau să nu aibă puncte comune cu segmentul A_1B_1 (fig. 192). În fiecare dintre aceste cazuri, demonstrările vor fi analogice celei prezentate. Efectuați-le de sine stătător.

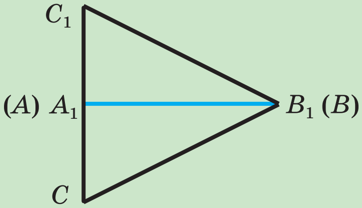


Fig. 191

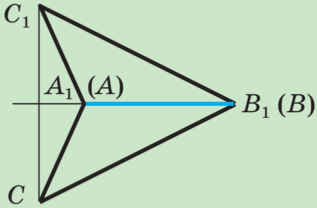
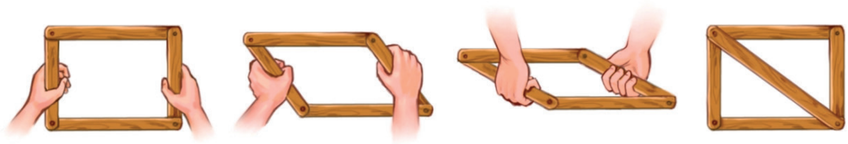


Fig. 192



a *b* *c* *d*

Fig. 193

Din al treilea criteriu de egalitate ale triunghiurilor reiese că *triunghiul este figură rigidă*. Într-adevăr, dacă vom uni patru bețișoare astfel, cum este arătat în figura 193 *a*, atunci o astfel de construcție nu este rigidă (fig. 193, *b*, 193, *c*). Dacă adăugăm încă un bețișor, formând două triunghiuri (fig. 193, *d*), atunci construcția obținută va deveni rigidă. Acest fapt se folosește pe larg în practică (fig. 194).

Stâlpii liniilor de înaltă tensiune

Podul Darnytskyi peste râul Nipru

Fig. 194 Construcții rigide

Teorema 11.2. ***Dacă punctul este egal depărtat de la extrimitățile segmentului, atunci el aparține mediatoarei acestui segment.***

Demonstrație. Fie punctul X egal depărtat de la extrimitățile segmentului AB, adică $XA = XB$ (fig. 195). Să cercetăm triunghiurile AXM și BXM, unde punctul M este mijlocul segmentului AB. Atunci, $\Delta AXM = \Delta BXM$ după trei laturi, adică conform celui de al treilea criteriu de egalitate a triunghiurilor. De aici, $\angle AMX = \angle BMX$. Suma acestor unghiuri este egală cu 180°, de aceea fiecare din ele este egal cu 90°. Deci, dreapta XM este mediatoarea segmentului AB.

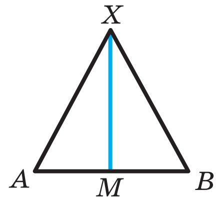


Fig. 195

Menționăm, că noi am cercetat cazul când punctul X nu aparține dreptei AB. Dacă punctul X aparține dreptei AB, atunci el coincide cu mijlocul segmentului AB, și deci, aparține mediatoarei lui.

1. Formulați al treilea criteriu de egalitate a triunghiurilor. **2.** Unde se află punctele care sunt egal depărtate de extrimitățile segmentului?

EXERCIȚII

274.° În figura 196 $AB = CD$, $BC = AD$. Demonstrați că $\angle B = \angle D$.

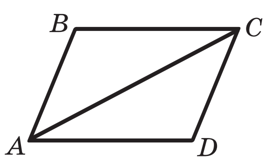


Fig. 196

275.° În figura 197 $AC = AD$, $BC = BD$. Aflați unghiul BAC, dacă $\angle BAD = 25°$.

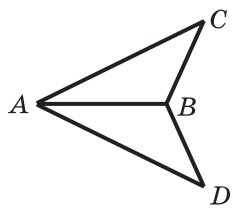


Fig. 197

276.° Demonstrați că două triunghiuri isoscele sunt egale, dacă latura laterală și baza unui triunghi sunt egale corespunzător cu latura laterală și baza celuilalt triunghi.

277.° Demonstrați că două triunghiuri echilaterale sunt egale dacă latura unui triunghi este egală cu latura altui triunghi.

278.• În figura 198 $\Delta ABC = \Delta DCB$, totodată $AB = CD$. Demonstrați că $\Delta ABD = \Delta DCA$.

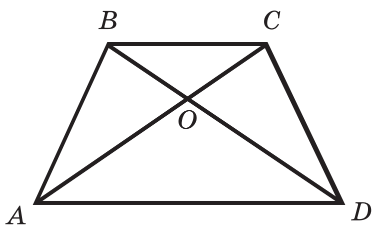


Fig. 198

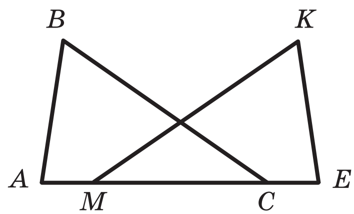


Fig. 199

279.• În figura 198 $AB = CD$, $AC = BD$. Demonstrați că triunghiul BOC este isoscel.

280.• Fiecare din punctele M și N este egal depărtat de la extrimitățile segmentului AB. Demonstrați că dreapta MN este mediatoarea segmentului AB.

281.• În interiorul triunghiului isoscel ABC ($AB = BC$) s-a notat punctul D astfel, încât $AD = CD$. Demonstrați că dreptele BD și AC sunt perpendiculare.

282.• În figura 199 $AB = KE$, $BC = KM$, $AM = EC$. Demonstrați că $\angle AMK = \angle BCE$.

283.• În figura 200 $AB = CD$, $BC = AD$, iar semidreapta BM este bisectoarea unghiului ABC, semidreapta DK — bisectoarea unghiului ADC. Demonstrați că $\Delta ABM = \Delta CDK$.

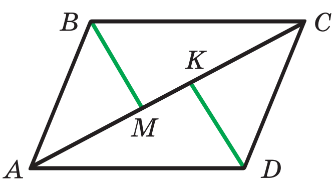


Fig. 200

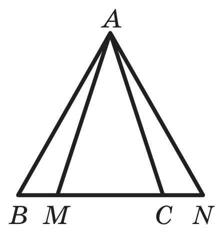


Fig. 201

284.• Segmentele egale AB și CD se intersectează în punctul O astfel, încât $OA = OD$. Demonstrați că $\Delta ABC = \Delta DCB$.

285.• Segmentele BD și B_1D_1 — bisectoarele triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ corespunzător, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$. Demonstrați că $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

286.• Segmentele AM și A_1M_1 — medianele triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ corespunzător, $AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$, $AM = A_1M_1$. Demonstrați că $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

287.•• Oxana afirmă, că ea a reușit să facă un desen, în care $AB = AC$ și $AM = AN$ (fig. 201). Are oare dreptate Oxana?

288.•• Sunt oare două triunghiuri egale dacă fiecare latură a unui triunghi este egală cu o latură oarecare a altui triunghi?

289.* Demonstrați egalitatea a două triunghiuri după două laturi și mediana, care este dusă la a treia latură.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

290. Pe segmentul AB s-au notat punctele C și D astfel, încât $AC:BC=7:8$, $AD:BD=13:17$. Aflați lungimea segmentului AB, dacă distanța dintre punctele C și D este egală cu 2 cm.

291. Dreptele AB și CD se intersectează în punctul O, semidreptele OM și OK sunt bisectoarele unghiurilor AOC și BOC corespunzător, care s-au format ca rezultat. Va fi oare unghiul MOK drept?

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

292. Un pătrat a fost tăiat în lungul diagonalelor în patru triunghiuri (fig. 202). Alcătuiți din aceste triunghiuri două pătrate.

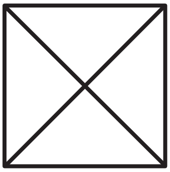


Fig. 202

12. Teoreme

Ați observat, că în manual apar tot mai multe și mai multe teoreme. Aceasta nu este de mirare: deoarece geometria în cea mai mare parte este alcătuită din teoreme și demonstrațiile lor.

Formularea tuturor teoremelor pe care noi le-am demonstrat constă din două părți. Prima parte a teoremei (ceea ce este dat) se numește **condiția** teoremei, iar a doua parte a teoremei (ceea ce trebuie de demonstrat) – **concluzia** teoremei.

De exemplu, în teorema 8.1 (primul criteriu de egalitate a triunghiurilor), condiția este aceea, că ***două laturi și unghiul dintre ele ale unui triunghi sunt corespunzător egale cu două laturi și unghiul dintre ele ale altui triunghi***, iar concluzia este ***egalitatea triunghiurilor***.

Toate teoremele pe care le cunoașteți pot fi împărțite convențional în **teoreme-proprietăți** și **teoreme-criterii**. De exemplu, teorema 1.1 stabilește proprietatea dreptelor, ce se intersectează, teorema 9.1 – proprietatea triunghiului isoscel.

Teoremele-criterii indică criteriile, conform cărora se poate recunoaște figura, adică să o repartizăm la unul sau la alt tip (clasă).

Astfel, în teoremele-criterii de egalitate a triunghiurilor se menționează conform căror criterii două triunghiuri pot fi repartizate la clasa celor egale. De exemplu, în teoremele 10.1–10.4 sunt formulate proprietățile conform cărora se poate recunoaște triunghiul isoscel.

Teoremele care reies *nemijlocit* din axiome sau teoreme se numesc **teoreme-consecințe** sau pur și simplu **consecințe**.

De exemplu, proprietatea unghiurilor opuse laturilor egale ale unui triunghi este consecință din teorema 9.1.

Dacă în teorema 8.2 despre proprietatea mediatoarei schimbăm cu locurile condiția cu concluzia, atunci vom obține teorema 11.2. Două teoreme, care se pot obține una din alta, schimbând cu locurile condiția și concluzia, se numesc **reciproc inverse**. Dacă una din aceste teoreme o numim **directă**, atunci altă teoremă o vom numi **reciprocă**.

Schimbând cu locul condiția și concluzia, trebuie să fim foarte atenți: nu întotdeauna se poate obține afirmație adevărată. De exemplu, afirmația inversă teoremei 4.1 despre suma unghiurilor adiacente este falsă. Într-adevăr, dacă suma unor două unghiuri este de 180°, atunci nu este obligatoriu ca aceste unghiuri să fie adiacente.

Se știe, că veridicitatea teoremei se stabilește prin raționamente logice, adică prin demonstrație.

Prima teoremă din acest manual a fost demonstrată prin **metoda reducerii la absurd** (de la contrar). Denumirea acestei metode de fapt reprezintă esența ei. Am presupus că concluzia teoremei 1.1 nu este corectă. În baza acestei admiteri cu ajutorul raționamentelor logice, noi am obținut faptul care contrazice proprietății fundamentale a dreptei.

Prin metoda reducerii la absurd au fost demonstrate, de asemenea, și un șir de alte teoreme, de exemplu, teoremele 5.1, 10.3.

Foarte important ca demonstrația teoremei să fie deplină, adică să fie cercetate toate cazurile posibile. Astfel, demonstrația deplină a teoremei 11.1 (al treilea criteriu de egalitate a triunghiurilor) necesita cercetarea a trei cazuri posibile.

Abilitatea de a vedea toate nuanțele demonstrării este cea mai importantă calitate ce formează cultura matematică. Dacă, de exemplu, în timpul demonstrației teoremei 8.2 despre proprietatea mediatoarei segmentului noi n-am fi cercetat aparte cazul în care punctul X este mijlocul segmentului AB, atunci pentru acest caz adresarea la triunghiurile AXM și BXM nu ar fi fost posibilă.

În timpul demonstrației teoremei 10.4 (criteriul triunghiului isoscel), noi am folosit **metoda construcției suplimentare**: am completat desenul cu elemente, despre care nu a mers vorba în condiția problemei. Această metodă este cheia pentru rezolvarea mai multor probleme și demonstrarea unui șir de teoreme. De aceea este foarte important să ne invățăm să vedem o construcție suplimentară „convenabilă” — una, care o să ne ajute să obținem rezultatul necesar.

Dar cum de dobândit astfel de „vedere geometrică”? Întrebarea este dificilă, și la ea nu poți răspunde, dând recomandări concrete. Dar totuși, noi vă recomandăm: în primul rând, nu fiți indiferenți față de geometrie, ci să îndrăgiți această disciplină frumoasă; în al doilea rând, rezolvați mai multe probleme, pentru a dezvolta intuiția și a dobândi experiența necesară.

?

1. Din care două părți se alcătuiește formularea teoremei? **2.** Cum se numește teorema, în care sunt enumerate proprietățile, confom cărora se poate repartiza figura la un anumit tip (clasă)? **3.** Cum se numește teorema care reiese nemijlocit din axiomă sau altă teoremă? **4.** Cum se numește perechea de teoreme, în care conditia si concluzia sunt schimbate cu locurile? **5.** În ce constă metoda demonstrației de la contrar (reducerii la absurd)? **6.** Care din teoremele 1.1, 4.2, 5.1, 8.3 au fost demonstrate prin metoda reducerii la absurd? **7.** În ce constă metoda construcției suplimentare?

EXERCIȚII

293.° În teoremele 4.1, 8.2, 9.1, 10.3, 11.2 indicați condiția și concluzia teoremei.

294.° Din teoremele 4.1, 8.2, 9.1, 10.3, 11.2, alegeți:
1) teoremele-proprietăți; 2) teoremele-criterii.

295.• Formulați afirmația, care este reciprocă la cea dată:
1) dacă triunghiul este echilateral, atunci unghiurile lui sunt egale;
2) dacă două unghiuri sunt opuse la vârf, atunci bisectoarele lor sunt semidrepte complementare;
3) dacă unghiul dintre bisectoarele a două unghiuri este drept, atunci aceste unghiuri sunt adiacente;
4) dacă latura și unghiul opus ei al unui triunghi corespunzător sunt egale laturii și unghiului opus ei al altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sunt egale.

Pentru care din afirmațiile date:
1) afirmația directă și reciprocă sunt corecte;
2) afirmația directă este corectă, iar cea reciprocă — falsă;
3) afirmația directă este falsă, iar cea reciprocă — corectă?

296.• Formulați afirmația, care este reciprocă la cea dată:
1) dacă două triunghiuri nu sunt egale, atunci perimetrele lor de asemenea nu sunt egale;

2) dacă măsura în grade a unghiului este mai mare decât 90°, atunci el este obtuz.

Pentru care din afirmațiile date:
1) afirmația directă și reciprocă sunt corecte;
2) afirmația directă este corectă, iar cea reciprocă — falsă;
3) afirmația directă este falsă, iar cea reciprocă — corectă?

297.° Formulați afirmația, care contrazice cea dată:
1) segmentul AB intersectează dreapta m;
2) măsura în grade a unghiului ABC este mai mare de 40°;
3) din două unghiuri adiacente, cel puțin unul nu este mai mare de 90°;
4) semidreptele OA și OB nu sunt complementare;
5) segmentul are numai un singur mijloc.

298.° Formulați afirmația, care contrazice cea dată:
1) unghiul ABC nu este drept;
2) triunghiul MKE este isoscel;
3) printr-un punct al dreptei se poate duce doar o singură dreaptă perpendiculară pe cea dată;
4) semidreapta AC împarte unghiul BAK în jumătate.

299.° Demonstrați, folosind metoda reducerii la absurd, că atunci când nici una din înălțimile triunghiului nu coincide cu bisectoarea dusă din același vârf, atunci acest triunghi nu este isoscel.

300.° Demonstrați, folosind metoda reducerii la absurd, că atunci când laturile AB și BC ale triunghiului ABC nu sunt egale, atunci mediana lui BD nu este înălțimea lui.

301.° Demonstrați, folosind metoda reducerii la absurd, că dacă diferența a două unghiuri este egală cu 1°, atunci ele nu pot fi opuse la vârf.

302.° Demonstrați, folosind metoda reducerii la absurd, că din două unghiuri adiacente, cel puțin unul nu este mai mic de 90°.

303.• Formulați și demonstrați criteriul de egalitate a triunghiurilor isoscele după latura laterală și mediana dusă la latura laterală.

304.• Formulați și demonstrați criteriul de egalitate a triunghiurilor după latura și mediana dusă la această latură și a unghiului între mediană și această latură.

305.•• Demonstrați criteriul de egalitate a triunghiurilor după mediană și unghiurile în care ea împarte unghiul triunghiului.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

306. Notați pe o dreaptă punctele A, B și C. Puneți în loc de puncte unul din semnele „<”, „>” sau „=” astfel, ca să se obțină o scriere corectă:

1) $AB + BC \ldots AC$; 2) $AB + AC \ldots BC$; 3) $AC + BC \ldots AB$.

307. Unghiul dintre bisectoarea unuia din unghiurile adiacente și latura lor comună alcătuiește $\frac{1}{3}$ din celălalt unghi adiacent. Aflați măsura în grade a acestor unghiuri adiacente.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

308. Laturile dreptunghiului $ABCD$ sunt egale cu 4 cm și 3 cm. Aflați suma lungimilor tuturor segmentelor care se află în interiorul dreptunghiului (fig. 203).

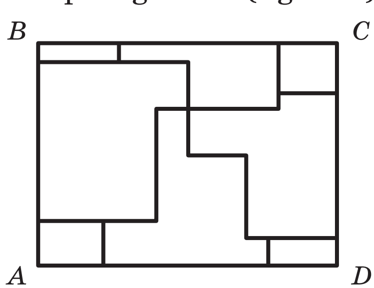


Fig. 203

ȘCOALA DE GEOMETRIE UCRAINEANĂ

Să ne amintim de geometricienii ucraineni, oameni de știință și pedagogi datorită cărora școala matematică ucraineană de astăzi ocupă poziții de seamă în lumea științifică. Cunoscuți mai ales pentru descoperirile lor științifice, aceștia acordau în același timp o mare atenție educației matematice.

Feofan Prokopóvici (1681–1736) — savant, om de stat, scriitor, personalitate marcantă a culturii și educației. A absolvit Academia Kiev-Mohyla, și-a continuat educația în instituții de învățământ poloneze și la Colegiul din Roma. A predat la Academia Kiev-Mohyla, și între anii 1711–1716 a fost rectorul acesteia. În cursul său de filozofie a inclus lecții de matematică. Partea geometrică a cursului cuprindea planimetria lui Euclid, cu anumite completări, aspecte de geometrie practică, descrierea instrumentelor geometrice și reguli de măsurare. Informațiile teoretice despre geometrie în așa volum au fost prezentate pentru prima dată.

Să recunoaștem meritele lui Mihail Vasilievici Ostrogradski (1801–1862). S-a născut în satul Pașenivka (regiunea Poltava) și a început să studieze la Universitatea din Harkiv. M. V. Ostrogradski a fost un excelent pedagog și organizator, a dezvoltat un sistem fin de viziuni asupra predării matematicii și le-a aplicat în activitatea sa didactică. A inițiat crearea unei serii de manuale metodice pentru implementarea metodelor progresive de predare.

Mihail Egorovici Vașcenko-Zaharcenko (1825–1912) s-a născut în satul Maliivka (regiunea Cerkasî). Absolvent, apoi profesor la Universitatea din Kiev, prin lucrările sale științifice și activitatea pedagogică a avut o mare

M. V. Ostrogradski
(1801–1862)

M. E. Vașcenko-Zaharcenko
(1825–1912)

influență asupra dezvoltării culturii matematice, în special traducând „Elementele” lui Euclid, cu explicații și note. A publicat o serie de ghiduri de matematică, inclusiv despre geometria elementară în contextul cursului de gimnaziu.

Oleksandr Matveievici Astriab (1879–1962) s-a născut în Lubnî (regiunea Poltava). Absolvent al Universității din Kiev, a condus catedra de metodică a matematicii la Institutul Pedagogic din Kiev și a participat activ la crearea departamentului de metodică a matematicii în cadrul Institutului Ucrainean de Cercetări Pedagogice. Autor a peste 70 de lucrări științifico-metodice, printre care „Geometria vizuală”, „Teoria și metodica rezolvării problemelor de construcție”, „Metodica stereometriei”.

Antonii Marian Lomnițchi (1881–1941) s-a născut la Lviv, a absolvit Universitatea din Lviv și a lucrat la Institutul Politehnic din Lviv. A acordat multă atenție predării matematicii în școală și a creat un manual de geometrie.

Boris Iakovici Bukreev (1859–1962) — absolvent al Universității din Kiev, iar din 1885 — profesor la universitatea dată, a continuat activitatea științifică și pedagogică aproape până la vârsta de 100 de ani. A lucrat în domeniul geometriei, inclusiv a geometriei neeuclidiene.

Kostantin Moiseiovici Șcerbina (1864–1946) s-a născut în Priluki (regiunea Cernigov), absolvent al Universității din Kiev. A fost organizatorul institutului de învățători din Kiev (1909) și timp de 10 ani directorul acestuia, iar din 1920 a lucrat la Institutul de Educație Națională din Odesa.

Mihail Filipovici Kravciuk (1892–1942) s-a născut în satul Ciovnâțea (regiunea Volâni), absolvent al Universității din Kiev. Pe lângă realizările științifice semnificative în diferite domenii ale matematicii, a creat programe de învățământ pentru școli medii și superioare, manuale pentru instituțiile de învățământ superior și a adus o contribuție semnificativă la dezvoltarea terminologiei matematice ucrainene. A fost organizatorul primei olimpiade de matematică pentru elevi din Ucraina (1935).

Oleksandr Stepanovici Smogorjevski (1896–1969) s-a născut în satul Lisovi Bârlânți (regiunea Vinnița), a absolvit Universitatea de Educație Publică din Kiev. A creat un manual de bazele geometriei pentru universități și instituții pedagogice, precum și o serie de cărți științifico-populare de matematică.

Ivan Fedorovici Teslenko (1908–1994) s-a născut în satul Domotkani (regiunea Dnipropetrovsk), a predat la Institutul Pedagogic din Harkiv și a condus catedra de matematică a Universității din Lviv, lucrând și la Institutul de Pedagogie. Principalele sale realizări sunt lucrările despre metodica predării geometriei, inclusiv manuale și materiale didactice pentru școala medie, profesori și studenți de la instituțiile pedagogice; teza sa de doctorat se intitulează „Bazele pedagogice ale predării geometriei”.

Zinaida Ivanivna Slepkan (1931–2008), a fost o cercetătoare ucraineană în domeniul metodicii predării matematicii, una dintre fondatoarele școlii științifice ucrainene de teorie și metodică a predării matematicii în școlile și universitățile din Ucraina, doctor în științe pedagogice, profesor. Timp de mulți ani a condus catedra de matematică elementară și metodică a matematicii la Institutul Pedagogic de Stat din Kiev. Zinaida Ivanivna a fost prima femeie din Ucraina care a susținut o teză de doctorat în metodica predării matematicii.

Z. I. Slepkan
(1931–2008)

Isaac Moiseiovici Iaglom (1921–1988) s-a născut în Harkiv și a fost autorul mai multor ghiduri pentru elevii de școală medie: „Figuri convexe”, „Transformări geometrice” (două volume), „Geometria elementară ieri și azi” etc.

M. I. Kovanțov
(1924–1988)

Cercetările geometrice la Universitatea din Kiev au fost inițiate la sfârșitul secolului XIX și începutul secolului XX de către B. Ia. Bukreev. În 1934, la Facultatea de Mecanică și Matematică a fost înființată catedra de geometrie.

Mikola Ivanovici Kovanțov a condus catedra de geometrie a Universității Naționale „Taras Șevcenko” din Kiev timp de aproape 30 de ani. El a scris peste 200 de lucrări științifice și științifico-populare. Mikola Ivanovici a educat zeci de oameni de știință ale căror realizări sunt recunoscute la nivel mondial și a depus mari strădințe pentru a încuraja tineretul să studieze matematica. În cartea sa „Matematica și romantica”, el scria: „Dragi prieteni! Începeți să rezolvați probleme matematice dificile! Atât pe cele recent propuse, cât și pe cele care nu au fost rezolvate de zeci sau chiar sute de ani. Veți întâmpina dificultăți și dezamăgiri, când se va părea că ați pierdut ani în căutarea unei fantome care se ascunde permanent. Totul este posibil. Dar veți fi răsplătiți pe măsură când într-o zi veți atinge culmile succesului pentru care ați muncit atât de mult. Nu fiți indiferenți, altfel veți fi condamnați la moarte spirituală.”

Vilen Illici Mihailovschi, lucrând întreaga viață matură la catedra de geometrie, a contribuit semnificativ și la dezvoltarea educației matematice școlare și a mișcării olimpice în Ucraina. A fost membru al colegiilor editoriale ale revistelor „Colecția geometrică ucraineană”, „În lumea matematicii”, „Matematica în școală”; a participat activ la pregătirea și desfășurarea olimpiadelor de matematică pentru elevi și studenți. Printre lucrările sale publicate se numără patru ediții a cărților „Colecția de probleme ale olimpiadelor matematice republicane”, „Colecția de probleme ale olimpiadelor matematice din Kiev”, „Practicum de rezolvare a problemelor de matematică”, „Olimpiadele matematice ucrainene”, „Olimpiadele matematice din Kiev”, „Colecția de probleme de concurs de matematică”.

V. I. Mihailovschi
(1932–2017)

Când vorbim despre geometria școlară, probabil toți cei care au „peste 50 de ani” își vor aminti mai întâi de manualul scris de Oleksii Vasilievici Pogorelov.

O. V. Pogorelov
(1919–2002)

În 1937, elevul din clasa a zecea de la Harkiv, Oleksii Pogorelov, a câștigat Olimpiada matematică din Kiev și a fost invitat să studieze la Universitatea din Harkiv. La vârsta de 29 de ani și-a susținut teza de doctorat. O. V. Pogorelov și-a concentrat activitatea științifică pe două direcții: geometria clasică și lucrul în ingineria de construcții.

Din 1947, întreaga sa activitate științifică și pedagogică a fost legată de Harkiv. Din acel an a predat matematica la Universitatea din Harkiv. În 1960 s-a înființat Institutul Fizico-Tehnologic a temperaturilor scăzute, unde O. V. Pogorelov a condus secția de geometrie. În anii 1950 – 1960 a condus departamentele de geometrie ale Institutului de Cercetare Matematică al Universității din Harkiv și ale Institutului de Matematică al Academiei de Științe din Ucraina.

Principala direcție a cercetărilor matematice ale lui O. V. Pogorelov au fost problemele de geometrie în general. El a lucrat în diverse domenii ale geometriei. Printre realizările sale se numără rezolvarea problemelor de geometrie contemporană propuse de matematicieni celebri ai secolelor XIX și XX, precum David Hilbert, Augustin-Louis Cauchy, Hermann Minkowski și alții. Rezultatele cercetărilor sale au fost publicate în aproape 40 de monografii, majoritatea fiind publicate în multe țări. Merită menționat faptul că în anii 1980, în seria de cărți ale Societății

Americane de Matematică „Matematicieni Remarcabili ai Secolului XX”, un volum separat include o monografie a lui O. V. Pogorelov, în a cărei prefață el era numit „cel mai mare geometrician al secolului XX”.

O. V. Pogorelov a creat manuale pentru instituțiile de învățământ superior pentru toate principalele domenii ale geometriei.

În paralel cu munca intensă la probleme matematice de nivel mondial, O. V. Pogorelov a creat un manual de geometrie pentru școlile medii. El considera că „în școală există două materii principale – limba maternă și geometria. Una învață omul să-și exprime gândurile corect, iar cealaltă îl învață gândirea deductivă”. Conform acestuia, autorul a pus la baza manualului său „un sistem de axiome strict și clar”. În 1972 a apărut prima ediție a manualului, iar în 1982, după verificarea experimentală, manualul a fost introdus în școli. De atunci, au fost realizate peste 20 de ediții ale acestui manual, cu tiraje de milioane de exemplare. Chiar și după obținerea independenței Ucrainei, manualul lui O. V. Pogorelov a fost folosit în școlile ucrainene până în 2007, când au fost elaborate noi programe de învățământ și cerințe contemporane pentru predarea geometriei școlare.

V. B. Polonski
(1957–2019)

În crearea acestui manual au fost folosite multe idei și probleme de la Vitalii Borisovici Polonski (1957 – 2019), un pedagog ucrainean remarcabil, învățător emerit al Ucrainei și cavaler al Ordinului „Pentru Merite” de gradul III. Lucrând toată viața ca profesor de școală, el a obținut rezultate impresionante.

Elevii lui Vitalii Borisovici Polonski au devenit de 13 ori premianți ai celei mai prestigioase competiții matematice din lume pentru elevi — Olimpiada Internațională de Matematică, de peste 100 de ori premianți ai Olimpiadelor Matematice Naționale din Ucraina și de mai mult de 250 de ori premianți ai Olimpiadelor Municipale din Kiev.

Vitalii Borisovici Polonski este autorul a peste 100 de manuale și ghiduri de matematică școlară. Articolele sale au fost publicate regulat în reviste matematice de prestigiu pentru elevi și profesori, cum ar fi „Kvant", „Matematica în școală", „În lumea matematicii". Astăzi, un nou cerc matematic de pregătire pentru olimpiadele internaționale de matematică din Kiev poartă numele lui. Dacă veți deveni premianți ai olimpiadelor matematice naționale (ocupând locul 1 sau 2), veți avea dreptul să participați la activitatea acestui cerc.

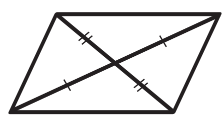
ÎNSĂRCINAREA № 2 „CONTROLEAZĂ-TE” ÎN FORMĂ DE TEST

1. Triunghiul este ascuțitunghic dacă:
A) printre unghiurile lui nu există unghi obtuz;
B) fiecare unghi al lui este mai mic decât cel drept;
C) printre unghiurile lui nu există unghi drept;
D) fiecare unghi al lui este mai mic decât cel obtuz.

2. Dacă înălțimea triunghiului nu se află în interiorul lui, atunci triunghiul este:
A) dreptunghic;
B) obtuzunghic;
C) echilateral;
D) ascuțitunghic.

3. Două triunghiuri sunt egale dacă:
A) două laturi ale unui triunghi sunt egale cu două laturi ale altui triunghi;
B) o latură și două unghiuri ale unui triunghi sunt egale cu latura și două unghiuri ale altui triunghi;
C) două laturi și un unghi ale unui triunghi sunt egale cu două laturi și un unghi ale altui triunghi;
D) două laturi și unghiul cuprins între ele ale unui triunghi sunt egale cu două laturi și unghiul cuprins între ele ale altui triunghi.

4. Câte perechi de triunghiuri egale sunt reprezentate pe desen?



A) 1; C) 3;
B) 2; D) 4.

5. Se știe că punctul M este mijlocul laturii AC a triunghiului ABC. Pe semidreapta BM, în afara triunghiului, s-a depus segmentul ME, care este egal cu segmentul BM. Aflați lungimea segmentului EC, dacă $AB = 4{,}2$ cm.
A) 2,1 cm; B) 4,2 cm; C) 4,8 cm; D) 8,4 cm.

6. Care din următoarele afirmații este corectă?
A) Triunghiul isoscel este un caz aparte de triunghi scalen;
B) triunghiul echilateral este un caz aparte de triunghi scalen;

C) triunghiul echilateral este un caz aparte de triunghi isoscel;
D) triunghiul isoscel este un caz aparte de triunghi echilateral.

7. Care din următoarele afirmații este falsă?
A) Dacă înălțimea unui triunghi împarte latura la care este dusă ea, în segmente egale, atunci acest triunghi este isoscel;
B) dacă mediana și bisectoarea unui triunghi, duse din același vârf, nu coincid, atunci acest triunghi nu este isoscel;
C) dacă un triunghi este echilateral, atunci lungimea oricărei înălțimi a lui este egală cu lungimea oricărei bisectoare a lui;
D) dacă două unghiuri ale unui triunghi sunt egale, atunci bisectoarea celui de-al treilea unghi împarte latura opusă în segmente egale.

8. Triunghiul este echilateral dacă:
A) latura lui este de trei ori mai mică decât perimetrul lui;
B) fiecare latură este de trei ori mai mică decât perimetrul lui;
C) două din înălțimile lui sunt egale;
D) două din bisectoarele lui sunt egale.

9. Perimetrul triunghiului isoscel ABC ($AB = BC$) este egal cu 16 cm. Perimetrul triunghiului ABM, unde punctul M este mijlocul segmentului AC, este egal cu 12 cm. Aflați mediana BM.
A) 4 cm; B) 6 cm; C) 2 cm; D) 5 cm.

10. Fiecare din punctele X și Y este egal depărtat de extremitățile segmentului AB. Care din următoarele afirmații poate fi falsă?
A) Dreptele XY și AB sunt perpendiculare;
B) $\angle XAY = \angle XBY$;
C) $\angle AXB = \angle AYB$;
D) $\angle AXY = \angle BXY$.

11. Punctul M este mijlocul segmentului AB. Punctul X nu aparține mediatoarei segmentului AB, dacă:
A) $XA = XB$; C) $XM \perp AB$;
B) $XM = XB$; D) $\angle XAM = \angle XBM$.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 2

Figuri egale

Două figuri se numesc egale dacă ele coincid prin suprapunere.

Axioma despre existența unui triunghi egal cu cel dat.

Pentru triunghiul dat ABC și semidreapta dată A_1M, există un astfel de triunghi $A_1B_1C_1$, care este egal cu triunghiul ABC, astfel încât $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ și latura A_1B_1 aparține semidreptei A_1M, iar vârful C_1 se află în semiplanul dat față de dreapta A_1M.

Teorema despre existența și unicitatea dreptei perpendiculare pe cea dată

Printr-un punct ce nu aparține dreptei date se poate duce o dreaptă perpendiculară pe cea dată și numai una singură.

Înălțimea triunghiului

Perpendiculara coborâtă din vârful triunghiului pe dreapta care conține latura opusă se numește înălțimea triunghiului.

Mediana triunghiului

Segmentul care unește vârful triunghiului cu mijlocul laturii opuse se numește mediana triunghiului.

Bisectoarea triunghiului

Segmentul bisectoarei unghiului triunghiului, care unește vârful triunghiului cu un punct al laturei opuse, se numește bisectoarea triunghiului.

Primul criteriu de egalitate a triunghiurilor: după două laturi și unghiul dintre ele

Dacă două laturi și unghiul dintre ele ale unui triunghi sunt egale corespunzător cu două laturi și unghiul dintre ele ale altui triunghi, atunci astfel de triunghiuri sunt egale.

Al doilea criteriu de egalitate a triunghiurilor: după o latură și două unghiuri alăturate ei

Dacă o latură și două unghiuri alăturate ei ale unui triunghi sunt egale corespunzător cu o latura și două unghiuri alăturate ei ale altui triunghi, atunci astfel de triunghiuri sunt egale.

Al treilea criteriu de egalitate a triunghiurilor: după trei laturi

Dacă trei laturi ale unui triunghi sunt egale corespunzător cu trei laturi ale altui triunghi, atunci astfel de triunghiuri sunt egale.

Mediatoarea segmentului

Dreapta care este perpendiculară pe un segment și trece prin mijlocul lui, se numește mediatoarea segmentului.

Triunghiul isoscel

Triunghiul, în care două laturi sunt egale, se numește isoscel.

Triunghiul echilateral

Triunghiul care are toate laturile egale se numește echilateral.

Proprietățile triunghiului isoscel

Într-un triunghi isoscel: 1) unghiurile de la bază sunt egale; 2) bisectoarea triunghiului, dusă la baza lui, este mediană și înălțime.

Criteriile triunghiul isoscel

- Dacă mediana triunghiului este înălțimea lui, atunci acest triunghi este isoscel.
- Dacă bisectoarea triunghiului este înălțimea lui, atunci acest triunghi este isoscel.
- Dacă într-un triunghi două unghiuri sunt egale, atunci acest triunghi este isoscel.
- Dacă mediana triunghiului este bisectoarea lui, atunci acest triunghi este isoscel.

Proprietățile triunghiurilor care reies din proprietățile și criteriile triunghiului isoscel

- În triunghi unghiurilor egale li se opun laturi egale.
- În triunghi laturilor egale li se opun unghiuri egale.
- În triunghiul isoscel bisectoarea, înălțimea și mediana duse la baza lui, coincid.
- În triunghiul echilateral toate unghiurile sunt egale.
- În triunghiul echilateral bisectoarea, înălțimea și mediana duse dintr-un vârf, coincid.
- Dacă într-un triunghi toate unghiurile sunt egale, atunci acest triunghi este echilateral.

DREPTE PARALELE. SUMA UNGHIURILOR TRIUNGHIULUI

§3

Cum de stabilit paralelismul a două drepte? Care sunt proprietățile dreptelor paralele? Cu ce este egală suma unghiurilor oricărui triunghi? Care sunt proprietățile triunghiului dreptunghic? Însușind materialul acestui paragraf, veți obține răspunsuri la aceste întrebări.

13. Drepte paralele

Definiție. Două drepte se numesc paralele dacă ele nu se intersectează.

În figura 204 sunt prezentate dreptele paralele a și b. Se scrie: a || b (se citește: „dreptele a și b sunt paralele” sau „dreapta a este paralelă cu dreapta b”).

Fig. 204

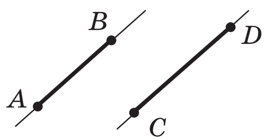


Fig. 205

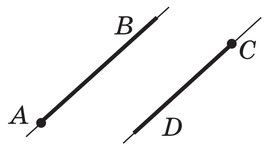


Fig. 206

Dacă două segmente se află pe drepte paralele, atunci ele se numesc paralele. În figura 205 segmentele AB și CD sunt paralele. Se scrie: $AB \parallel CD$.

De asemenea, se poate vorbi despre paralelismul a două semidrepte, a semidreptei și segmentului, dreptei și semidreptei, segmentului și dreptei. De exemplu, în figura 206 sunt prezentate semidreptele paralele AB și CD.

Teorema 13.1 (criteriul de paralelism al dreptelor). ***Două drepte, ce sunt perpendiculare la a treia dreaptă, sunt paralele.***

Demonstrație. ⊙ În figura 207 $a \perp c$ și $b \perp c$. Trebuie de demonstrat că $a \parallel b$.

Presupunem că dreptele a și b se intersectează într-un punct oarecare M (fig. 208). Atunci, prin punctul M, care nu aparține dreptei c, trec două drepte a și b, perpendiculare pe dreapta c. Acest lucru contrazice faptul că printr-un punct se poate duce doar o singură dreaptă perpendiculară pe o dreaptă dată (teorema 7.1). Astfel, presupunerea noastră nu este corectă; deci, $a \parallel b$. ●

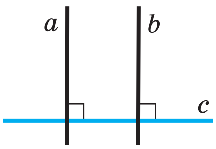


Fig. 207

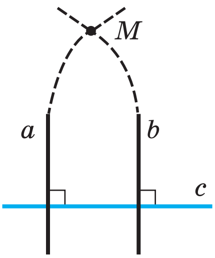


Fig. 208

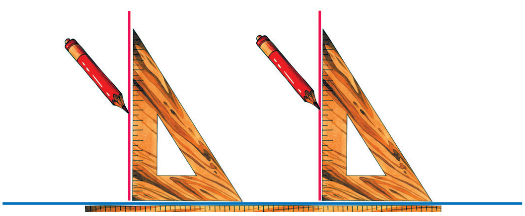


Fig. 209

Teorema demonstrată explică de ce, folosind o riglă și un echer, putem construi drepte paralele, așa cum este arătat în figura 209.

Consecință. ***Printr-un punct dat M, care nu aparține dreptei a, se poate duce dreapta b, paralelă cu dreapta a.***

Demonstrație. ⊙ Fie că punctul M nu aparține dreptei a (fig. 210). Ducem prin punctul M dreapta c, perpendiculară pe dreapta a. Acum, prin punctul M ducem dreapta b, perpendiculară pe dreapta c. Conform criteriului de parallelism al dreptelor (teorema 13.1), obținem că $a \parallel b$. ●

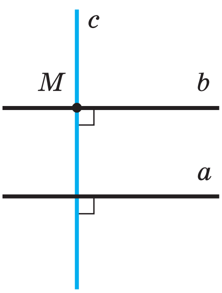


Fig. 210

Se poate oare duce prin punctul M (fig. 210) încă o dreaptă, paralelă cu dreapta *a*? Răspunsul la această întrebare este dat de axioma paralelismului dreptelor.

Axioma paralelismului dreptelor. Printr-un punct ce nu aparține dreptei date, trece numai o dreaptă paralelă cu cea dată.

Teorema 13.2. ***Dacă două drepte sunt paralele la a treia dreaptă, atunci ele sunt paralele între ele.***

Demonstrație. Fie că $b \parallel a$ și $c \parallel a$. Vom demonstra că $b \parallel c$.

Presupunem că dreptele *b* și *c* nu sunt paralele, ci se intersectează într-un punct oarecare *M* (fig. 211). Atunci avem că, prin punctul *M* trec două drepte paralele cu dreapta *a*, ceea ce contrazice axiomei paralelismului dreptelor. Astfel, presupunerea noastră este incorectă; deci, $b \parallel c$.

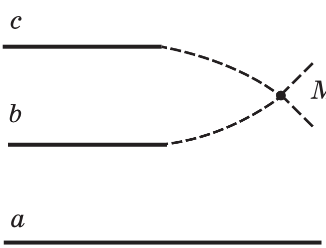


Fig. 211

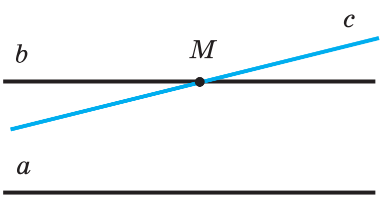


Fig. 212

Problemă. Demonstrați că, dacă dreapta intersectează una din două drepte paralele, atunci ea intersectează și pe a doua.

Rezolvare. Fie că dreptele *a* și *b* sunt paralele și dreapta *c* intersectează dreapta *b* în punctul *M* (fig. 212). Presupunem că dreapta *c* nu intersectează dreapta *a*, atunci $c \parallel a$. Dar, în acest caz, prin punctul *M* trec două drepte *b* și *c*, care sunt paralele cu dreapta *a*, ceea ce contrazice axiomei paralelismului dreptelor. Astfel, presupunerea noastră este incorectă, deci, dreapta *c* intersectează dreapta *a*.

1. Care două drepte se numesc paralele? **2.** Cum se citește notația $m \parallel n$? **3.** Care segmente se numesc paralele? **4.** Care este amplasarea reciprocă a două drepte, ce sunt perpendiculare la a treia dreaptă? **5.** Formulați axioma paralelismului dreptelor. **6.** Care este amplasarea reciprocă a două drepte, ce sunt paralele la a treia dreaptă?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

309.° Desenați în caiet figura 213. Duceți prin fiecare din punctele A și B o dreaptă paralelă cu dreapta m.

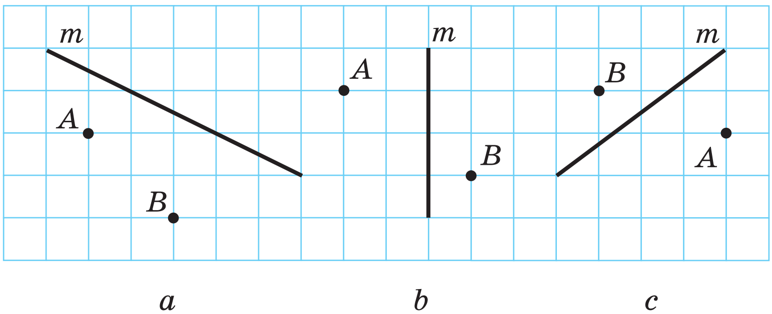


Fig. 213

310.° Desenați un triunghi și duceți prin fiecare din vârfurile lui o dreaptă paralelă cu latura opusă.

311.° Desenați în caiet figura 214. Duceți prin punctul B dreapta m, paralelă cu dreapta AC, iar prin punctul D dreapta n, paralelă cu dreapta AC. Care este amplasarea reciprocă a dreptelor m și n?

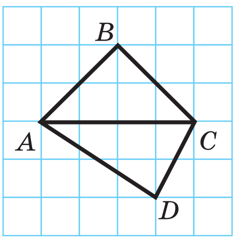


Fig. 214

EXERCIȚII

312.° Se poate oare duce o dreaptă care ar fi paralelă cu fiecare din dreptele *a* și *b*, ce se intersectează?

313.° Dreapta *a* este paralelă cu latura *AB* a triunghiului *ABC*. Poate oare dreapta *a* să fie paralelă cu latura *AC*? cu latura *BC*?

314.° Se poate oare afirma că două segmente sunt paralele dacă nu au puncte comune?

315.° Se poate oare afirma că există numai o semidreaptă paralelă cu dreapta dată, originea căreia este punctul dat?

316.° Câte segmente se pot duce, care vor fi paralele cu dreapta data, prin punctul, ce nu aparține acestei drepte?

317.• Dreptele *a* și *b* se intersectează. Se poate oare de dus o astfel de dreaptă *c*, care ar fi paralelă cu dreapta *a* și să intersecteze dreapta *b*?

318.• Dreptele *a* și *b* sunt perpendiculare pe dreapta *c*, iar dreapta *d* intersectează dreapta *a*. Va intersecta oare dreapta *d* dreapta *b*?

319.• Segmentul *BD* este mediana triunghiului isoscel *ABC* ($AB = BC$). Prin punctul *B* s-a dus dreapta *m* perpendiculară pe dreapta *BD*. Care este amplasarea reciprocă a dreptelor *m* și *AC*? Argumentați răspunsul.

320.• Dreptele *a* și *b* se intersectează. Dreapta *c* este paralelă cu dreapta *a*. Demonstrați că dreptele *b* și *c* se intersectează.

321.• Se dau trei drepte *a*, *b* și *c*. Se știe că dreptele *a* și *b* sunt paralele, iar dreapta *c* nu intersectează dreapta *a*. Demonstrați că dreapta *c* nu intersectează dreapta *b*.

322.•• Demonstrați că, atunci când orice dreaptă care intersectează dreapta *a*, intersectează și dreapta *b*, atunci dreptele *a* și *b* sunt paralele.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

323. Pe segmentul AB sunt notate punctele C și D astfel, încât $AC = BD$. Punctul O este mijlocul segmentului CD. Aflați distanța dintre punctele C și D, dacă $AB = 21$ cm, $AO : OD = 7 : 2$.

324. Punctul B aparține dreptei AC, semidreptele BD și BF se află în diferite semiplane față de dreapta AC, $\angle ABD = 80°$, $\angle ABF = 150°$, semidreapta BM — bisectoarea unghiului DBF. Aflați unghiul MBC.

325. În triunghiul ABC mediana CM este egală cu jumătate din latura AB, $\angle A = 47°$, $\angle B = 43°$. Cu ce este egal unghiul ACB?

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

326. Ecaterina și Eugen s-au apropiat de un iaz pătrat, în mijlocul căruia se află o insulă pătrată (fig. 215). Pe mal au găsit două scânduri, puțin mai scurte decât lățimea canalului dintre malul iazului și insulă. Cum pot ei ajunge pe insulă, folosind aceste scânduri?

Fig. 215

14. Criteriile de paralelilsm ale două drepte

Dacă două drepte *a* și *b* sunt intersectate de a treia dreaptă *c*, se formează opt unghiuri (fig. 216). Dreapta *c* se numește **secanta** dreptelor *a* și *b*.

Unghiurile 3 și 6, 4 și 5 se numesc **unghiuri interne de aceeași parte a secantei**.

Unghiurile 3 și 5, 4 și 6 se numesc **unghiuri alterne interne**.

Unghiurile 6 și 2, 5 și 1, 3 și 7, 4 și 8 se numesc **unghiuri corespondente**.

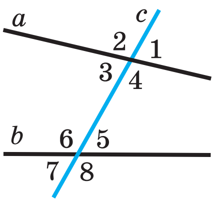


Fig. 216

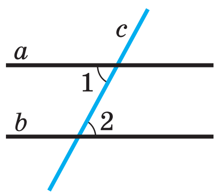


Fig. 217

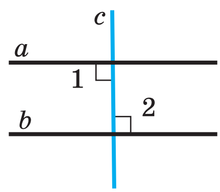


Fig. 218

Teorema 14.1. ***Dacă unghiurile alterne interne, formate la intersecția a două drepte cu o secantă, sunt egale, atunci dreptele sunt paralele.***

Demonstrație. În figura 217 dreapta *c* este secanta dreptelor *a* și *b*, $\angle 1 = \angle 2$. Vom demonstra, că $a \parallel b$.

Dacă $\angle 1 = \angle 2 = 90°$ (fig. 218), atunci paralelismul dreptelor *a* și *b* rezultă din criteriul paralelism al dreptelor (teorema 13.1).

Fie acum că dreapta *c* nu este perpendiculară pe niciuna din dreptele *a* și *b*. Notăm cu literele *A* și *B* punctele de intersecție a dreptei *c* cu dreptele *a* și *b* corespunzător. Notăm punctul *M* — mijlocul segmentului *AB* (fig. 219). Din punctul *M* ducem perpendiculară *ME* pe dreapta *a*. Fie că dreapta *ME* intersectează dreapta *b* în punctul *F*. Avem: unghiurile 1 și 2 sunt egale conform condiției; unghiurile 3 și 4 sunt egale ca unghiuri opuse la vârf.

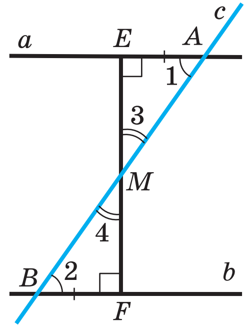


Fig. 219

Deci, triunghiurile AME și BMF sunt egale după o latură și două unghiuri alăturate ei, adică conform celui de-al doilea criteriu de egalitate a triunghiurilor. De aici $\angle AEM = \angle MFB = 90°$. Am arătat că dreptele a și b sunt perpendiculare pe dreapta EF; deci, ele sunt paralele. ●

Teorema 14.2. ***Dacă suma unghiurilor interne de aceeași parte a secantei, formate la intersecția a două drepte cu o secantă este egală cu 180°, atunci dreptele sunt paralele.***

Demonstrație. ⊙ În figura 220 dreapta c este secanta dreptelor a și b, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Vom demonstra, că $a \parallel b$.

Unghiurile 1 și 3 sunt adiacente, deci $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Deoarece $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, atunci $\angle 2 = \angle 3$. Iar unghiurile 2 și 3 sunt alterne interne, de aceea conform teoremei 14.1 $a \parallel b$. ●

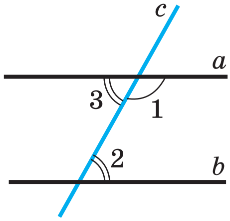


Fig. 220

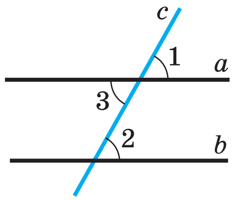


Fig. 221

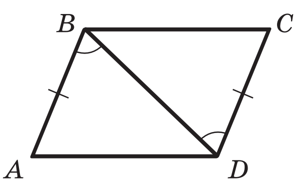


Fig. 222

Teorema 14.3. ***Dacă unghiurile corespondente, formate la intersecția a două drepte cu o secantă sunt egale, atunci dreptele sunt paralele.***

Demonstrație. ⊙ În figura 221 dreapta c este secanta dreptelor a și b, $\angle 1 = \angle 2$. Vom demonstra, că $a \parallel b$.

Unghiurile 1 și 3 sunt egale ca unghiuri opuse la vârf. Deoarece $\angle 1 = \angle 2$ și $\angle 1 = \angle 3$, atunci $\angle 2 = \angle 3$. Iar unghiurile 2 și 3 sunt alterne interne. De aceea conform criteriului de paralelism a două drepte (teorema 14.1) $a \parallel b$. ●

Problemă: În figura 222 $AB = CD$ și $\angle ABD = \angle CDB$. Demonstrați că $BC \parallel AD$.

Rezolvare. Pentru triunghiurile ABD și CDB avem: $AB = CD$ și $\angle ABD = \angle CDB$ conform condiției, segmentul BD – latură comună. Deci, triunghiurile ABD și CDB sunt egale după două laturi și unghiul dintre ele, adică conform primului criteriu de egalitate a triunghiurilor.

Atunci $\angle BDA = \angle DBC$. Deoarece unghiurile BDA și DBC sunt unghiuri alterne interne pentru dreptele BC și AD și secanta BD și aceste unghiuri sunt egale, rezultă că $BC \| AD$. ◀

1. Cum trebuie să fie unghiurile alterne interne, formate la intersecția a două drepte cu o secantă, ca dreptele date să fie paralele? **2.** Cum trebuie să fie unghiurile interne de aceeași parte a secantei, formate la intersecția a două drepte cu o secantă, ca dreptele date să fie paralele? **3.** Cum trebuie să fie unghiurile corespondente, formate la intersecția a două drepte cu o secantă, ca dreptele date să fie paralele?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

327.° Duceți dreptele AB și CD. Trasați dreapta MK care intersectează fiecare din dreptele AB și CD. Notați punctul de intersecție al dreptei AB cu MK cu litera O, iar punctul de intersecție al dreptei CD cu MK – cu litera E. Completați ce a fost omis în text:

1) unghiurile AOM și ... – corespondente;
2) unghiurile AOE și ... – corespondente;
3) unghiurile AOE și ... alterne interne;
4) unghiurile AOE și ... interne de aceeași parte a secantei.

Indicați ce fel de unghiuri (corespondente, alterne interne, interne de aceeași parte a secantei) sunt:

1) $\angle BOM$ și $\angle DEM$;
2) $\angle BOE$ și $\angle DEM$;
3) $\angle BOE$ și $\angle OEC$.

328.° Desenați două drepte și duceți secanta lor. Numerotați unghiurile formate la intersecția dreptelor date cu secanta. Indicați printre aceste unghiuri toate perechile de:

1) unghiuri corespondente;
2) unghiuri interne de aceeași parte a secantei;
3) unghiuri alterne interne.

EXERCIȚII

329.° Cum se numesc unghiurile 1 și 2, reprezentate în figura 223?

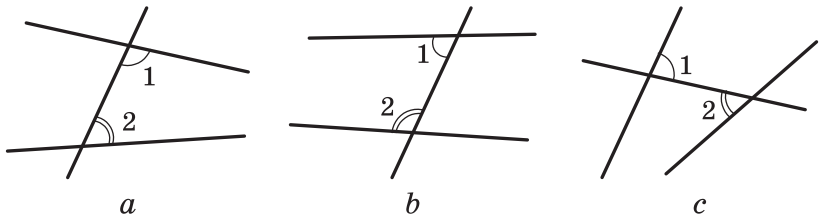


Fig. 223

330.° În figura 224 indicați toate perechile de unghiuri alterne interne, interne de aceeași parte a secantei și corespondente.

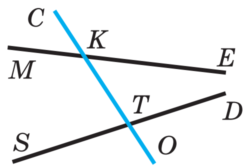


Fig. 224

331.° Scrieți care unghiuri din figura 225 sunt:

1) interne de aceeași parte a secantei formate de dreptele BC și AD și secanta AB;
2) interne de aceeași parte a secantei formate de dreptele CE și CD și secanta AD;
3) alterne interne formate de dreptele BC și AD și secanta CE;
4) corespondente formate de dreptele CE și CD și secanta AD;
5) interne de aceeași parte a secantei formate de dreptele BC și AD și secanta CE.

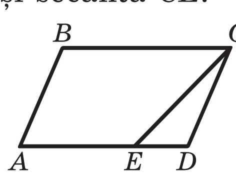
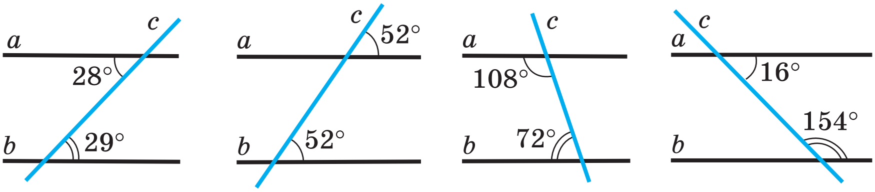


Fig. 225

332.° În care din figurile 226, *a–d*, dreptele *a* și *b* sunt paralele?



a *b* *c* *d*

Fig. 226

333.° Sunt oare paralele dreptele *a* și *b* reprezentate în figura 227 dacă:

1) $\angle 3 = \angle 6$;
2) $\angle 2 = \angle 6$;
3) $\angle 4 = 125°$, $\angle 6 = 55°$;
4) $\angle 2 = 35°$, $\angle 5 = 146°$;
5) $\angle 1 = 98°$, $\angle 6 = 82°$;
6) $\angle 1 = 143°$, $\angle 7 = 37°$?

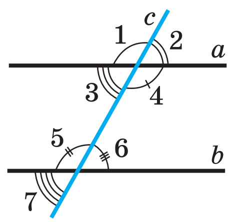
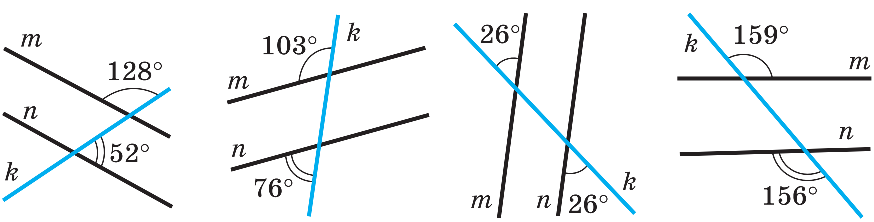


Fig. 227

334.° În care din figurile 228, *a–d* dreptele *m* și *n* sunt paralele?



a *b* *c* *d*

Fig. 228

335.° În figura 229 indicați toate perechile de drepte paralele.

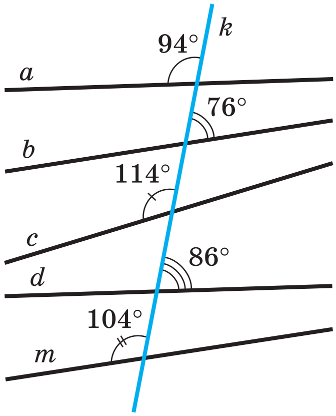


Fig. 229

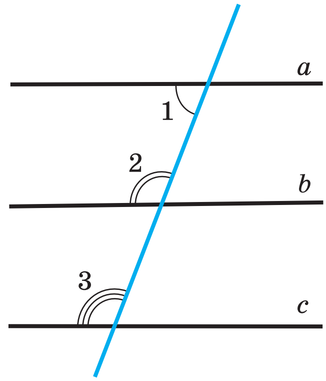


Fig. 230

336.° Scrieți care drepte din figura 230 sunt paralele, dacă $\angle 1 = 53°$, $\angle 2 = 128°$, $\angle 3 = 127°$.

337.° În figura 231 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Demonstrați că dreptele a și b sunt paralele.

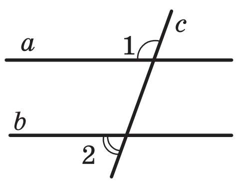


Fig. 231

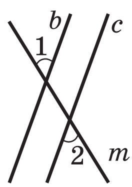


Fig. 232

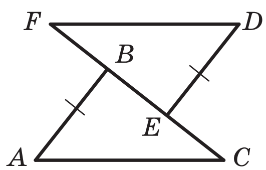


Fig. 233

338.° În figura 232 $\angle 1 = \angle 2$. Demonstrați că dreptele b și c sunt paralele.

339.° În figura 233 $\Delta ABC = \Delta DEF$, $AB = DE$. Demonstrați că $AC \parallel DF$.

340.° În figura 234 $\Delta ABC = \Delta DCE$, $AC = DE$. Demonstrați că $AB \parallel CD$.

341.• În figura 235 $AB = BC$, $CD = DK$. Demonstrați că $AB \parallel DK$.

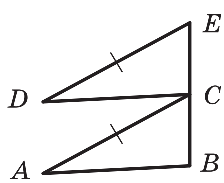


Fig. 234

342.• În figura 236 semidreapta AK este bisectoarea unghiului BAC, $AM = MK$. Demonstrați că $MK \parallel AC$.

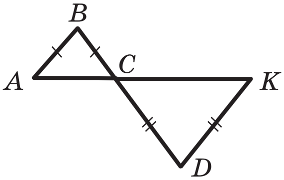


Fig. 235

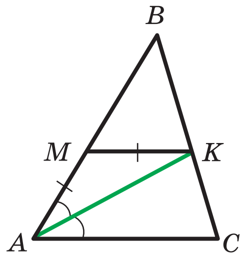


Fig. 236

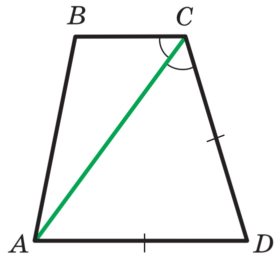


Fig. 237

343.˙ În figura 237 $\angle ACB = \angle ACD$, $AD = CD$. Demonstrați că $BC \parallel AD$.

344.˙ În triunghiul ABC se știe că $AB = BC$ și $\angle A = 60°$. Unghiul BCD este adiacent cu unghiul ACB, semidreapta CM – bisectoarea unghiului BCD. Demonstrați că $AB \parallel CM$.

345.˙ Segmentele AB și CD se intersectează în punctul O și sunt împărțite de acest punct în jumătăți. Demonstrați că $AC \parallel BD$.

346.˙ În figura 238 $AB = CD$ și $BC = AD$. Demonstrați că $AB \parallel CD$.

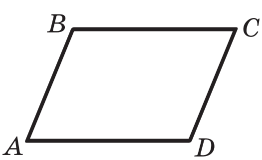


Fig. 238

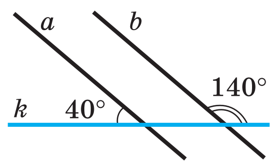


Fig. 239

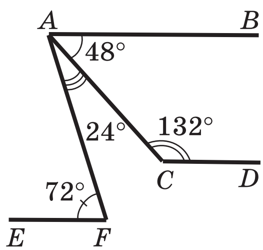


Fig. 240

347.˙ În figura 239 sunt reprezentate dreptele a, b și k. Se știe, că o dreaptă oarecare m intersectează dreapta a. Va intersecta oare dreapta m dreapta b?

348.˙ Care este amplasarea reciprocă a dreptelor CD și EF în figura 240?

349.˙˙ Unghiul ABC este egal cu 60°, iar unghiul BCD – 120°. Se poate oare afirma, că dreptele AB și CD sunt paralele?

350.•• Unghiul dintre dreptele a și c este egal cu unghiul dintre dreptele b și c. Se poate oare afirma, că dreptele a și b sunt paralele?

351.•• Din opt unghiuri, formate la intersecția dreptelor a și b cu dreapta c, patru unghiuri sunt egale cu 40°, iar celelalte patru unghiuri – cu 140°. Se poate oare afirma, că dreptele a și b sunt paralele?

352.•• O dreaptă intersectează bisectoarea BM a triunghiului ABC în punctul O, care este mijlocul segmentului BM, iar latura BC – în punctul K. Demonstrați că dacă $OK \perp BM$, atunci $MK \parallel AB$.

353.•• Segmentele AM și CK – medianele triunghiului ABC. Pe prelungirea segmentului AM după punctul M s-a depus segmentul MF, pe prelungirea segmentului CK după punctul K – segmentul KD astfel, încât $MF = AM$ și $KD = CK$. Demonstrați că punctele B, D și F sunt situate pe o dreaptă.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

354. Semidreapta OC împarte unghiul AOB în două unghiuri astfel, încât $\angle AOC : \angle BOC = 3 : 5$. Aflați unghiul dintre semidreapta OC și bisectoarea unghiului adiacent cu unghiul AOB, dacă unghiul BOC este cu 42° mai mare decât unghiul AOC.

355. În figura 241, $\angle ABK = \angle CBM$. Demonstrați că $BM = BK$.

356. Triunghiurile isoscele ABC și ADC au baza comună AC. Dreapta BD intersectează segmentul AC în punctul E. Demonstrați că $AE = EC$

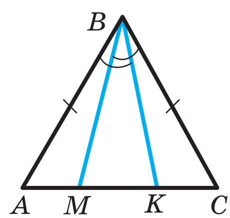


Fig. 241

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

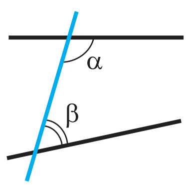
357. Dați un exemplu când partea comună (secțiunea) a unui triunghi și a unui patrulater este un octogon.

AL CINCILEA POSTULAT AL LUI EUCKID

În punctul 6 ați aflat că axiomele sunt acceptate ca afirmații evidente. Atunci, de ce, de exemplu, teoremele 1.1 și 5.1 să nu le includem în lista axiomelor, deoarece ele sunt de asemenea evidente? Răspunsul la această întrebare este destul de simplu: dacă o afirmație poate fi demonstrată, folosind axiome sau teoreme deja demonstrate, atunci această afirmație este o teoremă, și nu axiomă.

Din această poziție, este foarte instructivă istoria legată de al cincilea postulat al lui Euclid (reamintim că în povestirea „Din istoria geometriei" am formulat primele patru postulate).

V postulat. Pentru ca de fiecare dată când o dreaptă la intersecția cu altele două drepte formează cu ele unghiuri interne de aceeași parte a secantei, suma cărora este mai mică decât două unghiuri drepte, aceste drepte se intersectează pe acea parte a secantei, unde această sumă este mai mică decât două unghiuri drepte (fig. 242).



$\alpha + \beta < 180°$

Fig. 242

Putem demonstra că al cincilea postulat și axioma paralelismului dreptelor formulată în punctul 13 sunt echivalente, adică din postulat reiese axioma și, invers, din axiomă reiese postulatul.

Timp de peste douăzeci de secole, o mulțime de savanți au încercat să demonstreze al cincilea postulat, adică să-l demonstreze din alte axiome ale lui Euclid. Abia la începutul secolului al XIX-lea, câțiva matematicieni, independent unul de altul, au ajuns la concluzia că: afirmația, că *printr-un punct dat, care nu se află pe o dreaptă dată, se poate duce o singură dreaptă paralelă cu cea data*, este o axiomă.

Se pare că în această concluzie nu este nimic deosebit: adăugăm axioma paralelismului la lista deja existentă de axiome-reguli și apoi demonstrăm teoremele.

Însă, dacă în fotbal am adăuga măcar o regulă, de exemplu, să permitem jucătorilor de pe teren să joace și cu mâinile, am obține un joc complet diferit.

Dacă al cincilea postulat este o regulă pe care o acceptăm și nu o teoremă, atunci îl putem înlocui cu o altă regulă — o afirmație inversă lui: *printr-un punct care nu se află pe o dreaptă dată trec cel puțin două drepte care nu intersectează dreapta dată*. Această nouă axiomă permite construirea unei noi geometrii — geometria neeuclidiană.

15. Proprietățile dreptelor paralele

Teorema 15.1 (reciprocă teoremei 14.1). ***Dacă două drepte paralele sunt intersectate de o secantă, atunci unghiurile, care formează perechea unghiurilor alterne interne, sunt egale.***

Demonstrație. În figura 243 dreptele a și b sunt paralele, iar dreapta c — secantă. Vom demonstra că $\angle 1 = \angle 2$.

Fie că $\angle 1 \neq \angle 2$. Atunci prin punctul K vom duce dreapta a_1 astfel, încât $\angle 3 = \angle 2$ (fig. 243). Unghiurile 3 și 2 sunt alterne interne la dreptele a_1 și b și secanta c. Atunci conform criteriului paralelismului a două drepte (teorema 14.1) $a_1 \parallel b$. Am obținut că prin punctul K trec două drepte paralele cu dreapta b. Aceasta contrazice axioma paralelismului dreptelor. Astfel, presupunerea noastră este incorectă; deci, $\angle 1 = \angle 2$.

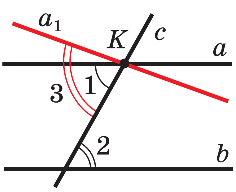


Fig. 243

Teorema 15.2 (reciprocă teoremei 14.3). ***Dacă două drepte paralele sunt intersectate de o secantă, atunci unghiurile, care formează perechea unghiurilor corespondente, sunt egale.***

Demonstrație. ⊙ În figura 244 dreptele a și b sunt paralele, iar dreapta c — secantă. Vom demonstra, că $\angle 1 = \angle 2$.

Conform proprietății dreptelor paralele (teorema 15.1), unghiurile 3 și 2 sunt egale ca unghiuri alterne interne la dreptele paralele a și b și secanta c. Însă unghiurile 3 și 1 sunt egale ca unghiuri opuse la vârf. Deci, $\angle 1 = \angle 2$. ●

Teorema 15.3 (reciprocă teoremei 14.2). ***Dacă două drepte paralele sunt intersectate de o secantă, atunci suma unghiurilor, care formează perechea unghiurilor interne de aceeași parte a secantei, este egală cu 180°.***

Demonstrație. ⊙ În figura 245 dreptele a și b sunt paralele, iar dreapta c — secantă. Vom demonstra, că $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

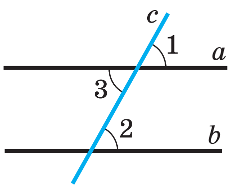


Fig. 244

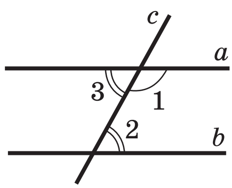


Fig. 245

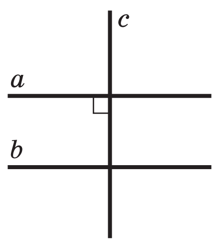


Fig. 246

Conform proprietății dreptelor paralele (teorema 15.1) unghiurile 3 și 2 sunt egale ca unghiuri alterne interne la dreptele paralele a și b și secanta c. Însă unghiurile 3 și 1 sunt adiacente, de aceea $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Deci, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. ●

Consecință. ***Dacă o dreaptă este perpendiculară pe una din două drepte paralele, atunci ea este perpendiculară și pe a doua*** (fig. 246).

Demonstrați această consecință de sine stătător.

Problema 1. Demonstrați că toate punctele uneia din două drepte paralele sunt egal depărtate de cealaltă dreaptă.

Rezolvare. Fie că dreptele a și b sunt paralele (fig. 247), iar M și N sunt două puncte arbitrare ce aparțin dreptei a. Coborâm din ele perpendicularele MK și NP pe dreapta b. Vom demonstra, că $MK = NP$.

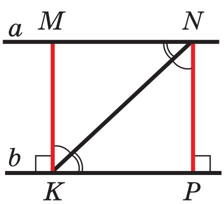


Fig. 247

Cercetăm triunghiurile MKN și PNK. Segmentul KN este latura lor comună. Deoarece $MK \perp b$ și $NP \perp b$, atunci $MK \parallel NP$, iar unghiurile MKN și PNK sunt egale ca unghiuri alterne interne la dreptele paralele MK și NP și secanta KN.

Analogic unghiurile MNK și PKN sunt egale ca unghiuri alterne interne la dreptele paralele MN și KP și secanta KN.

Deci, triunghiurile MKN și PNK sunt egale după o latură și unghiurile alăturate ei, adică conform celui de-al doilea criteriu de egalitate a triunghiurilor. Atunci $MK = NP$. ◀

Definiție. Distanța dintre două drepte paralele se numește distanța de la orice punct al unei drepte până la cealaltă dreaptă.

De exemplu, în figura 247 lungimea segmentului MK este distanța dintre dreptele paralele a și b.

Problema 2. În figura 248 segmentul AK este bisectoarea triunghiului ABC, $MK \parallel AC$. Demonstrați că triunghiul AMK este isoscel.

Rezolvare. Deoarece segmentul AK este bisectoarea triunghiului ABC, atunci $\angle MAK = \angle KAC$. Unghiurile KAC și MKA sunt egale ca unghiuri alterne interne la dreptele paralele MK și AC și secanta AK. Deci, $\angle MAK = \angle MKA$. Atunci triunghiul AMK este isoscel. ◀

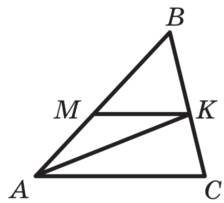


Fig. 248

1. Ce proprietate au unghiurile alterne interne formate la intersecția a două drepte paralele cu o secantă? **2.** Ce proprietate au unghiurile corespondente formate la intersecția a două drepte paralele cu o secantă? **3.** Ce proprietate au unghiurile interne de aceeași parte a secantei formate la intersecția a două drepte paralele cu o secantă? **4.** Se știe că o dreaptă este perpendiculară pe una din două drepte paralele. Este oare ea obligatoriu perpendiculară și pe a doua dreaptă? **5.** Ce se numește distanța dintre două drepte paralele?

В іменниках жіночого роду однини в орудному відмінку перед закінченням м'які приголосні та шиплячі звуки [ж], [ч], [ш] подовжуються. На письмі подовження приголосного звука передаємо двома однаковими буквами, а закінчення — буквою **ю:** *відстань — відстанню, грань — гранню, вісь — віссю, діагональ — діагоналлю.*

EXERCIȚII

358.° În figura 249 dreptele a și b sunt paralele.

1) Sunt oare egale unghiurile 1 și 5? Unghiurile 4 și 6? Unghiurile 2 și 8?
2) Cu ce este egală suma unghiurilor 3 și 5?

Argumentați răspunsul.

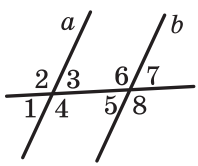


Fig. 249

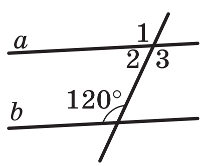


Fig. 250

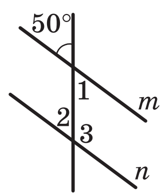


Fig. 251

359.° În figura 250 dreptele a și b sunt paralele. Aflați $\angle 1$, $\angle 2$ și $\angle 3$.

360.° În figura 251 dreptele m și n sunt paralele. Aflați $\angle 1$, $\angle 2$ și $\angle 3$.

361.° Unul din unghiurile formate la intersecția a două drepte paralele cu a treia dreaptă este egal cu 28°. Poate oare unul din unghiurile formate să fie egal cu: 1) 142°; 2) 152°?

362.° Suma a două unghiuri alterne interne, formate la intersecția a două drepte paralele cu o a treia dreaptă, este egală cu 290°. Aflați aceste unghiuri.

363.° Suma a două unghiuri corespondente, formate la intersecția a două drepte paralele cu o a treia dreaptă, este egală cu 56°. Aflați aceste unghiuri.

364.° În figura 252 aflați unghiul 1.

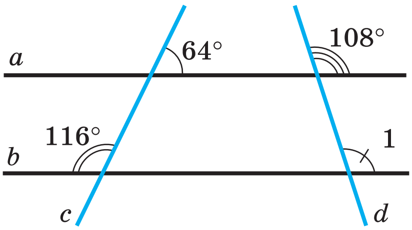


Fig. 252

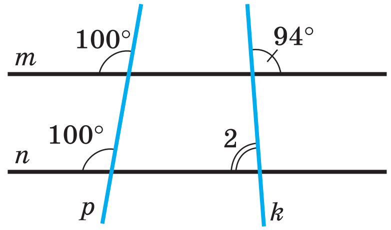


Fig. 253

365.° În figura 253 aflați unghiul 2.

366.° În figura 254 $\angle 1 = \angle 2$, $a \perp n$. Demonstrați că $b \perp n$.

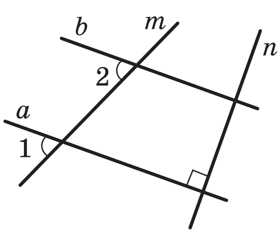


Fig. 254

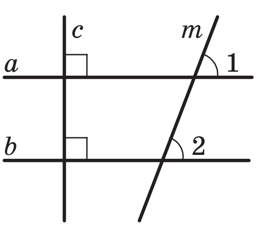


Fig. 255

367.° În figura 255 $a \perp c$ și $b \perp c$. Demonstrați că $\angle 1 = \angle 2$.

368.° Diferența unghiurilor interne de aceeași parte a secantei, formate la intersecția a două drepte paralele cu o secantă, este egală cu 50°. Aflați aceste unghiuri.

369.° Unul din unghiurile interne de aceeași parte a secantei, formate la intersecția a două drepte paralele cu o secantă, este de 4 ori mai mare decât celălalt. Aflați aceste unghiuri.

370.° În figura 256 $m \parallel n$, $p \parallel k$, $\angle 1 = 50°$. Aflați unghiurile 2, 3 și 4.

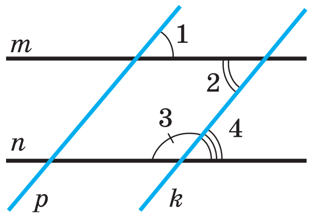


Fig. 256

371.• Dreapta, paralelă cu baza AC a triunghiului isoscel ABC, intersectează laturile laterale AB și BC în punctele D și F corespunzător. Demonstrați că triunghiul DBF este isoscel.

372.• Pe prelungirile laturilor AC și BC ale triunghiului isoscel ABC ($AB = BC$) după punctele A și B s-au notat punctele P și K astfel, încât $PK \parallel AB$. Demonstrați că triunghiul KPC este isoscel.

373.• Segmentele AB și CD se intersectează în punctul O, $AO = BO$, $AC \parallel BD$. Demonstrați că $CO = DO$.

374.• Segmentele MK și DE se intersectează în punctul F, $DK \parallel ME$, $DK = ME$. Demonstrați că $\Delta MEF = \Delta KDF$.

375.• Răspundeți la întrebări.

1) Pot oare ambele unghiuri interne de aceeași parte a secantei, formate la intersecția a două drepte paralele cu o secantă, să fie obtuze?
2) Poate oare suma unghiurilor alterne interne, formate la intersecția a două drepte paralele cu o secantă, să fie egală cu 180°?
3) Pot oare să fie egale unghiurile interne de aceeași parte a secantei, formate la intersecția a două drepte paralele cu o secantă?

376.• În figura 257 $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Demonstrați că $BC = AD$.

377.• În figura 257 $BC = AD$, $BC \parallel AD$. Demonstrați că $AB \parallel CD$.

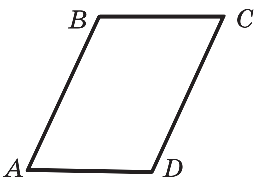


Fig. 257

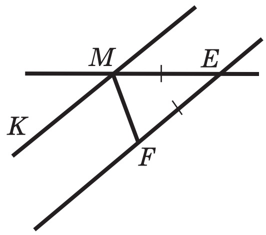


Fig. 258

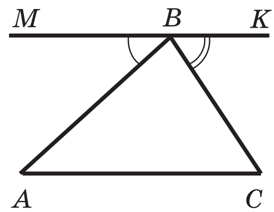


Fig. 259

378.• În figura 258 $MK \parallel EF$, $ME = EF$, $\angle KMF = 70°$. Aflați unghiul MEF.

379.• Prin vârful B al triunghiului ABC (fig. 259) s-a dus dreapta MK, paralelă cu dreapta AC, $\angle MBA = 42°$, $\angle CBK = 56°$. Aflați unghiurile triunghiului ABC.

380.• Dreapta dusă prin vârful A al triunghiului ABC paralel laturii lui opuse formează cu latura AC un unghi egal cu unghiul BAC. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

381.• Demonstrați că bisectoarele unei perechi de unghiuri alterne interne, formate la intersecția a două drepte paralele cu o secantă, sunt paralele.

382.• Demonstrați că bisectoarele unei perechi de unghiuri corespondente, formate la intersecția a două drepte paralele cu o secantă, sunt paralele.

383.•• În figura 260 $\angle MAB = 50°$, $\angle ABK = 130°$, $\angle ACB = 40°$, semidreapta CE este bisectoarea unghiului ACD. Aflați unghiurile triunghiului ACE.

384.•• În figura 261 $BE \perp AK$, $CF \perp AK$, CK este bisectoarea unghiului FCD, $\angle ABE = 62°$. Aflați unghiul ACK.

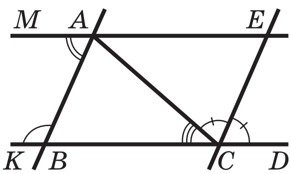


Fig. 260

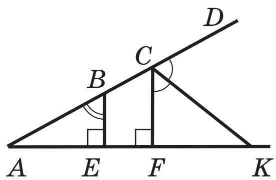


Fig. 261

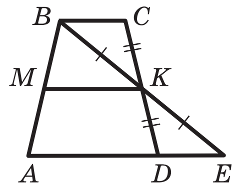


Fig. 262

385.•• În figura 262 $BC \parallel MK$, $BK = KE$, $CK = KD$. Demonstrați că $AD \parallel MK$.

386.•• În figura 263 $AB = AC$, $AF = FE$, $AB \parallel EF$. Demonstrați că $AE \perp BC$.

387.•• Triunghiul ABC este isoscel cu baza AC. Printr-un punct arbitrar M al bisectoarei lui BD s-au dus drepte paralele cu laturile AB și BC și intersectează segmentul AC în punctele E și F corespunzător. Demonstrați că $DE = DF$.

388.•• În figura 264 $AB \parallel DE$. Demonstrați că $\angle BCD = \angle ABC + \angle CDE$.

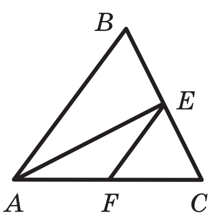


Fig. 263

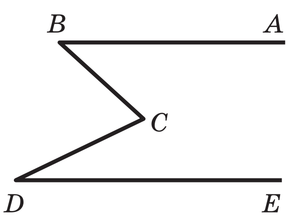


Fig. 264

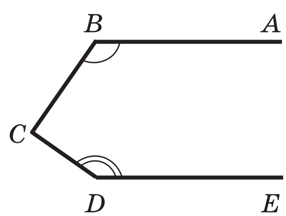


Fig. 265

389.•• În figura 265 $AB \parallel DE$, $\angle ABC = 120°$, $\angle CDE = 150°$. Demonstrați că $BC \perp CD$.

390.•• Prin vârful B al triunghiului ABC s-a dus o dreaptă paralelă cu bisectoarea lui AM. Această dreaptă intersectează dreapta AC în punctul K. Demonstrați că triunghiul BAK este isoscel.

391.* Prin punctul O de intersecție a bisectoarelor AE și CF ale triunghiului ABC s-a dus o dreaptă paralelă cu dreapta AC. Această dreaptă intersectează latura AB în punctul M, iar latura BC – în punctul K. Demonstrați că $MK = AM + CK$.

392.* Bisectoarele unghiurilor BAC și BCA ale triunghiului ABC se intersectează în punctul O. Prin acest punct s-au dus dreptele, care sunt paralele cu dreptele AB și BC și intersectează latura AC în punctele M și K corespunzător. Demonstrați că perimetrul triunghiului MOK este egal cu lungimea laturii AC.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

393. Pe segmentul AB s-a notat punctul C astfel, încât $AC : BC = 2 : 1$. Pe segmentul AC s-a notat punctul D astfel, încât $AD : CD = 3 : 2$. În ce raport împarte punctul D segmentul AB?

394. Segmentele AC și BD se intersectează în punctul O, $AB = BC = CD = AD$. Demonstrați că $AC \perp BD$.

395. În triunghiul MOE pe latura MO s-a notat punctul A, în triunghiul TPK pe latura TP – punctul B astfel, încât $MA = TB$. Care este măsura în grade a unghiului BKP, dacă $MO = TP$, $\angle M = \angle T$, $\angle O = \angle P$, $\angle AEO = 17°$?

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

396. În figura 266 este reprezentată o linie frântă închisă foarte complicată. Ea mărginește o parte oarecare a planului (un poligon). Pe desen se notează un punct arbitrar. Cum puteți determina cel mai rapid, dacă acest punct aparține poligonului sau nu?

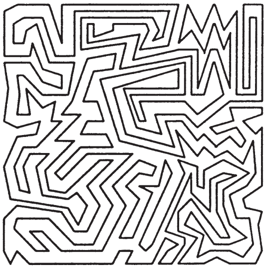


Fig. 266

16. Suma unghiurilor triunghiului

Triunghiul este o figură-cheie a planimetriei. Lumea triunghiurilor este diversă. Însă pentru toate triunghiurile este caracteristică proprietatea, care o dezvăluie următoarea teoremă.

Teorema 16.1. ***Suma unghiurilor triunghiului este egală cu 180°.***

Demonstrație. ⊙ Cercetăm un triunghi arbitrar ABC. Vom demonstra că $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Prin vârful B ducem dreapta a, paralelă cu dreapta AC (fig. 267). Avem: $\angle A$ și $\angle 1$ egale ca unghiuri alterne interne la dreptele paralele a și AC și secanta AB. Analogic, putem demonstra că $\angle C = \angle 3$. Dar unghiurile 1, 2, 3 formează un unghi desfășurat cu vârful B. Deci, $\angle A + \angle ABC + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$. ●

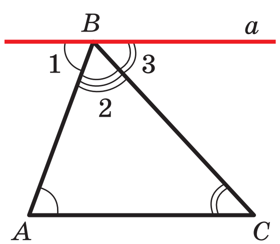


Fig. 267

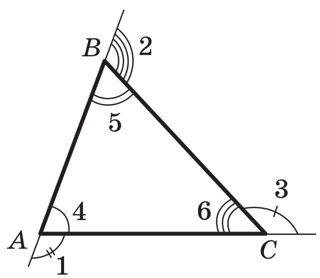


Fig. 268

Consecință. ***Într-un triunghi, cel puțin două unghiuri sunt ascuțite.***

Demonstrați această consecință de sine stătător.

Din această consecință reiese, că unghiul de la baza triunghiului isoscel este întotdeauna ascuțit.

Definiție. Unghiul exterior al triunghiului se numește unghiul adiacent cu unghiul acestui triunghi.

În figura 268 unghiurile 1, 2, 3 sunt unghiuri exterioare ale triunghiului ABC.

Teorema 16.2. ***Unghiul exterior al triunghiului este egal cu suma a două unghiuri ale triunghiului, ce nu sunt adiacente cu el.***

Demonstrație. În figura 268 unghiurile 1, 2 și 3 sunt unghiuri exterioare ale triunghiului ABC. Demonstrăm că $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$, $\angle 2 = \angle 4 + \angle 6$, $\angle 3 = \angle 4 + \angle 5$.

Demonstrăm, de exemplu, prima din aceste egalități (celelalte se demonstrează analogic).

Conform proprietății unghiurilor adiacente $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. Conform teoremei despre suma unghiurilor triunghiului $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$. Atunci $\angle 1 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$, de unde $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$. ●

Consecință. ***Unghiul exterior al triunghiului este mai mare decât fiecare din unghiurile triunghiului, care nu sunt adiacente cu el.***

Demonstrați această consecință de sine stătător.

Problemă. Mediana CM din triunghiul ABC este egală jumătate din latura AB. Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic.

Rezolvare. Conform condiției $AM = CM$ (fig. 269). Atunci în triunghiul AMC unghiurile A și ACM sunt egale.

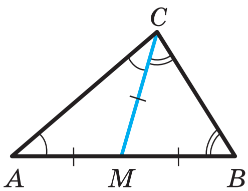


Fig. 269

Conform condiției $BM = CM$, de aici reiese, că în triunghiul BMC unghiurile B și BCM sunt egale.

În triunghiul ACB avem: $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180°$. Ținând cont că $\angle A = \angle ACM$ și $\angle B = \angle BCM$ obținem: $\angle ACM + \angle BCM + \angle ACB = 180°$.

Deoarece $\angle ACM + \angle BCM = \angle ACB$, atunci $2\angle ACB = 180°$. Atunci $\angle ACB = 90°$.

Deci, triunghiul ABC este dreptunghic. ◀

1. Cu ce este egală suma unghiurilor unui triunghi? **2.** Care este cel mai mic număr de unghiuri ascuțite pe care le poate avea un triunghi? **3.** Care unghi se numește unghi exterior al triunghiului? **4.** Care este legătura dintre unghiul exterior al triunghiului și două unghiuri ale triunghiului, care nu sunt adiacente cu el? **5.** Comparați unghiul exterior al triunghiului cu unghiul triunghiului, care nu este adiacent cu el.

В іменниках жіночого роду однини, основа яких закінчується двома приголосними звуками, в орудному відмінку перед закінченням **-у(-ю)** подовження звуків не відбувається: ***властивість* — *властивістю, рівність* — *рівністю, нерівність* — *нерівністю, паралельність* — *паралельністю.***

EXERCIȚII

397.° Există oare un triunghi, unghiurile căruia sunt egale cu:

1) 20°, 60° și 80°; 2) 10°, 40° și 120°?

398.° Aflați unghiul triunghiului dacă celelalte două unghiuri sunt egale cu 35° și 96°.

399.° Aflați unghiurile necunoscute ale triunghiului *ABC*, reprezentat în figura 270.

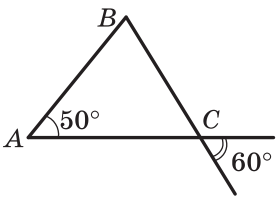


Fig. 270

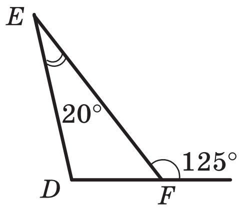


Fig. 271

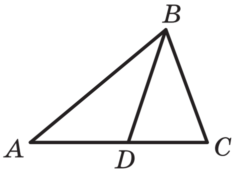


Fig. 272

400.° Aflați unghiurile necunoscute ale triunghiului *DEF*, reprezentat în figura 271.

401.° Segmentul *BD* este bisectoarea triunghiului *ABC* (fig. 272), $\angle A = 40°$, $\angle C = 70°$. Aflați unghiul *ABD*.

402.° Segmentul FK este bisectoarea triunghiului DEF (fig. 273), $\angle EFK = 64°$, $\angle D = 44°$. Aflați unghiul E.

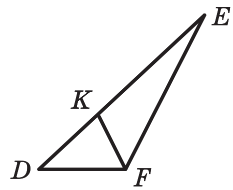


Fig. 273

403.° Unul din unghiurile triunghiului este de 3 ori mai mic decât al doilea unghi și cu 35° mai mic decât al treilea. Aflați unghiurile triunghiului.

404.° Aflați unghiurile triunghiului, dacă măsurile lor în grade se raportă ca $2:3:7$.

405.° Aflați unghiurile triunghiului echilateral.

406.° Aflați unghiurile triunghiului dreptunghic isoscel.

407.° Unghiul la baza unui triunghi isoscel este egal cu 63°. Aflați unghiul de la vârful acestui triunghi.

408.° Aflați unghiurile de la bază ale triunghiului isoscel, dacă unghiul de la vârf este egal cu 104°.

409.° Aflați unghiurile triunghiului isoscel, dacă unghiul de la vârf este de patru ori mai mare decât unghiul de la bază.

410.° Aflați unghiurile triunghiului isoscel, dacă unghiul de la bază este cu 48° mai mic decât unghiul de la vârf.

411.° Aflați unghiurile triunghiului isoscel, dacă unul din ele este egal cu: 1) 110°; 2) 50°. Câte rezolvări are problema?

412.° Aflați unghiurile triunghiului isoscel, dacă unul din ele este egal cu: 1) 42°; 2) 94°. Câte rezolvări are problema?

413.° În triunghiul ABC se știe, că segmentul AK – bisectoare, $\angle C = 90°$, $\angle BAK = 18°$. Aflați unghiurile AKC și ABC.

414.° În triunghiul ABC se știe, că segmentul CK – bisectoare, $AB = BC$, $\angle A = 66°$. Aflați unghiul AKC.

415.° Bisectoarele AK și CM ale triunghiului ABC se intersectează în punctul O, $\angle BAC = 116°$, $\angle BCA = 34°$. Aflați unghiul AOC.

416.° În triunghiul isoscel ABC cu unghiul B la vârf, care este egal cu 36°, a fost dusă bisectoarea AD. Demonstrați că triunghiurile ADB și CAD sunt isoscele.

417.° În triunghiul ABC s-a dus bisectoarea BF. Aflați unghiul C, dacă $\angle A = 39°$, $\angle AFB = 78°$.

418.° Demonstrați că dacă unul din unghiurile triunghiului este egal cu suma celorlalte două unghiuri, atunci acest triunghi este dreptunghic.

419.° În figura 274 indicați unghiurile exterioare:
1) de la vârfurile E și F ale triunghiului MEF;
2) de la vârful E al triunghiului MKE.

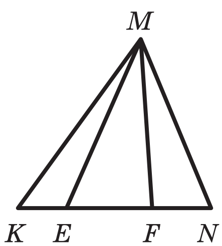


Fig. 274

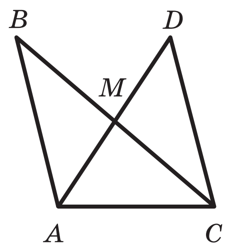


Fig. 275

420.° În figura 275 indicați triunghiurile pentru care unghiul exterior este: 1) unghiul AMB; 2) unghiul BMD.

421.° Unul din unghiurile exterioare ale triunghiului este egal cu 75°. Cu ce este egal:
1) unghiul triunghiului de la acest vârf;
2) suma celor două unghiuri ale triunghiului, care nu sunt adiacente cu el?

422.° În triunghiul ABC se știe, că $\angle A = 58°$, $\angle B = 72°$. Aflați unghiul exterior al triunghiului de la vârful C.

423.° Poate oare unghiul exterior al triunghiului să fie mai mic decât unghiul triunghiului adiacent cu el? Dacă răspunsul este pozitiv, indicați tipul triunghiului.

424.° Determinați tipul triunghiului dacă unul din unghiurile lui exterioare este egal cu unghiul triunghiului adiacent lui.

425.° Unul din unghiurile exterioare ale triunghiului este egal cu 136°, iar unul din unghiurile triunghiului – 61°. Aflați unghiul necunoscut al triunghiului, neadiacent cu cel exterior dat.

426.° Unul din unghiurile exterioare ale triunghiului este egal cu 154°. Aflați unghiurile triunghiului care nu sunt adiacente cu el, dacă unul din aceste unghiuri este cu 28° mai mare decât celălalt.

427.° Unul din unghiurile exterioare ale triunghiului este egal cu 98°. Aflați unghiurile triunghiului care nu sunt adiacente cu el, dacă unul din aceste unghiuri este de 6 ori mai mic decât celălalt.

428.° Aflați unghiurile triunghiului isoscel, dacă unghiul exterior de la vârful lui este egal cu 38°.

429.° Se știe că triunghiul ABC este isoscel cu baza AC. Aflați unghiurile acestui triunghi dacă unghiul exterior de la vârful A este egal cu 115°.

430.° Demonstrați că dacă două unghiuri ale unui triunghi sunt egale cu două unghiuri ale altui triunghi, atunci și al treilea unghi al acestor triunghiuri sunt egale.

431.° Pe laturile triunghiului ABC (fig. 276) sunt notate punctele E și F astfel, încât $\angle 1 = \angle 2$. Demonstrați că $\angle 3 = \angle 4$.

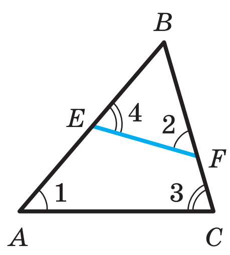


Fig. 276

432.° În figura 277 $AD = BC$, $\angle A = \angle C$. Demonstrați că $\Delta AOD = \Delta COB$.

433.• Aflați unghiurile triunghiului isoscel dacă unul din unghiurile lui exterioare este egal cu: 1) 54°; 2) 112°. Câte rezolvări are problema?

434.• Unghiul exterior al triunghiului isoscel este egal cu 130°. Aflați unghiurile triunghiului. Câte rezolvări are problema?

435.• Bisectoarele unghiurilor la baza AC a triunghiului isoscel ABC se intersectează în punctul O. Demonstrați că unghiul AOC este egal cu unghiul exterior al triunghiului ABC de la vârful A.

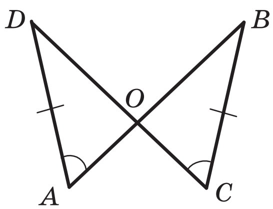


Fig. 277

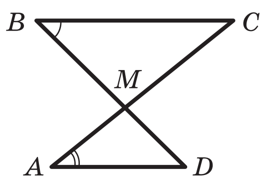


Fig. 278

436.• În figura 278 $BC \parallel AD$, $\angle A = 25°$, $\angle B = 55°$. Aflați unghiul CMD.

437.• Segmentul BK este bisectoarea triunghiului isoscel ABC cu baza BC, $\angle AKB = 105°$. Aflați unghiurile triunghiului ABC.

438.• Pe latura AB a triunghiului ABC este notat punctul D astfel, încât $BD = BC$, $\angle ACD = 15°$, $\angle DCB = 40°$. Aflați unghiurile triunghiului ABC.

439.• Prin vârful C al triunghiului ABC a fost dusă o dreaptă, care este paralelă cu bisectoarea AM a triunghiului și intersectează dreapta AB în punctul K. Aflați unghiurile triunghiului AKC, dacă $\angle BAC = 70°$.

440. În figura 279 $BC \parallel AD$, $\angle B = 100°$, $\angle ACD = 95°$, $\angle D = 45°$. Demonstrați că $AB = BC$.

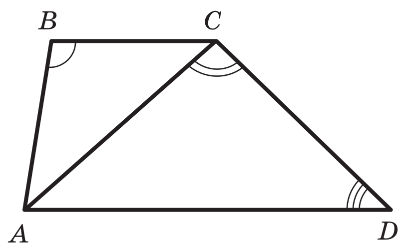


Fig. 279

441. În triunghiul ABC, bisectoarele unghiurilor A și C se intersectează în punctul O. Aflați unghiul AOC, dacă $\angle B = 100°$.

442. Demonstrați că bisectoarea unghiului exterior de la vârful triunghiului isoscel este paralelă cu baza lui.

443. Demonstrați că atunci când bisectoarea unghiului exterior a triunghiului este paralelă cu latura lui, atunci acest triunghi este isoscel.

444. Unghiul de la baza AC a triunghiului isoscel ABC este de două ori mai mare decât unghiul de la vârf, iar segmentul AM – bisectoarea triunghiului. Demonstrați că $BM = AC$.

445. Triunghiul ABC este isoscel cu baza AC. Pe latura BC este notat punctul M astfel, încât $BM = AM = AC$. Aflați unghiurile triunghiului ABC.

446. Demonstrați că în orice triunghi este un unghi: 1) nu mai mic de 60°; 2) nu mai mare de 60°.

447. Determinați tipul triunghiului dacă:
1) unul din unghiurile lui este mai mare decât suma celorlalte două;
2) oricare din unghiurile lui este mai mic decât suma celorlalte două.

448. Determinați tipul triunghiului dacă suma oricăror două unghiuri ale lui este mai mare de 90°.

449.$^{\bullet\bullet}$ Există oare un triunghi, două bisectoare ale căruia sunt perpendiculare?

450.$^{\bullet\bullet}$ Există oare un triunghi, în care o bisectoare împarte în jumătăți altă bisectoare?

451.$^{\bullet\bullet}$ Aflați unghiurile triunghiului ABC dacă bisectoarea unghiului B îl împarte în două triunghiuri isoscele.

452.* În triunghiul ABC, se știe că $\angle A = \alpha$, bisectoarele unghiurilor exterioare de la vârfurile B și C se intersectează în punctul O. Aflați unghiul BOC.

453.* Pe laturile laterale AB și BC ale triunghiului isoscel ABC sunt notate, respectiv, punctele E și F astfel, încât $AC = AF = EF = BE$. Aflați unghiurile triunghiului ABC.

454.* În triunghiul ABC, se știe că $AB = 2$ cm, $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$. Pe latura AC s-a notat punctul D astfel, încât $AD = 1$ cm. Aflați unghiurile triunghiului BDC.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

455. Pe o dreaptă s-au notat punctele A, B și C astfel, că punctul B se află între punctele A și C, totodată $BC = 2AB$. Pe segmentul BC s-a notat punctul D astfel, că $BD : DC = 3 : 7$. Aflați distanța dintre mijlocurile segmentelor AB și CD, dacă segmentul CD este cu 16 cm mai lung decât segmentul BD.

456. Pe mediana BM a triunghiului ABC s-a notat punctul O astfel, că $\angle OAC = \angle OCA$. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

457. Există oare un hexagon în care orice două diagonale ale lui să nu aibă puncte comune cu excepția vârfurilor?

17. Inegalități legate de elementele triunghiului

Imaginați-vă că laturile triunghiului ABC reprezintă drumuri (fig. 280). Trebuie să ajungeți din punctul A în punctul C. Ce traseu veți alege: veți merge prin punctul B sau veți alege drumul AC? Experiența ne arată că varianta a doua este mai scurtă. Intuiția voastră este confirmată de următoarea teoremă.

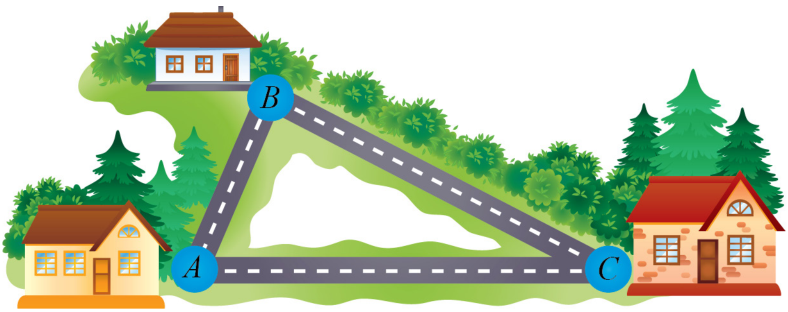


Fig. 280

Teorema 17.1 (inegalitatea triunghiului). ***Fiecare latură a triunghiului este mai mică decât suma celorlalte două laturi ale lui.***

Demonstrație. Cercetăm triunghiul ABC. Trebuie de demonstrat, că: 1) $AB < AC + CB$; 2) $AC < AB + BC$; 3) $BC < BA + AC$.

Demonstrăm prima din aceste inegalități (celelalte două se demonstrează analogic).

Fie, că inegalitatea pe care trebuie să o demonstrăm este greșită. Atunci $AB > AC + CB$ sau $AB = AC + CB$.

1) Fie, că $AB > AC + CB$. Atunci, pe latura AB putem nota punctele C_1 și C_2 astfel, încât $AC = AC_1$ și $BC = BC_2$ (fig. 281). Deoarece am presupus că $AB > AC + CB$, rezultă că $AB > AC_1 + BC_2$. Deci, segmentele AC_1 și BC_2 nu au puncte comune.

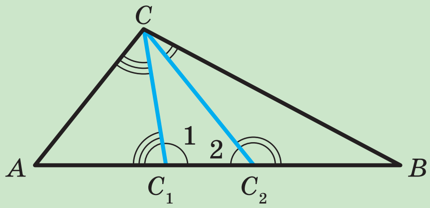


Fig. 281

Unghiurile AC_1C și BC_2C sunt ascuțite ca unghiuri la baza triunghiurilor isoscele AC_1C și BC_2C respectiv. Atunci, unghiurile 1 și 2 sunt obtuze ca unghiuri adiacente cu cele ascuțite. Obținem o contradicție: în triunghiul C_1CC_2 sunt două unghiuri obtuze.

2) Gândind analogic, se poate arăta (faceți aceasta de sine stătător) că egalitatea $AB = AC + CB$ de asemenea aduce la o contradicție. ●

Din teorema demonstrată reiese că *atunci când lungimea unui segment din cele trei date este nu mai mică decât suma lungimilor celorlalte două segmente, atunci aceste segmente nu pot servi ca laturi ale triunghiului* (fig. 282).

Fig. 282

În punctul 24 veți afla că, atunci când fiecare din trei segmente date este mai mic decât suma celorlalte două, aceste segmente pot servi ca laturi ale triunghi.

Deja știți că într-un triunghi, laturilor egale li se opun unghiuri egale și invers, unghiurilor egale li se opun laturi egale (punctul 9, 10). Aceste proprietăți sunt completate de următoarea teoremă.

Teorema 17.2. **Într-un triunghi, *laturii mai mari i se opune unghiul mai mare, și invers, unghiului mai mare i se opune latura mai mare.***

Demonstrație. 1) Cercetăm triunghiul ABC, în care $AB > BC$. Trebuie de demonstrat că $\angle ACB > \angle A$ (fig. 283).

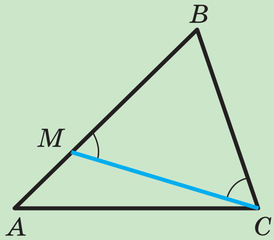


Fig. 283

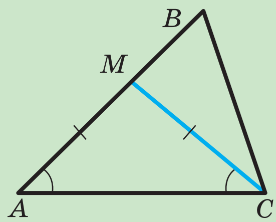


Fig. 284

Deoarece $AB > BC$, atunci pe latura AB va se va găsi un astfel de punct M, că $BM = BC$. Am obținut triunghiul isoscel MBC, în care $\angle BMC = \angle BCM$.

Deoarece unghiul BMC — unghi exterior pentru triunghiul AMC, atunci $\angle BMC > \angle A$. Următoarea „serie" de inegalități demonstrează prima parte a teoremei:

$\angle ACB > \angle MCB = \angle BMC > \angle A$.

2) Cercetăm triunghiul ABC, în care $\angle C > \angle A$. Trebuie de demonstrat, că $AB > BC$.

Deoarece $\angle ACB > \angle A$, atunci unghiul ACB poate fi împărțit în două unghiuri, ACM și MCB, astfel încât $\angle ACM = \angle A$ (fig. 284). Atunci, triunghiul AMC este isoscel cu laturile egale MA și MC.

Pentru latura BC, scriem inegalitatea triunghiului: $MC + MB > BC$.

Avem: $AB = AM + MB = MC + MB > BC$. ●

Menționăm, că a doua parte a teoremei 17.2 se poate demonstra, folosind metoda reducerii la absurd (de la contrar): de presupus că $BC \geqslant AB$, apoi de se folosit de prima parte a teoremei deja demonstrată. Executați această demonstrare de sine stătător.

Problemă. Segmentul BM — mediana triunghiului ABC. Demonstrați că $2BM < AB + BC$.

Rezolvare. Pe semidreapta BM notăm punctul K astfel, încât $MK = BM$ (fig. 285).

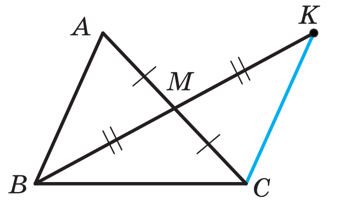


Fig. 285

În triunghiurile ABM și KCM avem: $AM = MC$, $BM = MK$, $\angle AMB = \angle CMK$.

Deci, $\Delta ABM = \Delta KCM$ conform primului criteriu de egalitate a triunghiurilor. Atunci $AB = KC$.

Pentru latura BK a triunghiului BKC scriem inegalitatea triunghiului: $BK < BC + CK$. Ținând cont de faptul că $BK = 2BM$ și $CK = AB$, obținem: $2BM < AB + BC$. ◀

1. Formulați teorema inegalității triunghiului. **2.** Formulați teorema despre corelația dintre laturile și unghiurile triunghiului.

EXERCIȚII

458.° Pot oare laturile unui triunghi să fie egale cu:

1) 6 cm, 5 cm, 12 cm? 2) 6 cm, 5 cm, 11 cm?

459.° Comparați unghiurile triunghiului ABC, dacă:

1) $AB > AC > BC$; 2) $AB = BC$, $BC > AC$.

460.° În triunghiul ABC se știe că $\angle A = 34°$, $\angle B = 28°$. Comparați laturile AB, BC și AC.

461.° Comparați laturile triunghiului ABC, dacă:

1) $\angle C > \angle A > \angle B$; 2) $\angle B > \angle C$, $\angle A = \angle B$.

462.• Perimetrul triunghiului este egal cu 30 cm. Poate oare una din laturile lui să fie egală cu: 1) 20 cm; 2) 15 cm?

463.• Lungimile a două laturi ale triunghiului sunt egale cu 7 cm și 9 cm. Poate oare perimetrul acestui triunghi să fie egal cu: 1) 20 cm; 2) 32 cm; 3) 18 cm?

464.• Două laturi ale triunghiului isoscel sunt egale cu 7 cm și 15 cm. Aflați perimetrul triunghiului.

465.• Perimetrul triunghiului isoscel este egal cu 20 cm. Poate oare lungimea unei laturi laterale să fie egală cu 5 cm?

466.• Două laturi ale triunghiului sunt egale 3,4 cm și 6,1 cm. Care este cea mai mică lungime, exprimată în numere întregi de centimetri, pe care o poate avea a treia latură?

467.• Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 4,8 cm și 7,6 cm. Care cea mai mare lungime, exprimată în numere întregi de centimetri, pe care o poate avea a treia latură?

468.• Există oare triunghiul în care una din laturile lui este cu 2 cm mai mică decât a doua și cu 6 cm mai mică decât a treia, iar perimetrul să fie egal cu 20 cm?

469.• Există oare triunghiul în care una din laturile lui este cu 1 cm mai mică decât a doua și cu 3 cm mai mică decât a treia, iar perimetrul să fie egal cu 22 cm?

470.• În triunghiul ABC, unghiul B este obtuz. Pe prelungirea laturii AB după punctul A este notat un punct arbitrar D. Demonstrați că $CD > AC$.

471.• În triunghiul ABC se știe că $\angle C > 90°$. Pe latura BC s-a notat punctul arbitrar D. Demonstrați că $AD > AC$.

472.•• Sunt așa trei puncte A, B și C, pentru care este adevărată egalitatea $AB = AC + CB$. Demonstrați că punctul C este un punct interior al segmentului AB.

473.•• Pe dreapta m (fig. 286) găsiți punctul C, ca suma distanțelor de la el până la punctele A și B să fie cea mai mică. Argumentați răspunsul.

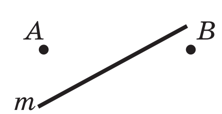


Fig. 286

474.* O latură a triunghiului este egală cu 2,8 cm, iar a doua – 0,6 cm. Aflați a treia latură a acestui triunghi, dacă lungimea ei, exprimată în centimetri, este egală cu un număr întreg.

475.* Segmentul AM – mediana triunghiului ABC, $\angle CAM > \angle BAM$. Demonstrați că $AB > AC$.

476.* Demonstrați că suma lungimilor a două laturi ale triunghiului este mai mare decât îndoitul lungimii medianei, duse la a treia latură.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

477. Măsura în grade a unghiurilor adiacente ABC și CBD se raportă ca $5:4$. Aflați unghiul dintre bisectoarele unghiurilor ABC și ABD. Câte rezolvări are problema?

478. În triunghiurile ABC și MKE se știe, că $AB = MK$, $BC = KE$, $\angle B = \angle K$. Pe segmentul AB s-a notat punctul F, iar pe segmentul MK – punctul P astfel, că $\angle ACF = \angle MEP$. Care este lungimea segmentului CF, dacă $PE = 15$ cm?

ÎNVĂȚĂM SĂ APLICĂM GEOMETRIA

479. Lungimile segmentelor unui coridor drept între intrările în oricare două palate vecine în spital sunt egale. În ce loc al coridorului ar trebui să fie plasat postul de asistență medicală pentru ca suma distanțelor de la acesta până la intrările în palate să cea mai mică, dacă în coridor sunt: 1) două palate; 2) trei palate; 3) patru palate?

480. Doi melci au început să se deplaseze concomitent după o linie dreaptă de la un punct pe o suprafață dreaptă în direcții diferite (nu neapărat opuse). Peste un timp oarecare, s-a constatat că un melc a parcurs 2 m, iar a doilea – 3 m. Care poate fi distanța dintre ei în acel moment?

18. Triunghiul dreptunghic

În figura 287 este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC, în care $\angle C = 90°$.

Latura triunghiului dreptunghic, care este opusă unghiului drept se numește **ipotenuză**, iar laturile alăturate unghiului drept se numesc **catete** (fig. 287).

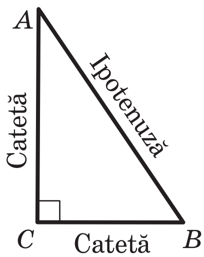


Fig. 287

Pentru a demonstra egalitatea a două triunghiuri, trebuie să găsim elementele lor egale. În oricare două triunghiuri dreptunghice astfel de elemente sunt întotdeauna — unghiurile drepte. De aceea, pentru triunghiurile dreptunghice, putem formula criterii de egalitate „personale”.

Teorema 18.1 (criteriul de egalitate a triunghiurilor dreptunghice după ipotenuză și catetă). ***Dacă ipotenuza și cateta unui triunghi dreptunghic sunt corespunzător egale cu ipotenuza și cateta altui triunghi dreptunghic, atunci aceste triunghiuri sunt egale.***

Demonstrație. Cercetăm triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, în care $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (fig. 288). Trebuie de demonstrat că $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

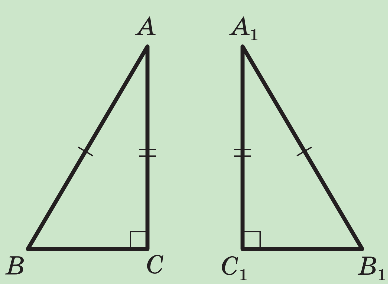


Fig. 288

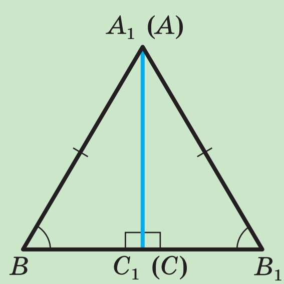


Fig. 289

Amplasăm triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ astfel, încât vârful A să coincidă cu vârful A_1, vârful C — cu vârful C_1, iar punctele B și B_1 să se afle în semiplane diferite față de dreapta A_1C_1 (fig. 289).

Avem: $\angle A_1C_1B + \angle A_1C_1B_1 = 90° + 90° = 180°$. Deci, unghiul BC_1B_1 — desfășurat, și de aceea punctele B, C_1 și B_1 se află pe o dreaptă. Am obținut un triunghi isoscel BA_1B_1 cu laturile A_1B și A_1B_1 și înălțimea A_1C_1 (fig. 289). Atunci segmentul A_1C_1 este mediana acestui triunghi, adică $C_1B = C_1B_1$. Deci, triunghiurile A_1BC_1 și $A_1B_1C_1$ sunt egale conform criteriului al treilea de egalitate a triunghiurilor. ●

În timpul rezolvării problemelor vom folosi și alte criterii de egalitate a triunghiurilor dreptunghice, care reies nemijlocit din criteriile de egalitate ale triunghiurilor.

Criteriul de egalitate a triunghiurilor dreptunghice după două catete. ***Dacă catetele unui triunghi dreptunghic sunt egale corespunzător cu catetele altuia, atunci aceste triunghiuri sunt egale.***

Criteriul de egalitate a triunghiurilor dreptunghice după o catetă și unghiul ascuțit alăturat ei. ***Dacă cateta și unghiul ascuțit alăturat ei al unui triunghi dreptunghic sunt egale corespunzător cu cateta și unghiul ascuțit alăturat ei al altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sunt egale.***

Evident, că dacă un unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic este egal cu un unghi ascuțit al altui triunghi dreptunghic, atunci și celelalte două unghiuri ascuțite sunt egale. Folosind această afirmație, lista criteriilor de egalitate a triunghiurilor dreptunghice poate fi suplimentată cu încă două.

Criteriul de egalitate a triunghiurilor dreptunghice după catetă și unghiul ascuțit opus. ***Dacă cateta și unghiul ascuțit opus ei al unui triunghi dreptunghic sunt egale corespunzător cu cateta și unghiul ascuțit opus al altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sunt egale.***

Criteriul de egalitate a triunghiurilor dreptunghice după ipotenuză și a unghiului ascuțit. ***Dacă ipotenuza și unghiul ascuțit a unui triunghi dreptunghic sunt egale corespunzător cu ipotenuza și unghiul ascuțit al altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sunt egale.***

Problemă. Demosntrați egalitatea triunghiurilor dreptunghice după unghiul ascuțit și bisectoarea lui, dusă din vârful acestui unghi.

Rezolvare. În triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ (fig. 290) $\angle C=\angle C_1=90°$, $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$, segmentele AD și A_1D_1 – bisectoare, $AD=A_1D_1$.

Avem: $\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1=\angle C_1A_1D_1$.

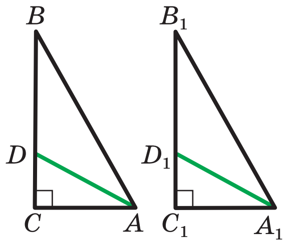


Fig. 290

Deoarece $AD=A_1D_1$, triunghiurile dreptunghice ACD și $A_1C_1D_1$ sunt egale după ipotenuză și unghiul ascuțit. De aici $AC=A_1C_1$, și deoarece $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$, atunci triunghiurile dreptunghice ABC și $A_1B_1C_1$ sunt eagle după catetă și unghiul ascuțit alăturat ei. ◀

?

1. Care triunghi se numește dreptunghic? **2.** Care latură a triunghiului dreptunghic se numește ipotenuză? **3.** Care latură a triunghiului dreptunghic se numește catetă? **4.** Formulați criteriul de egalitate a triunghiurilor dreptunghice după ipotenuză și catetă? **5.** Care este regula de egalitate a triunghiurilor dreptunghice când ambele catete sunt egale? **6.** Formulați criteriul de egalitate a triunghiurilor dreptunghice după catetă și unghiul ascuțit alăturat ei? **7.** Formulați criteriul de egalitate a triunghiurilor dreptunghice după catetă și unghiul ascuțit opus ei? **8.** Formulați criteriul de egalitate a triunghiurilor dreptunghice după ipotenuză și unghiul ascuțit? **9.** Cu ce este egală suma unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

481.° Cu ajutorul raportorului și riglei, construiți un triunghi dreptunghic:

1) catetele căruia sunt egale cu 3 cm și 4 cm;
2) una din catetele căruia este egală cu 2,5 cm, iar unghiul alăturat ei – 40°;
3) ipotenuza căruia este egală cu 6 cm, iar unul din unghiurile ascuțite – 70°.

Notați triunghiurile construite și indicați în fiecare din ele catetele și ipotenuza.

482.° Cu ajutorul raportorului și riglei, construiți un triunghi dreptunghic isoscel:

1) cu cateta, ce este egală cu 5 cm;
2) cu ipotenuza, ce este egală cu 4 cm.

EXERCIȚII

483.° În figura 291 este reprezentat triunghiul MKE cu unghiul drept la vârful K. Indicați:

1) catetele și ipotenuza triunghiului;
2) cateta alăturată unghiului E;
3) cateta opusă unghiului M.

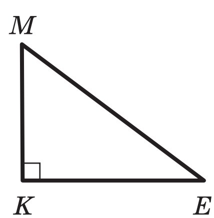


Fig. 291

484.° În figura 292 segmentul AD este înălțimea triunghiului ABC. Găsiți pe acest desen triunghiurile dreptunghice și indicați în fiecare din ele catetele și ipotenuza.

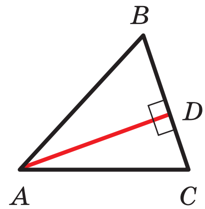


Fig. 292

485.° Unul din unghiurile ascuțite ale triunghiului dreptunghic este egal cu 43°. Aflați al doilea unghi ascuțit.

486.° Aflați unghiurile ascuțite ale triunghiului dreptunghic dacă măsurile lor în grade se raportă ca $7:8$.

487.° Aflați unghiurile ascuțite ale triunghiului dreptunghic, dacă unul din ele este cu 32° mai mare decât al doilea.

488.° Unghiul dintre înălțimea triunghiului dreptunghic, dusă la ipotenuză și una din catete este egal cu 76°. Aflați unghiurile ascuțite ale triunghiului.

489.° Aflați unghiul mai mic format de bisectoarea unghiului drept al triunghiului cu ipotenuza, dacă unul din unghiurile ascuțite ale triunghiului este egal cu 54°.

490.° În triunghiul isoscel ABC ($AB = BC$) a fost dusă înălțimea AH. Aflați unghiul CAH, dacă $\angle B = 76°$.

491.° Unghiul dintre baza triunghiului isoscel și înălțimea dusă la latura laterală este egal cu 19°. Aflați unghiurile acestui triunghi.

492.° În figura 293 $AB \perp BC$, $CD \perp BC$, $AC = BD$. Demonstrați că $AB = CD$.

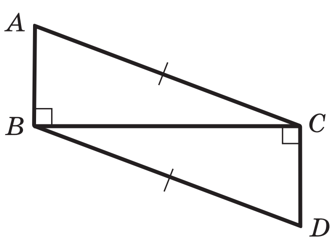


Fig. 293

493.° În figura 294 $MO = FO$, $\angle MEO = \angle FKO = 90°$. Demonstrați că $\Delta MEO = \Delta FKO$.

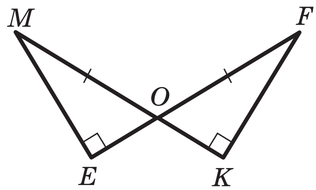


Fig. 294

494.° Din punctele A și B, care se află într-un semiplan față de dreapta a, au fost coborâte perpendicularele AM și BK pe această dreaptă, $AM = BK$. Demonstrați că $AK = BM$.

495.° În figura 295 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, $BM \perp AC$, $DK \perp AC$. Demonstrați că $BM = DK$.

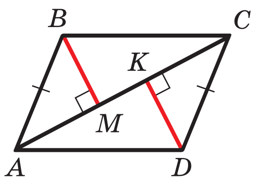


Fig. 295

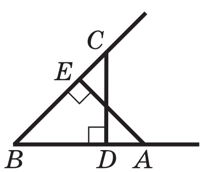


Fig. 296

496.° În figura 296 $AB = BC$, $CD \perp AB$, $AE \perp BC$. Demonstrați că $BE = BD$.

497.° Pe bisectoarea unghiului cu vârful în punctul B s-a fost notat punctul M, de la care s-au coborât perpendicularele MD și MC pe laturile unghiului. Demonstrați că $MD = MC$.

498.° Pe laturile unghiului cu vârful în punctul B s-au fost notate punctele A și C astfel, încât $AB = BC$. Prin punctele A și C au fost duse dreptele, care sunt perpendiculare la laturile BA și BC și se intersectează în punctul O. Demonstrați că semidreapta BO este bisectoarea unghiului ABC.

499.• Demonstrați că înălțimile triunghiului isoscel, duse la laturile lui, sunt egale.

500. Demonstrați că dacă două înălțimi ale triunghiului sunt egale, atunci acest triunghi este isoscel.

501. Demonstrați egalitatea triunghiurilor dreptunghice după catetă și bisectoarea dusă din vârful unghiului drept.

502. Demonstrați egalitatea triunghiurilor dreptunghice după catetă și înălțimea dusă din vârful unghiului drept.

503. Demonstrați egalitatea triunghiurilor dreptunghice după catetă și bisectoarea dusă din vârful unghiului ascuțit alăturat acestei catete.

504. Demonstrați egalitatea triunghiurilor dreptunghice după catetă și mediana dusă la cealaltă catetă.

505. Demonstrați că în triunghiuri egale, înălțimile coborâte pe laturile corespunzătoare, sunt egale.

506. O dreaptă intersectează laturile AB și BC ale triunghiului ABC, corespunzător în punctele M și K, care sunt mijlocurile acestor laturi. Demonstrați că vârfurile acestui triunghi sunt egal depărtate de la dreapta MK.

507. O dreaptă intersectează laturile AB și BC ale triunghiului ABC în punctele M și K, corespunzător. Vârfurile acestui triunghi sunt egal depărtate de la dreapta MK. Demonstrați că punctele M și K sunt mijlocurile laturilor AB și BC, corespunzător.

508. Demonstrați egalitatea triunghiurilor ascuțitunghice după latură și două înălțimi duse din extremitățile acestei laturi.

509. Demonstrați egalitatea triunghiurilor după latură, mediană și înălțimea duse la această latură.

510. Înălțimile AM și CK ale triunghiului ABC se intersectează în punctul H, $HK = HM$. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

511. Înălțimile ME și NF ale triunghiului MKN se intersectează în punctul O, $OM = ON$, $MF = KE$. Demonstrați că triunghiul MKN este echilateral.

512.•• Se poate oare afirma că dacă două laturi și înălțimea dusă la a treia latură a unui triunghi sunt egale corespunzător cu două laturi și înălțimea dusă la către a treia latură a altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sunt egale?

513.•• Demonstrați egalitatea triunghiurilor după două unghiuri și înălțimea coborâtă din vârful unghiului al treilea.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

514. Unghiurile ABC și DBC sunt adiacente, semidreapta BM aparține unghiului ABC, semidreapta BK – unghiului DBC, $\angle MBC = \angle CBK = 30°$, unghiul DBK este de 5 ori mai mare decât unghiul ABM. Aflați unghiurile ABC și DBC.

515. Pe laturile laterale AB și BC ale triunghiului isoscel ABC au notat corespunzător punctele M și K astfel, că $BM = BK$, Segmentele AK și CM se intersectează în punctul O. Demonstrați că: 1) triunghiul AOC este isoscel: 2) dreapta BO este mediatoarea segmentului AC.

516. În figura 297 $AB = CD$, $BC = AD$. Demonstrați că $AO = OC$.

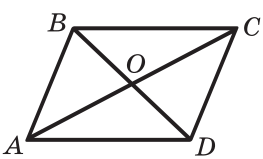


Fig. 297

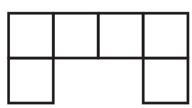


Fig. 298

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

517. Se poate oare pavimenta un plan cu figuri, fiecare egală cu figura reprezentată în figura 298?

19. Proprietățile triunghiului dreptunghic

Teorema 19.1. ***În triunghiul dreptunghic, ipotenuza este mai mare decât cateta.***

Demonstrație. ⊙ Fiecarei catete i se opune un unghi ascuțit, iar ipotenuzei i se opune unghiului drept. Unghiul drept este mai mare decât unghiul ascuțit, iar în triunghi, unghiului mai mare i se opune latura mai mare (teorema 17.2). De aceea, ipotenuza este mai mare decât oricare din catete. ●

Consecință. ***Dacă dintr-un punct care nu se află pe dreaptă, se poate duce la această dreaptă o perpendiculară și o oblică, atunci perpendiculara este mai mică decât oblica.***

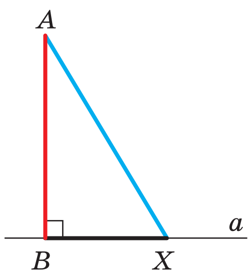


Fig. 299

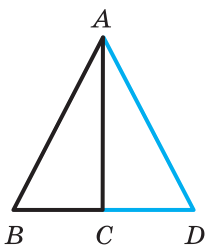


Fig. 300

În figura 299 segmentul AB este perpendiculară, iar segmentul AX – oblică, $AB < AX$.

Problema 1. Demonstrați că cateta, care este opusă unghiului de 30° este egală cu jumătate din ipotenuză.

Rezolvare. Cercetăm triunghiul ABC, în care $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 30°$. Trebuie de demonstrat, că $BC = \frac{1}{2}AB$.

Pe semidreapta BC depunem segmentul CD, egal cu segmentul BC (fig. 300). Ducem segmentul AD. Atunci, în triunghiurile ABC și ADC avem: $\angle ACB = \angle ACD = 90°$, laturile BC și CD sunt egale conform construcției, segmentul AC – latura comună a acestor triunghiuri. Deci, aceste triunghiuri sunt egale după două catete. Atunci $\angle DAC = 30°$, de aici $\angle BAD = \angle ABD = 60°$. Deci, $\angle ADB = 60°$ și triunghiul ABD este echilateral.

Deci, $BC = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} AB$. ◀

Problema 2. Demonstrați că dacă cateta este egală cu jumătatea ipotenuzei, atunci unghiul opus acestei catete este egal cu 30°.

Rezolvare. Cercetăm triunghiul ABC, în care $\angle ACB = 90°$, $BC = \frac{1}{2} AB$. Trebuie de demonstrat că $\angle BAC = 30°$.

Pe semidreapta BC depunem segmentul CD egal cu segmentul BC (fig. 300). Atunci $AB = BD$. Înafară de aceasta, segmentul AC este mediana și înălțimea triunghiului BAD, deci, conform criteriului triunghiului isoscel $AB = AD$. Obținem, că $AB = BD = AD$, de aceea triunghiul BAD este echilateral, deci $\angle BAD = 60°$.

Deoarece segmentul AC este bisectoarea triunghiului BAD, atunci $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BAD = 30°$. ◀

?

1. Care din laturile triunghiului dreptunghic este mai mare? **2.** Ce proprietate are cateta care este opusă unghiului de 30°? **3.** Care este măsura în grade a unghiul care este opus catetei, care este egală cu jumătate din ipotenuză?

EXERCIȚII

518.° Laturile triunghiului dreptunghic sunt egale cu 24 cm, 10 cm și 26 cm. Cu ce este egală cea mai mare catetă a triunghiului dat?

519.° Laturile triunghiului dreptunghic sunt egale cu 15 cm, 17 cm și 8 cm. Indicați lungimea ipotenuzei și a celei mai mici catete.

520.° În triunghiul dreptunghic DEF, ipotenuza DE este egală cu 18 cm, $\angle D = 30°$. Aflați cateta FE.

521.° În triunghiul dreptunghic MKC, se știe că $\angle M = 90°$, $\angle C = 60°$, $CM = 7$ cm. Aflați ipotenuza CK.

522.° În triunghiul ABC, se știe că $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$, CK — înălțime, $AC = 10$ cm. Aflați segmentul BK.

523.° În triunghiul ABC, se știe că $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, CD — înălțime, $BD = 7$ cm. Aflați ipotenuza AB.

524.° În triunghiul ABC, se știe că $\angle C = 90°$, segmentul CK — înălțime, $CK = 7$ cm, $AC = 14$ cm. Aflați $\angle B$.

525.• În triunghiul echilateral ABC, punctul D — mijlocul laturii AB. Din acest punct este coborâtă perpendiculara DE pe latura AC. Aflați segmentele în care punctul E împarte segmentul AC, dacă latura triunghiului dat este egală cu 16 cm.

526.• Unul din unghiurile triunghiului dreptunghic este egal cu 30°, iar diferența dintre ipotenuză și cateta mai mică este egală cu 5 cm. Aflați aceste laturi a triunghiului.

527.• În figura 301 segmentul AB este perpendiculară, iar segmentul AC — oblică, $AC = 2$ cm. Aflați unghiul ACB și lungimea perpendicularei AB, dacă această lungime, exprimată în centimetri, este un număr întreg.

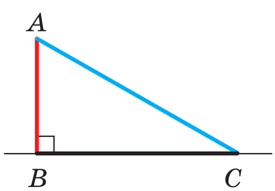


Fig. 301

528.• Pe cateta AC a triunghiului ABC ($\angle C = 90°$) s-a notat punctul K astfel, încât $AK = BK$. Aflați unghiul A, dacă $AK = 6$ cm, $KC = 3$ cm.

529.• Baza triunghiului isoscel este egală cu 18 cm, iar unul din unghiuri — 120°. Aflați înălțimea triunghiului dusă din vârful unghiului de la bază.

530.• În triunghiul isoscel ABC cu baza BC, a fost dusă înălțimea BM cu lungimea de 7,5 cm, $\angle MBC = 15°$. Aflați latura laterală a triunghiului.

531.• Bisectoarele AM și BK ale triunghiului echilateral ABC se intersectează în punctul O. Demonstrați că $AO : OM = 2 : 1$.

532.•• În triunghiul ABC, se știe că $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$. Mediatoarea segmentului AB intersectează acest segment în punctul M, iar segmentul BC – în punctul K. Demonstrați că $MK = \frac{1}{3} BC$.

533.•• În triunghiul MKE, se știe că $\angle K = 90°$, $\angle E = 30°$, $KE = 12$ cm. Aflați bisectoarea MC a triunghiului.

534.•• În triunghiul ABC, se știe că $\angle C = 90°$, $\angle BAC = 60°$, segmentul AD – bisectoare, segmentul CD este cu 3 cm mai mic decât segmentul BD. Aflați bisectoarea AD.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

535. În figura 302 $AB = BC$, $AM = KC$, $\angle AKE = \angle FMC$. Demonstrați că triunghiul FBE este isoscel.

536. Prin vârfurile A și B ale triunghiului ABC s-au dus dreptele, care sunt perpendiculare la bisectoarea unghiului ACB și intersectează dreptele BC și AC în punctele K și M corespunzător. Aflați perimetrul triunghiului ABC, dacă $AC > BC$, $CM = 6$ cm, $BK = 2$ cm, $AB = 7$ cm.

537. În figura 303 $BC \parallel AD$, semidreapta CA – bisectoarea unghiului BCD, $AD = 9$ cm, $AC = 8$ cm. Aflați perimetrul triunghiului CAD.

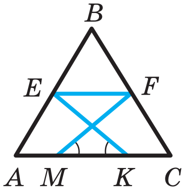


Fig. 302

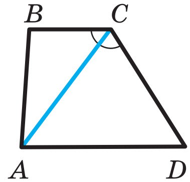


Fig. 303

ÎNVĂȚĂM SĂ APLICĂM GEOMETRIA

538. Un escalator transportă pasagerii unui aeroport de la primul la al doilea etaj. Înălțimea primului etaj reprezintă 6 metri (fig. 304). Unghiul de înclinare al escalatorului AB față de planul podelei primului etaj este egal cu 30°. Determinați lungimea escalatorului AB.

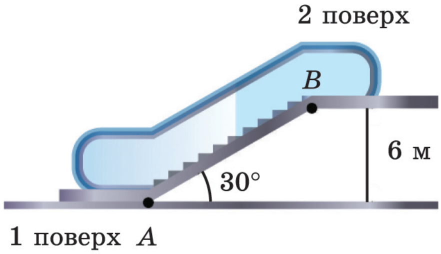


Fig. 304

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

539. Tăiați triunghiul în patru părți astfel, încât îndoind trei din ele, s-ar putea din nou de alcătuit un triunghi egal cu cel dat.

MATEMATICA ESTE ȘI PENTRU FEMEI

După ce ați făcut cunoștință cu povestiri din istoria dezvoltării matematicii, poate să se formeze părerea că matematica este doar pentru bărbați. Cu părere de rău, așa a fost timp de secole. Totuși, femeile, în special din a doua jumătate a secolului XIX, au luptat pentru dreptul de a studia științele, inclusiv matematica. Astăzi, femeile-matematicieni sunt printre cei mai importanți oameni de știință din lume.

N.O. Vircenko
(născută în 1930)

M.S.Viazovska
(născută în 1984)

Printre ele se numără și multe ucrainence celebre. De exemplu, Nina Opanasivna Vircenko, membră a societăților matematice din Australia, America, Belgia, Edinburg și Londra, și Marina Serhiivna Viazovska, care a primit medalia Fields, cea mai prestigioasă distincție în matematică.

Pentru a încuraja fetele să studieze matematica și să-și demonstreze capacitățile în acest domeniu, crearea unui mediu favorabil în care își pot câștiga încredere și recunoașterea talentelor lor matematice ajută Olimpiada Europeană de Matematică pentru Fete (în engleză European Girls' Mathematical Olympiad; prescurtat – EGMO). Aceasta este o competiție internațională anuală de matematică, dedicată fetelor sub 20 de ani, care nu fac studii superioare. Participante la această olimpiadă pot fi reprezentantele de pe diferite continente. Echipa fiecărei țări este formată din patru participante, care concurează individual.

Emblema EGMO

Prima dată olimpiadă a avut loc în 2012 la Cambridge (Marea Britanie), și de atunci a devenit foarte populară. În 2019 olimpiada s-a desfășurat în Ucraina: între 7 și 13 aprilie, 196 de fete din 50 de țări s-au întrecut la Kiev.

Echipa Ucrainei a participat la această olimpiadă încă de la început și a obținut rezultate remarcabile: în 2014, 2015, 2017, 2019 și 2023, echipa noastră a ocupat primul loc în clasamentul oficial european. Pe parcursul anilor 2012–2023, fetele noastre au câștigat 15 medalii de aur, 22 de argint și 8 de bronz.

Suntem convinși că și în viitor, tinerele ucrainence vor reprezenta cu mândrie țara noastră la această și alte concursuri matematice.

Echipa Ucrainei — câștigătoarea EGMO-2023

(*din stânga spre dreapta*): Evhenia Frankevici (*Lviv*), Polina Henik, Irina Romaniuk (*ambele din Kiev*), Marina Spectrova (*Harkiv*)

ÎNSĂRCINAREA № 3 „CONTROLEAZĂ-TE” ÎN FORMĂ DE TEST

1. Care din următoarele afirmații este corectă?

A) Dacă două segmente nu au puncte comune, atunci ele sunt paralele.
B) Dacă două semidrepte nu au puncte comune, atunci ele sunt paralele.
C) Dacă o semidreaptă și un segment nu au puncte comune, atunci ele sunt paralele.
D) Dacă două drepte nu au puncte comune, atunci ele sunt paralele.

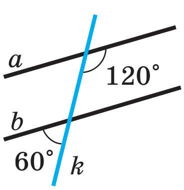
2. Care din următoarele afirmații este corectă?

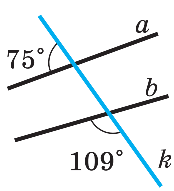
A) Printr-un punct ce nu aparține dreptei date trece numai un segment paralel cu dreapta dată.
B) Printr-un punct ce nu aparține dreptei date trece numai o semidreaptă paralelă cu dreapta dată.
C) Printr-un punct ce nu aparține dreptei date trec o mulțime de drepte, care nu sunt paralele cu dreapta dată.
D) Printr-un punct ce nu aparține dreptei date trec doar două drepte paralele cu dreapta dată.

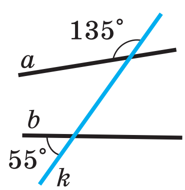
3. Care din următoarele afirmații nu este corectă?

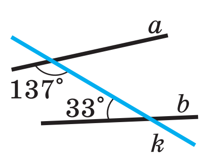
A) Dacă a | | b și b | | c, atunci a | | c.
B) Dacă a ⊥ b și b ⊥ c, atunci a | | c.
C) Dacă a ⊥ b și b ⊥ c, atunci a ⊥ c.
D) Dacă $a \parallel b$ și $c \perp b$, atunci $c \perp a$.

4. Pe care desen dreptele a și b sunt paralele?

A)


B)


C)


D)


5. Care din următoarele afirmații nu este corectă?

A) Dacă suma unghiurilor unei perechi de unghiuri alterne interne este egală cu suma unghiurilor altei perechi de unghiuri, atunci dreptele nu sunt paralele.

B) Dacă unghiurile alterne interne nu sunt egale, atunci dreptele nu sunt paralele.

C) Dacă suma unghiurilor interne de aceeași parte a secantei nu este egală cu 180°, atunci dreptele nu sunt paralele.

D) Dacă unghiurile corespondente nu sunt egale, atunci dreptele nu sunt paralele.

6. Câte unghiuri exterioare are triunghiul?

A) 3; B) 6; C) 4; D) 9.

7. Care este suma unghiurilor exterioare ale triunghiului, luate câte unul de la fiecare vârf?

A) 180°; B) 300°; C) 360°; D) 100°.

8. În triunghiul ABC, bisectoarele unghiurilor A și C se intersectează în punctul O, $\angle ABC = 84°$. Indicați egalitatea corectă?

A) $\angle AOC = 48°$; C) $\angle AOC = 132°$;
B) $\angle AOC = 138°$; D) $\angle AOC = 174°$.

9. În triunghiul ABC, înălțimile duse din vârfurile A și C se intersectează în punctul O, $\angle ABC = 62°$. Care dintre egalitățile date este corectă?

A) $\angle AOC = 28°$; C) $\angle \mathrm{AOC} = 152°$;
B) $\angle \mathrm{AOC} = 118°$; D) $\angle AOC = 149°$.

10. Cu care din valorile date poate fi egală lungimea laturii AB a triunghiului ABC, dacă $AC = 3$ cm și $BC = 10$ cm?

A) 3 cm; B) 7 cm; C) 11 cm; D) 15 cm.

11. În triunghiul ABC, se știe că $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$. Care din următoarele afirmații este corectă?

A) $CB = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$; C) $CB = \frac{1}{2}AC$;
B) $AC = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$; D) $AC = \frac{1}{2}CB$.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 3

Drepte Paralele

Două drepte se numesc paralele dacă ele nu se intersectează.

Axioma paralelismului dreptelor

Printr-un punct ce nu aparține dreaptei date, trece numai o dreaptă paralelă cu cea dată.

Criteriile de paralelism ale două drepte

- Două drepte, ce sunt perpendiculare la a treia dreaptă, sunt paralele.
- Dacă două drepte sunt paralele la a treia dreaptă, atunci ele sunt paralele.
- Dacă unghiurile alterne interne, formate la intersecția a două drepte cu o secantă sunt egale, atunci dreptele sunt paralele.
- Dacă suma unghiurilor interne de aceeași parte a secantei, formate la intersecția a două drepte cu o secantă este egală cu 180°, atunci dreptele sunt paralele.
- Dacă unghiurile corespondente, formate la intersecția a două drepte cu o secantă sunt egale, atunci dreptele sunt paralele.

Proprietățile dreptelor paralele

Dacă două drepte paralele sunt intersectate de o secantă, atunci:

- unghiurile, care formează o pereche de unghiuri alterne interne, sunt egale.
- unghiurile, care formează o pereche de unghiuri corespondente, sunt egale.
- suma unghiurilor, care formează o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei, este egală cu 180°.

Distanța dintre dreptele paralele

Distanța dintre două drepte paralele se numește distanța dintre orice punct a unei drepte până la altă dreaptă.

Suma unghiurilor triunghiului

Suma unghiurilor triunghiului este egală cu 180°.

Unghiul exterior al triunghiului

Unghiul exterior al triunghiului se numește unghiul adiacent cu unghiul acestui triunghi.
Unghiul exterior al triunghiului este egal cu suma a două unghiuri ale triunghiului, ce nu sunt adiacente cu el.
Unghiul exterior al triunghiului este mai mare decât fiecare din unghiurile triunghiului, care nu sunt adiacente cu el.

Inegalitatea triunghiului

Fiecare latură a triunghiului este mai mică decât suma celorlalte două laturi ale lui.

Compararea laturilor și a unghiurilor unui triunghi

Într-un triunghi, laturii mai mari i se opune unghiul mai mare, și invers, unghiului mai mare i se opune latura mai mare.

Ipotenuza și cateta

Latura triunghiului dreptunghic opusă unghiului drept se numește ipotenuză, iar laturile alăturate unghiului drept — catete.

Criteriile de egalitate ale triunghiurilor dreptunghice

- *După ipotenuză și catetă*: dacă ipotenuza și o catetă a unui triunghi dreptunghic sunt corespunzător egale cu ipotenuza și o catetă a altui triunghi dreptunghic, atunci astfel de triunghiuri sunt egale.

- *După două catete*: dacă catetele unui triunghi dreptunghic sunt corespunzător egale cu catetele altui triunghi dreptunghic, atunci astfel de triunghiuri sunt egale.
- *După catetă și unghiul ascuțit alăturat ei*: dacă o catetă și unghiul ascuțit alăturat ei a unui triunghi dreptunghic sunt corespunzător egale cu o catetă și unghiul unghiul ascuțit alăturat ei a altui triunghi dreptunghic, atunci astfel de triunghiuri sunt egale.
- *După catetă și unghiul ascuțit opus ei*: dacă o catetă și unghiul ascuțit opus ei a unui triunghi dreptunghic sunt corespunzător egale cu o catetă și unghiul ascuțit opus ei a altui triunghi dreptunghic, atunci astfel de triunghiuri sunt egale.
- *După ipotenuză și unghiul ascuțit*: dacă ipotenuza și unghiul ascuțit al unui triunghi dreptunghic sunt corespunzător egale cu ipotenuza și unghiul ascuțit al altui triunghi dreptunghic, atunci astfel de triunghiuri sunt egale.

Proprietățile triunghiului dreptunghic

- Ipotenuza este mai mare decât cateta.
- Cateta, care este opusă unghiului de 30°, este egală cu jumătate din ipotenuză.
- Dacă cateta este egală cu jumătate din ipotenuză, atunci unghiul opus acestei catete este egal cu 30°.

§4 CIRCUMFERINȚA ȘI CERCUL

În acest paragraf veți face cunoștință cu proprietățile circumferinței. Veți studia amplasarea reciprocă a circumferinței și dreptei, a circumferinței și triunghiului. Veți afla despre figuri speciale, toate punctele cărora au una și aceeași proprietate.

20. Locul geometric al punctelor. Circumferința și cercul.

Orice mulțime de puncte este o figură geometrică. A prezenta o figură oarecare este ușor: totul ce veți desena este o figură geometrică. (fig. 305).

Însă, de studiat figurile formate din puncte amplasate haotic nu este rațional. De aceea, este logic de format o clasă de figuri, toate punctele cărorora au o anumită proprietate comună. Fiecare din aceste figuri este numită un **loc geometric al punctelor**.

Fig. 305

Definiție. **Loc geometric al punctelor (LGP) se numește mulțimea tuturor punctelor, care au o anumită proprietate.**

Intuitiv LGP se poate prezenta astfel: de stabilit o anumită proprietate, apoi pe un plan alb *toate punctele,* care posedă această proprietate, se vopsesc în culoare roșie. Acea „figura roșie” care se obține aici și este LGP.

De exemplu, notăm două puncte A și B. Pentru toate punctele stabilim proprietatea: să aparțină în același timp semidreptelor AB și BA. Este clar, că această proprietate o posedă toate punctele segmentului AB, și numai ele (fig. 306). De aceea segmentul AB este LGP, care posedă proprietatea indicată.

Fig. 306

Cercetăm dreptele perpendiculare a și b. Pentru toate punctele stabilim proprietatea să aparțină dreptei b și să se afle la o distanță de 1 cm de la dreapta a. Evident, punctele A și B (fig. 307) satisfac aceste cerințe. De asemenea este clar că nici un alt punct diferit de punctele A și B nu posedă această proprietate. Deci, LGP căutat este figura, care constă din două puncte A și B (fig. 307).

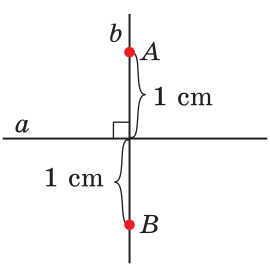


Fig. 307

Pentru ca o mulțime oarecare de puncte să fie numită LGP, care au o anumită proprietate, trebuie de demonstrat două teoreme reciproc inverse:

1) teorema directă: *fiecare punct din mulțimea dată posedă proprietatea dată;*

2) teorema reciprocă: *dacă punctul posedă proprietatea dată, atunci el aparține mulțimii date.*

Teorema 20.1. ***Mediatoarea segmentului este locul geometric al punctelor egal depărtate de la extremitățile acestui segment.***

Teorema directă. ***Fiecare punct al mediatoarei segmentului este egal depărtat de la extremitățile lui.***

Demonstrație. ⊙ Conform teoremei 8.2, fiecare punct a mediatoarei posedă această proprietate. ●

Teorema reciprocă. ***Dacă punctul este egal depărtat de la extremitățile segmentului, atunci el aparține mediatoarei acestui segment.***

Demonstrație. ⊙ Conform teoremei 11.2, dacă punctul posedă această proprietate, atunci el aparține mediatoarei. ●

Teorema 20.2. ***Bisectoarea unghiului este locul geometric al punctelor care aparțin unghiului și sunt egal depărtate de la laturile lui.***

Teorema directă. ***Fiecare punct al bisectoarei unghiului este egal depărtat de la laturile lui.***

Demonstrație. ⊙ Evident, că vârful unghiului are această proprietate.

Cercetăm un punct arbitrar X care nu coincide cu vârful unghiului ABC și care aparține bisectoarei lui. Ducem perpendicularele XM și XN pe laturile BA și BC, corespunzător (fig. 308). Vom demonstra, că $XM = XN$.

În triunghiurile dreptunghice BXM și BXN, ipotenuza BX este comună, $\angle MBX = \angle NBX$, deoarece semidreapta BX

este bisectoarea unghiului ABC. Deci, triunghiurile BXM și BXN sunt egale după ipotenuză și unghiul ascuțit. De aici $XM = XN$. ●

Teorema reciprocă. ***Dacă punctul, ce aparține unghiului este egal depărtat de la laturile lui, atunci el se află pe bisectoarea acestui unghi.***

Demonstrație. Evident, că vârful unghiului posedă această proprietate.

Să cercetăm un punct arbitrar X, care aparține unghiului ABC, nu coincide cu vârful lui și este egal depărtat de la laturile lui (fig. 308). Ducem perpendicularele XM și XN pe laturile BA și BC, corespunzător. Trebuie de demonstrat, că $\angle MBX = \angle NBX$.

În triunghiurile dreptunghice BXM și BXN, ipotenuza BX este comună, iar segmentele XM și XN sunt egale conform condiției. Deci, triunghiurile BXM și BXN sunt egale după ipotenuză și o catetă. De aici $\angle MBX = \angle NBX$. ●

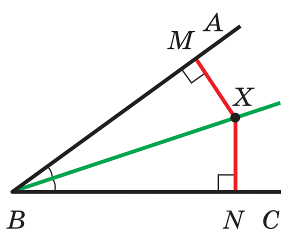


Fig. 308

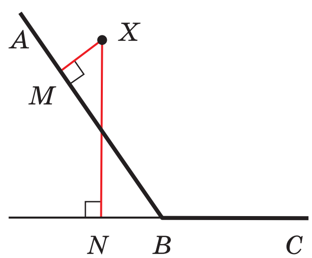


Fig. 309

Atragem atenția, că demonstrarea teoremei va fi deplină dacă vom arăta că punctul unghiului este egal depărtat de laturile lui atunci când se exclude posibilitatea când unul din punctele M sau N aparține prelungirii laturii unghiului (fig. 309). Această situație o puteți studia la cercul de matematică.

Menționăm de asemenea, că teorema demonstrată este valabilă și pentru unghiul desfășurat.

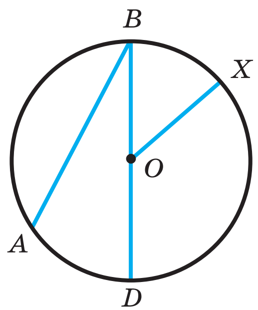


Fig. 310

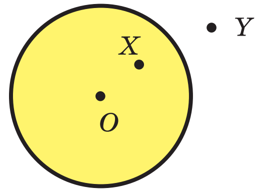


Fig. 311

Definiție. **Circumferință se numește locul geometric al punctelor, distanțele de la care până la un punct dat sunt egale cu numărul pozitiv dat.**

Punctul dat se numește **centrul** circumferinței. În figura 310 punctul O – centrul circumferinței.

Orice segment, care unește un punct al circumferință cu centrul ei, se numește **raza** circumferinței. Lungimea acestui segment, de asemenea, e primit să o numit rază. În figura 310 segmentul OX – rază. Din definiție reiese că toate razele circumferinței sunt egale.

Segmentul care unește două puncte ale circumferinței se numește **coarda** circumferinței. În figura 310 segmentele AB și BD sunt coarde. Coarda, care trece prin centrul circumferinței se numește **diametru**. În figura 310 segmentul BD – diametrul circumferinței. Evident, că $BD = 2OX$, adică diametrul circumferinței este de două ori mai mare decât raza ei.

Din cursul de matematică din clasa a 6-a, știți că figura mărginită de circumferință se numește cerc (fig. 311). Acum, definiția cercului poate fi formulată cu ajutorul noțiunii LGP.

Definiție. **Cercul se numește locul geometric al punctelor, distanțele de la care până la un punct dat nu sunt mai mari decât un număr pozitiv dat.**

Punctul dat se numește **centrul cercului**. Raza circumferinței ce mărginește cercul se numește **raza cercului**.

Dacă X este un punct arbitrar al cercului cu centrul O și raza R, atunci $OX \leqslant R$ (fig. 311). Dacă $OX < R$, atunci se spune că punctul X se află în interiorul circumferinței, care mărginește cercul. Punctul Y nu aparține cercului (fig. 311). Avem: $OY > R$. În acest caz, se spune că punctul Y se află în afara circumferinței, care mărginește cercul.

Din definiția cercului rezultă că circumferința care îl mărginește îi aparține lui.

Coarda și **diametrul** cercului sunt coarda și diametrul circumferinței, care mărginește cercul.

Problemă. Pe prelungirea coardei CD a circumferinței cu centrul O după punctul D s-a notat punctul E astfel, încât segmentul DE este egal cu raza circumferinței. Dreapta OE intersectează circumferința dată în punctele A și B (fig. 312). Demonstrați că $\angle AOC = 3\angle CEO$.

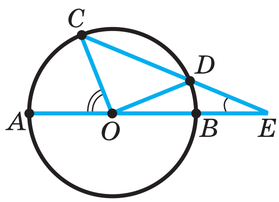


Fig. 312

Rezolvare. Fie, că $\angle CEO = \alpha$.

Deoarece triunghiul ODE este isoscel, atunci $\angle DOE = \angle CEO = \alpha$.

Unghiul ODC – unghi exterior al triunghiului ODE. Atunci, $\angle ODC = \angle DOE + \angle CEO = 2\alpha$.

Deoarece triunghiul COD este isoscel, atunci avem $\angle OCD = \angle ODC = 2\alpha$.

Unghiul AOC – unghi exterior al triunghiului COE. Atunci $\angle AOC = \angle OCD + \angle CEO = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$, adică

$\angle AOC = 3\angle CEO$. ◀

1. Ce mulțime de puncte numim loc geometric al punctelor? **2.** Care două teoreme trebuie de demonstrat pentru ca o mulțime oarecare de puncte să o putem numi LGP, care posedă o anumită proprietate? **3.** Care figură este locul geometric al punctelor egal depărtate de la extremitățile segmentului? **4.** Care figură este locul geometric al punctelor, ce aparțin unghiului și sunt egal depărtate de la laturile lui? **5.** Ce se numește circumferință? **6.** Ce se numește rază a circumferinței? **7.** Ce se numește coardă a circumferinței? **8.** Ce se numește diametrul circumferinței? **9.** Cum sunt legate între ele diametrul și raza circumferinței? **10.** Ce se numește cerc? **11.** Aparține oare circumferinței centrul ei? **12.** Aparține oare cercului centrul lui?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

540.° Desenați o circumferință cu centrul O și raza de 3,5 cm. Notați pe acest desen oarecare:

1) punctele A și B astfel, încât $OA < 3{,}5$ cm, $OB < 3{,}5$ cm;
2) punctele C și D astfel, încât $OC = 3{,}5$ cm, $OD = 3{,}5$ cm;
3) punctele E și F astfel, încât $OE > 3{,}5$ cm, $OF > 3{,}5$ cm.

541.° Desenați segmentul AB cu lungimea de 3 cm. Găsiți punctul care este depărtat de la fiecare capăt a segmentului AB cu 2 cm. Câte astfel de puncte există?

542.° Desenați segmentul CD cu lungimea de 4 cm. Găsiți punctul care este depărtat de la punctul C cu 2,5 cm, și de la punctul D cu 3,5 cm. Câte astfel de puncte există?

543.• Desenați o circumferință, diametrul căreia este egal cu 7 cm. Notați pe circumferință punctul A. Găsiți pe circumferință punctele care sunt depărtate de la punctul A cu 4 cm.

EXERCIȚII

544.° În figura 313 este reprezentată o circumferință cu centrul B. Indicați raza, coarda și diametrul circumferinței. Câte raze și câte coarde sunt reprezentate pe desen?

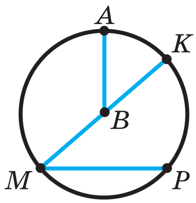


Fig. 313

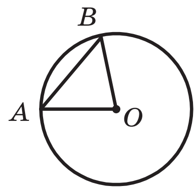


Fig. 314

545.° În interiorul circumferinței a fost notat un punct arbitrar, diferit de centrul ei. Câte se pot duce prin acest punct: 1) coarde; 2) diametre?

546.° În figura 314 punctul O este centrul circumferinței. Aflați:

1) unghiul O, dacă $\angle A = 42°$;
2) unghiul B, dacă $\angle O = 76°$.

547.° Coardele AB și CD ale circumferinței cu centrul O sunt egale. Demonstrați că $\angle AOB = \angle COD$.

548.° În figura 315 punctul O este centrul circumferinței, $\angle COD = \angle MOK$. Demonstrați că coardele CD și MK sunt egale.

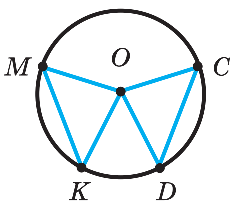


Fig. 315

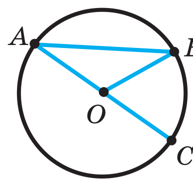


Fig. 316

549.° Segmentele AB și CD sunt diametrele circumferinței. Demonstrați că $\angle BAC = \angle CDB$.

550.° Segmentele MK și EF sunt diametrele circumferinței cu centrul O, $MK = 12$ cm, $ME = 10$ cm. Aflați perimetrul triunghiului FOK.

551.° Segmentele AC și AB sunt corespunzător diametrul și coarda circumferinței cu centrul O, $\angle BAC = 26°$ (fig. 316). Aflați unghiul BOC.

552.° Segmentele MP și MK sunt corespunzător coarda și diametrul circumferinței cu centrul O, $\angle POK = 84°$ (fig. 317). Aflați unghiul MPO.

553.° Segmentele AB și AC sunt corespunzător diametrul și coarda circumferinței, coarda AC este egală cu raza acestei circumferințe. Aflați unghiul BAC.

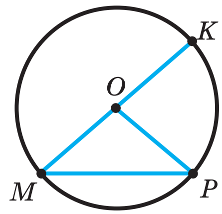


Fig. 317

554.° Segmentele AB și BC sunt corespunzător diametrul și coarda circumferinței cu centrul O, $\angle ABC = 60°$, $AB = 12$ cm. Aflați coarda BC.

555.° Segmentul CD este diametrul circumferinței cu centrul O. Pe circumferință este notat punctul E astfel, încât $\angle COE = 90°$. Demonstrați că $CE = DE$.

556.° Segmentul MK este diametrul circumferinței cu centrul O. Pe circumferință s-a notat punctul C astfel, încât $MC = CK$. Demonstrați că $\angle MCO = \angle KCO$.

557.° Cu ce este egal diametrul circumferinței, dacă se știe că el este cu 4 cm mai mare decât raza circumferinței date?

558.• Prin capetele diametrului AB a circumferinței cu centrul O sunt duse coardele AC și BD astfel, încât $AC \parallel BD$. Demonstrați că $AC = BD$.

559.• Segmentele AB și CD sunt diametrele circumferinței. Demonstrați că $AC \parallel BD$.

560.• Coarda intersectează diametrul circumferinței sub un unghi de 30° și îl împarte în segmente cu lungimile de 4 cm și 10 cm. Aflați distanța de la centrul circumferinței până la această coardă.

561.• Segmentele AB și CD sunt diametrele circumferinței. Unghiul dintre dreptele AB și CD este egal cu 30°. Aflați distanța de la punctul C până la dreapta AB, dacă diametrul circumferinței este egal cu 10 cm.

562.•• Găsiți locul geometric al centrelor circumferințelor cu raza dată, care trec prin punctul dat.

563.•• Găsiți locul geometric al centrelor circumferințelor care trec prin două puncte date.

564.•• Găsiți locul geometric al punctelor egal depărtate de la două drepte date care se intersectează.

565.•• Găsiți locul geometric al vârfurilor triunghiurilor isoscele care au baza comună.

566.•• Găsiți locul geometric al punctelor egal depărtate de la două drepte paralele.

567.•• Găsiți locul geometric al punctelor depărtate de la dreapta dată, la distanța dată.

568.•• Segmentul AB este diametrul circumferinței, M este un punct arbitrar al circumferinței, diferit de punctele A și B. Demonstrați că $\angle AMB = 90°$.

569.* Sunt date punctele A și B. Găsiți locul geometric al punctelor X, pentru care $AX > BX$.

570.* Sunt date punctele A și B. Găsiți locul geometric al punctelor X, pentru care $AX > AB$.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

571. În triunghiul isoscel ABC cu baza AC s-au dus bisectoarele AD și CE. Demonstrați că $AE = ED$.

572. Din punctul O prin punctele A, B și C s-au dus semidreptele OA, OB și OC. Se știe, că $OA = OB = OC$, $\angle AOB = 80°$, $\angle BOC = 110°$, $\angle AOC = 170°$. Aflați unghiurile triunghiului ABC.

573. Pe latura AB a triunghiului ABC s-a notat punctul M, astfel, că $BM = CM$, semidreapta MK — bisectoarea unghiului AMC. Demonstrați că $MK \parallel BC$

574. Într-un triunghi ascuțitunghic unul din unghiurile exterioare este egal cu 160°. Aflați unghiul dintre dreptele, pe care se află înălțimile, duse din altele două vârfuri ale triunghiului.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

575. În figura 318 dreptunghiul *ABCD* este compus din pătrate. Aflați latura pătratului mai mare, dacă latura pătratului mai mic este egală cu 1.

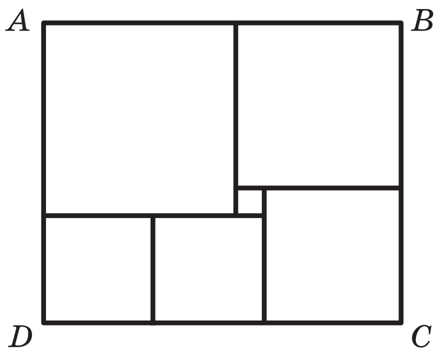


Fig. 318

21. Proprietățile circumferinței. Tangenta la circumferință

Teorema 21.1. ***Diametrul circumferinței, care este perpendicular la coardă, împarte această coardă în jumătăți.***

Demonstrație. ⊙ Dacă coarda este diametru, atunci concluzia teoremei este evidentă.

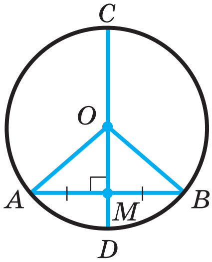


Fig. 319

În figura 319 este reprezentată circumferința cu centrul O, M este punctul de intersecție al diametrului CD și al coardei AB, diferită de diametrul circumferinței, $CD \perp AB$. Demonstrăm, că $AM = MB$.

Ducem razele OA și OB. În triunghiul isoscel AOB ($OA = OB$), segmentul OM este înălțime, deci, și mediană, adică $AM = MB$. ●

Teorema 21.2. ***Diametrul circumferinței, care împarte o coardă diferită de diametru în jumătăți, este perpendicular la această coardă.***

Demonstrați această teoremă de sine stătător. Gândiți-vă, va fi oare această afirmație corectă, dacă coarda este diametrul circumferinței.

În figura 320 sunt reprezentate toate cazurile posibile de amplasare a dreptei și a circumferinței: ele nu au puncte comune (fig. 320, *a*), au două puncte comune (fig. 320, *b*), au un singur punct comun (fig. 320, *c*).

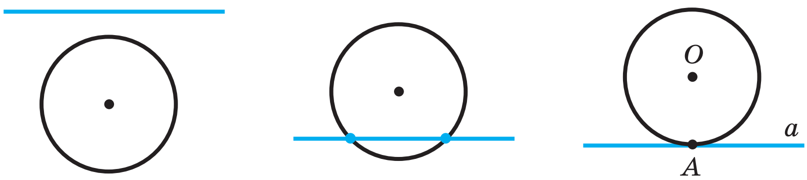


Fig. 320

Definiție. Dreapta, care are cu circumferința numai un punct comun se numește tangentă la circumferință.

În figura 320, *c* dreapta *a* este tangentă la circumferința cu centrul în punctul *O*, iar *A* este **punctul de tangență**.

Tangenta la circumferință are numai un punct comun cu cercul, mărginit de această circumferință. De asemenea se spune că această dreaptă este **tangentă la cerc**, care este mărginit de circumferința dată. De exemplu, în figura 321, dreapta *a* este tangentă la cercul cu centrul în punctul *O*.

Dacă segmentul (semidreapta) aparține tangentei la circumferință și are cu această circumferință un punct, se spune, că segmentul (semidreapta) *se atinge* de circumferință.

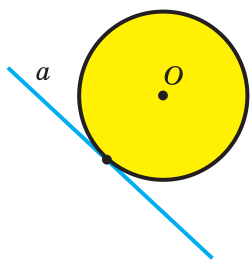


Fig. 321

De exemplu, în figura 322 este reprezentat segmentul AB care se atinge de circumferință în punctul C.

Teorema 21.3 (proprietatea tangentei). ***Tangenta la circumferință este perpendiculară la raza dusă în punctul de tangență.***

Demonstrație. ⊙ În figura 323 este reprezentată circumferința cu centrul O, A – punctul de tangență al dreptei a cu circumferința. Demonstrăm că $OA \perp a$.

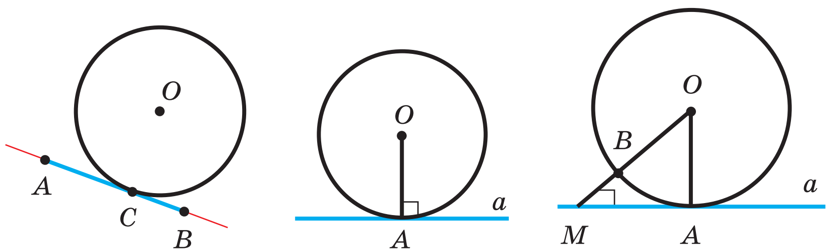


Fig. 322 **Fig. 323** **Fig. 324**

Presupunem că aceasta nu este așa, adică segmentul OA este oblică la dreapta a. Atunci din punctul O coborâm perpendiculara OM pe dreapta a (fig. 324). Deoarece punctul A este singurul punct comun al dreptei a și a cercului cu centrul O, mărginit de această circumferință, rezultă că punctul M nu aparține acestui cerc. De aici $OM = MB + OB$, unde B este punctul de intersecție al circumferinței și a perpendicularei OM. Segmentele OA și OB sunt egale ca raze ale circumferinței. În acest mod, $OM > OA$. Am obținut contradicția: perpendiculara OM este mai mare decât oblica OA. Deci, $OA \perp a$. ●

Teorema 21.4 (criteriul tangentei la circumferință). ***Dacă dreapta, care trece printr-un punct al circumferinței este perpendiculară la raza, dusă în acest punct, atunci această dreaptă este tangentă la circumferința dată.***

Demonstrație. ⊙ În figura 323 este reprezentată circumferința cu centrul în punctul O, segmentul OA este raza ei, punctul A aparține dreptei a, $OA \perp a$. Demonstrăm că dreapta a este tangentă la circumferință.

Fie că dreapta a nu este tangentă și mai are încă un punct comun B cu circumferința (fig. 325). Atunci segmentele OA și OB sunt egale ca raze, deci triunghiul AOB este isoscel. De aici $\angle OBA = \angle OAB = 90°$. Obținem contradicția: în triunghiul AOB există două unghiuri drepte. Deci, dreapta a este tangentă la circumferință. ●

Consecință. ***Dacă distanța de la centrul circumferinței până la o dreaptă oarecare este egală cu raza circumferinței, atunci această dreaptă este tangentă la circumferința dată.***

Demonstrați această consecință de sine stătător.

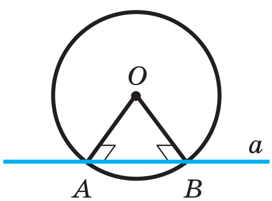


Fig. 325

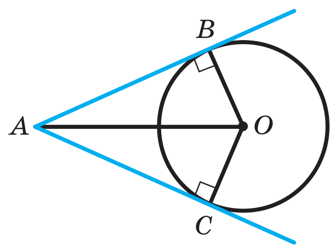


Fig. 326

Problemă. Demonstrați că dacă printr-un punct dat sunt duse două tangente la o circumferință, atunci segmentele tangentelor, care unesc punctul dat cu punctele de tangență, sunt egale.

Rezolvare. În figura 326 este reprezentată circumferința cu centrul O. Dreptele AB și AC sunt tangente, B și C – punctele de tangență. Demonstrăm că $AB = AC$.
Ducem razele OB și OC la punctele de tangență. Conform proprietății tangentei $OB \perp AB$ și $OC \perp AC$. În triunghiurile dreptunghice AOB și AOC, catetele OB și OC sunt egale ca raze ale aceleiași circumferințe, iar segmentul AO este ipotenuza comună. Deci, triunghiurile AOB și AOC sunt egale după ipotenuză și catetă. De aici $AB = AC$. ◀

1. Cum împarte diametrul o coardă, dacă este perpendicular la ea? 2. Cu ce este egal unghiul dintre o coardă diferită de diametru și diametrul care împarte această coardă în jumătăți? 3. Descrieți toate cazurile posibile de amplasare reciprocă a dreptei și circumferinței. 4. Care dreaptă se numește tangentă la circumferință? 5. Ce proprietate are raza dusă la punctul de tangență a dreptei și circumferinței? 6. Formulați criteriul tangentei la circumferință. 7. Ce proprietate au tangentele duse la circumferință printr-un punct?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

576.° Desenați o circumferință cu centrul O, duceți coarda AB. Folosind echerul, împărțiți această coardă în două părți egale.

577.° Desenați o circumferință cu centrul O, duceți coarda CD. Folosind rigla cu diviziuni, duceți diametrul perpendicular pe coarda CD.

578.° Desenați o circumferință cu o rază arbitrară, notați pe ea punctele A și B. Folosind rigla și echerul, duceți dreptele care se ating de circumferință în punctele A și B.

579.° Duceți dreapta a și notați pe ea punctul M. Folosind echerul, rigla și compasul, construiți o circumferință cu raza de 3 cm care să atingă dreapta a în punctul M. Câte astfel de circumferințe se pot construi?

EXERCIȚII

580.° În figura 327 punctul O este centrul circumferinței, diametrul CD este perpendicular pe coarda AB. Demonstrați că $\angle AOD = \angle BOD$.

581.° Se poate oare afirma că dreapta, perpendiculară pe raza circumferinței, se atinge de această circumferință?

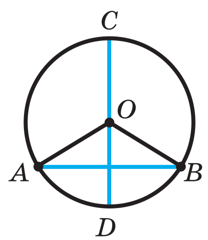


Fig. 327

582.° Dreapta AB se atinge de circumferința cu centrul O în punctul C (fig. 328). Aflați:

1) unghiul OCD, dacă $\angle BCD = 28°$;
2) unghiul ACD, dacă $\angle OCD = 55°$.

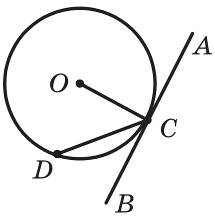


Fig. 328

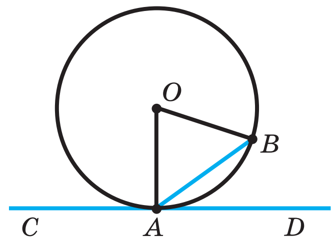


Fig. 329

583.° Dreapta CD se atinge de circumferința cu centrul O în punctul A, segmentul AB este coarda circumferinței, $\angle BAD = 35°$ (fig. 329). Aflați unghiul AOB.

584.° Dreapta CD se atinge de circumferința cu centrul O în punctul A, segmentul AB este coarda circumferinței, $\angle AOB = 80°$ (fig. 329). Aflați unghiul BAC.

585.° Se dă circumferința, diametrul căreia este egal cu 6 cm. Dreapta a este depărtată de la centrul ei cu: 1) 2 cm; 2) 3 cm; 3) 6 cm. În care caz dreapta a este tangentă la circumferință?

586.° În triunghiul ABC se știe, că $\angle C = 90°$. Demonstrați că:

1) dreapta BC este tangentă la circumferința cu centrul A, care trece prin punctul C;
2) dreapta AB nu este tangentă la circumferința cu centrul C, care trece prin punctul A.

587.• Demonstrați că coardele egale ale circumferinței sunt egal depărtate de la centrul ei.

588.• Demonstrați că dacă coardele circumferinței sunt egal depărtate de la centrul ei, atunci ele sunt egale.

589.• Demonstrați că diametrul circumferinței este mai mare decât orice coardă diferită de diametru.

590.• Raza circumferinței este egală cu 7 cm. Poate oare lungimea unei coarde a acestei circumferințe să fie egală cu: 1) 14 cm; 2) 15 cm?

591.• În circumferința cu centrul *O*, prin mijlocul razei este dusă coarda *AB*, perpendiculară la ea. Demonstrați că $\angle AOB = 120°$.

592.• Aflați unghiul dintre razele *OA* și *OB* ale circumferinței, dacă distanța de la centrul *O* al circumferinței până la coarda *AB* este de două ori mai mică decât: 1) lungimea coardei *AB*; 2) raza circumferinței.

593.• Într-o circumferință este dus diametrul *AB* și coardele *AC* și *CD* astfel, încât $AC = 12$ cm, $\angle BAC = 30°$, $AB \perp CD$. Aflați lungimea coardei *CD*.

594.• Dreptele *AB* și *AC* se ating de circumferința cu centrul *O* în punctele *B* și *C*. Demonstrați că semidreapta *AO* este bisectoarea unghiului *BAC*.

595.• Prin punctul *M* sunt duse tangentele *MA* și *MB* la circumferința cu centrul *O*, *A* și *B* – punctele de tangență, $\angle OAB = 20°$. Aflați unghiul *AMB*.

596.• Prin capetele coardei *AB*, care este egală cu raza circumferinței, sunt duse două tangente care se intersectează în punctul *C*. Aflați unghiul *ACB*.

597.• Prin punctul *C* al circumferinței cu centrul *O* este dusă tangenta la această circumferință, segmentul *AB* este diametrul circumferinței. Din punctul *A* pe tangentă este coborâtă perpendiculara *AD*. Demonstrați că semidreapta *AC* este bisectoarea unghiului *BAD*.

598.• Dreapta *AC* se atinge de circumferința cu centrul *O* în punctul *A* (fig. 330). Demonstrați că unghiul *BAC* este de două ori mai mic decât unghiul *AOB*.

599.• Segmentele *AB* și *BC* sunt corespunzător coarda și diametrul circumferinței, $\angle ABC = 30°$. Prin punctul *A* este dusă tangenta la circumferință, care intersectează dreapta *BC* în punctul *D*. Demonstrați că triunghiul *ABD* este isoscel.

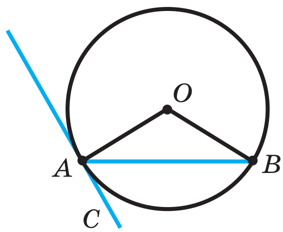


Fig. 330

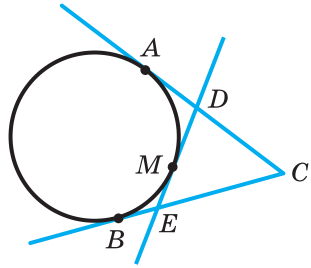


Fig. 331

600.• Se știe, că diametrul AB împarte coarda CD în jumătăți, dar nu este perpendicular pe ea. Demonstrați că segmentul CD tot este diametru.

601.•• Găsiți locul geometric al centrelor circumferințelor care se ating de dreapta dată în punctul dat.

602.•• Găsiți locul geometric al centrelor circumferințelor care se ating de ambele laturi ale unghiului dat.

603.•• Găsiți locul geometric al centrelor circumferințelor care se ating de dreapta dată.

604.•• Dreptele care se ating de circumferința cu centrul O în punctele A și B se intersectează în punctul K, $\angle AKB = 120°$. Demonstrați că $AK + BK = OK$.

605.•• Circumferința se atinge de latura AB a triunghiului ABC în punctul M și se atinge de prelungirile celorlalte două laturi. Demonstrați că suma lungimilor segmentelor BC și BM este egală cu jumătatea perimetrului triunghiului ABC.

606.•• Prin punctul C sunt duse tangentele AC și BC la circumferință, A și B sunt punctele de tangență (fig. 331). Pe circumferință s-a luat punctul arbitrar M, ce se află în același semiplan cu punctul C față de dreapta AB, și prin el este dusă o tangentă la circumferință, care intersectează dreptele AC și BC în punctele D și E, corespunzător. Demonstrați că perimetrul triunghiului DEC nu depinde de alegerea punctului M.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

607. Demonstrați că mijlocul M al segmentului, capetele căruia aparțin la două drepte paralele, este mijlocul oricărui segment, care trece prin punctul M și capetele căruia aparțin acestor drepte.

608. Segmentele AB și CD se află pe aceeași dreaptă și au un mijloc comun. Punctul M este ales astfel, că triunghiul AMB este isoscel cu baza AB. Demonstrați că triunghiul CMD este de asemenea isoscel cu baza CD.

609. Pe latura MK a triunghiului MPK s-au notat punctele E și F astfel, încât punctul E se află între punctele M și F, $ME = EP$, $PF = FK$. Aflați unghiul M, dacă $\angle EPF = 92°$, $\angle K = 26°$.

610. În triunghiul ascuțitunghic ABC s-a dus bisectoarea BM. Din punctul M pe latura BC s-a coborât perpendiculara MK. S-a dovedit, că $\angle ABM = \angle KMC$. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

611. Stabiliți legitatea formelor figurilor reprezentate în figura 332. Ce figură trebuie de pus următoarea?

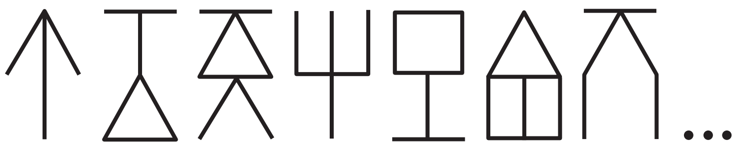


Fig. 332

22. Circumferințe circumscrise și înscrise triunghiului

Definiție. Circumferința se numește circumscrisă unui triunghi, dacă ea trece prin toate vârfurile lui.

În figura 333 este reprezentată circumferința circumscrisă unui triunghi. În acest caz se mai spune că **triunghiul este înscris în circumferință**.

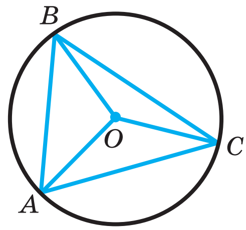


Fig. 333

În figura 333 punctul O este centrul circumferinței circumscrise triunghiului ABC. Segmentele OA, OB și OC sunt razele acestei circumferințe, de aceea $OA = OB = OC$. Deci, *centrul circumferinței circumscrise triunghiului este egal depărtat de la toate vârfurile lui.*

Teorema 22.1. ***Oricărui triunghi se poate circumscrie o circumferință.***

Demonstrație. ⊙ Pentru a demonstra acest lucru, este suficient să arătăm că pentru orice triunghi ABC există punctul O egal depărtat de la toate vârfurile lui. Atunci punctul O va fi centrul circumferinței circumscrise, iar segmentele OA, OB și OC – razele ei.

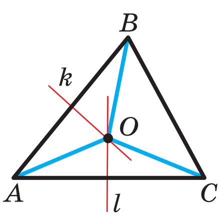


Fig. 334

În figura 334 este reprezentat triunghi arbitrar ABC. Ducem mediatoarele k și l ale laturilor AB și AC, corespunzător. Fie O – punctul de intersecție al acestor drepte. Deoarece punctul O aparține mediatoarei k, atunci $OA = OB$. Deoarece punctul O aparține mediatoarei l, atunci $OA = OC$. Deci, $OA = OB = OC$, adică punctul O este egal depărtat de la toate vârfurile triunghiului. ●

Menționăm că triunghiului i se poate circumscrie numai o circumferință. Aceasta reiese din aceea, că mediatoarele k și l (fig. 334) au doar un singur punct de intersecție.

Deci, există doar un punct egal depărtat de la toate vârfurile triunghiului.

Consecința 1. ***Trei mediatoare ale laturilor unui triunghi se intersectează într-un punct.***

Consecința 2. ***Centrul circumferinței circumscrise unui triunghi este punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor triunghiului.***

Definiție. **Circumferința se numește înscrisă într-un triunghi dacă ea se atinge de toate laturile lui.**

În figura 335 este reprezentată circumferința înscrisă în triunghi. În acest caz se mai spune că **triunghiul este circumscris circumferinței**.

În figura 335 punctul O este centrul circumferinței înscrise în triunghiul ABC, segmentele OM, ON, OP sunt razele duse la punctele de tangență, $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp AC$. Deoarece $OM = ON = OP$, atunci *centrul circumferinței înscrise în triunghi este egal depărtat de la toate laturile lui.*

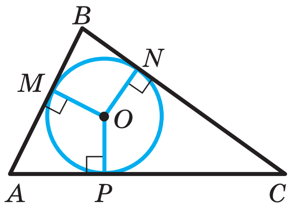


Fig. 335

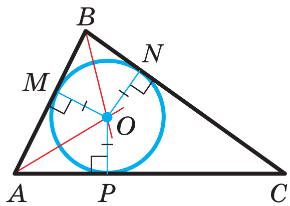


Fig. 336

Teorema 22.2. ***În orice triunghi se poate înscrie o circumferință.***

Demonstrație. În figura 336 este reprezentat un triunghi arbitrar ABC. Ducem bisectoarele unghiurilor A și B, notăm punctul lor de intersecție cu litera O. Din punctul O coborâm perpendicularele OM, ON și OP corespunzător pe laturile AB, BC și CA ale triunghiului ABC. Deoarece punctul O aparține bisectoarei unghiului A, atunci conform teoremei despre bisectoarea unghiului (teorema 20.2) obținem, că $OM = OP$. Analogic, deoarece punctul O aparține bisectoarei unghiului B, atunci $OM = ON$. Fie $OM = r$. Atunci $OM = ON = OP = r$. Astfel punctul O este depărtat de la fiecare latură a triunghiului ABC la una și aceeași distanță r. Atunci conform consecinței din criteriul tangentei la circumferință (consecința din teorema 21.4), punctul O este centrul circumferinței cu rază r care se atinge de laturile AB, BC și CA. ●

Menționăm că în triunghi se poate înscrie numai o circumferință. Aceasta reiese din faptul că bisectoarele unghiurilor A și B (fig. 336) se intersectează numai într-un punct. Deci, există numai un punct egal depărtat de la laturile triunghiului.

Consecința 1. ***Bisectoarele unghiurilor triunghiului se intersectează într-un singur punct.***

Consecința 2. ***Centrul circumferinței înscrise într-un triunghi este punctul de intersecție al bisectoarelor triunghiului.***

Problemă. Demonstrați că raza circumferinței înscrise într-un triunghi dreptunghic se determină conform formulei $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, unde r este raza circumferinței înscrise, a și b — catete, c — ipotenuza.

Rezolvare. În triunghiul ABC avem: $\angle ACB = 90°$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, punctul O — centrul circumferinței înscrise, M, E și K — punctele de tangență ale circumferinței înscrise cu laturile BC, AC și AB, corespunzător (fig. 337).

Segmentul OM este raza circumferinței, dusă în punctul de tangență. Atunci $OM \perp BC$.

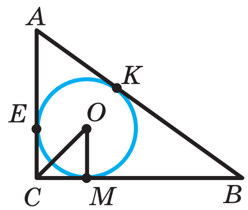


Fig. 337

Deoarece punctul O este centrul circumferinței înscrise, atunci semidreapta CO este bisectoarea unghiului ACB, deci $\angle OCM = 45°$. Atunci triunghiul CMO este isoscel dreptunghic.

De aici, $CM = OM = r$.

Folosind proprietatea segmentelor tangentelor duse la circumferință printr-un punct, avem că: $CE = CM$. Deoarece $CM = r$, atunci $CE = r$.

Atunci $AK = AE = b - r$, $BK = BM = a - r$.

Deoarece $AK + BK = AB$, atunci $b - r + a - r = c$.

De aici $2r = a + b - c$; $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, ◀

1. Care circumferință se numește circumscrisă unui triunghi? **2.** Care triunghi se numește înscris în circumferință? **3.** Cărui triunghi se poate circumscrie o circumferință? **4.** Care punct este centrul circumferinței circumscrise triunghiului? **5.** Care circumferință se numește înscrisă în triunghi? **6.** Care triunghi se numește circumscris unei circumferințe? **7.** În care triunghi se poate înscrie o circumferință? **8.** Care punct este centrul circumferinței înscrise în triunghi?

ÎNSĂRCINĂRI PRACTICE

612.° Desenați un triunghi ascuțitunghic scalen.
1) Folosind rigla cu diviziuni și echerul, găsiți centrul circumferinței circumscrise triunghiului dat.
2) Circumscrieți triunghiului o circumferință.
3) Executați însărcinările 1 și 2 pentru triunghiuri scalene, dreptunghice și obtuzunghice.

613.° Desenați:
1) un triunghi ascuțitunghic isoscel;
2) un triunghi obtuzunghic isoscel.
3) Executați însărcinările 1 și 2 din exercițiul 612.

614.° Copiați în caiet desenul 338. Duceți prin punctele A, B, C o circumferință, folosind rigla cu diviziuni, echerul și compasul.

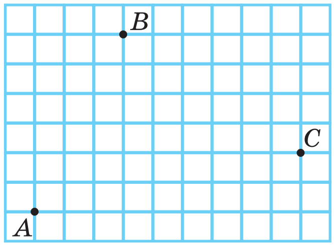


Fig. 338

615.° Desenați un triunghi scalen.
1) Folosind rigla și raportorul, găsiți centrul circumferinței înscrise în triunghiul dat.
2) Folosind echerul, găsiți punctele de tangență ale circumferinței înscrise cu laturile triunghiului.
3) Înscrieți o circumferință în triunghiul dat.

616.° Desenați un triunghi isoscel. Executați însărcinările 1, 2 și 3 din exercițiul 615.

EXERCIȚII

617.° Pe care din figurile 339, *a*, *b*, *c*, este reprezentată circumferința circumscrisă triughiului?

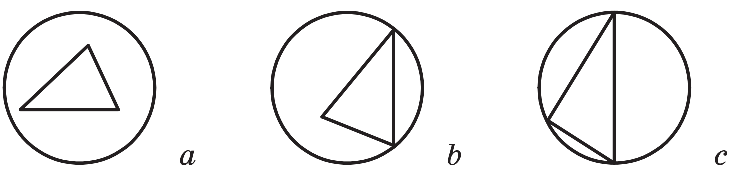


Fig. 339

618.° Pe care din figurile 340, *a*, *b*, *c*, este reprezentată circumferința înscrisă în triunghi?

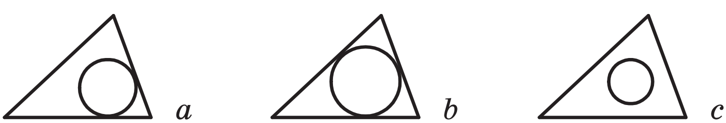


Fig. 340

619.° Punctul O este centrul circumferinței înscrise în triunghiul ABC (fig. 341). Aflați unghiurile acestui triunghi, dacă $\angle ABO = 38°$, $\angle BCO = 22°$.

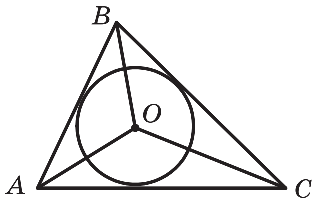


Fig. 341

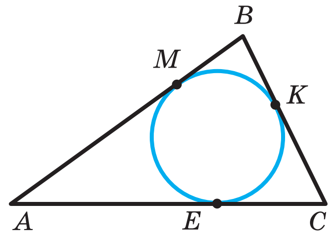


Fig. 342

620.° Punctul O este centrul circumferinței înscrise în triunghiul ABC (fig. 341). Aflați unghiul ABO, dacă $\angle BAC = 64°$, $\angle ACB = 46°$.

621.° Demonstrați că centrul circumferinței circumscrise triunghiului isoscel aparține dreptei, care conține mediana dusă baza lui.

622.° Demonstrați că centrul circumferinței înscrise în triunghiul isoscel aparține înălțimii duse la baza lui.

623.° Circumferința înscrisă în triunghiul ABC se atinge de laturile AB și AC în punctele M și N, corespunzător. Aflați unghiul A, dacă $\angle AMN = 35°$.

624.° Circumferința înscrisă în triunghiul ABC se atinge de laturile AB și BC în punctele D și E, corespunzător. Aflați unghiul ADE, dacă $\angle B = 50°$.

625.° Demonstrați că centrul circumferinței circumscrise triunghiului echilateral este punctul de intersecție al bisectoarelor lui.

626.° Demonstrați că raza circumferinței circumscrise triunghiului echilateral este de două ori mai mare decât raza circumferinței înscrise în acest triunghi.

627.• Circumferința înscrisă în triunghiul ABC (fig. 342) se atinge de laturile lui în punctele M, K și E, $BK = 2$ cm, $KC = 4$ cm, $AM = 8$ cm. Aflați perimetrul triunghiului ABC.

628. Circumferința înscrisă în triunghiul ABC (fig. 342) se atinge de laturile lui în punctele M, K și E, cu $AB = 13$ cm, $BC = 8$ cm, $BK = 3$ cm. Aflați lungimea laturii AC.

629. Prin centrul O al circumferinței circumscrise triunghiului ABC este dusă o dreaptă perpendiculară pe latura AC și intersectează latura AB în punctul M. Demonstrați că $AM = MC$.

630. Prin centrul O al circumferinței înscrise în triunghiul ABC este dusă dreapta AO, care intersectează latura BC în punctul M. Demonstrați că punctul M este egal depărtat de la semidreptele AB și AC.

631. Demonstrați că dacă centrul circumferinței circumscrise triunghiului aparține medianei lui, atunci acest triunghi este isoscel.

632. Demonstrați că dacă centrul circumferinței circumscrise unui triunghi aparține înălțimii lui, atunci acest triunghi este isoscel.

633. Demonstrați că dacă centrul circumferinței înscrise în triunghi aparține înălțimii lui, atunci acest triunghi este isoscel.

634. Demonstrați că dacă centrul circumferinței înscrise în triunghi aparține medianei lui, atunci acest triunghi este isoscel.

635. Demonstrați că dacă centrele circumferințelor înscrisă și circumscrisă triunghiului coincid, atunci acest triunghi este echilateral.

636. În figura 343 în triunghiurile ABD și CBD sunt înscrise circumferințe cu centrele O_1 și O_2 corespunzător. Demonstrați că unghiul O_1DO_2 este drept.

637. În figura 344 în triunghiurile ABD și CBD sunt înscrise circumferințe cu centrele O_1 și O_2 corespunzător, $\angle ABC = 50°$. Aflați unghiul O_1BO_2.

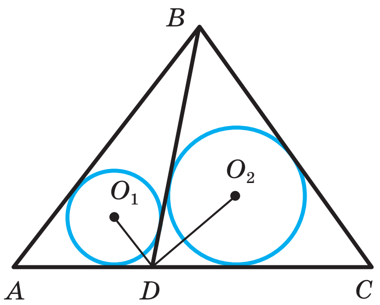


Fig. 343

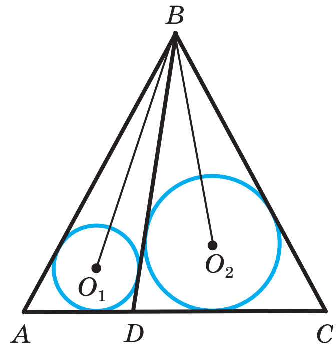


Fig. 344

638.• Punctul de tangență al circumferinței înscrise în triunghiul isoscel împarte latura laterală a lui în raportul $7:5$, socotind de la vârful triunghiului isoscel. Aflați laturile triunghiului dacă perimetrul lui este egal cu 68 cm.

639.• Perimetrul triunghiului ABC, circumscris circumferinței, este egal cu 52 cm. Punctul de tangență al circumferinței cu latura AB împarte această latură în raportul $2:3$, socotind de la vârful A. Punctul de tangență cu latura BC este depărtat de la vârful C cu 6 cm. Aflați laturile triunghiului.

640.• Într-un triunghi cu unghiurile egale cu 30°, 70° și 80° este înscrisă o circumferință. Aflați unghiurile triunghiului, vârfurile căruia sunt punctele de tangență ale circumferinței înscrise cu laturile triunghiului dat.

641.• Circumferința înscrisă în triunghiul isoscel ABC se atinge de laturile laterale AB și BC în punctele M și N, corespunzător. Demonstrați că $MN \parallel AC$.

642.• Demonstrați că dacă centrul circumferinței circumscrise triunghiului aparține laturii lui, atunci acest triunghi este dreptunghic.

643.•• În triunghiul ABC este înscrisă o circumferință care se atinge de latura AB în punctul M, $BC = a$. Demonstrați că $AM = p - a$, unde p — semiperimetrul triunghiului ABC.

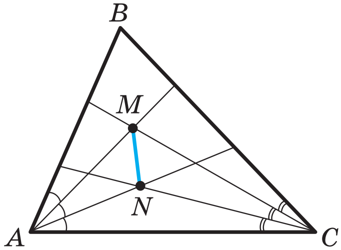


Fig. 345

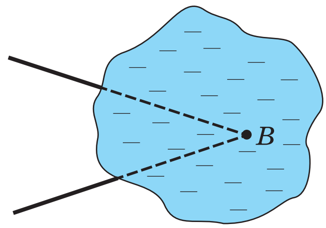


Fig. 346

644.•• La circumferința înscrisă într-un triunghi echilateral cu latura *a*, este dusă o tangentă, care intersectează două laturi ale triunghiului. Aflați perimetrul triunghiului, care este tăiat de această tangentă din cel dat.

645.* În triunghiul isoscel *ABC* (*AB* = *BC*) cu baza egală cu 10 cm este înscrisă o circumferință. La această circumferință sunt duse trei tangente care taie din acest triunghi triunghiurile *ADK*, *BEF* și *CMN*. Suma perimetrelor triunghiurilor formate este egală cu 42 cm. Cu ce este egală latura laterală a triunghiului dat?

646.* În triunghiul *ABC*, segmentul *BD* – mediană, *AB* = 7 cm, *BC* = 8 cm. În triunghiurile *ABD* și *BDC* sunt înscrise circumferințe. Aflați distanța dintre punctele de tangență ale acestor circumferințe până la segmentul *BD*.

647.* Fiecare din unghiurile *BAC* și *ACB* ale triunghiului *ABC* este împărțit în trei părți egale (fig. 345). Demonstrați că $\angle AMN = \angle CMN$.

648.* Fie că vârful unghiului *B* este inaccesibil (fig. 346). Cu ajutorul raportorului și a riglei fără diviziuni construiți dreapta, care conține bisectoarea unghiului *B*.

649.* Punctele *F* și *O* – centrele circumferințelor înscrisă și circumscrisă triunghiului isoscel *ABC* corespunzător (fig. 347). Ele sunt situate la aceeași distanță de la baza *AC*. Aflați unghiurile triunghiului *ABC*.

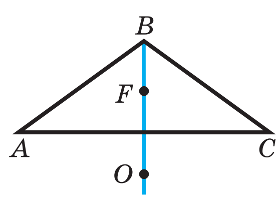


Fig. 347

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

650. Bisectoarea unghiului ABC formează cu o latură a lui un unghi, care este egal cu unghiul adicent cu unghiul ABC. Aflați unghiul ABC.

651. Într-un triunghi isoscel dintr-un vârf de la bază s-a dus înălțimea triunghiului, iar din vârful altui unghi de la bază – bisectoarea triunghiului. Unul din unghiurile create la intersecția bisectoarei și înălțimii duse, este egal cu 64°. Aflați unghiurile triunghiului dat.

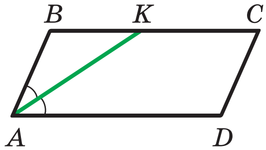


Fig. 348

652. În figura 348 $BC \parallel AD$, $AB = 3$ cm, $BC = 10$ cm. Bisectoarea unghiului BAD intersectează segmentul BC în punctul K. Aflați segmentele BK și KC.

653. În triunghiul ABC se știe, că $AB = BC$, AM și CK – medianele acestui triunghi. Demonstrați că $MK \parallel AC$.

ÎNVĂȚĂM SĂ APLICĂM GEOMETRIA

654. Distanța dintre două turnuri de comunicații mobile este de 5 km. Conexiunea este stabilă dacă abonatul se află la o distanță nu mai mare decât 3 km de la turn. Reprezentați zona în care poate merge o turistă pentru a se afla în suprafața de acoperire stabilă: 1) a turnului cel mai apropiat; 2) a ambelor turnuri.

655. Trei sate sunt reprezentate pe hartă cu puncte care nu se află pe o dreaptă. Unde ar trebui plasat turnul de comunicații mobile pentru ca el să fie egal depărtat de aceste sate?

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

656. Din pătratul $ABCD$ s-a decupat figura hașurată (fig. 349). Împărțiți partea pătratului, care a rămas, în patru figuri egale.

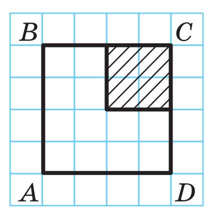


Fig. 349

23. Probleme de construcții

Cu ajutorul riglei cu diviziuni, compasului, echerului, raportorului, floralelor (fig. 350) voi în repetate rânduri ați fost nevoiți să efectuați diferite construcții geometrice.

Dar se poate oare să realizăm aceste construcții cu mai puține instrumente? Se dovedește că, în multe cazuri, este suficient să folosim numai *compasul* și *rigla* fără diviziuni. De exemplu, pentru a duce bisectoarea unghiului nu este necesar să avem raportor, iar împărțirea unui segment în două părți egale se poate face chiar atunci când rigla nu are diviziuni.

Fig. 350

Dar este oare rațional în zilele noastre, când avem la dispoziție instrumente extrem de precise și programe de calculator care permit realizarea celor mai complexe măsurări și construcții, să ne mulțumim cu instrumente atât de simple ca rigla și compasul? În practică, desigur că nu. De aceea, profesioniștii din domeniul construcțiilor, arhitecturii sau designului nu se limitează în alegerea instrumentelor.

În problemele de construcție a figurilor din cursul școlar de geometrie urmărind tradiția antică vom respecta următoarele reguli:

1) toate construcțiile se execută, folosind doar compasul și rigla fără diviziuni;

2) cu ajutorul riglei se poate duce o dreaptă prin punctul dat și, de asemenea, prin două puncte date A și B de dus dreapta AB;

3) cu ajutorul compasului se poate construi o circumferință cu centrul dat și raza, care este egală cu segmentul dat.

Deci, atunci când o problemă cere construirea unei figuri, construcția se efectuează folosind regulile descrise mai sus.

A rezolva o problemă de construcție înseamnă a alcătui planul (*algoritmul*) construirii figurii; a realiza planul prin efectuarea construcției; a demonstra că figura obținută este cea căutată; a determina câte rezolvări are problema.

Să cercetăm principalele probleme de construcție.

Problema 1. Construiți un unghi ce este egal cu cel dat, o latură a căruia este semidreapta dată.

Rezolvare. În figura 351 este reprezentat unghiul A și semidreapta OK. Trebuie să construim un unghi egal cu unghiul A, ca o latură a lui să fie semidreapta OK.

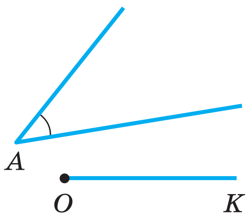


Fig. 351

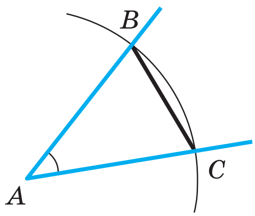


Fig. 352

Construim o circumferință cu raza arbitrară r cu centrul în punctul A. Punctele de intersecție a acestei circumferințe cu laturile unghiului A le notăm cu B și C (fig. 352). Atunci $AB = AC = r$.

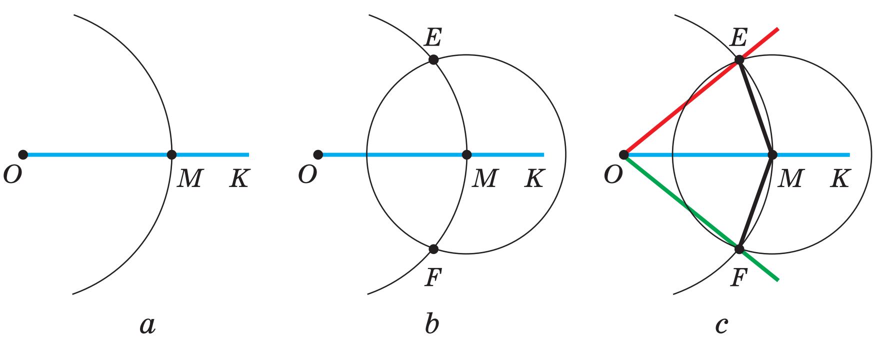


Fig. 353

Desenăm o circumferință cu raza *r* și centrul în punctul *O*. Fie că această circumferință intersectează semidreapta *OK* în punctul *M* (fig. 353, *a*). Apoi, desenăm o circumferință cu raza *BC* și cu centrul în punctul *M*. Fie că circumferințele cu centrele *O* și *M* se intersectează în punctele *E* și *F* (fig. 353, *b*). Ducem semidreptele *OE* și *OF* (fig. 353, *c*).

Arătăm că fiecare din unghiurile *EOM* și *FOM* este cel căutat. Demonstrăm, de exemplu, că $\angle EOM = \angle BAC$.

Cercetăm triunghiurile *ABC* (fig. 352) și *OEM* (fig. 353, *c*). Avem: $AB = OE = r = AC = OM$. În afară de aceasta conform construcției $EM = BC$. Deci, triunghiurile *ABC* și *OEM* sunt egale după trei laturi, adică conform criteriului al treilea de egalitate a triunghiurilor. De aici $\angle EOM = \angle BAC$. Analogic putem arăta, că $\angle BAC = \angle FOM$. ◀

Noi am construit două unghiuri *EOM* și *FOM* care satisfac condițiile problemei. Aceste unghiuri sunt egale. În așa cazuri, se consideră că problema de construcție are o singură rezolvare.

Problema 2. Construiți mediatoarea segmentului dat.

Rezolvare. Fie *AB* – segmentul dat (fig. 354, *a*). Desenăm două circumferințe cu centrele *A* și *B* și raza *AB*. Punctele de intersectie acestor circumferințe le notăm cu *M* și *N* (fig. 354, *b*). Ducem dreapta *MN* (fig. 354, *c*). Demonstrăm că dreapta *MN* este cea căutată.

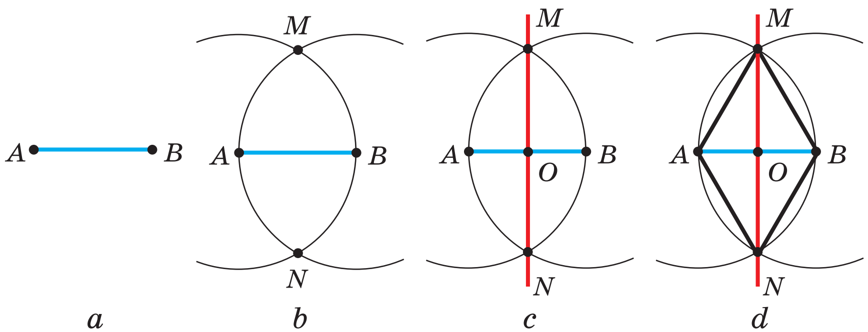


Fig. 354

Din construcție reiese, că $MA = MB = AB$ și $NA = NB = AB$ (fig. 354, *d*). Deci, punctele M și N aparțin mediatoarei segmentului AB. Atunci dreapta MN este mediatoarea segmentului AB. ◀

Observație. Deoarece dreapta MN intersectează segmentul AB în mijlocul lui, în punctul O, atunci, totodată, este rezolvată și următoarea problemă.

Problema 3. Împărțiți segmentul dat în jumătăți.

Problema 4. Se dă o dreaptă și un punct, care nu-i aparține. Prin acest punct duceți o dreaptă perpendiculară la cea dată.

Rezolvare. Fie m — dreapta data, A — punctul care nu aparține ei. Construim o circumferință cu centrul în punctul A astfel, încât ea să intersecteze dreapta m în două puncte. Aceste puncte le notăm cu M și N (fig. 355).

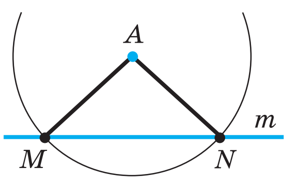


Fig. 355

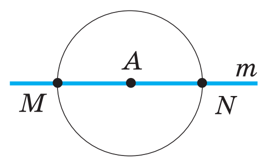


Fig. 356

Deoarece $AM = AN$, punctul A aparține mediatoarei segmentului MN. Construind această mediatoare (vezi problema 2), rezolvăm problema. ◀

Problema 5. Se dă o dreaptă și un punct care aparține ei. Prin acest punct duceți o dreaptă perpendiculară la cea dată.

Rezolvare. Fie m — dreapta dată, A — punctul care aparține ei. Construim o circumferință cu raza arbitrară și cu centrul în punctul A. Ea intersectează dreapta m în două puncte. Aceste puncte le notăm cu M și N (fig. 356).

Deoarece $AM = AN$, atunci am redus problema la construirea mediatoarei segmentul MN. ◀

Problema 6. Construiți bisectoarea unghiului dat.

Rezolvare. Fie A – unghiul dat. Construim o circumferință cu raza arbitrară și cu centrul în punctul A. Această circumferință intersectează laturile unghiului în două puncte. Aceste puncte le notăm cu M și N (fig. 357, *a*). Construim circumferințele cu centrele în punctele M și N și aceeași rază. Aceste circumferințe se intersectează în punctul A și într-un alt punct K (fig. 357, *b*). Ducem semidreapta AK (fig. 357, *c*).

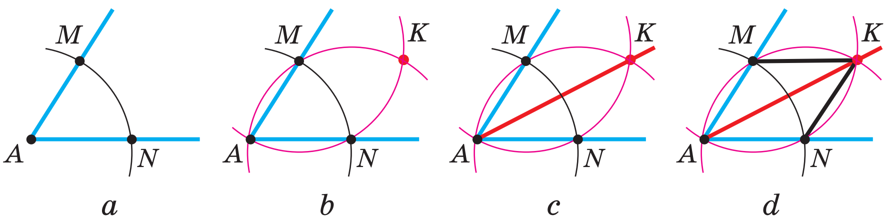


Fig. 357

Demonstrăm că semidreapta AK – bisectoarea căutată.

Într-adevăr, triunghiurile AMK și ANK (fig. 357, *d*) sunt egale după trei laturi, adică conform criteriului al treilea de egalitate a triunghiurilor. Deci, $\angle MAK = \angle NAK$. ◀

Problema 7. Construiți un triunghi dreptunghic după ipotenuză și catetă.

Rezolvare. Fie că sunt date două segmente cu lungimile c și b, totodată $b < c$ (fig. 358, *a*). Deoarece ipotenuza este mai mare decât cateta, atunci ipotenuza triunghiului căutat este egală cu cel mai mare din segmentele date, iar cateta – cu cel mai mic. Deci, vom construi un triunghi dreptunghic ABC, în care $\angle C = 90°$, $AB = c$, $AC = b$.

Ducem două drepte perpendiculare m și n. Fie C – punctul lor de intersecție. Pe dreapta m depunem segmentul CA, care este egal cu cateta dată b (fig. 358, b). Construim o circumferință cu centrul în punctul A și raza egală cu ipotenuza dată c. Fie că această circumferință intersectează dreapta n în două puncte B_1 și B_2 (fig. 358, c). Fiecare din triunghiurile ACB_1 și ACB_2 este cel căutat.

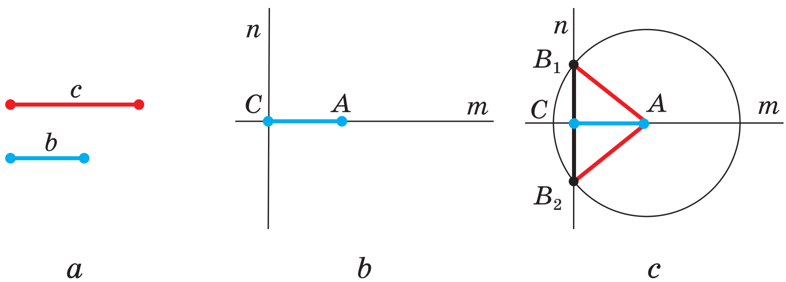


Fig. 358

Deoarece triunghiurile ACB_1 și ACB_2 sunt egale, atunci problema are o singură rezolvare. ◀

Problema 8. Construiți un triunghi după o latură și înălțimile duse pe alte două laturi.

Rezolvare. În figura 359 este reprezentat triunghiul ABC, segmentele AA_1 și CC_1 sunt înălțimile lui. Dacă sunt cunoscute segmentele AC, AA_1 și CC_1, putem construi triunghiurile dreptunghice AA_1C și CC_1A după ipotenuză și catetă (vezi problema 7).

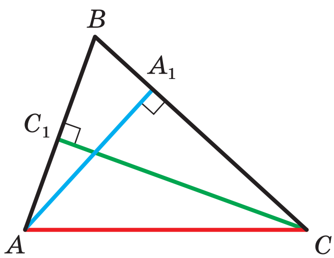


Fig. 359

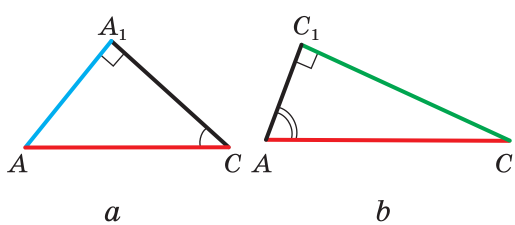


Fig. 360

Raționamentele prezentate se numesc **analiza problemei de construcție**. El sugerează planul construirii.

Construim triunghiul dreptunghic AA_1C, în care ipotenuza AC este egală cu latura dată, iar cateta AA_1 – egală cu una din înălțimile date (fig. 360, *a*). În triunghiul construit, unghiul ACA_1 este egal cu unul din unghiurile alăturate laturii date a triunghiului căutat. Cu ajutorul unei construcții asemănătoare se poate obține și alt unghi alăturat laturii date. În figura 360, *b* acesta este unghiul C_1AC.

Acum rămâne să construim triunghiul ABC, folosind latura AC și cele două unghiuri alăturate ei. Efectuați această construcție de sine stătător. ◀

Problema 9. Construiți un triunghi după un unghi, înălțimea și bisectoarea dusă din vârful acestui triunghi.

Rezolvare. Facem analiza problemei de construcție. În figura 361 este reprezentat triunghiul ABC, în care segmentul BD – înălțime, segmentul BK – bisectoare.

Dacă sunt cunoscute lungimile segmentelor BD și BK, atunci putem construi triunghiul dreptunghic BDK folosind ipotenuza și cateta. De asemenea, menționăm că dacă este cunoscut unghiul ABC, atunci se pot construi unghiurile ABK și KBC, fiecare din ele fiind egale cu $\frac{1}{2}\angle ABC$. De aici obținem planul construirii.

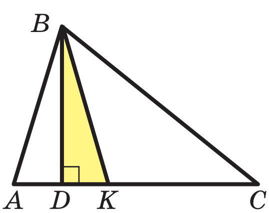


Fig. 361

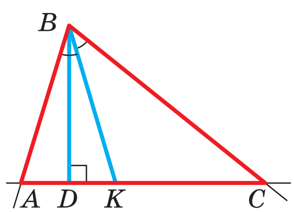


Fig. 362

Construim triunghiul dreptunghic BDK, în c are ipotenuza BK este egală cu bisectoarea dată, iar cateta BD — cu înălțimea dată (fig. 362). Construim două unghiuri, fiecare din ele este egal cu jumătate din cel dat astfel, încât semidreapta BK să le fie latură comună. În figura 362 acestea-s unghiurile ABK și KBC. Triunghiul ABC — cel căutat. ◀

1. Cu ajutorul căror instrumente se efectuează contrucțiile geometrice? Ce construcții geometrice se pot efectua cu ele?
2. Ce înseamnă a rezolva o problemă de construcție?

EXERCIȚII

657.° Desenați: 1) un unghi ascuțit; 2) un unghi obtuz. Construiți un unghi, care este egal cu cel desenat.

658.° Desenați unghiul ascuțit ABC, duceți semidreapta DK. Construiți unghiul MDK astfel, încât $\angle MDK = 2\angle ABC$.

659.° Împărțiți segmentul dat în patru părți egale.

660.° Desenați un unghi arbitrar. Împărțiți-l în patru părți egale.

661.° Desenați: 1) un triunghi ascuțitunghic; 2) un triunghi obtuzunghic. Construiți toate înălțimile acestui triunghi.

662.° Desenați triunghiul ABC. Construiți: 1) înălțimea AM; 2) mediana BD; 3) bisectoarea CK.

663.° Construiți un triunghi:

1) după două laturi și unghiul dintre ele;
2) după o latură și două unghiuri alăturate ei.

664.° Construiți un triunghi dreptunghic:

1) după două catete;
2) după o catetă și unghiul ascuțit alăturat ei.

665.° Construiți un triunghi dreptunghic isoscel, cunoscând cateta.

666.° Construiți un triunghi isoscel, cunoscând latura laterală și unghiul de la vârf.

667.° Construiți un triunghi isoscel, cunoscând baza și unghiul de la bază.

668.• Construiți o circumferință cu raza dată, care să fie tangentă la o dreaptă dată în punctul dat.

669.• Construiți tangenta la circumferință, care trece prin punctul dat a circumferinței.

670.• Construiți un unghi, care este egal cu: 1) 45°; 2) 60°; 3) 75°; 4) 120°.

671.• Construiți un unghi, care este egal cu: 1) 30°; 2) 22°30'; 3) 15°.

672.• Prin punctul dat, ce nu aparține dreptei date, duceți o dreaptă paralelă cu dreapta dată.

673.• Prin punctul dat, ce aparține unghiului, duceți o dreaptă care taie pe laturile unghiului segmente egale.

674.• Construiți circumferința, ce este tangentă la laturile unghiului dat.

675.• Se dă un unghi, care este egal cu 30°. Construiți circumferința cu raza dată astfel, încât centrul circumferinței să aparțină unei laturi a unghiului și circumferința să fie tangentă la cealaltă latură a unghiului.

676.• Construiți circumferința, care se atinge de laturile unghiului dat, totodată atinge una din ele în punctul dat.

677.• Construiți un triunghi dreptunghic, cunoscând ipotenuza și un unghi ascuțit.

678.• Construiți un triunghi dreptunghic, cunoscând o catetă și unghiul ascuțit opus ei.

679.• Construiți un triunghi isoscel:
1) după înălțimea coborâtă pe bază și unghiul de la vârf;
2) după bază și mediana dusă la bază;
3) după bază și înălțimea dusă pe latura laterală.

680.• Construiți un triunghi isoscel:
1) după latura laterală și unghiul de la bază;
2) după latura laterală și înălțimea coborâtă pe bază.

681.• Construiți un triunghi dreptunghic isoscel, cunoscând ipotenuza.

682.•• Cum se poate împărți în jumătate un segment, a cărui lungime este de câteva ori mai mare decât cea mai mare deschizătură a compasului?

683.•• Construiți un triunghi dreptunghic:
1) după un unghi ascuțit și bisectoarea acestui unghi;
2) după o catetă și înălțimea dusă la ipotenuză.

684.•• Construiți un triunghi dreptunghic:
1) după o catetă și mediana dusă la cealaltă catetă;
2) după un unghi ascuțit și înălțimea dusă din vârful unghiului drept.

685.•• Construiți un triunghi isoscel, cunoscând baza și raza circumferinței înscrise.

686.•• Construiți un triunghi, cunoscând o latură, unghiul alăturat ei și bisectoarea triunghiului, dusă din vârful acestui unghi.

687.•• Construiți un triunghi, cunoscând o latură, mediana dusă la una din celelalte două laturi și unghiul dintre latura dată și mediană.

688.•• Construiți un triunghi, cunoscând o latură, unghiul ascuțit alăturat ei și înălțimea dusă la latura dată.

689.$^{\cdot\cdot}$ Construiți un triunghi, cunoscând o latură, mediana și înălțimea, duse din unul și același capăt al laturii date. Câte rezolvări poate avea problema?

690.$^{\cdot\cdot}$ Construiți un triunghi, cunoscând două laturi și înălțimea dusă la una din ele. Câte rezolvări poate avea problema?

691.$^{\cdot\cdot}$ Construiți un triunghi, cunoscând înălțimea și două unghiuri, care formează această înălțime cu laturile triunghiului, care au cu înălțimea un vârf comun. Câte rezolvări poate avea problema?

692.$^{\cdot\cdot}$ Construiți un triunghi, cunoscând două laturi și înălțimea dusă la a treia latură. Câte rezolvări poate avea problema?

693.$^{\cdot\cdot}$ Construiți un triunghi, cunoscând două laturi și unghiul opus uneia din ele. Câte rezolvări poate avea problema?

694.$^{\cdot\cdot}$ Construiți un triunghi, cunoscând o latură, unghiul alăturat ei și mediana dusă la latura dată. Câte rezolvări poate avea problema?

695.$^{\cdot\cdot}$ Construiți un triunghi, cunoscând un unghi și înălțimile duse din vârfurile celorlalte două unghiuri.

696.$^{\cdot\cdot}$ Construiți un triunghi, cunoscând două înălțimi și unghiul, din vârful căruia este dusă una din aceste înălțimi. Câte rezolvări poate avea problema?

697.* Construiți un triunghi dreptunghic, cunoscând o catet**ă** și raza circumferinței înscrise.

698.* Construiți un triunghi, cunoscând o latură, unghiul alăturat ei și raza circumferinței înscrise.

699.* Construiți un triunghi, cunoscând raza circumferinței **înscris**e și segmentele în care punctul de tangență a circumferinței înscrise împarte una din laturi.

700.* Construiți un triunghi, cunoscând o latură, înălțimea și mediana duse la această latură.

701.* Construiți un triunghi, dacă sunt date trei puncte în care circumferința înscrisă este tangentă la laturile lui.

702.* Cum se poate împărți în trei părți egale unghiul, care este egal cu 54°?

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

703. În triunghiul ABC se cunoaște, că $AB = BC$, segmentele AC și CF sunt bisectoarele acestui triunghi. Demonstrați că $EF \parallel AC$.

704. Aflați unghiurile triunghiului ABC, dacă:

1) $\angle A + \angle B = 110°$, $\angle A + \angle C = 85°$;
2) $\angle C - \angle A = 29°$, $\angle A + \angle C = 121°$.

705. Mediatoarea ipotenuzei AB a triunghiului dreptunghic ABC intersectează cateta BC în punctul M. Se știe, că $\angle MAC : \angle MAB = 8 : 5$. Aflați unghiurile ascuțite ale triunghiului ABC.

706. Determinați tipul triunghiului, în care unul din unghiurile exterioare ale lui este mai mare decât unul din unghiurile triunghiului, neadiacente cu el:

1) cu 60°, iar decât al doilea — cu 40°;
2) cu 25°, iar decât al doilea — cu 35°.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

707. Pe o foaie de hârtie s-a desenat un triunghi echilateral și a fost acoperit complet cu două triunghiuri echilaterale de dimensiuni diferite. Demonstrați că pentru a-l acoperi ar fi suficient și unul din aceste triunghiuri.

24. Metoda locurilor geometrice a punctelor în problemele de construcție

Se știe că, amestecând culoarile albastră și galbenă obținem culoarea verde.

Fie că pe plan trebuie să găsim punctele, care posedă simultan două proprietăți. Dacă punctele care posedă prima proprietate sunt colorate în albastru, iar cele care au a doua proprietate în galben, atunci este evident că punctele verzi, care s-au format, vor poseda ambele proprietăți. În acesta și constă ideea metodei LGP. Să rezolvăm câteva probleme, folosind această metodă.

Problema 1. Construiți un triunghi după laturi date ale lui.

Rezolvare. Fie că sunt date trei segmente cu lungimile a, b, c (fig. 363). Trebuie să construim triunghiul ABC în care $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

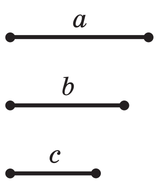


Fig. 363

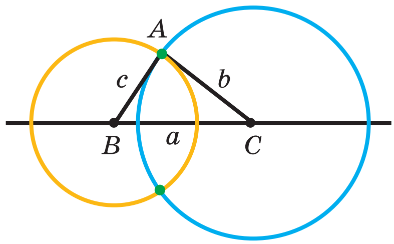


Fig. 364

Ducem o dreaptă arbitrară. Cu ajutorul compasului depunem pe ea segmentul BC, care este egal cu a (fig. 364). Problema s-a redus la construirea celui de-al treilea vârf al triunghiului, a punctului A.

Folosim faptul, că punctul A are două proprietăți:

1) aparține locului geometric al punctelor, depărtate de la punctul B la distanța c, adică circumferinței cu raza c și centrul în punctul B (în figura 364, aceasta-i circumferința galbenă);

2) aparține locului geometric al punctelor, depărtate de la punctul C la distanța b, adică circumferinței cu raza b și centrul în punctul C (în figura 364, aceasta-i circumferința albastră).

Punctul A poate fi oricare din cele două puncte verzi care s-au format.

Triunghiul obținut ABC este triunghiul căutat, deoarece în el $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$. ◀

Din această construcție reiese că, atunci *când fiecare din cele trei segmente date este mai mic decât suma celorlalte două, aceste segmente pot servi ca laturi ale triunghiului.*

Problema 2. Construiți o figură, toate punctele careia aparțin unghiului dat, sunt egal depărtate de la laturile lui și se află la distanța dată a de la vârful lui.

Rezolvare. Punctele căutate aparțin în același timp la două locuri geometrice ale punctelor: bisectoarei unghiului dat și circumferinței cu centrul în vârful unghiului și raza, care este egală cu a.

Construim bisectoarea unghiului și circumferința indicată (fig. 365). Punctul lor de intersecție și este punctul căutat X. ◀

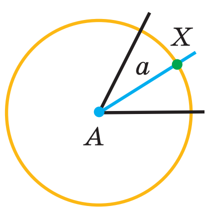


Fig. 365

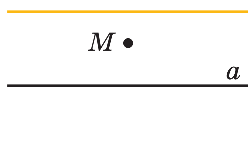


Fig. 366

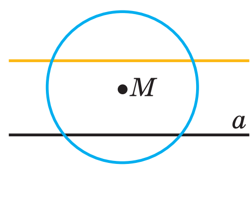


Fig. 367

Problema 3. Construiți centrul circumferinței cu raza dată R, care trece prin punctul dat M și este tangentă la dreapta dată a.

Rezolvare. Cercetăm cazul când punctul M nu aparține dreptei a. Deoarece circumferința se atinge de dreapta a, atunci centrul ei se află la distanța R de la dreapta dată. Locul geometric al punctelor depărtate de la dreapta dată la distanța dată sunt două drepte paralele (vezi problema 567). Deci, centrul circumferinței trebuie căutat pe dreptele galbene (fig. 366).

Locul geometric al punctelor care sunt centrele circumferințelor cu raza R, care trec prin punctul M este circumferința cu raza R și centrul în punctul M (în figura 367 aceasta este circumferința albastră). De aceea centrul circumferinței căutate poate fi oricare din punctele de intersecție ale circumferinței albastre cu una din dreptele galbene (fig. 367).

Analizați singuri construcția pentru cazul în care punctul dat se află pe dreapta dată. ◀

Problema 4. Construiți un triunghi după o latură, mediana dusă la această latură și raza circumferinței circumscrise.

Rezolvare. Construim circumferința cu raza dată și ducem coarda AB, care este egală cu latura triunghiului căutat. Atunci capetele coardei sunt două vârfuri ale triunghiului căutat. Este clar că al treilea vârf aparține în același timp circumferinței construite (circumferința galbenă) și a circumferinței cu centrul în punctul O, care este mijlocul coardei AB, și raza care este egală cu mediana dată (circumferința albastră). Fiecare din triunghiurile ABC_1 și ABC_2 (fig. 368) este triunghiul căutat. Deoarece aceste triunghiuri sunt egale, problema are o singură rezolvare. ◀

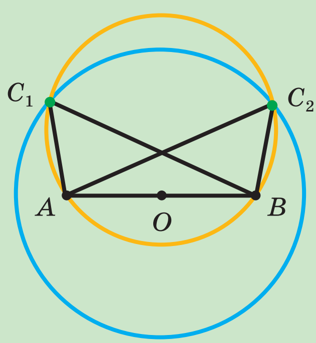


Fig. 368

EXERCIȚII

708.° Se dă o dreaptă m și punctele A și B în afara ei (fig. 369). Construiți pe dreapta m punctul egal depărtat de la punctele A și B.

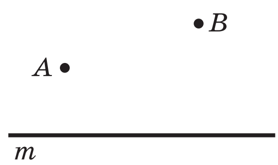


Fig. 369

709.° Punctele A și B aparțin dreptei m. Construiți punctul depărtat de dreapta m la distanța a și este egal depărtat de la punctele A și B. Câte rezolvări poate avea problema?

710.° Construiți un triunghi isoscel, cunoscând baza și latura laterală.

711.• Punctele B și C aparțin diferitor laturi ale unghiului A, iar $AB \neq AC$. Construiți punctul M, care aparține unghiului și este egal depărtat de la laturile lui și pentru care $MB = MC$.

712.• Punctele B și C aparțin diferitor laturi ale unghiului A. Construiți punctul D care aparține unghiului și este egal depărtat de la laturile lui și pentru care $DC = BC$. Câte rezolvări poate avea problema?

713.• Pentru circumferința dată, construiți punctul care este centrul ei.

714.• Construiți circumferința cu raza dată, centrul căreia aparține dreptei date astfel, încât aceasta circumferință să treacă prin punctul dat.

715.• Construiți circumferința cu raza dată, care trece prin două puncte date.

716.• Găsiți toate punctele care aparțin circumferinței date și sunt egal depărtate de la capetele segmentului dat. Câte rezolvări poate avea problema?

717.• Sunt date două drepte m și n care se intersectează și segmentul AB. Construiți pe dreapta m un punct, care se află la distanța AB de la dreapta n. Câte rezolvări are problema?

718.• În triunghiul ABC se știe, că $\angle C = 90°$. Pe cateta AC construiți punctul D, care se află la distanța CD de la dreapta AB.

719.• Construiți un triunghi conform a două laturi și a medianei, dusă la una din laturile date.

720.• Construiți un triunghi isoscel conform laturii laterale și a medianei duse la latura laterală.

721.•• Construiți un triunghi isoscel conform bazei și razei circumferinței circumscrise. Câte rezolvări poate avea problema?

722.•• Pe circumferința dată construiți punctul, care se află la distanța dată de la dreapta dată. Câte rezolvări poate avea problema?

723.•• Pe circumferința dată construiți punctul, care este egal depărtat de la două drepte date, ce se intersectează. Câte rezolvări poate avea problema?

724.•• Între două drepte paralele este dat un punct, construiți o circumferință, care trece prin punctul dat și este tangentă la dreptele date. Câte rezolvări are problema?

725.•• Construiți o circumferință care trece prin punctul dat A și este tangentă la dreapta m în punctul dat B.

726.•• Sunt date două drepte paralele și secanta, construiți circumferința care este tangentă la aceste trei drepte.

727.•• Construiți un triunghi, cunoscând două laturi și raza circumferinței circumscrise. Câte rezolvări poate avea problema?

728.•• Construiți un triunghi, cunoscând o latură, înălțimea dusă la această latură și raza circumferinței circumscrise. Câte rezolvări poate avea problema?

729.•• Construiți un triunghi echilateral, cunoscând raza circumferinței circumscrise.

730.* Trei drepte se intersectează două câte două și nu trec printr-un punct. Construiți punctul, care este egal depărtat de la toate cele trei drepte. Câte rezolvări are problema?

731.* Construiți un triunghi dreptunghic, cunoscând o catetă și suma ipotenuzei și celeilalte catete.

732.* Construiți un triunghi dreptunghic, cunoscând ipotenuza și suma catetelor.

733.* Construiți un triunghi dreptunghic, cunoscând ipotenuza și diferența dintre catete.

734.* Construiți un triunghi dreptunghic, cunoscând o catetă și diferența dintre ipotenuză și cealaltă catetă.

735.* Construiți un triunghi conform laturii, a unghiului alăturat ei și a sumei celorlalte două laturi.

736.* Construiți un triunghi conform laturii, a unghiului alăturat ei și a diferenței celorlalte două laturi.

737.* Construiți un triunghi conform laturii, a unghiului opus ei și a diferenței celorlalte două laturi.

738.* Construiți un triunghi conform laturii, a unghiului opus și a sumei celorlalte două laturi.

739.* Construiți un triunghi, cunoscând perimetrul și două unghiuri.

740.* Construiți un triunghi, cunoscând perimetrul, un unghi și înălțimea dusă din vârful altui unghi.

741.* Construiți un triunghi, cunoscând înălțimea și mediana duse din același vârf și raza circumferinței circumscrise.

742.* Construiți un triunghi, cunoscând două laturi și mediana dusă la a treia latură.

743.* Construiți un triunghi, cunoscând o latură, înălțimea dusă la această latură și mediana dusă la una din celelalte două laturi.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

744. În figura 370 $\angle A = 46°$, $\angle ACB = 68°$, $\angle DEC = 120°$. Aflați unghiurile triunghiurilor EFC și DBE.

745. Prin mijlocul O al laturii MK ale triunghiului MKN s-a dus o dreaptă, care este perpendiculară la latura MK și intersectează latura MN în punctul C. Se știe, că $MC = KN$, $\angle N = 50°$. Aflați unghiul MCO.

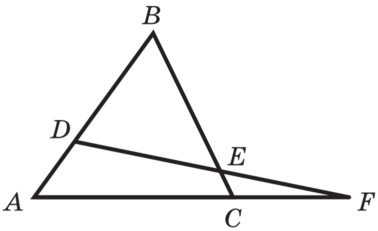


Fig. 370

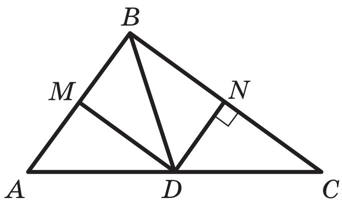


Fig. 371

746. În triunghiul ABC din vârful unghiului drept C s-a dus înălțimea CH și bisectoarea CM. Lungimea segmentul HM este de două ori mai mică decât lungimea segmentului CM. Aflați unghiurile ascuțite ale triunghiului ABC.

747. În figura 371 $BD = DC$, $DN \perp BC$, $\angle BDM = \angle MDA$. Aflați suma unghiurilor MBN și BMD.

OBSERVAȚI, DESENAȚI, CONSTRUIȚI, INVENTAȚI

748. Tăiați figura prezentată în figura 372 în trei părți, care nu sunt pătrate astfel, încât din aceste părți să se poată forma un pătrat.

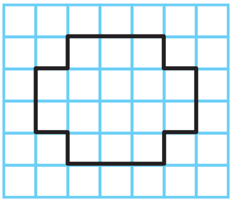


Fig. 372

DIN ISTORIA CONSTRUCȚIILOR GEOMETRICE

Abilitatea obținerii rezultatului, folosind mijloace minimale a fost mereu considerată semn de măiestrie superioară. Posibil de aceea în Grecia Antică, în mare măsură era dezvoltată arta executării construcțiilor geometrice cu ajutorul doar a două instrumente: a unei scândurele cu o margine dreaptă (riglei) și a două bețișoare ascuțite, legate la un capăt (compasul). O astfel de limitare în alegerea instrumentelor istoricii o leagă cu străvechea tradiție greacă, conform căreia dreapta și circumferința erau considerate cele mai armonioase figuri. Astfel în cartea sa „Elementele", marele savant Euclid descria construcțiile figurilor geometrice realizate doar cu compasul și rigla.

Există multe probleme de construcție. Cu unele din ele voi deja ați făcut cunoștință. Însă sunt trei probleme de construcție care au jucat un rol important în dezvoltarea matematicii. Aceste probleme au devenit cunoscute.

Problema despre cvadratura cercului. De construit un pătrat, aria căruia să fie egală cu aria cercului dat.

Problema despre trisecțiunea unghiului. (de la latinul *tria* – „trei" și *section* — „tăiere"). De împărțit un unghi în trei părți egale.

Problema despre dublarea cubului. De construit un cub, volumul căruia este de două ori mai mare decât volumul cubului dat.

Aceste probleme au pus pe ganduri omenirea pe parcursul mileniilor. Se străduiau să le rezolve așa savanți remarcabili ale anticității, ca Hipocrate din Chios, Eudoxus din Knidos, Euclid, Eratostene, Apollonius din Perga, Heron, Pappus din Alexandria, Platon, Arhimede, genii ale epocii moderne – René Decartes, François Viète și Isaac Newton. Și numai la mijlocul secolului XIX s-a demonstrat că aceste probleme nu pot fi rezolvate, adică nu se pot realiza construcțiile menționate, folosind doar compasul și rigla. Acest rezultat a fost obținut nu prin mijloacele geometriei, dar ale algebrei, datorită traducerii acestor probleme în limbajul ecuațiilor.

Când ați rezolvat probleme de construcție, mai ales cele însemnate cu asterisc, probabil ați întâmpinat greutăți legate cu arsenalul limitat de instrumente. De aceea, propunerea de a limita și mai mult posibilitatea folosirii aparatelor poate părea cel puțin neașteptată. Însă, încă în secolul X, matematicianul persian Mohammad Abul Vafa a descris rezolvarea unei serii de probleme de construcție cu ajutorul riglei și compasului, deschizătura căruia nu se poate modifica. Cu totul uimitoare este teorema publicată în 1797 de matematicianul italian Lorenzo Mascheroni (1750–1800): *orice construcție ce se poate face cu compasul și rigla, se poate face doar cu compasul.* Totodată Mascheroni a menționat că, deoarece o dreaptă nu poate fi dusă doar cu compasul, atunci dreapta se consideră construită dacă sunt construite două puncte oarecare ale ei.

În secolul XX, a fost găsită cartea savantului danez Georg Mohr (1640–1697), în care el de asemenea descria construcții făcute doar cu compasul. De aceea, teorema formulată mai sus se numește teorema lui Mohr-Mascheroni.

ÎNSĂRCINAREA № 4 „CONTROLEAZĂ-TE” ÎN FORMĂ DE TEST

1. Sunt date trei puncte care nu se află pe o dreaptă. Câte puncte conține locul geometric al punctelor, egal depărtate de la cele date?

A) o mulțime; B) două; C) unul; D) niciunul.

2. Sunt date trei puncte care se află pe o dreaptă. Câte puncte conține locul geometric al punctelor, egal depărtate de la cele date?

A) unul; B) două; C) o mulțime; D) niciunul.

3. Câte puncte conține locul geometric al punctelor care aparțin unui unghi și sunt egal depărtate de la laturile și de la vârful lui?

A) unul; B) două; C) o mulțime; D) niciunul.

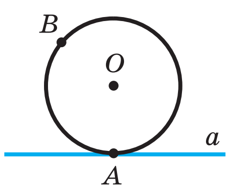
4. Punctul X aparține circumferinței cu raza R și centrul O. Care din afirmațiile date este incorectă?

A) $OX \leqslant R$; B) $OX \geqslant R$; C) $OX < R$; D) $OX = R$.

5. Dreapta are două puncte comune cu circumferința cu raza R și centrul O. Ce figură formează toate punctele X ale dreptei date, pentru care $OX \geqslant R$?

A) un segment; C) o semidreaptă;
B) două semidrepte; D) o dreaptă.

6. În figură este reprezentată dreapta a, care se atinge de circumferința cu centrul O în punctul A. Pe circumferință este notat punctul B, X – un punct arbitrar de pe dreapta a. Care din afirmațiile date este incorectă?



A) $OX > OB$; C) $OX \geqslant OB$;
B) $OX \geqslant OA$; D) $OA = OB$.

7. Care afirmație este corectă?

A) Dacă două coarde sunt perpendiculare, atunci una din ele este diametru.

B) Dacă două coarde sunt împărțite în jumătate de punctul lor de intersecție, atunci ele sunt perpendiculare.

C) Dacă tangenta dusă prin capătul unei coarde este perpendiculară pe ea, atunci această coarda este diametru.

D) Dacă una din coarde o împarte pe alta în jumătate, atunci această coardă este diametru.

8. Centrul circumferinței circumscrise triunghiului este punctul de intersecție al:

A) înălțimilor triunghiului;
B) medianelor triunghiului;
C) mediatoarelor laturilor triunghiului;
D) bisectoarelor triunghiului.

9. Centrul circumferinței înscrise în triunghi este punctul de intersecție al:

A) înălțimilor triunghiului;
B) medianelor triunghiului;
C) mediatoarelor laturilor triunghiului;
D) bisectoarelor triunghiului.

10. Centrele circumferințelor înscrisă și circumscrisă triunghiului coincid în triunghiul:

A) isoscel;
B) echilateral;
C) dreptunghic;
D) scalen.

11. La rezolvarea problemelor de construcție se folosesc instrumentele:

A) compas, raportor, riglă;
B) riglă, echer;
C) riglă, echer, compas, raportor;
D) compas, riglă.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 4

Locul geometric al punctelor (LGP)

Locul geometric al punctelor (LGP) se numește mulțimea tuturor punctelor care au o anumită proprietate.

Mediatoarea segmentului ca LGP

Mediatoarea segmentului este locul geometric al punctelor egal depărtate de la extrimitățile acestui segment.

Bisectoarea unghiului ca LGP

Bisectoarea unghiului este locul geometric al punctelor care aparțin unghiului și sunt egal depărtate de la laturile lui.

Circumferința

Circumferința se numește locul geometric al punctelor, egal depărtate de un punct dat.

Cercul

Cercul se numește locul geometric al punctelor, distanțele de la care până la un punct dat nu sunt mai mari decât un număr pozitiv dat.

Coarda circumferinței

Segmentul care unește două puncte ale circumferinței se numește coarda circumferinței.

Diametrul circumferinței

Coarda care trece prin centrul circumferinței se numește diametru.

Proprietățile circumferinței

Diametrul circumferinței, care este perpendicular la coardă, împarte această coardă în jumătăți.

Diametrul circumferinței, care împarte o coardă diferită de diametru în jumătăți, este perpendicular la această coardă.

Tangenta la circumferință

Dreapta care are cu circumferința numai un punct comun se numește tangentă la circumferință.

Proprietatea tangentei

Tangenta la circumferință este perpendiculară la raza dusă în punctul de tangență.

Criteriul tangentei la circumferință

Dacă dreapta, care trece printr-un punct al circumferinței este perpendiculară la raza dusă în acest punct, atunci această dreaptă este tangentă la circumferința dată.

Dacă distanța de la centrul circumferinței până la o dreaptă oarecare este egală cu raza circumferinței, atunci această dreaptă este tangentă la circumferința dată.

Proprietatea tangentelor duse la circumferință printr-un punct

Dacă printr-un punct dat sunt duse două tangente la o circumferință, atunci segmentele tangentelor, care unesc punctul dat cu punctele de tangență, sunt egale.

Circumferința circumscrisă unui triunghi

Circumferința se numește circumscrisă unui triunghi, dacă ea trece prin toate vârfurile lui. Oricărui triunghi i se poate circumscrie o circumferință.

Centrul circumferinței circumscrise unui triunghi

Centrul circumferinței circumscrise unui triunghi este punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor lui.

Circumferința înscrisă în triunghi

Circumferința se numește înscrisă într-un triunghi dacă ea se atinge de toate laturile lui. În orice triunghi se poate înscrie o circumferință.

Centrul circumferinței înscrise în triunghi

Centrul circumferinței înscrise în triunghi este punctul de intersecție al bisectoarelor triunghiului.

EXERCIȚII PENTRU REPETAREA CURSULUI DE GEOMETRIE DIN CLASA A 7-A

Cele mai simple figuri geometrice și proprietățile lor

749. Segmentul, lungimea căruia este egală cu *a*, a fost împărțit în cinci segmente egale. Aflați distanța dintre mijlocurile segmentelor de la margini.

750. Punctul C — mijlocul segmentului AB, $AB = 10$ cm. Pe dreapta AB găsiți totate punctele X pentru care $AX + BX + CX = 12$ cm.

751. Punctul D — mijlocul segmentului MK, $MK = 16$ cm. Pe dreapta MK găsiți totate punctele Y pentru care $MY + KY + DY = 30$ cm.

752. Pe o dreaptă au fost notate 10 puncte: A, B, C, D, E, F, M, N, K, P. Câte segmente s-au format, un capăt al cărora este punctul A? Câte segmente de tot s-au format, cu capetele în punctele notate? Depinde oare numărul total de segmente de faptul, dacă se află punctele notate pe o dreaptă sau nu?

753. În figura 373 $AN = 24$ cm, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FK$, $KM = MN$, $DF = 6$ cm. Aflați segmentul BM.

Fig. 373

754. Desenați unghiul MKE, care este egal cu $120°$. Duceți semidreapta KC astfel, încât $\angle MKC = 60°$. Aflați unghiul CKE și indicați tipul lui. Câte rezolvări are problema?

755. Două unghiuri au o latură comună și nu au alte puncte comune. Sunt oare aceste unghiuri adiacente dacă:

1) mărimile lor se raportă ca $11 : 19$ și unul din unghiuri este cu $32°$ mai mare decât celălalt;
2) mărimile lor se raportă ca $7 : 3$ și unul din unghiuri este cu $72°$ mai mic decât celălalt?

756. În figura 374 $BD \perp BC$. Unghiul dintre bisectoarele unghiurilor ABD și DBC este egal cu 55°. Aflați unghiul ABD.

Triunghiuri

757. Perimetrul triunghiului este egal cu 87 cm, una din laturi – a cm, iar a doua latură – b cm. Alcătuiți expresia pentru aflarea celei de-a treia laturi. Calculați lungimea celei de-a treia laturi, dacă $a = 27$, $b = 21$.

758. Aflați perimetrul triunghiului ABC dacă $AB + BC = 27$ cm, $AB + AC = 28$ cm, $BC + AC = 29$ cm.

759. În figura 375 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AD = CF$. Demonstrați că $\Delta ABC = \Delta DEF$.

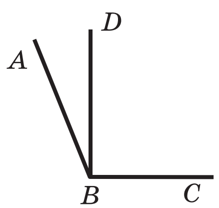


Fig. 374

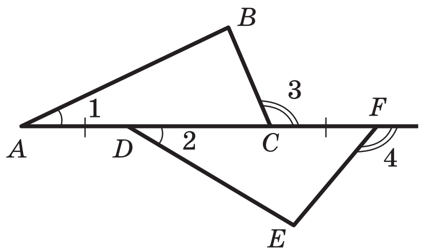


Fig. 375

760. În triunghiurile ABC și DEF s-au dus medianele BM și EK corespunzător. Se știe, că $BC = EF$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle C = \angle F$. Demonstrați că: 1) $\Delta BMC = \Delta EFK$; 2) $\Delta ABM = \Delta DEK$.

761. În triunghiurile ascuțitunghice ABC și $A_1B_1C_1$ s-au dus înălțimile BD și B_1D_1 corespunzător. Demonstrați că $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ dacă $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$, $CD = C_1D_1$.

762. În triunghiurile ABC și DEF se știe, că $AC = DF$, $BC = EF$, $\angle C = \angle F$. Bisectoarele unghiurilor BAC și ABC se intersectează în punctul O, iar bisectoarele unghiurilor DEF și EDF se intersectează în punctul M. Demonstrați că $\Delta AOB = \Delta DME$.

763. Una din laturile triunghiului isoscel este egală cu 4 cm, iar perimetrul lui – 20 cm. Aflați celelalte două laturi ale triunghiului.

764. În triunghiul isoscel ABC cu baza AC s-au dus bisectoarele AM și CK. Demonstrați că $AK = CM$.

765. Pe prelungirea bazei BC a triunghiului isoscel ABC, după punctul B este notat punctul M astfel, încât $\angle MBA = 128°$. Aflați unghiul dintre latura laterală AC și bisectoarea unghiului ACB.

766. Din punctele A și B, care se află în același semiplan față de dreapta m, sunt coborâte pe această dreaptă perpendicularele AC și BD corespunzător. Punctele A și B sunt egal depărtate de la dreapta m, punctul O – mijlocul segmentului CD. Demonstrați că triunghiul AOB este isoscel.

767. În figura 376 $AB = BC$, $AD = FC$, $\angle ADE = \angle CFE$. Demonstrați că punctul E este mijlocul segmentului AC.

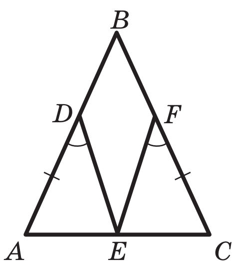


Fig. 376

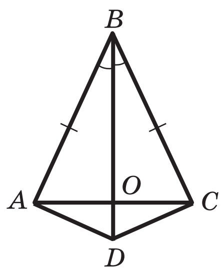


Fig. 377

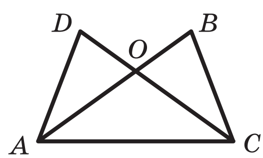


Fig. 378

768. Triunghiurile isoscele ABC și ADC au baza comună AC. Demonstrați că dreapta BD este mediatoarea segmentului AC.

769. În figura 377 $AB = BC$, $\angle ABO = \angle CBO$. Demonstrați că $\angle DAO = \angle DCO$.

770. În figura 378 $OA = OC$, $OD = OB$. Demonstrați că $\angle DAC = \angle BCA$.

771. Punctul O este punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor AC și BC ale triunghiului ABC și aparține laturii AB. Demonstrați că: 1) punctul O este mijlocul segmentului AB. 2) $\angle ACB = \angle A + \angle B$.

772. Mediana triunghiului ABC îl împarte în două triunghiuri cu perimetre egale. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

773. În triunghiul ABC se știe, că $AB = BC$, segmentul BD este mediană. Perimetrul triunghiului ABC este egal cu 50 cm, iar a triunghiului ABD – 40 cm. Aflați lungimea medianei BD.

774. Pe laturile AC și BC ale triunghiului ABC s-au notat punctele F și K corespunzător. Demonstrați că dacă triunghiurile AFB și AKB sunt egale, iar laturile AK și BF sunt corespunzătoare, atunci triunghiul ABC este isoscel.

775. În figura 379 $AM = CN$, $AB = CD$, $BN = DM$. Demonstrați că $\angle ABN = \angle CDM$.

776. În triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ medianele AM și A_1M_1 sunt egale, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Demonstrați că $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

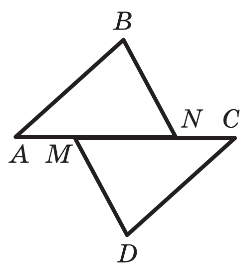


Fig. 379

Drepte paralele. Suma unghiurilor triunghiului

777. Printr-un punct, ce nu aparține dreptei a, s-au dus trei drepte. Demonstrați că cel puțin două din aceste drepte intersectează dreapta a.

778. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC s-au notat corespunzător punctele M și K astfel, încât $\angle AMK = \angle ABC$. Demonstrați că $\angle AKM = \angle ACB$.

779. Demonstrați că bisectoarele unghiurilor interne de aceeași parte a secantei, formate la intersecția a două drepte paralele cu o secantă, sunt perpendiculare.

780. Dreapta, dusă prin vârful triunghiului paralel cu latura opusă, formează cu celelalte două laturi unghiuri egale. Demonstrați că acest triunghi este isoscel.

781. Prin vârful C al triunghiului ABC s-a dus dreapta, care este paralelă cu bisectoarea AM a triunghiului și intersectează dreapta AB în punctul K. Aflați unghiul ACK, dacă $\angle BKC = 28°$.

782. Pe prelungirile laturilor laterale AC și BC ale triunghiului isoscel ABC, după vârful C, s-au notat punctele E și D corespunzător, astfel, încât $DE \parallel AB$. Demonstrați că triunghiul CDE este isoscel.

783. Pe latura BC a triunghiului ABC s-au notat punctele M și K (punctul M este situat între punctele B și K) astfel, încât $\angle KAC = \angle B$, $\angle BAM = \angle C$. Demonstrați că triunghiul MAK este isoscel.

784. Înălțimea triunghiului isoscel, coborâtă pe bază, este de 2 ori mai mică decât baza. Aflați unghiurile triunghiului dat.

785. Bisectoarele AK și CM ale triunghiului ABC se intersectează în punctul O. Se știe, că $\angle BAC = 64°$, $\angle MOK = 132°$. Aflați unghiul ACB.

786. Pe latura AC a triunghiului ABC s-a notat punctul O astfel, încât $AB = AO$. Se știe, că unghiul exterior al triunghiului ABC de la vârful A este egal cu 160° și $\angle C = 40°$. Demonstrați că $BO = CO$.

787. Pe prelungirile laturii AC a triunghiului ABC după punctele A și C, sunt notate corespunzător punctele M și K astfel, încât $AM = AB$, $CK = BC$. Aflați unghiurile triunghiului MBK, dacă $\angle BAC = 60°$, $\angle ACB = 80°$.

788. Dreapta paralelă cu latura AC a triunghiului ABC intersectează laturile AB și BC în punctele M și K corespunzător, astfel, încât $AM = MK$. Se știe, că $\angle B = 65°$, $\angle C = 45°$. Aflați unghiul KAC.

789. În triunghiul ABC se știe că $\angle A = 55°$, $\angle B = 75°$. Aflați unghiul dintre înălțimea și bisectoarea triunghiului, duse din vârful C.

790. Înălțimile AD și BK ale triunghiului isoscel ABC ($AB = BC$) se intersectează în punctul H, $\angle AHB = 128°$. Aflați unghiurile triunghiului ABC.

791. Înălțimile AD și CM ale triunghiului isoscel ABC ($AB = BC$) se intersectează în punctul H, $\angle AHC = 140°$. Aflați unghiurile triunghiului ABC.

792. Unul din unghiurile ascuțite ale triunghiului dreptunghic este egal cu 42°. Aflați cel mai mic dintre unghiurile formate de bisectoarea unghiului drept și ipotenuză.

793. Din punctele C și D, care se află într-un semiplan față de dreapta m, s-au coborât perpendicularele CE și DF pe această dreaptă, $CF = DE$. Demonstrați că $CE = DF$.

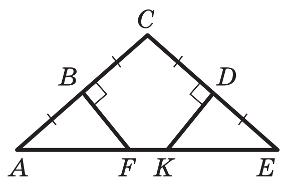


Fig. 380

794. În figura 380 $AB = BC = CD = DE$, $BF \perp AC$, $DK \perp CE$. Demonstrați că $AF = EK$.

795. Înălțimile BM și CK ale triunghiului ABC se intersectează în punctul H, $\angle ABC = 35°$, $\angle ACB = 83°$. Aflați unghiul BHC.

796. Unghiul dintre înălțimea și bisectoarea triunghiului dreptunghic, duse din vârful unghiului drept este egal cu 12°. Aflați unghiurile ascuțite ale triunghiului dat.

797. Pe ipotenuza AB a triunghiului dreptunghic isoscel ABC s-au notat punctele M și K astfel, încât $AC = AM$ și $BC = BK$. Aflați unghiul MCK.

798. Din vârful unghiului drept al triunghiului s-a coborât înălțimea pe ipotenuză. Demonstrați că cele două triunghiuri care s-au format și triunghiul dat au unghiurile ascuțite corespunzătoare egale.

799. În triunghiurile ABC și DEF se știe că $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, înălțimile BM și EK sunt egale. Demonstrați că $\Delta ABC = \Delta DEF$.

800. Înălțimile AM și CK ale triunghiului ABC se intersectează în punctul O, $OK = OM$, $\angle BAM = \angle ACK$. Demonstrați că triunghiul ABC este echilateral.

801. Două înălțimi ale triunghiului isoscel la intersecție formează un unghi de 100°. Aflați unghiurile triunghiului dat.

802. În triunghiul ABC, unghiul ACB este drept, segmentul CH — înălțimea acestui triunghi, segmentul CD — bisectoarea triunghiului BCH. Demonstrați că $AC = AD$.

803. Unghiul dintre înălțimea și bisectoarea triunghiului isoscel, duse dintr-un vârf, este egal cu 15°. Aflați unghiurile acestui triunghi. Câte rezolvări are problema?

804. Pe prelungirile ipotenuzei AB ale triunghiului dreptunghic ABC, după punctele A și B, s-au notat corespunzător punctele D și E astfel, încât $AC = AD$, $BC = BE$. Aflați unghiul DCE.

805. În triunghiul echilateral ABC din mijlocul M al laturii AC este coborâtă o perpendiculară MK pe latura BC. Aflați perimetrul triunghiului ABC, dacă $KC = 3$ cm.

806. Unul din unghiurile triunghiului dreptunghic este egal cu 60°, iar suma ipotenuzei și a catetei mai mici este egală cu 27 cm. Aflați aceste laturi a triunghiului.

807. În triunghiul ABC se știe că $\angle C = 90°$, $\angle A = 15°$, $BC = 11$ cm. Pe cateta AC s-a notat punctul M astfel, încât $\angle BMC = 30°$. Aflați segmentul AM.

808. Pe o latură a unghiului B s-au notat punctele D și A, iar pe cealaltă latură punctele E și C (fig. 381) astfel, încât $AC \perp BC$, $DE \perp BC$, $CD \perp AB$. Aflați segmentul DE, dacă $\angle B = 30°$, $AC = 12$ cm.

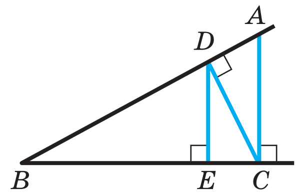


Fig. 381

809. Aflați unghiul dintre dreptele pe care se află două mediane ale triunghiului echilateral.

Circumferința și cercul

810. În circumferința cu centrul O s-a dus diametrul AC și coardele AB și BC astfel, încât $AB = BC$. Aflați unghiul AOB.

811. Diametrele AB și CD ale circumferinței cu centrul O sunt perpendiculare. Pe diametrul AB, de părți diferite față de centrul O s-au notat punctele E și F astfel, încât $CE = DF$. Demonstrați că $OE = OF$.

812. În circumferința cu centrul O s-au dus coardele neparalele MK și NP, $MK = NP$, punctele A și B sunt mijlocurile coardelor MK și NP, corespunzător. Demonstrați că $\angle OAB = \angle OBA$.

813. În circumferință s-au dus coardele AB și BC, fiecare din ele este egală cu raza circumferinței. Aflați unghiul ABC.

814. Demonstrați că tangentele la circumferință, duse prin capetele diametrului, sunt paralele.

815. Diametrul AB împarte fiecare din coardele MN și PK, diferite de diametru, în jumătăți. Demonstrați că $MN \parallel PK$.

816. Demonstrați că centrul circumferinței este egal depărtat de la orice tangentă la circumferință.

817. Prin punctul A la circumferința cu centrul O s-au dus tangentele AM și AK, M și K – punctele de tangență. Punctul de intersecție al segmentului OA cu circumferința este mijlocul acestui segment. Aflați unghiul MAK.

818. Dreapta care este paralelă cu coarda AC a circumferinței, este tangentă la această circumferință în punctul B. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

819. Raza OC a circumferinței cu centrul O împarte în jumătate coarda AB, care nu este diametru. Prin punctul C s-a dus tangenta la circumferință. Demonstrați că această tangentă este paralelă cu coarda AB.

820. Circumferința, centrul căreia aparține bisectoarei unui unghi, intersectează fiecare din laturile lui în două puncte. Demonstrați că segmentele, pe care le retează circumferința pe laturile unghiului, sunt egale.

821. Prin punctul M s-au dus tangentele MK și ME la circumferința cu centrul în punctul O, unde K și E sunt punctele de tangență, $\angle OMK = 30°$, $MK = 6$ cm. Aflați lungimea coardei KE.

822. Demonstrați că coarda circumferinței, care este perpendiculară pe o altă coardă a circumferinței și trece prin mijlocul ei, este diametrul circumferinței date.

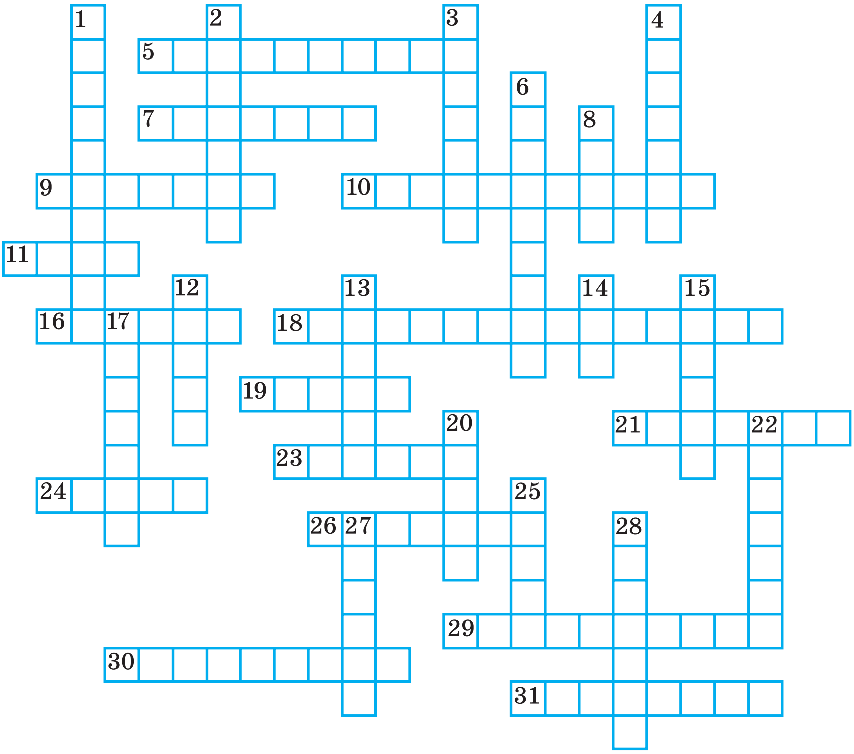
823. În circumferință s-au dus diametrul AB și coardele AC și BD astfel, încât $AC \parallel BD$. Demonstrați că segmentul CD este diametrul circumferinței.

824. În triunghiul isoscel ABC, se știe că $AB = BC$, punctul O este centrul circumferinței înscrise, punctele D și E – punctele de tangență a circumferinței înscrise la laturile AC și AB, corespunzător, $\angle ABC = 48°$. Aflați unghiul DOE.

825. Circumferința înscrisă în triunghiul ABC este tangentă la laturile lui AB, BC și AC în punctele K, M și E, corespunzător. Se știe că $AK = BM = CE$. Demonstrați că triunghiul ABC este echilateral.

826. Bisectoarele AD și CE ale triunghiului ABC se intersectează în punctul O_1, bisectoarele EF și DK ale triunghiului DEB se intersectează în punctul O_2. Demonstrați că punctele B, O_1 și O_2 se află pe o dreaptă.

827. Găsiți cuvintele încrucișate.



Pe orizontală: 3. Afirmația justețea căreia este acceptată fără demonstrație. **4.** Unghiul, măsura în grade al căruia este mai mică de 90°. **6.** Segmentul care unește vârful triunghiului cu mijlocul laturii opuse. **8.** Unghiul, măsura în grade al căruia este mai mare de 90°, dar mai mică de 180°. **10.** Coardă care trece prin centrul circumferinței. **12.** Matematician al Greciei Antice. **14.** Circumferința care trece prin toate vârfurile triunghiului. **17.** Punctul egal depărtat de la toate punctele circumferinței. **18.** Figură geometrică. **19.** Semidreapta cu originea în vârful unghiului, care împarte unghiul în două unghiuri egale. **20.** Locul geometric al punctelor distanța de la care până la punctul dat nu este mai mare decât numărul dat. **22.** Latura triunghiului dreptunghic, opusă unghiului drept. **24.** Circumferința care se atinge de toate laturile triunghiului. **26.** Una din părțile în care este împărțită o dreaptă de un punct arbitrar. **27.** Dreptele la intersecția cărora se formează unghiuri drepte. **28.** Unghiul adiacent cu unghiul triunghiului. **29.** Perpendiculara dusă din vârful triunghiului la dreapta ce conține latura lui opusă. **30.** Dreapta care are un punct comun cu circumferința.

Pe verticală: 1. Figură geometrică. **2.** Unitate de măsură a unghiurilor. **5.** Segmentul care unește două puncte ale circumferinței. **7.** Două unghiuri cu o latură comună, iar celelalte două sunt semidrepte complementare. **9.** Latura triunghiului dreptunghic alăturată unghiului drept. **11.** Afirmarția, justețea căreia este stabilită cu ajutorul demonstrației. **13.** Locul geometric al punctelor egal depărtate de la punctul dat. **15.** Suma lungimilor tuturor laturilor triunghiului. **16.** Autorul cărții „Elementele”. **21.** Segmentul care unește un punct al circumferinței cu centrul ei. **23.** Drepte ce nu se intersectează. **25.** Unghiul, măsura în grade al căruia este egală cu 90°.

PRIETENIM CU CALCULATORUL

Studiind matematica în clasa a 6-a, ați folosit deja calculatorul și ați apreciat cât de sigur ajutor poate fi el. El va ajuta să însușiți geometria.

Geometria studiază figurile: segmente, triunghiuri, dreptunghiuri, paralelipipede dreptunghice, sfere etc. De aceea, este util să învățați cum să folosiți **redactorul grafic**, cu care puteți lucra cu forme geometrice și să construiți desene tehnice. Exemple de astfel de redactore pot fi *CorelDraw, Visio* etc. Alegeți cu ajutorul profesorului un redactor grafic pentru executarea desenelor la însărcinările acestui capitol. În afară de aceste însărcinări, cu ajutorul redactorului grafic ales se pot ilustra problemele pe care le rezolvați. Iar atunci când veți dori să faceți un referat sau o comunicare interesantă pentru prieteni, veți putea cu ajutorul **programelor pentru construirea prezentărilor** (de exemplu, *PowerPoint*) să creați chiar și un film animat din „viața” figurilor geometrice.

Există multe programe create special pentru școlari și menite să-i ajute să studieze matematica: programe educaționale multimedia, programe pentru executarea construcțiilor geometrice. Le puteți găsi în rețeaua Internet. Dar este posibil, dobândind cunoștințe și deprinderi, voi și singuri veți elabora programe utile pentru studierea geometriei.

Însărcinările prezentate mai jos le veți putea îndeplini folosind calculatorul în măsura studierii temelor respective. Majoritatea lor sunt însărcinări pentru construirea figurilor geometrice, care le veți executa cu ajutorul redactorului grafic ales.

Puncte și drepte

1. Știți că în geometrie, punctul nu are dimensiuni. De aceea, la construcțiile grafice suntem nevoiți să reprezentăm punctele convențional, cu cerculețe mici (vezi figurile de la punctul 1) sau prin pixeli pe ecran. De asemenea, dreapta reprezentată pe ecran, va avea grosime (spre deosebire de dreptele, ce se cercetează în geometrie).
Însușiți în redactorul grafic instrumentele pentru reprezentarea punctelor și dreptelor, învățați-vă să duceți o dreaptă prin două puncte.

2. Însușiți instrumentele, care oferă posibilitatea de a indica punctele și dreptele cu litere mari și mici ale alfabetului latin.

Segmentul și lungimea lui

3. Reprezentați două puncte, construiți un segment, capetele căruia sunt aceste două puncte date.

4. Găsiți în ce mod redactorul grafic indică lungimea segmentului.

5. Construiți un segment cu lungimea dată.

6. Găsiți instrumentul, cu ajutorul căruia se pot deplasa și roti figurile.

7. Construiți două segmente de aceeași lungime și suprapuneți-le una peste alta.

8. Construiți desenul tehnic, care ilustrează proprietatea fundamentală lungimii segmentului. Verificați, dacă se îndeplinește această proprietate, determinând lungimile segmentelor construite.

9. Sunt oare în redactorul grafic ales de voi posibilități pentru aflarea mijlocului unui segment?

Semidreapta. Unghiul

10. Construiți câteva unghiuri diferite. Găsiți instrumentul, cu ajutorul căruia se poate determina mărimea unghiului și de construit unghiuri de mărimea dată.

11. Alcătuiți desenul tehnic care va ilustra proprietatea fundamentală a mărimii unghiului. Verificați dacă se îndeplinește această proprietate, determinând mărimea unghiurilor construite.

12. Găsiți instrumentul, care oferă posibilitatea reprezentării arcului. Desenați câteva unghiuri și însemnați unghiurile egale cu același număr de arculețe. Atrageți atenția la faptul că pe desen liniile principale și ajutătoare au grosimi diferite. Găsiți instrumentul care oferă posibilitatea de a alege grosimea liniei.

13. Desenați unghiuri adiacente și unghiuri opuse la vârf.

Drepte perpendiculare

14. Găsiți în redactorul grafic instrumentul destinat pentru construirea dreptelor perpendiculare. Construiți cu ajutorul acestui instrument un unghi drept.

15. Desenați o dreaptă și un punct, care se află pe această dreaptă. Duceți prin acest punct o dreaptă perpendiculară pe cea dată.

16. Desenați o dreaptă și un punct, care nu se află pe dreapta dată. Duceți prin acest punct o dreaptă perpendiculară pe cea dată.

Triunghiul. Înălțimea, mediana, bisectoarea triunghiului

17. Pentru a desena un triunghi, de regulă, se desenează trei segmente care reprezintă laturile lui. Desenați aceste trei segmente. Găsiți instrumentul, care oferă posibilitatea „lipirii” acestor trei segmente și de le considerat pe viitor ca o singură figură — triunghi.

18. Desenați triunghiurile ascuțitunghic, dreptunghic și obtuzunghic.

19. Găsiți instrumentul, care oferă posibilitatea copierii figurii deja desenate și instrumentul care ne oferă posibilitatea mutării și rotirii figurii. Cu ajutorul acestor instrumente reprezentați câteva triunghiuri egale.

20. Construiți un triunghi scalen și din fiecare vârf al lui duceți înălțimea, mediana și bisectoarea. Ce instrumente folosiți ca construcția să fie exactă? Efectuați o astfel de construcție pentru triunghiurile ascuțitunghice, dreptunghice și obtuzunghice.

Triunghiul isoscel

21. Construiți un triunghi isoscel și un triunghi echilateral. Care posibilități ale redactorului grafic simplifică construirea?

22. Cum se poate folosi teorema 10.3 pentru construirea triunghiului isoscel?

Criteriile de egalitate ale triunghiurilor

23. Construiți două triunghiuri, la care două laturi și unghiul dintre ele sunt corespunzător egale. Cum vom demonstra că triunghiurile construite sunt egale?

24. Desenați un segment și construiți mediatoarea lui.

25. Construiți două triunghiuri, la care latura și două unghiuri alăturate ei sunt corespunzător egale. Cum vom demonstra că triunghiurile construite sunt egale?

26. Faceți desenul care ilustrează proprietatea mediatoarei. Alegeți pe mediatoare câteva puncte. Cu ajutorul cărui instrument se poate controla dacă aceste puncte sunt egal depărtate de la extremitățile segmentului?.

Drepte paralele

27. Executând însărcinările precedente, ați însușit instrumentele care oferă posibilitatea copierii și mutării figurilor deja construite. Cum cu ajutorul acestor instrumente vom construi drepte paralele?

28. Inventați cum vom construi drepte paralele, folosind teorema 13.1.

29. Desenați o dreaptă și un punct care nu aparține ei. Duceți prin acest punct o dreaptă paralelă cu cea dată. Măriți figura obținută. Poate oare acest desen să ilustreze convingător axioma paralelismului dreptelor? De ce?
Acest exemplu demonstrează, că toate construcțiile geometrice pe care noi le putem executa pe hârtie sau cu ajutorul calculatorului sunt destul de condiționate. De aceea, executând un desen destul de minunat, trebuie să ne bazăm nu pe el, ci pe faptele matematice și demonstrări.

30. Folosiți teoremele 14.1–14.3 construiți câteva perechi de drepte paralele. Folosind instrumentele redactorului grafic, cum vom demonstra că aceste drepte într-adevăr sunt paralele?

31. Faceți cîteva desene ce ilustrează proprietățile dreptelor paralele. Cu ajutorul instrumentelor redactorului grafic arătați că aceste proprietăți se îndeplinesc.

32. Desenați două drepte paralele. Cum vom determina distanța dintre ele?

Suma unghiurilor triunghiului

33. Desenați un triunghi scalen. Construiți toate unghiurile exterioare ale lui. Folosind mijloacele redactorului grafic, aflați mărimea tuturor unghiurilor construite.

Triunghiul dreptunghic

34. Desenați un triunghi dreptunghic și notați unghiul drept cu un „colț", folosind liniile subțiri (vezi fig. 287).

35. Construiți perechi de triunghiuri care ilustrează criteriile de egalitate a triunghiurilor dreptunghice. Însemnați pe desen laturile egale cu același număr de liniuțe, iar unghiurile egale — cu același număr de arculețe.

36. Construiți un triunghi dreptunghic, unghiul ascuțit al căruia este egal cu 30°. Verificați dacă se execută pentru el afirmația teoremei 19.1 și a problemei-cheie 1 ale punctului 19.

Circumferința și cercul

37. Însușiți instrumentul pentru construirea circumferințelor și cercurilor. Prin ce se deosebesc reprezentările circumferinței și a cercului? Ce instrument este necesar, ca din reprezentarea circumferinței de realizat reprezentarea cercului?

38. Desenați o circumferință, duceți coarda și diametrul ei. Care element al reprezentării circumferinței este necesar ca să ducem exact diametrul?

39. Desenați o circumferință și notați pe ea un punct. Ce instrumente sunt necesare pentru a duce o tangentă la circumferință în acest punct?

Circumferințe circumscrise și înscrise triunghiului

40. Desenați un triunghi scalen. Construiți circumferințele circumscrisă triunghiului și înscrisă în triunghi fără a folosi materialul teoretic din punctul 22. Acum construiți aceleași circumferințe, folosindu-vă de consecințele din teoremele 22.1 și 22.2. S-a reușit oare de executat mai repede și mai exact această construcție?

Probleme de construcții

41. În problemele de construcții se folosesc de compas și riglă. Dacă vreți să executați construcția cu ajutorul redactorului grafic, atunci care instrumente ale lui se pot folosi în loc de compas și riglă?

42. Însușiți instrumentul, care oferă posibilitatea de a reprezenta deferite figuri geometrice cu diferite culori.

43. Este oare în redactorul grafic ales de voi un instrument, care oferă posibilitatea găsirii automate a secțiunii figurii geometrice desenate?

LUCRARE DE PROIECT

Această rubrică este destinată mai întâi de toate celor care vor să se învețe a dobândi cunoștințe de sine stătător, să gândească creativ, să formeze, să-și exprime și să-și apere punctul său de vedere, să formuleze ipoteze și să găsească soluții raționale și nestandarte.

Primul pas care poate ajuta la atingerea scopului pus este participarea la un proiect.

Proiectul este o cercetare independentă pe o temă aleasă, care poate fi realizată individual sau în grup.

Vom oferi câteva sfaturi despre organizarea lucrării asupra proiectului și prezentarea rezultatelor cercetării.

1. În timpul alegerii temei este necesar să ținem cont de actualitatea ei, de disponibilitatea surselor de informație în literatură și internet. În același timp este foarte importantă dorința voastră de a se dovedi ca cercetător în lucrul asupra temei alese.

2. Lucrarea începe cu alcătuirea planului preliminar, în care sunt conturate ideea și etapele de îndeplinire a planului. După ce se face cunoștință cu principalele surse de informație, se întocmește planul final cu ajutorul conducătorului proiectului.

3. Este important să se formuleze clar scopurile cercetării. Ele pot fi scrise, de exemplu, în felul următor: studiază, descrie, analizează, demonstrează, compară etc.

4. Lucrarea se finalizează prin sintetizarea rezultatelor cercetării, tragerea de concluzii, trasarea perspectivelor studierii în continuare a temei.

5. Volumul aproximativ al lucrării este de 10–15 pagini. Adăugător poate fi prezentat materialul ilustrativ.

6. Lucrarea poate fi prezentată sub formă de referat, raport sau prezentare.

Mai jos este reprezentată lista temelor recomandate, care pot fi alese pentru proiect.

1. Geometria în jurul nostru
2. Foarfecele în mâinile unui geometru
3. Geometria și arta
4. Euclid și remarcabila sa carte „Elementele”
5. Geometria — una dintre cele mai vechi științe
6. Trei probleme celebre ale antichității — trisecțiunea unghiului, cvadratura cercului, dublarea cubului
7. O problemă — două rezolvări
8. Metoda LGP în problemele de construcții
9. Construcții pe teren cu ajutorul dispozitivelor și instrumentelor speciale
10. Apariția geometriei ca știință și principalele etape ale dezvoltării ei.

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII LA ÎNSĂRCINĂRI

12. Fig. 382. **14.** 1 punct, sau 4 puncte, sau 6 puncte. **15.** Cel mai mic număr de puncte de intersecție – 1, cel mai mare – 10. **16.** Fig. 383. **17.** 12 puncte. **18.** Fig. 384. **41.** 8 cm sau 56 cm. **43.** 1) Toate punctele segmentului *EF*; 2) punctele *A* și *B* (fig. 385); 3) astfel de puncte nu există.

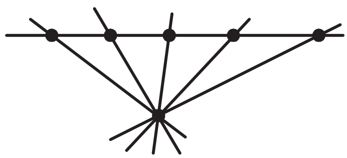


Fig. 382

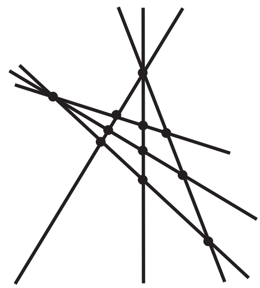


Fig. 383

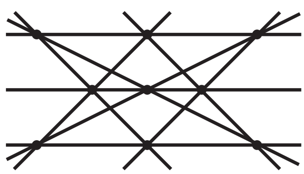


Fig. 384

Fig. 385

44. Astfel de puncte sunt două. Unul din ele este un punct interior C al segmentului AB astfel, încât $AC : BC = 1 : 2$, iar celălalt punct este astfel, încât punctul A este mijlocul segmentului BC. **45.** 4 cm. **49.** *Indicație*. Folosiți egalitatea: 1) $13 - 2 \cdot 5 = 3$; 2) $3 \cdot 5 - 13 = 2$; 3) $2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 = 1$. **50.** *Indicație*. Folosiți egalitatea: 1) $2 \cdot 11 - 2 \cdot 7 = 8$; 2) $3 \cdot 11 - 4 \cdot 7 = 5$. **74.** 60°. **75.** 108°. **78.** 68°. **79.** 153°. **80.** 1) 6°; 2) 0,5°. **82.** 50° sau 110°. **83.** 77° sau 163°. **87.** *Indicație*. Depuneți de la o semidreaptă arbitrară unghiul dat de 14 ori. Folosiți faptul că unghiul astfel format este cu 2° mai mare decât cel desfășurat. **88.** *Indicație*. Folosiți faptul că

$19° \cdot 19 = 361°$. **89.** Da. *Indicație.* Presupuneți că astfel de unghi nu există și obțineți o contradicție. **91.** 1) Vestic sau estic; 2) Nord-vestic sau nord-estic. **113.** 90°. **114.** 180°. **115.** 75°. **116.** 108°, 72°. **117.** 136°, 44°. **136.** 1) 124°; 2) 98°. **137.** 126°. **141.** 70°, 160°. **142.** 130°. **143.** 1) *Indicație.* $90° = 17° \cdot 5 + 5°$.

168. 48 cm. **169.** 13 cm. **171.** 120°. **206.** 3 cm. **207.** 10 cm. **209.** 2) *Indicație.* Demonstrați că $\angle AOM = \angle BOK$. Unghiul AOB este unghi desfășurat. Atunci $\angle AOM + \angle MOB = 180°$. De aici $\angle MOB + \angle BOK = 180°$. **212.** 20, 70. **243.** 4 cm sau 7 cm. **244.** 4 cm și 6 cm sau 5 cm și 5 cm. **248.** 26 cm sau 14 cm. **250.** 1) $\frac{5a}{7}$; 2) $\frac{9a}{14}$. **260.** 6 cm. **265.** *Indicație.* Folosind faptul că atunci când bisectoarea triunghiului este și înălțimea lui, atunci triunghiul este isoscel, demonstrați că triunghiurile MAD și KBD sunt isoscele. **266.** 8 cm. **267.** $AB : AC = 1 : 2$. **269.** 2 cm, 3 cm, 4 cm. *Indicație.* Segmentul BD este bisectoarea triunghiului ABC (fig. 386), segmentul CE este mediana lui, $BD \perp CE$. Demonstrați că ΔCBE este isoscel ($BC = BE$). Atunci $AB = 2BC$ și pot avea loc următoarele cazuri: $AB - BC = 1$ cm sau $AB - BC = 2$ cm, adică $BC = 1$ cm sau $BC = 2$ cm.

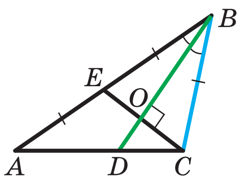


Fig. 386

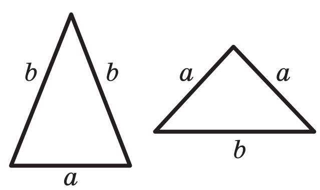


Fig. 387

270. 2 cm. *Indicație.* Demonstrați că triunghiurile KMC și KDA sunt isoscele. **288.** Nu. *Indicație.* Cercetați triunghiurile reprezentate în figura 387. **289.** *Indicație.* Fie ABC

și $A_1B_1C_1$ triunghiurile date, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, segmentele AM și A_1M_1 sunt medianele triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ corespunzător. Pe prelungirile segmentelor AM și A_1M_1 după punctele M și M_1 depuneți corespunzător segmentele MD și M_1D_1 astfel, încât $MD = AM$ și $M_1D_1 = A_1M_1$. Demonstrați că $AC = BD$ și $A_1C_1 = B_1D_1$. Apoi demonstrați egalitatea triunghiurilor ABD și $A_1B_1D_1$, MBD și $M_1B_1D_1$, și la urmă, ABC și $A_1B_1C_1$. **305.** *Indicație.* Fie ABC și $A_1B_1C_1$ triunghiurile date, segmentele AM și A_1M_1 — corespunzător medianele lor, $AM = A_1M_1$, $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$, $\angle CAM = \angle C_1A_1M_1$. Pe prelungirile segmentelor AM și A_1M_1 după punctele M și M_1 depuneți corespunzător segmentele MD și M_1D_1 astfel, încât $MD = AM$ și $M_1D_1 = A_1M_1$. Demonstrați că $AC = BD$ și $A_1C_1 = B_1D_1$. Apoi demonstrați egalitatea triunghiurilor ABD și $A_1B_1D_1$, de unde se obține ușor egalitatea triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$.

316. O mulțime. **322.** *Indicație.* Presupunem că dreptele a și b se intersectează. Alegem un punct oarecare de pe dreapta a, diferit de punctul de intersecție al dreptelor a și b. Prin acest punct se poate duce o dreaptă care intersectează dreapta a și este paralelă cu dreapta b, ceea ce contrazice condiției. **323.** 6 cm. **324.** 35°. **325.** 90°. **349.** Nu. **352.** *Indicație.* Demonstrați că ΔBKM este isoscel. **353.** *Indicație.* Demonstrați că $BF \parallel AC$ și $BD \parallel AC$, și folosiți axioma paralelismului dreptelor. **354.** 111° sau 69°. **378.** 40°. **383.** 40°, 70°, 70°. **384.** 121°. **388.** *Indicație.* Duceți prin punctul C o dreaptă, care este paralelă cu AB. **391.** *Indicație.* Demonstrați că triunghiurile AMO și CKO sunt isoscele. **393.** $AD : DB = 2 : 3$. **438.** 25°, 55°, 100°. **439.** 35°, 35°, 110°. **441.** 140°. **444.** *Indicație.* Aflați

unghiurile triunghiului ABC și demonstrați că triunghiurile AMB și MAC sunt isoscele. **445.** 36°, 72°, 72°. **446.** *Indicație.* Folosiți metoda reducerii la absurd. **448.** Ascuțitunghic. *Indicație.* Cercetați fiecare unghi al triunghiului pe rând. Deoarece suma celorlalte două unghiuri este mai mare de 90°, atunci unghiul cercetat este mai mic de 90°. Deoarece toate unghiurile vor fi mai mici de 90°, atunci triunghiul este ascuțitunghic. **449.** Nu. **451.** 36°, 72°, 72° sau 90°, 45°, 45°. **452.** $90° - \frac{\alpha}{2}$.
453. $\left(\frac{540}{7}\right)^{\circ}$, $\left(\frac{540}{7}\right)^{\circ}$, $\left(\frac{180}{7}\right)^{\circ}$. **454.** 90°, 40°, 50°. *Indicație.* Cercetați triunghiul DAK, unde punctul K este mijlocul segmentului AB. **455.** 36 cm. **464.** 37 cm. **466.** 3 cm. **467.** 12 cm. **469.** Da. **470.** *Indicație.* În triunghiul DAC, unghiul DAC este obtuz. Deci, $DC > AC$. **473.** *Indicație.* Luați pe dreapta m un punct arbitrar X și comparați suma $AX + BX$ cu lungimea segmentului AB. **474.** 3 cm. **475.** *Indicație.* Pe prelungirea medianei AM după punctul M, depuneți segmentul MD, care egal cu lungimea medianei și cercetați ΔABD. **477.** 40° sau 140°. Două rezolvări. **479.** 1) În orice punct al coridorului dintre intrările în palate (inclusiv punctele de lângă intrările în palate); 2) lângă intrarea în palata, care este situată la mijloc; 3) în orice punct al coridorului dintre intrările în a doua și a treia palată (inclusiv punctele de lângă intrările în palate). **480.** Mai mare de 1 m și nu mai mare de 5 m. **510.** *Indicație.* Demonstrați egalitatea triunghiurilor AKH și CMH. **511.** *Indicație.* Demonstrați că $\Delta MEN = \Delta NFM$. De aici rezultă că $MK = NK$. Pe lângă aceasta, $KE = FM = NE$. Deci, $MK = MN$. **512.** Nu. **514.** 50°, 130°. **527.** 30°, 1 cm. **528.** 30°. **529.** 9 cm. **530.** 15 cm. **533.** 8 cm. **534.** 6 cm. *Indicație.* Demonstrați că triunghiul ADB este isoscel. **536.** 21 cm.

554. 6 cm. **560.** 1,5 cm. **561.** 2,5 cm. **562.** Circumferința cu raza dată și centrul în punctul dat. **563.** Mediatoarea segmentului care unește punctele date. **564.** Două drepte, care sunt alcătuite din bisectoarele a patru unghiuri, create la intersecția dreptelor date. **565.** Toate punctele mediatoarei bazei date, cu excepția punctului de intersecție al acestei mediatoarei cu baza. **566.** Dreapta care este mediatoarea segmentului, ce este perpendicular pe dreptele date, și extremitățile căruia aparțin dreptelor date. **567.** O pereche de drepte paralele, fiecare fiind depărtată de la dreapta dată la distanța dată. **568.** *Indicație.* Uniți punctul M și centrul O al circumferinței și cercetați triunghiurile AOM și BOM. **569.** Toate punctele semiplanului căruia îi aparține punctul B și a cărui graniță este mediatoarea segmentului AB, cu excepția graniței acestui semiplan. **570.** Toate punctele planului ce nu aparțin cercului cu centrul A și raza AB. **572.** 55°, 85°, 40°. **574.** 20°. **592.** 1) 90°; 2) 120°. **593.** 12 cm. **595.** 40°. **596.** 120°. **601.** Toate punctele dreptei care trece prin punctul dat perpendicular pe dreapta dată, cu excepția punctului dat. **602.** Toate punctele bisectoarei unghiului, cu excepția vârfului unghiului. **603.** Toate punctele planului, în afară de dreapta dată. **604.** *Indicație.* Cercetând triunghiul OAK, demonstrați că $OK = 2AK$. **605.** *Indicație.* Folosiți proprietatea tangentelor duse la circumferință printr-un punct. **609.** 18°. **638.** 24 cm, 24 cm, 20 cm. **639.** 20 cm, 14 cm, 18 cm. **640.** 50°, 55°, 75°. **643.** *Indicație.* Folosiți proprietatea tangentelor duse la circumferință printr-un punct. **644.** *a*. **645.** 16 cm. *Indicație.* Demonstrați că suma perimetrelor triunghiurilor formate este egală cu perimetrul triunghiului dat. **646.** 0,5 cm. *Indicație.* Fie M_1 și M_2 – punctele de tangență ale circumferințelor înscrise corespunzător în triunghiurile ABD și DBC. Pentru segmentele DM_1 și DM_2 folosiți rezultatul din problema 643. **647.** *Indicație.* Folosiți faptul că bisectoarele triunghiului, inclusiv triunghiul *AMC,* se intersectează într-un punct. **648.** *Indicație.* Notați pe diferite laturi ale unghiului punctele *M* și *N*. Duceți bisectoarele unghiurilor *BMN* și *BNM*. Apoi notați pe diferite laturi ale unghiului punctele *E* și *F*. Duceți bisectoarele unghiurilor *BEF* și *BFE*. **649.** 36°, 36°, 108° *Indicație.* Folosiți faptul că triunghiurile *FAO* și *BOA* sunt isoscele. **651.** 52°, 52°, 76°. **652.** 3 cm, 7 cm. **683.** 1) *Indicație.* Construiți triunghiul dreptunghic în care ipotenuza este egală cu bisectoarea dată, iar unghiul ascuțit este egal cu jumătatea unghiului dat. **685.** *Indicație.* Construiți triunghiul dreptunghic în care una din catete este egală cu jumătate din baza dată, iar a doilea catetă este raza circumferinței. **688.** *Indicație.* Construiți triunghiul dreptunghic cu cateta, care este egală cu înălțimea dată și unghiul ascuțit opus, care este egal cu cel dat. **689.** *Indicație.* Construiți triunghiul dreptunghic în care ipotenuza este egală cu latura dată, iar cateta este egală cu înălțimea dată. **697.** *Indicație.* Construiți triunghiul dreptunghic o catetă a căruia egală cu diferența dintre catetă și rază, iar altă catetă este egală cu raza. Atunci unghiul opus celei de-a doua catetă este egal cu jumătate din unghiul ascuțit al triunghiului căutat. **701.** *Indicație.* Construiți o circumferință care trece prin trei puncte date. **702.** Construiți un unghi, care este egal cu 60°. Apoi folosiți egalitatea 6° = 60° – 54°. **704.** 1) 15°, 95°, 70°; 2) 46°, 59°, 75°. **705.** 25°, 65°. **706.** 1) Ascuțitunghic; 2) optuzunghic. **717.** *Indicație.* Punctul căutat aparține LGP, depărtate la distanța *AB* de dreapta *n*. LGP indicat este o pereche de drepte paralele cu dreapta *n*. Fiecare din punctele de intersecție ale acestor drepte cu dreapta *m* satisface condiția. Problema are două rezolvări. **724.** *Indicație.* Duceți un segment perpendicular pe cele două drepte paralele date, capetele *A* și *B* ale căruia aparțin acestei drepte. Atunci centrul circumferinței căutate aparține la două LGP: primului – egal depărtat de la punctele A și B și al doilea depărtat de la punctul dat în condiție la distanța $\frac{1}{2}AB$. **725.** *Indicație.* Locul geometric al centrelor circumferințelor ce sunt tangente la dreapta dată în punctul dat B este dreapta perpendiculară la cea dată și una astfel, că trece prin acest punct (punctul dat B nu aparține LGP). Locul geometric al centrelor circumferințelor care trec prin punctele A și B este mediatoarea segmentului AB. **731.** *Indicație.* Construiți triunghiul dreptunghic BCD în care cateta BC este egală cu cateta dată, iar cateta DC este egală cu suma ipotenuzei și a celeilalte catete. Atunci vârful A al triunghiului căutat ABC aparține mediatoarei segmentului BD. **732.** *Indicație.* Construiți triunghiul ADB în care $\angle D = 45°$, latura DB este egală cu suma catetelor date, iar latura AB este egală cu ipotenuza dată. **733.** *Indicație.* Construiți triunghiul ADB în care $\angle D = 135°$, latura DB este egală cu diferența catetelor date, iar latura AB este egală cu ipotenuza dată. **734.** *Indicație.* Construiți triunghiul DBC în care $\angle C = 90°$, cateta CB este egală cu cateta dată, iar cateta CD este egală cu diferența dintre ipotenuză și cealaltă catetă. Atunci vârful căutat A se află pe mediatoarea segmentului DB. **735.** *Indicație.* Construiți triunghiul ADC în care latura AC este egală cu latura dată, latura DC este egală cu suma celorlalte două laturi, iar unghiul DCA este egal cu unghiul dat. **736.** *Indicație.* Construiți triunghiul ADC conform laturei date AC, a unghiului dat C și laturii DC, care este egală cu diferența dată a laturilor. Vârful B al triunghiului căutat ABC se află pe mediatoarea segmentului AD. Construcția descrisă este aplicată în cazul, când unghiul dat C este alăturat la cea mai mare din cele două laturi necunoscute. **737.** *Indicație.*

Construiți triunghiul *ADC*, în care $\angle D = 90° + \frac{\beta}{2}$, unde β este unghiul dat, latura *AC* este egală cu latura dată, iar latura *AD* este egală cu diferența dată a laturilor. Atunci vârful căutat *B* se află pe mediatoarea segmentului *DC*. **738.** *Indicație*. Construiți triunghiul *ADC* în care $\angle D = \frac{\beta}{2}$, unde β este unghiul dat, latura *AC* este egală cu latura dată, iar latura *AD* este egală cu suma dată a laturilor. Atunci vârful căutat *B* se află pe mediatoarea segmentului *DC*. **740.** *Indicație*. Construiți un triunghi dreptunghic conform catetei, care este egală cu înălțimea și a unghiului opus, care este egal cu cel dat. Ipotenuza acestui triunghi este una din laturile triunghiului căutat. Acum problema s-a redus la problema 735. **741.** *Indicație*. Construiți triunghiul dreptunghic *BDM* în care ipotenuza *BM* este egală cu mediana dată, cateta *BD* — cu înălțimea dată. Atunci centrul circumferinței circumscrise triunghiului căutat se află pe dreapta, ce este perpendiculară pe segmentul *DM* și care trece prin punctul *M*. **742.** *Indicație*. Construiți triunghiul *ABD* în care laturile *AB* și *AD* sunt egale cu cele două laturi date, iar latura *BD* este de 2 ori mai mare decât mediana dată. **743.** *Indicație*. Construiți triunghiul *ADC* în care *AC* este latura dată, latura *AD* este de 2 ori mai mare decât mediana dată, iar înălțimea, dusă din vârful *D* este egală cu înălțimea dată. Arătați că latura *DC* este egală cu una din laturile necunoscute ale triunghiului căutat. **745.** 65°. **746.** 15°, 75°. **747.** 180°.

749. $\frac{4a}{5}$. **750.** Punctele X_1 și X_1 sunt reprezentate în figura 388. **751.** Punctele Y_1 și Y_1 sunt reprezentate în figura 389. **754.** 60° sau 180°. Două rezolvări. **756.** 20°. **758.** 42 cm. **773.** 15 cm. **784.** 45°, 45°, 90°. **787.** 30°, 40°, 110°. **788.** 35°. **789.** 10°. **790.** 52°, 52°, 76°. **791.** 70°, 70°, 40°. **796.** 33°, 57°. **797.** 45°. **801.** 50°, 50°, 80° sau 80°, 80°, 20°. **803.** 70°, 70°, 40° sau 50°, 50°, 80°. **804.** 135°. **807.** 22 cm. **808.** 9 cm. **809.** 60°. **813.** 120°. **817.** 60°. **821.** 6 cm. **823.** *Indicație.* Fie punctul O centrul circumferinței. Demonstrați că $\angle COD = 180°$. **824.** 114°. **826.** *Indicație.* Demonstrați că punctele O_1 și O_2 aparțin bisectoarei unghiului B.

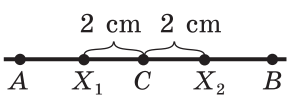


Fig. 388

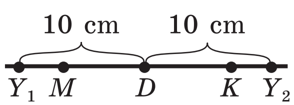


Fig. 389

RĂSPUNSURI LA ÎNSĂRCINĂRILE „CONTROLEAZĂ-TE” ÎN FORMĂ DE TEST

Numărul exercițiului	Numărul problemei										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	C	D	A	C	C	C	B	B	C	B	C
2	B	B	D	D	B	C	B	B	A	C	B
3	D	C	C	A	A	B	C	C	B	C	A
4	C	D	A	C	B	A	C	C	D	B	D

PROVENIENȚA TERMENILOR MATEMATICI

Axiomă	din grecescul *axios* — recunoaștere demnă
Bisectoare	de la latinul *bis* — de două ori și *sectrix* — secantă
Geometrie	de la grecescul *geo* — pământ și *metreo* — a măsura
Ipotenuză	de la grecescul *gipotenusa* — aceea ce strânge
Grad	de la latinul *gradus* — pas, nivel
Diagonală	de la grecescul *dia* — prin și *gonium* — unghi
Diametru	de la grecescul *diametros* — curmeziș
Catetă	de la grecescul *katetos* — perpendicular, vertical
Pătrat	de la latinul *quadratus* — patrulater (de la quattuor — patru)
Cub	de la grecescul *kybos* — zar pentru joc
Matematică	de la grecescul *mathematike* (de la *mathema* — cunoștință, știință)
Mediană	de la latinul *medius* — mijlociu
Metru	de la franțuzescul *mètre* — băț de măsurare sau de la grecescul *metron* — măsură
Paralelism	de la grecescul *parallelos* — cel ce merge alături
Perimetru	de la grecescul *peri* — în jur și *metreo* — a măsura
Perpendiculară	de la latinul *perpendicularis* — vertical, fir cu plumb
Planimetrie	de la grecescul *planum* — plan
Proporție	de la latinul *proportio* — raportul
Rază	de la latinul *radius* — spiță în roată, rază de lumină
Teoremă	de la grecescul *theoreo* — cercetez, gândesc
Raportor	de la latinul *transportaro* — a trece, a muta
Figură	de la latinul *figura* — aspect exterior, chip
Formulă	de la latinul *formula* — formă, regulă
Coardă	de la grecescul *chorde* — strună, pânză pentru arc
Centru	de la latinul *centrum* — ascuțișul piciorului de compas
Compas	de la latinul *circulus* — circumferință

INDICE DE MATERIE

CUPRINS

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

підручник для 7 класу з навчанням румунською мовою закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Переклад з української мови
Перекладач Сучеван Микола Штефанович
Румунською мовою

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам «Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

У підручнику з навчальною метою використано фотоматеріали, розміщені у вільному доступі в мережі «Інтернет».

Редактор *О. Литвин*
Обкладинка *Н. Мінєєва*
Комп'ютерна верстка *Л. Ревзон*
Коректорка *О. Міхайлович*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 17,00. Обл.-вид. арк. 15,53. Тираж 2 222 прим.

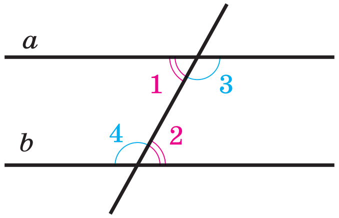
Зам. № 24-11-1110

ТОВ «ВИДАВНИЦТВО АТЛАНТ»
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7928 ВІД 08.09.2023
Адреса редакції: 02095, м. Київ, вул. Княжий затон, 9а, офіс 369
E-mail: atlant_publishing@ukr.net

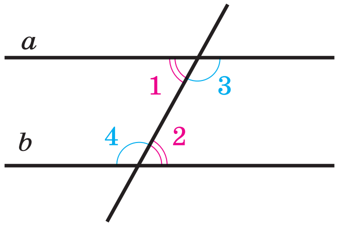
Віддруковано у ТОВ «ПЕТ», вул. Максиміліанівська,17, м Харків, 61024
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 6847 від 19.07.2019р.

Форзац 3

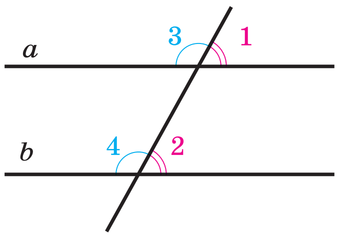
ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ



Якщо $\angle 1 = \angle 2$ ($\angle 3 = \angle 4$), то $a \parallel b$

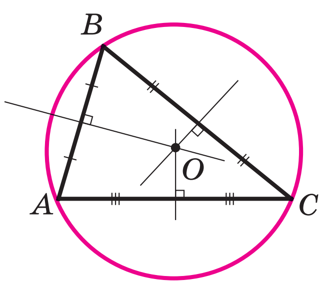


Якщо $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ ($\angle 2 + \angle 3 = 180°$), то $a \parallel b$



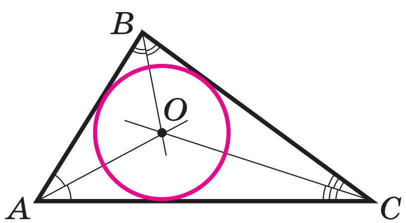
Якщо $\angle 1 = \angle 2$ ($\angle 3 = \angle 4$), то $a \parallel b$

КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА



Центр O кола — точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника

КОЛО, ВПИСАНЕ В ТРИКУТНИК



Центр O кола — точка перетину бісектрис кутів трикутника

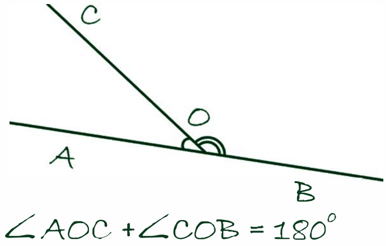
Форзац 4

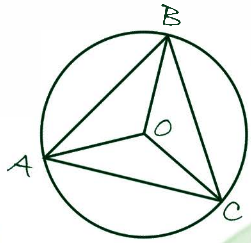
ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

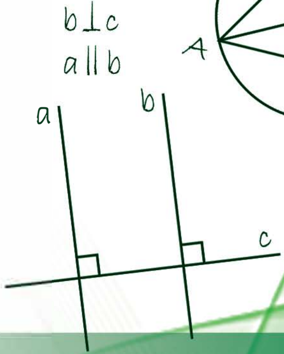
Друковані літери		Назви літер
A	a	а
B	b	бе
C	c	це
D	d	де
E	e	є
F	f	еф
G	g	ге
H	h	аш
I	i	і
J	j	йот
K	k	ка
L	l	ель
M	m	ем
N	n	ен
O	o	о
P	p	пе
Q	q	ку
R	r	ер
S	s	ес
T	t	те
U	u	у
V	v	ве
W	w	дубль-ве
X	x	ікс
Y	y	ігрек
Z	z	зет

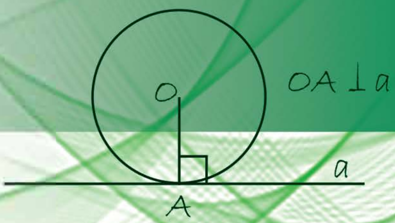
ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТ

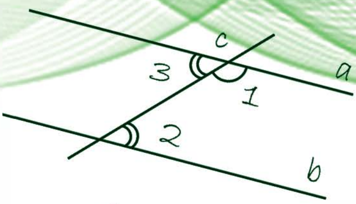
Друковані літери		Назви літер
Α	α	альфа
Β	β	бета
Γ	γ	гамма
Δ	δ	дельта
Ε	ε	епсилон
Ζ	ζ	дзета
Η	η	ета
Θ	θ, ϑ	тета
Ι	ι	йота
Κ	κ	каппа
Λ	λ	ламбда
Μ	μ	мю
Ν	ν	ню
Ξ	ξ	ксі
Ο	ο	омікрон
Π	π	пі
Ρ	ρ	ро
Σ	σ	сигма
Τ	τ	тау
Υ	υ	іпсилон
Φ	φ	фі
Χ	χ	хі
Ψ	ψ	псі
Ω	ω	омега

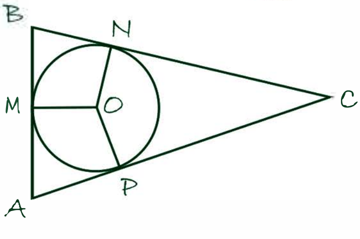












Arcadie Merzleac Mihail Iakir

GEOMETRIA 7

9 789664 743768
видавництво АТЛАНТ