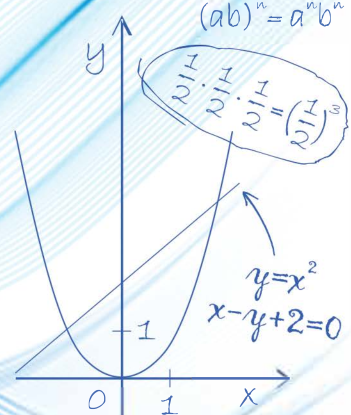
Arkagyij **Merzljak**
Mihajlo **Jakir**

ALGEBRA 7



видавництво
АТЛАНТ
ВИДАВНИЦТВО «АТЛАНТ»

«Моя любов — Україна і математика» — викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві Михайлу Пилиповичу Кравчуку (1892–1942).

Ми сподіваємося, що це патріотичне висловлювання видатного українського математика стане для вас надійним дороговказом на шляху до професіоналізму.

Квадрати й куби натуральних чисел від 1 до 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Степені чисел 2 і 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049

Властивості степеня з натуральним показником

$$a^m a^n = a^{m+n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0,\ m > n)$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$

Формули скороченого множення

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Формули різниці та суми кубів

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Arkagyij Merzljak
Mihajlo Jakir

ALGEBRA

Tankönyv az általános oktatási rendszerű tanintézetek 7. osztálya számára

Ajánlotta Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma

ВИДАВНИЦТВО АТЛАНТ
КИЇВ 2024

УДК 373.167.1:512
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 05.02.2024 № 124)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Підручник відповідає модельній навчальній програмі «Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.)

Переклад за виданням:

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра : підруч. для 7 кл. з навчанням угорською мовою закладів заг. серед. освіти / переклад Д. Ф. Поллої — Київ : ВИДАВНИЦТВО АТЛАНТ, 2024. — 352 с. : іл.

УДК 373.167.1:512

ISBN 978-966-474-377-5.(укр.)
ISBN 978-617-8159-36-8 (угорськ.)

ISBN 978-966-474-377-5.(укр.)
ISBN 978-617-8159-36-8 (угорськ.)

A szerzőktől

KEDVES HETEDIKESEK!

Elkezdtek tanulni egy új tantárgyat — az **algebrát**. Ez egy ősi és bölcs tudomány. Az algebra ismerete rendkívül fontos.. Ma már nincs olyan tudományterület, ahol ne alkalmaznák a matematika vívmányait. A fizikában és a kémiában, a csillagászatban és és a biológiában, a földrajzban és a közgazdaságtanban, sőt a nyelvészetben és a történelemben is használnak „matematikai eszközöket”.

Az algebra hasznos és nagyon érdekes tantárgy. Tanulmányozása fejleszti az elemző és logikus gondolkodást, a kutatási készségeket, a matematikai kultúrát, az intelligenciát.

Az algebra elsajátításával megtanulod, hogyan oldhatsz meg különböző típusú egyenleteket, hogyan hozhatsz létre összefüggéseket a mennyiségek között, és hogyan lehet különféle valós helyzetekre matematikai modelleket összeállítani.

A tankönyv szövege 9 paragrafusra oszlik, amelyek mindegyike pontokból áll. A pontok elméleti anyagot tartalmaznak. Tanulmányozása során fordítsatok különös figyelmet a **félkövér**, ***félkövér dőlt*** betűkkel és *dőlt* betűkkel nyomtatott szövegekre; így van a könyvben kiemelve a meghatározások, a szabályok és a legfontosabb matematikai állítások.

Az elméleti anyag ismertetése feladatok megoldásával fejeződik be. A könyvben a feladatok megoldásának csak az egyik lehetséges módját mutatjuk be.

Mindegyik pont végén találtok majd példákat. Azonban ezeknek a példáknak a megoldásához, csak azután fogjatok hozzá, ha már megtanultátok az elméleti tudnivalókat. A feladatok könnyű, közepesen nehéz és nehéz feladatokat tartalmaznak. Az utóbbiakat csillaggal (*) jelöltük.

Minden pont végén található egy rovat **Gyakoroljuk a nem hagyományos módszereket** címmel. Itt olyan feladatok vannak, amelyek megoldásához nem algebrai ismeretekre, hanem csak józanészre, találékonyságra, csavaros észjárásra lesz szükségetek. E feladatokkal problémamegoldó képességetek fejlesztését tűzzük ki célul. A feladatok nemcsak a matematikában és a tanulásban lesznek hasznotokra. Segítségükkel megtanultok váratlan és nem hagyományos döntéseket hozni.

A **Ukránul helyesen mondjuk és írjuk** rovat példákat tartalmaz a helyes matematikai kifejezésekre. A **Ha elkészültél a házi feladattal** rovatban az algebra történetéből származó történetek kerülnek bemutatásra, különös tekintettel az ukrán tudományos közösség hozzájárulására e tudomány fejlődéséhez.

Sok sikert kívánunk!

TISZTELT KOLLÉGÁK!

A könyv nagy mennyiségű és változatos didaktikai anyagot tartalmaz. <u>Egy tanév alatt azonban nem lehet minden feladatot megoldani, és erre nincs is szükség</u>. Ugyanakkor sokkal kényelmesebb a munkavégzés, ha jelentős a feladatkínálat. Ez lehetővé teszi a szintdifferenciálás és az egyéni oktatási szemlélet elvének érvényesülését.

Bízunk benne, hogy ez a tankönyv megbízható segítőtársuk lesz az Önök nehéz és nemes munkájában. Nagy örömünkre szolgál majd, ha tetszeni fog Önöknek.

Kék **színnel** jelöljük a házi feladathoz javasolt feladatok sorszámát, **lilával pedig** a szóbeli megoldásra javasolt feladatok sorszámátszámát.

Alkotói ihletet és türelmet kívánunk Önöknek.

Egyezményes jelek

***n*°** az elemi és közepes tanulmányi eredményi szinteknek megfelelő feladatok;

***n*•** a megfelelő tanulmányi eredményi szintnek megfelelő feladatok;

***n*••** a magas tanulmányi eredményi szintnek megfelelő feladatok;

n* matematikai szakköröknek és fakultatívoknak megfelelő feladatok;

● a tétel bizonyításának befejezése;

◀ a feladat megoldásának befejezése;

 a számítógép segítségével megoldható feladatok jelölése;

 az Ukránul helyesen mondjuk és írjuk rovat;

 Ha elkészültél a házi feladattal c. rovat.

§ 1 ALGEBRAI KIFEJEZÉSEK. EGYVÁLTOZÓS EGYENLETEK

- Ebben a részben megtanuljátok a kifejezések egyszerűsítését, valamint megismeritek azokat a képleteket és technikákat, amelyek segítenek leegyszerűsíteni a kifejezéseket.
- Meg fogjátok tanulni, hogy egy szám négyzetre és köbre emelése egy új számtani művelet különböző esetei.
- Megtanuljátok az algebrai kifejezések osztályozását.
- Megtanulod, hogy sok ismert egyenlet kombinálható egy osztályba. Megtanuljátok, hogy sok ismert egyenlet egy adott osztályba sorolható.

1. Bevezetés az algebrába

Most elkezditek tanulmányozni az algebrát. Vegyétek figyelembe, hogy már ismeritek ennek a tudománynak az „ábécéjét". Tehát amikor képleteket írtok le és egyenleteket készítettek, ekkor a számokat betűkkel kellett jelöltétek, és betűkifejezéseket hoztatok létre.

Például, a^2, $(x + y)^2$, $2\,(a + b)$, $\dfrac{x - y + z}{2}$, abc, $\dfrac{m}{n}$ є matematikai felírásokat **betűkifejezéseknek** nevezzük.

Tudnotok kell, hogy nem minden betűt, számot, különböző műveletileket és zárójeleket tartalmazó kifejezést nevezünk betűkifejezésnek. Például a $2x$ +) – (kifejezésnek nincs semmi értelme.

Azt a kifejezést, amely egyetlen betűből áll – betűkifejezésnek tekinthetjük. Például a $2x$ +) – (ez egy értelmetlen karakterkészlet.

Viszont az egy betűből álló kifejezést betűkifejezésnek tekintjük.

Megvizsgáljuk a $2\ (a + b)$ kifejezést. Már tudjátok, hogy ennek a kifejezésnek a segítségével ki tudjuk számítani az a és b oldalú téglalap kerületét. Például, ha az a és b betűt 3-mal és 4-gyel helyettesítjük, akkor a $2\ (3 + 4)$ **számkifejezést** kapjuk. Ebben az esetben a téglalap kerülete 14 egység lesz. A 14-et a $2\ (3 + 4)$ **számkifejezés értékének** nevezzük.

Az a és b betűk helyére bármilyen számot behelyettesíthetünk. Természetesen a változó különböző értéke mellett a változókat tartalmazó kifejezésnek az értéke is különböző lesz.

Mivel a betűket bármilyen számmal helyettesíthetjük, ezért a kifejezésekben a betűket **változóknak** nevezzük, magát a betűkifejezést pedig **változókat tartalmazó kifejezésnek** (ha a kifejezés csak egy változót tartalmaz, akkor **változót tartalmazó kifejezésnek** nevezzük).

Megvizsgáljuk a $2x + 3$ kifejezést. Ha az x változót $\frac{1}{2}$-re cseréljük, akkor a $2 \cdot \frac{1}{2} + 3$ számkifejezést kapjuk. Azt mondjuk, hogy az $\frac{1}{2}$ az x változó értéke, a 4 pedig a $2x + 3$ kifejezés értéke, ha $x = \frac{1}{2}$.

A számkifejezések és a változókat tartalmazó kifejezések együtt alkotják az **algebrai kifejezéseket**.

Algebrai kifejezések

- Számkifejezések
- Változókat tartalmazó kifejezések (betűkifejezések)

Megvizsgáljuk az algebrai kifejezések két csoportját:

I. csoport	**II. csoport**
$x - y^3$	$\frac{1}{x}$
$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{(a+b)^2}$
$\frac{1}{3}b^2 + 5a$	$\frac{m}{n+3}$
$\frac{mn}{7}$	$5 - \frac{x}{y^2}$

Mindkét csoport kifejezései a következő műveleteket tartalmazzák: összeadást, kivonást, szorzást, hatványozást és osztást. Az első csoportban nem találtok olyan kifejezést, amelyikben előfordulna változóval történő osztás. Ezért az első csoport kifejezéseit **egész kifejezéseknek** nevezzük. A második csoport kifejezései nem egész kifejezések.

A 7. osztályban az egész kifejezésekről fogunk tanulni.

PÉLDA AZ a, b és m változók értékei olyanok, hogy $a - b = 4$, $m = -5$. Mennyivel egyenlő a $7bm - 7am$ kifejezés értéke?

Megoldás: A szorzás széttagolhatósági és felcserélhetőségi tulajdonságának felhasználásával a következőt kapjuk:

$$7bm - 7am = 7m(b - a) = 7 \cdot (-5) \cdot (-4) = 7 \cdot 20 = 140.$$

Felelet: 140. ◀

?

1. Hogyan nevezhetjük még másképpen a betűkifejezéseket?
2. Mit nevezünk algebrai kifejezéseknek?
3. Mely algebrai kifejezéseket nevezzük egész kifejezéseknek

GYAKORLATOK

1.° Határozzátok meg a számkifejezések értékét:

1) 0,72 + 3,018; 3) 1,8 · 0.3; 5) 72 : 0,09;
2) 4 – 2,8; 4) 5,4 : 6; 6) 9 : 4.

2.° Mennyi a kifejezés értéke:

1) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$; 5) $\frac{46}{75} : \frac{23}{45}$; 9) $6 - 1\frac{3}{5}$;
2) $\frac{3}{7} - \frac{2}{9}$; 6) $\frac{2}{3} : 4$; 10) $4\frac{2}{7} - 1\frac{4}{9}$;
3) $\frac{7}{16} \cdot \frac{8}{35}$; 7) $10 : \frac{5}{11}$; 11) $8\frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{14}$;
4) $\frac{4}{9} \cdot 18$; 8) $2\frac{3}{8} + 4\frac{1}{6}$; 12) $1\frac{3}{5} : 5\frac{1}{3}$?

3.° Számítsátok ki a kifejezések értékét:

1) $3{,}8 + (-2{,}5)$;
2) $-4{,}8 + 4{,}8$;
3) $-1 + 0{,}39$;
4) $9{,}4 - (-7{,}8)$;
5) $4{,}2 - 5{,}7$;
6) $0 - 7{,}8$;
7) $0 - (-2{,}4)$;
8) $-4{,}5 - 2{,}5$;
9) $8 \cdot (-0{,}4)$;
10) $-1{,}2 \cdot (-0{,}5)$;
11) $-48 \cdot 0$;
12) $-3{,}3 : (-11)$;
13) $3{,}2 : (-4)$;
14) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$;
15) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2$.

4.° Mennyi a kifejezések értéke:

1) $18\frac{5}{12} - \frac{7}{12} \cdot 1\frac{19}{21} - \frac{17}{72} \cdot \frac{2}{3}$;
2) $\left(6\frac{3}{4} - 5\frac{1}{8} : 1\frac{9}{32}\right) \cdot \frac{5}{11}$;
3) $(-1{,}42-(3{,}22)) : (-0{,}4) + (-6) \cdot (-0{,}7)$;
4) $\left(-\frac{7}{18} + \frac{11}{12}\right) : \left(-\frac{19}{48}\right)$;
5) $\left(-3\frac{1}{12} - 2\frac{1}{15}\right) : \left(-5\frac{3}{20}\right)$?

5.° Számítsátok ki a kifejezések értékét:

1) $14\frac{7}{15} - 3\frac{3}{23} \cdot \frac{23}{27} - 1\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$;
2) $\left(5\frac{8}{9} : 1\frac{17}{36} + 1\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{5}{21}$;
3) $(-3{,}25 - 2{,}75) : (-0{,}6) + 0{,}8 \cdot (-0{,}7)$;
4) $\left(-1\frac{3}{8} - 2\frac{5}{12}\right) : 5\frac{5}{12}$.

6.° Határozzátok ki a kifejezések értékét:

1) $2x - 3$ ha $x = 4;\ 0;\ -3$;
2) $\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b$ ha $a = -6$, $b = 16$;
3) $3m - 5n + 3k$ ha $m = -7$, $n = 1{,}4$, $k = -0{,}1$.

7.° Számítsátok ki a kifejezések értékét:

1) $0{,}4y + 1$ ha $y = -0{,}5$; 8; -10;

2) $\frac{2}{7}c - 0{,}2d$ ha $c = -28$, $d = 15$.

8.° Melyik egész kifejezés az alábbiak közül:

1) $7a + 0{,}3$;
2) $5x\left(y - \frac{1}{3}\right)$;
3) $\frac{a+b}{c}$;
4) $\frac{a+b}{4}$;
5) $\frac{3m}{5} + \frac{5}{3m}$;
6) $9x - 5y + \frac{1}{z}$?

9.° Az összeg, különbség, szorzat, hányados kifejezések felhasználásával olvassátok el az alábbi algebrai kifejezéseket, és válasszátok ki közülük az egész kifejezéseket:

1) $a - (b + c)$;
2) $a + bc$;
3) $x - \frac{y}{z}$;
4) $2m - 10$;
5) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$
6) $(a + b)c$;
7) $ac + bc$;
8) $\frac{a}{b+4}$
9) $(a - b)(c + d)$.

10.° Írjátok le kifejezések alakjában:

1) az a szám ellentettjét;
2) az a szám reciprok értékét;
3) az x és y számok összegét;
4) az x és y számok összegének ellentettjét;
5) az x és y számok összegének reciprok értékét;
6) az a számnak és az a szám négyzetének az összegét;
7) az a szám és a b szám ellentettjének a hányadosát;
8) az a és b számok összegének és a c szám ellentettjének a szorzatát;
9) az m és n számok szorzatának és p és q számok hányadosának a különbségét!

11.° A ceruza x, a füzet pedig y hrivnyába kerül. Írjátok fel változókat tartalmazó kifejezések alakjában az alábbiakat:

1) mennyibe kerül 5 ceruza és 7 füzet;
2) mennyivel kell többet fizetni a darab füzetért, mint b darab ceruzáért?

12.° A munkás fizetéskor egy 1000 hrivnyás, *a* darab 500 hrivnyás és *b* darab 100 hrivnyás bankjegyet kapott. Írjátok fel kifejezés alakjában, hogy mennyi volt a munkás fizetése!

13.• Írjátok le számkifejezés alakjában, és határozzátok meg az értékét:

1) –12 és 8 összegének és 0,5-nek a szorzata;
2) –12 és 8 szorzatának és 0,5-nek az összege;
3) –1,6 és –1,2 összegének és különbségének a hányadosa;
4) –10 és 6 összegének a négyzete;
5) –10 és 6 négyzeteinek az összege!

14.• Írjátok le számkifejezés alakjában, és határozzátok meg az értékét:

1) $\frac{4}{9}$ és $-\frac{1}{x}$ összegének és a-nek a hányadosa $-\frac{14}{27}$;
2) –1,5 és 4 szorzatának és 2-nek a különbsége;
3) –1,9 és 0,9 összegének és különbségének a szorzata;
4) 6 és 8 különbségének a köbe!

15.• Két, egymástól 300 km-re lévő városból, egyszerre indul el egymással szemben két gépkocsi. Az egyik sebessége *m* km/h, a másiké pedig *n* km/h. Hány óra múlva találkozik egymással a két gépkocsi? Írjátok fel változót tartalmazó algebrai kifejezésként!

16.• Két, egymástól *s* km-re lévő városból, egyidejűleg és egy irányban egy gyalogos és egy kerékpáros indult el. A gyalogos *a* km/ó, a kerékpáros *b* km/ó sebességgel haladt. Írjátok fel változót tartalmazó kifejezés formájában, hány óra múlva éri utol a kerékpáros a gyalogost! Számítsátok ki a kapott kifejezés értékét, ha $a = 4$, $b = 12$ és $s = 12$.

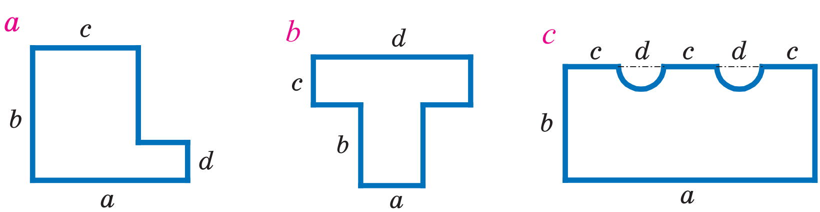
17.• Adjuk meg algebrai kifejezés alakjában:

1) az *a* és *b* számok különbségének és összegének háromszoros szorzatát;
2) három egymást követő természetes szám összegét, ha a legkisebb egyenlő n-nel;

3) három egymást követő páros szám szorzatát, ha a legnagyobb egyenlő $2k$-val;
4) azt a számot, amely a ezresből, b százasból és c egyesből áll;
5) fejezzétek ki az x méter y centimétert centiméterben;
6) fejezzétek ki az m óra n perc p másodpercet másodpercben!

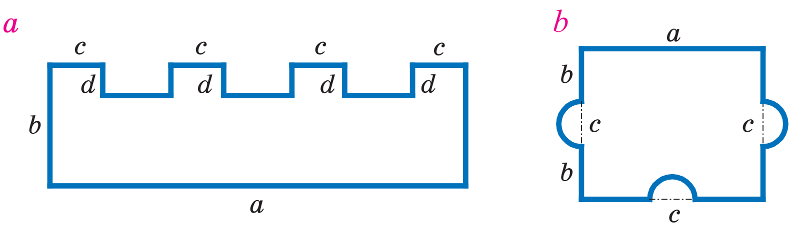
18.• Adjuk meg algebrai kifejezés alakjában:
1) négy egymást követő természetes szám szorzatát, amelyek közül a legnagyobb x;
2) két egymást követő páratlan természetes szám szorzatának és közülük a kisebbiknek a különbségét, ha a nagyobbik szám $2k + 1$;
3) fezezzétek ki a tonna b mázsát kilogrammban!

19.•• Állítsatok össze kifejezést a kék vonallal határolt alakzatok kerületének és területének kiszámítására (1. ábra)!



1. ábra

20.•• Állítsatok össze kifejezést a kék vonallal határolt alakzatok kerületének és területének kiszámítására (2. ábra)!



2. ábra

21.•• Az a és b változók értékei olyanok, hogy $a + b = –8$, $c = 4$. Mennyivel egyenlő az alábbi kifejezések értéke:

1) $a + b – c$; 2) $0,5\,(a + b) + c$; 3) $3ac + 3bc$?

22.•• Az m és n változó értékei olyanok, hogy $m – n = 5$, $k = –2$. Mennyivel egyenlő az alábbi kifejezések értéke:

1) $(n – m)\,k$; 2) $2m – 2n + 3k$?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

23. (*Ukrán folklórból származó feladat.*) A molnár a megőrölt gabona $\frac{1}{10}$-ét kapja fizetségül. Hány pud gabonát vitt a malomba a gazda, ha 99 pud lisztet vitt haza?

24. Az étkezdébe káposztát, sárgarépát és burgonyát szállítottak. Káposztából 64 kg-ot, a sárgarépából a káposzta tömegének $\frac{5}{8}$-át, a burgonyából pedig a sárgarépa 180%-át. Hány kilogramm zöldséget szállítottak az étkezdébe összesen?

25. Ismert, hogy az a és b természetes számok, $\frac{a}{b}$ az pedig valódi tört. Állíthatjuk-e, hogy:

1) $a – b > 0$; 2) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; 3) $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$?

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

26. Bizonyítsátok be, hogy:

1) a $3x + 1 = 21 – x$ egyenlet gyöke 5;

2) a –2 nem gyöke az $x\,(x + 4) = 4$ egyenletnek!

27. Oldjátok meg az egyenleteteket:

1) $0,3x = 9$; 2) $–2x = 3$; 3) $15x = 0$.

28. Bontsátok fel a zárójeleket:

1) $2\,(x – 3y + 4z)$; 2) $–0,4\,(–5 + 1,5y)$.

29. Vonjátok össze az egynemű tagokat:

1) $4a + 9a – 18a + a$; 2) $1,2a – a + b – 2,1b$.

30. Bontsátok fel a zárójeleket, és vonjátok össze az egynemű tagokat:

1) $(x + 3{,}2) - (x + 4{,}5)$; 2) $1{,}4\,(a - 2) - (6 - 2a)$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

31. Adott 12 természetes szám. Bizonyítsátok be, hogy közülük, mindig ki lehet választani kettőt úgy, hogy a különbsége osztható legyen 11-gyel!

Rövid könyv a helyrerakásról és az összevonásról

Az új témához készülve megismételtétek az egyenletek. Az egyik tulajdonsághoz köthető az algebra szó eredete.

A IX. században az ismert tudós, Muhammad ibn Músza al-Hvárizmi (Hvárizm városában született Perzsiában, Músza fiaként) írt egy értekezést az egyenletek megoldásának módszereiről. Ebben az időben a negatív számokat hamis, abszurd számoknak tartották. Ezért, amikor megoldásul hamis számot kaptak, akkor valós számokká alakították át őket úgy, hogy átvitték őket az egyenlet másik oldalára. Az ilyen átalakításokat al-Hvárizmi helyrerakásnak nevezte (arabul al-dzsabr). **Az egyenlet két oldalán lévő azonos tagok összevonását** rövidítésnek (arabul al-mukabala).

Muhammad ibn Músza al-Hvárizmi

(IX. század)

Közép-ázsiai matematikus, csillagász, geográfus. Ő volt az első, aki munkáiban az algebrát a matematika önálló ágának tekintette.

A tanulmány címe Rövid könyv a helyrerakásról és az összevonásról (arabul – Hiszáb al-dzsabr walmukába).

Később az al-dzsabr szóból alakult ki az algebra kifejezés.

A XII. században al-Hvárizmi műveit lefordították latinra. A középkori Európában al-Hvárizmi nevét Algorizmi-nek írták át. A tanulmányában előforduló szabály többsége Dixit Algorizmi (Algorizm mondta) szavakkal kezdődik. Fokozatosan megszokták, hogy ezekkel a szavakkal kezdődnek a szabályok, és az Algorizmi kifejezést már nem a szerző nevével kapcsolták össze. Így alakult ki az algoritmus kifejezés, amelyen azt az eljárást értjük, amikor véges számú lépések végrehajtása a feladat megoldásához vezet.

Ezekkel az eljárásokkal részletesebben az informatikaórákon ismerkedtek meg.

2. Egyváltozós lineáris egyenletek

Megvizsgálunk 3 egyenletet:

$$2x = -3,\ 0x = 0,\ 0x = 2.$$

A –1,5 az első egyenlet egyetlen gyöke.

Mivel bármely számot nullával szorozva nullát kapunk, ezért a második egyenlet gyöke bármilyen szám lehet.

A harmadik egyenletnek nincs gyöke.

Annak ellenére, hogy a három egyenletnek a megoldásai teljesen eltérőek, a felírásuk módja hasonló: mindegyiket fel tudjuk írni $ax = b$ alakban, ahol x a változó, az a és b pedig számok.

Meghatározás. Az $ax = b$ alakú egyenleteket, ahol x változó, a és b tetszőleges számok, egyváltozós lineáris egyenleteknek nevezzük.

Lássunk néhány példát egyváltozós lineáris egyenletre:

$$\frac{1}{2}x = 7;\ -0{,}4x = 2{,}8;\ -x = 0.$$

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy az $x^2 = 0$, $(x - 2)(x - 3) = 0$, $| x | = 5$ egyenletek nem lineáris egyenletek.

A **félkövér** betűkkel jelölt szövegrész az egyváltozós lineáris egyenlet magyarázatát adja. A matematikában azokat a mondatokat, amelyekben egy kifejezés (fogalom, objektum) lényegét fogalmazzák meg, **meghatározásnak** nevezzük.

Tehát megfogalmaztuk vagy megadtuk az egyváltozós lineáris egyenlet meghatározását.

Megoldjuk az $ax = b$ egyenletet az a és b különböző értékeire.

1) Ha $a \neq 0$, akkor az $ax = b$ egyenlet mindkét oldalát elosztva a-val azt kapjuk, hogy $x = \frac{b}{a}$. Így tehát levonhatjuk a következtetést: *ha $a \neq 0$, akkor az $ax = b$ egyenletnek egy gyöke van, mégpedig a* $\frac{b}{a}$.

2) Ha $a = 0$, akkor a lineáris egyenletet $0x = b$ alakban írhatjuk fel. Ekkor két eset lehetséges: $b = 0$ vagy $b \neq 0$.

Az első esetben a $0x = 0$ egyenletet kapjuk. Így tehát levonhatjuk a következtetést: ha $a = 0$ és $b = 0$, akkor az $ax = b$ *egyenletnek számtalan gyöke van, vagyis bármely szám megoldása az egyenletnek.*

A második esetben, amikor $b \neq 0$, az $ax = b$ egyenlőség hamis lesz x bármely értékénél. Tehát levonhatjuk a következtetést: ha $a = 0$ és $b \neq 0$, akkor az $ax = b$ *egyenletnek nincs gyöke.*

A kapott következtetéseket az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

Az a és b értékei	$a \neq 0$	$a = 0,\ b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
Az $ax = b$ egyenlet gyökei	$x = \frac{b}{a}$	x – bármely szám	Az egyenletnek nincs gyöke

PÉLDA 1 meg azegyenletet:

1) $(3x + 2{,}1)(8 - 2x) = 0$; 2) $|5x - 6| = 4$.

Megoldás: 1) Tudjuk, hogy szorzásnál akkor kapunk nullát, ha a tényezők közül legalább az egyik egyenlő nullával. Fordítva is igaz, ha a tényezők valamelyike egyenlő nullával, akkor a szorzat is egyenlő nullával. Tehát az egyenlet megoldásához elegendő megoldanunk az alábbi egyenletek mindegyikét:

$$3x + 2{,}1 = 0,\ 8 - 2x = 0.$$

Innen $x = -0{,}7$ vagy $x = 4$.

Felelet: –0,7; 4.

2) Itt azt vesszük figyelembe, hogy csak két olyan szám létezik, amelyeknek abszolút értéke 4-gyel egyenlő, ezek a 4 és a –4. A következőket kapjuk:

$$5x - 6 = 4 \text{ vagy } 5x - 6 = -4.$$

Innen $x = 2$ vagy $x = 0{,}4$.

Felelet: 2; 0,4. ◀

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy a felhozott egyenletek közül egyik se lineáris, de a megoldásuk során lineáris egyenletekké alakítottuk át őket, és a továbbiakban a lineáris egyenletek megoldásának a szabályai szerint jártunk el.

PÉLDA 2 Oldjátok meg azegyenletet:

1) $(a - 1)x = 2$; 2) $(a + 9)x = a + 9$.

Megoldás: 1) Ha $a = 1$, akkor az egyenletet a $0x = 2$ alakban írhatjuk fel. Ebben az esetben az egyenletnek nincs gyöke. Ha $a \neq 1$, akkor $x = \dfrac{2}{a-1}$.

Felelet: ha $a = 1$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, ha $a \neq 1$, akkor $x = \dfrac{2}{a-1}$.

2) Ha $a = -9$, akkor az egyenletet $0x = 0$ alakban írhatjuk fel. Ebben az esetben az egyenletnek számtalan megoldása van. Ha $a \neq -9$, akkor $x = 1$.

Felelet: ha $a = -9$, akkor x bármely szám lehet; ha $a \neq -9$, akkor $x = 1$. ◀

1. Mit nevezünk egyváltozós lineáris egyenletnek?

2. Hány megoldása van az $ax = b$ egyenletnek, ha: 1) $a \neq 0$; 2) $a = 0$, $b \neq 0$; 3) $a = b = 0$?

GYAKORLATOK

32.° Az alábbi egyenletek közül melyik lineáris:

1) $3x = 6$; 3) $x^2 = 4$ 5) $\frac{4}{x} = 2$; 7) $x = 0$;

2) $x = 4$; 4) $|x| = 2$; 6) $\frac{1}{4}x = 2$; 8) $0x = 8$?

33.° Gyöke e a 4 az egyenletnek:

1) $4x = 12$; 2) $\frac{1}{4}x = 1$; 3) $0x = 0$; 4) $0x = 4$?

34.° Hány gyöke van az egyenletnek:

1) $3x = -10$; 2) $0x = 6$; 3) $0x = 0$; 4) $5x = 0$?

35.° Oldjátok meg az egyenleteteket:

1) $\frac{5}{9}x = 1$; 2) $-3x = \frac{6}{7}$; 3) $-1{,}4x = -2{,}1$; 4) $-\frac{1}{6}x = 6$.

36.° Oldjátok meg az egyenleteteket:

1) $-6x = \frac{1}{3}$; 2) $0{,}1x = -2{,}75$; 3) $\frac{1}{3}x = 12$; 4) $\frac{5}{7}x = -\frac{10}{49}$.

37.° Oldjátok meg az egyenleteteket:

1) $2x - 7 = x + 4$;
2) $18 - 16x = -30x - 10$;
3) $-7x + 2 = 3x - 1$;
4) $10 - 2x = 12 + x$;
5) $6x - 19 = -2x - 15$;
6) $0{,}2x + 3{,}4 = 0{,}6x - 2{,}6$.

38.° Határozzátok meg az egyenletetek gyökeit:

1) $3x + 6 = 2x - 1$;
2) $10x + 7 = 8x - 9$;
3) $20 - 3x = 2x - 45$;
4) $2{,}7 + 1{,}9x = 2x + 1{,}5$.

39.˙ Oldjátok meg az egyenleteteket:

1) $-3(x - 4) = 5x - 12$;
2) $(16x - 5) - (3 - 5x) = 6$;
3) $26 - 4x = 3x - 7(x - 3)$;
4) $-2(3 - 4x) + 5(2 - 1{,}6x) = 4$.

40.• ***(Találjátok meg a hibát)*** A $(9 - 4x) - (5 + 6x) = 0$ egyenlet megoldása során Vaszil Ledáscsenko a következőt írta le:

$$9 - 4x - 5 + 6x = 8;$$
$$2x = 8 + 9 - 5;$$
$$2x = 12;\ x = 6.$$

Találjátok meg a megoldás során elkövetett hibát!.

41.• Oldjátok meg az egyenleteteket:

1) $4(13 - 3x) - 17 = -5x;$
2) $(18 - 3x) - (4 + 2x) = 10;$
3) $14 - x = 0{,}5(4 - 2x) + 12;$
4) $4x - 3(20 - x) = 10x - 3(11 + x).$

42.• Bizonyítsátok be, hogy:

1) a $4(x - 5) = 4x - 20$ egyenlet gyöke bármilyen szám lehet;
2) a $2y - 8 = 4 + 2y$ egyenletnek nincs gyöke!

43.• Oldjátok meg az egyenleteteket:

1) $0{,}8 - (1{,}5x - 2) = -0{,}8 + 4{,}5x;$
2) $0{,}6x - 5(0{,}3x + 0{,}2) = 0{,}5(x - 1) - 0{,}8;$
3) $\frac{1}{7}\left(\frac{7}{8}y + 7\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{9}y + 1\frac{7}{9}\right) = \frac{1}{12};$
4) $\frac{5}{27}(5{,}4 - 8{,}1y) = 0{,}03 + \frac{4}{17}(6{,}8 - 3{,}4y).$

44.• Határozzátok meg az egyenletek gyökeit:

1) $0{,}9x - 0{,}6(x - 3) = 2(0{,}2x - 1{,}3);$
2) $-0{,}4(3x - 1) + 8(0{,}8x - 0{,}3) = 5 - (3{,}8x + 4);$
3) $\frac{4}{7}(0{,}56 - 4{,}2y) + 0{,}4 = \frac{5}{13}(0{,}52 - 6{,}5y).$

45.• Oldjátok meg az egyenleteteket:

1) $8(7x - 3) = -48(3x + 2);$
2) $4{,}5(8x + 20) = 6(6x + 15).$

46.• Mivel lesz egyenlő az egyenletek gyökeit:

1) $-36(6x + 1) = 9(4 - 2x);$
2) $3{,}2(3x - 2) = -4{,}8(6 - 2x)$?

47.• Oldjátok meg az egyenleteteket:

1) $(4x - 1{,}6)(8 + x) = 0$;

2) $x(5 - 0{,}2x) = 0$;

3) $(3x - 2)\left(4 + \frac{1}{3}x\right) = 0$;

4) $(2x + 1{,}2)(x + 1)(0{,}7x + 0{,}21) = 0$.

48.• Oldjátok meg az egyenleteteket:

1) $(1{,}8 - 0{,}3y)(2y + 9) = 0$; 2) $(5y + 4)(1{,}1y - 3{,}3) = 0$.

49.• Oldjátok meg az egyenleteteket:

1) $\frac{5x - 4}{2} = \frac{16x + 1}{7}$; 2) $\frac{4y + 33}{3} = \frac{17 + y}{2}$.

50.• Határozzátok meg az egyenletek gyökeit:

1) $\frac{3m + 5}{4} = \frac{5m + 1}{3}$; 2) $\frac{5x + 3}{5} = \frac{x - 5}{8}$.

51.• Mivel lesz egyenlő az egyenletek gyökei:

1) $\frac{2x}{3} + \frac{5x}{4} = 23$; 2) $\frac{x}{6} - \frac{x}{8} = \frac{7}{36}$; 3) $\frac{3x}{10} - \frac{4}{15} = \frac{x}{6}$?

52.• Oldjátok meg az egyenleteteket:

1) $\frac{7x}{6} - \frac{5x}{18} = \frac{4}{27}$; 2) $\frac{2x}{7} + \frac{x}{4} = \frac{15}{14}$; 3) $-\frac{x}{8} + 1 = \frac{x}{12}$.

53.• A változó mely értékénél lesz:

1) a $4x - 0{,}2\,(8x - 7)$ kifejezés értéke $-22{,}6$;

2) a $0{,}2\,(3 - 2y)$ és $0{,}3\,(7 - 6y) + 2{,}7$ kifejezéseknek különböző az értékük;

3) a $0{,}6y$ kifejezés értéke 1,5-del nagyobb a $0{,}3\,(y - 4)$ kifejezés értékénél;

4) az $5x - 1$ kifejezés értéke 5-ször kisebb a $6{,}5 + 2x$ kifejezés értékénél?

54.• A változó mely értéke mellett lesz:

1) a $6 - (2x - 9)$ és $(18 + 2x) - 3\,(x - 3)$ kifejezéseknek azonos az értéke;

2) a $-(2y - 0{,}9)$ kifejezés értéke 2,4-del kisebb az $5{,}6 - 10y$ kifejezés értékénél?

55.• Oldjátok meg az egyenleteteket:

1) $|x| + 6 = 13$;
2) $|x| - 7 = -12$;
3) $7|x| - 3 = 0$;
4) $|x - 5| = 4$;
5) $|9 + x| = 0$;
6) $|x - 4| = -2$;
7) $|3x + 4| = 2$;
8) $||x| - 3| = -5$.

56.• Oldjátok meg az egyenleteteket:

1) $|x| - 8 = -5$;
2) $|x| + 5 = 2$;
3) $|x + 12| = 3$;
4) $|8 - 0{,}2x| = 12$;
5) $|10x - 7| - 32 = -16$;
6) $||x| - 2| = 2$.

57.• Az a mely értékénél lesz:

1) az $5ax = -45$ egyenletgyöke 3;
2) az $(a - 4)x = -5a + 4x - 7$ egyenlet gyöke –6?

58.• Az a mely értékénél lesz:

1) a $3ax = 12 - x$ egyenlet gyöke –9;
2) az $(5a + 2)x = 8 - 2a$ egyenlet gyöke 2?

59.• Adjatok a b-nek olyan értéket, hogy az alábbi egyenletek megoldásai egész számok legyenek:

1) $0{,}1x = b$;
2) $bx = 21$;
3) $\frac{1}{6}x = b$;
4) $bx = \frac{1}{6}$.

60.•• Állítsatok fel olyan egyenletet, amelynek:

1) az egyetlen gyöke – 4-gyel egyenlő;
2) számtalan gyöke van;
3) nincs megoldása!

61.•• Határozzátok meg az m összes olyan egész értékét, amelyeknél az alábbi egyenleteknek egész szám lesz a megoldása:

1) $mx = 3$;
2) $(m + 4)x = 49$.

62.•• Határozzátok meg az n összes olyan egész értékét, amelyeknél az alábbi egyenleteknek természetes szám lesz a megoldása:

1) $nx = -5$;
2) $(n - 6)x = 25$.

63.•• A b mely értékénél lesz az alábbi egyenleteknek azonos a megoldása:

1) $7 - 3x = 6x - 56$ és $x - 3b = -35$;
2) $2y - 9b = 7$ és $3{,}6 + 5y = 7(1{,}2 - y)$?

64.•• A c mely értékei mellett lesznek azonosak az alábbi egyenletek gyökei:

1) $(4x + 1) - (7x + 2) = x$ és $12x - 9 = c + 5$;
2) $\frac{1}{7}cx = x + c$ és $6 - 3(2x - 4) = -8x + 4$?

65.•• Az a mely értékei mellett nincs megoldása az egyenletnek:

1) $ax = 6$;
2) $(3 - a)x = 4$;
3) $(a - 2)x = a + 2$?

66.•• Az a mely értékénél lesz az alábbi egyenleteknek számtalan gyöke:

1) $ax = a$;
2) $(a - 2)x = 2 - a$;
3) $a(a + 5)x = a + 5$?

67.•• Az a mely értékénél lesz az alábbi egyenleteknek egyetlen gyöke:

1) $(a - 5)x = 6$;
2) $(a + 7)x = a + 7$?

68.•• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $(b + 1)x = 9$;
2) $(b^2 + 1)x = -4$;

69.•• Oldjátok meg az $(m + 8)x = m + 8$ egyenletet!

70.•• A * helyére milyen algebrai kifejezést kell tenni, hogy a $6x + 8 = 4x + *$ olyan egyenletet kapjunk, melynek

1) ne legyenek gyökei;
2) végtelen sok gyöke legyen?
3) egy gyöke legyen;

71.•• A * helyére milyen algebrai kifejezést kell tenni, hogy a $2(1{,}5x - 0{,}5) = 7x + *$ olyan egyenletet kapjunk, melynek

1) ne legyenek gyökei;
2) végtelen sok gyöke legyen?
3) egy gyöke legyen;

72.* Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $|x| + 3x = 12$;
2) $|x| - 4x = 9$;
3) $2(x - 5) - 6|x| = -18$.

73.* Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $2x - |x| = -1$; 2) $7|x| - 3(x + 2) = -10$.

74.* Az a mely egész értékeinél lesz az alábbi egyenleteknek olyan egész szám a gyöke, amelyik osztható 2-vel:

1) $x - 2 = a$; 3) $2x - a = 4$; 2) $x + 7a = 9$; 4) $x + 2a = 3$.

75.* Az b mely egész értékeinél lesz az alábbi egyenleteknek olyan egész szám a gyöke, amelyik osztható 3-mal:

1) $x + 3 = b$; 2) $x - 2 = b$; 3) $x - 3b = 8$.

76.* A b mely értékeinél lesz az alábbi egyenletek gyöke kisebb, mint b:

1) $3x = b$; 2) $x = 2b$?

77.* A d mely értékeinél lesz az alábbi egyenletek gyöke nagyobb d-nél:

1) $4x = d$; 2) $\frac{1}{5}x = d$?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

78. A röplabdabajnokságon 8 csapat vett részt. Minden csapat két mérkőzést játszott a többi csapattal. Hány mérkőzést játszottak ezen a bajnokságon?

79. Az egyik munkás 45 óra alatt tudja elvégezni az adott feladatot, a másiknak ugyanerre $1\frac{1}{2}$-szer kevesebb időre van szüksége, mint az elsőnek. Hány óra alatt végzik el a ezt amunkát együtt? Eközben munka hányad részét végzi el mindegyik munkás?

80. Az első napon Ilike a könyv $\frac{8}{15}$ részét, a második napon az $\frac{5}{12}$-ét, a harmadik napon pedig a megmaradt 12 oldalt olvasta el. Hány oldalas a könyv?

81. Ismert, hogy az n – természetes szám. Páros vagy páratlan szám lesznek-e az alábbi kifejezések értékei:

1) $4n$; 2) $2n - 1$; 3) $n(n + 1)$?

82. Az a bármely értékénél igazak-e az alábbi állítások:

1) $2a > a$; 2) $2|a| > |a|$?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

83. Hány olyan hatjegyű szám létezik, amelyek felírásában legalább egy páros számjegy szerepel?

3. Feladatok megoldása lineáris egyváltozós egyenletek segítségével

Sokszor előfordult már, hogy egy feladatot egyenlet felállításával oldottatok meg. Ezeknek a feladatoknak a sokszínűsége azt mutatja, hogy mennyire univerzális a feladatok megoldásának ez a módja. Mi ennek a titka?

A titok nyitja az, hogy bármennyire is különböznek egymástól ezek a feladatok, mindegyikben a feltételeket fel tudjuk írni a matematika nyelvén. A kapott egyenlet — ez a feladat feltételének a matematika nyelvén való leírása.

A feladat feltétele gyakran valós helyzetet ír le. Az ilyen feltételek alapján felállított egyenlet a feladat feltételének **matematikai modellje**.

Ahhoz, hogy megkapjuk a feladat megoldását, meg kell oldanunk az egyenletet. Ehhez az algebrában különböző módszereket és technikákat dolgoztak ki. Ezek közül már ismertek néhányat, de nagyon sok módszert kell még megtanulnotok.

Ha megtaláljuk az egyenlet gyökét, ez még nem jelenti azt, hogy megoldottuk a feladatot. Le kell ellenőriznünk, hogy a kapott eredmény megfelel-e a feladat feltételében szereplő valós helyzetnek.

Megvizsgáljuk a következő feladatokat:

1) 4 óra alatt 6 kg bogyót szedtek le, mégpedig minden órában azonos mennyiséget. Hány kilogramm bogyót szedtek le egy óra alatt?
2) Néhány kisfiú 6 kg bogyót szedett. Mindegyikük 4 kg-ot. Hány fiú vett részt a munkában?

Mindkét feladat alapján felállítható a $4x = 6$ egyenlet, amelynek 1,5 a megoldása.

Az első feladat megoldásának ez a szám meg is felel, mivel ebben a feladatban az volt a kérdés, hogy hány kg bogyót szedtek le óránként. Ebben a feladatban elfogadható az a felelet, hogy 1,5 kg bogyót szedtek óránként. De ha a másik feladat feleletében az szerepel, hogy 1,5 kisfiú vett részt a munkában, ez már nem lesz helyes. Tehát a második feladatnak nincs megoldása.

Az egyenletek segítségével megoldható feladatok megoldásakor tartsuk be a következő sorrendet:

1) a feladat feltétele alapján állítsunk fel egyenletet (a feladat matematikai modelljét);
2) oldjuk meg a kapott egyenletet;
3) tisztázzuk, hogy a kapott megoldás megfelel-e a feladat feltételének, és írjunk feleletet.

A műveleteknek ezt a három lépésből álló sorrendjét nevezzük a szöveges feladatok **megoldási algoritmusának**.

PÉLDA 1 A munkásnak a megrendelést 8 nap alatt kellett volna teljesíteni. Mivel mindennap 12 alkatrésszel többet készített el a tervezettnél, ezért 6 nap alatt elkészítette a megrendelést, és ráadásul 22 alkatrésszel többet is gyártott. Hány alkatrészt készített el a munkás naponta?

Megoldás: Tegyük fel, hogy x alkatrészt készített a munkás naponta. Akkor a terv szerint naponta $(x - 12)$ alkatrészt kellett volna elkészítenie, összesen pedig $8(x - 12)$. Valójában a munkás $6x$ darabot készített el. A feladat feltétele alapján a $6x$ 22-vel több a $8(x - 12)$ kifejezés értékénél, ezért felírhatjuk a következő egyenletet:

$$6x - 22 = 8(x - 12).$$

Innen

$$6x - 22 = 8x - 96;$$
$$6x - 8x = -96 + 22;$$
$$-2x = -74;$$
$$x = 37.$$

Felelet: 37 alkatrész. ◀

PÉLDA 2 A kerékpáros 5 óra alatt 65 km-t tett meg. Az út egy részén 10 km/ó, a többin pedig 15 km/ó sebességgel haladt. Hány órán át volt a sebessége 10 km/ó, illetve 15 km/ó?

Megoldás: Tegyük fel, hogy a kerékpáros x órát haladt 10 km/ó sebességgel. Akkor 15 km/ó sebességgel $(5 - x)$ órát volt úton. Az út első része $10\underline{x}$ km, a másik része pedig $15\,(5 - \underline{x})$ km. Mivel az egész út 65 km-t tett ki, ezért a következő egyenletet állíthatjuk fel:

$$10x + 15\,(5 - x) = 65.$$

Innen

$$10x + 75 - 15x = 65;$$

$$-5x = -10;$$

$$x = 2.$$

Tehát 10 km/ó sebességgel 2 órán keresztül haladt, 15 km/ó sebességgel pedig $5 - x = 3$ órát.

Felelet: 2 óra, 3 óra. ◀

Ti már jól tudjátok, hogy a szöveges feladatok megoldásának nem csak az egyenlettel való megoldás az egyetlen módja. Szintén hatékony módszer: a feladatoknak műveletekkel való megoldása is, vagyis számtani módon, amikor egy bizonyos sorrendben megtaláljuk a számkifejezések értékeit, és végül megkapjuk a feleletet.

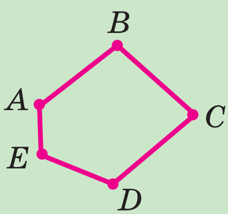
Ekkor egy valós élet feladatának a matematikai nyelvére fordítása egy vagy több számtani kifejezés felírásával történik. Az általános iskolában így kezdtük el megismerni a szöveges feladatok megoldásának módszereit.

A valós helyzeteket ábrázoló feladatok megoldási módszerei sokrétűek, és korántsem merítik ki őket a számtani kifejezések vagy egyenletek formájában megjelenő modellek. A matematika tanulása során bővíteni fogjátok a megfelelő modellek listáját.

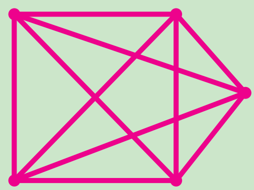
Most megismerkedünk azzal a módszerrel, amelynek alkalmazása egy matematikai modell felépítésén alapul mértani alakzat formájában. Ezeknek a technikáknak az elemeit már alkalmaztátok, amikor rajzokat készítettetek az ellentétes irányú, vagy az egymás felé történő mozgási feladatok megoldása során.

PÉLDA 3 Az ország öt városát össze lehet e kötni olyan utakkal, mindegyik városból: 1) négy útvonal induljon; 2) három útvonal?

Megoldás: Készítsünk egy rajzot, amelyen a városokat A, B, C, D és E pontok ábrázolják. A két várost összekötő utat vonalszakaszként ábrázoljuk. Például a 3. ábra az utak körgyűrűjét mutatja be.



3. ábra



4. ábra

1) A feladat lényege, hogy megtudjuk, hogy a sík öt pontja összekapcsolható-e szakaszokkal úgy, hogy minden pontból négy szakasz induljon. A 4. ábra ezt mutatja be.

2) Tegyük fel, hogy egy ilyen ábra lehetséges. Számoljuk meg, hány szakasz lesz ezen a rajzon. Van: $5 \cdot 3 = 15$ (szakasz). Ezzel a számítással azonban minden szakaszt kétszer számoltunk. Azt kapjuk, hogy a szakaszok száma $\frac{15}{2}$. Ez nem egész szám. Tehát ellentmondásra jutottunk.

Felelet: 1) Igen; 2) nem. ◀

Відмінюючи назви десятків 50, 60, 70, 80 (складні числівники), змінюємо тільки другу частину числівників (**-десят**), наприклад: Н. в. *п'ятдесят, вісімдесят,* Р. в.

п'ятдесяти, вісімдесяти, Д. в. *п'ятдесяти, вісімдесяти,* Зн. в. *п'ятдесят, вісімдесят,* Ор. в. *п'ятдесятьма, вісімдесятьма,* М. в. *(на) п'ятдесятьох, вісімдесятьох.*

Назви чисел 40, 90, 100 в усіх відмінках, окрім називного та знахідного, мають закінчення **-а**, наприклад: Н. в. *сорок зошитів,* Р. в. *сорок**а** зошитів,* Д. в. *сорок**а** зошитам,* Зн. в. *сорок зошитів,* Ор. в. *сорок**а** зошитами,* М. в. *(в) сорок**а** зошитах.*

Зверніть увагу: після першої частини числівників *п'ятнадцять, п'ятдесят, п'ятсот* м'який знак не пишемо.

GYAKORLATOK

84.° Anikó 24 füzetet vásárolt, mégpedig vonalasból 6-tal többet, mint négyzetrácsosból. Hány vonalas, illetve négyzetrácsos füzetet vásárolt Anikó?

85.° Két fáról 65,4 kg meggyet szedtek le, mégpedig az egyik fáról 12,6 kg-mal kevesebbet, mint a másikról. Hány kg meggyet szedtek le mindegyik fáról külön-külön?

86.° A téglalap kerülete 7,8 cm, az egyik oldala 1,3 cm-rel nagyobb a másiknál. Határozzátok meg a téglalap oldalait!

87.° A téglalap egyik oldala 11-szer kisebb a másiknál. Határozzátok meg a téglalap oldalait, ha a kerülete 144 cm!

88.• A Kárpátokban, a Csornohora hegyvonulatban található Ukrajna három legmagasabb hegycsúcsa: a Hoverla, a Brebeneszkul és a Petrosz. A három hegycsúcs összesen 6113 m magas. A Hoverla a Brebeneszkulnál 29 m-rel, a Petrosznál pedig 41 m-rel magasabb. Számítsátok ki mindegyik hegycsúcs magasságát!

Hovrla hegycsúcs

89.• Ukrajna három legmélyebb barlangja – a Szoldatszka, a Kaszkadna és a Nahimovszka a Krímen található. Mélységük összesen 1285 m. A Kaszkadna mélysége 115 m-rel kisebb a Szoldatszka barlang mélységénél és 30 m-rel mélyebb, mint a Nahimovszka. Határozzátok meg mindegyik barlang mélységét!

90.• A 160 lakásos házban háromféle lakás található: egyszobás, kétszobás és háromszobás. Egyszobás lakásból 2-szer kevesebb van, mint kétszobásból, és 24-gyel kevesebb, mint háromszobásból. Hány lakás található a házban mindegyik típusból?

91.• Három munkás összesen 96 alkatrészt készített el. Az első munkás 3-szor annyi alkatrészt készített el, mint a második, a harmadik pedig 16-tal többet, mint a második. Hány alkatrészt készített el mindegyik munkás külön-külön?

92.• A gyár három műhelyében összesen 101 munkás dolgozik. Az első műhelyben dolgozó munkások száma $\frac{4}{9}$-e a harmadik műhelyben dolgozó munkások számának, a második műhelyben dolgozók száma pedig 80%-át teszi ki a harmadikban dolgozóknak. Hány munkás dolgozik az első műhelyben?

93.• A kerékpárosok egy háromnapos túrára indultak. A második és a harmadik napon megfelelően az első napi út 120%-át és a $\frac{4}{5}$ -részét tették meg. Hány km-t tettek meg az első napon, ha az egész út hossza 270 km volt?

94.• 6 nagy és 8 kis ládában 232 kg alma van. Hány kg alma volt mindegyik ládában, ha a kis ládákba 6 kg-mal kevesebb alma fér, mint a nagyokba?

95.• Egy mozi két termében összesen 534 ülőhely van. Az egyik teremben 12, azonos ülőhelyet tartalmazó sor, a másikban 15 sor szék van. Az első terem mindegyik sorában 4 székkel több van, mint a második terem mindegyik sorában. Hány ülőhely van a két teremben külön-külön?

96.• A két város közötti távolságot a motorkerékpáros 0,8 óra, a kerékpáros pedig 4 óra alatt tette meg. A kerékpáros sebessége 48 km/h-val kisebb a motoros sebességénél. Számítsátok ki a motoros és a kerékpáros sebességét!

97.• 2 kg csokoládéért az egyik féléből annyit fizettek, mint a másikból 3,5 kg-ért. Mennyibe kerül mindegyik csokoládéból egy-egy kg, ha az első csoki 12 hrivnyával drágább, mint a másik kilogrammonkénti ára?

98.• Egy kg uborka 0,8 hrivnyával olcsóbb egy kg paradicsomnál. Mennyibe kerül 1 kg paradicsom, ha 3,2 kg paradicsomért annyit fizettek, mint 3,6 kg uborkáért?

99.• Az egyik tartályban 3-szor több víz van, mint a másikban. Miután az egyik tartályba 16 liter, a másikba pedig 80 liter vizet töltöttek, a két tartályban azonos mennyiségű víz lett. Mennyi víz volt a tartályokban eredetileg?

100.• Az egyik polcon 4-szer több könyv volt, mint a másikon. Miután az egyik polcról levettek 5 könyvet, a másikra pedig tettek 16-ot, a két polcon azonos lett a könyvek száma. Hány könyv volt a polcokon eredetileg?

101.• Az apa 26 éves, a fia pedig 2 éves. Hány év múlva lesz az apa 5-ször idősebb a fiánál?

102.• Az anya 40 éves, a lánya pedig 18 éves. Hány évvel ezelőtt volt a lány 3-szor fiatalabb az anyjánál?

103.• Az iskolai könyvtár részére 40 helyesírási és értelmező szótárt vásároltak, amelyekért 6900 hrivnyát fizettek. Hány szótárt vettek mindegyik fajtából, ha a helyesírási szótár 150, az értelmező pedig 240 hrivnyába kerül?

104.• Az ügyfél 30 000 hrivnyát tett be a bankba két különböző számlára. Az egyik számla évi 7 %, a másik pedig évi 8 % kamatot fizet. Egy év alatt 2220 hrivnyát kamatozott a pénze. Mennyi pénzt tett be mindegyik számlára?

105.• A pénztárban 2 és 5 hrivnyásból 19 pénzérme volt, ami összesen 62 hrivnyát tett ki. Hány darab 2 hrivnyás, illetve 5 hrivnyás volt a pénztárban?

106.• Két raktárban azonos mennyiségű szén volt. Miután az egyikből elszállítottak 680 tonnát, a másikból pedig 200 tonnát, az első raktárban 5-ször kevesebb szén maradt, mint a másikban. Mennyi szén volt a két raktárban eredetileg?

107.• Marikának és Lackónak ugyanannyi pénze volt. Miután Marika 180 hrivnyát, Lackó pedig 270 hrivnyát költött könyvekre, Marikának 2-szer annyi pénze maradt, mint Lackónak. Mennyi pénzük volt ezeknek a gyerekeknek eredetileg?

108.• Az egyik zsákban 5-ször több liszt volt, mint a másikban. Miután az egyik zsákból 12 kg lisztet átöntöttek a másikba, a másik zsákban lévő liszt mennyisége az $\frac{5}{7}$ részét tette ki az első zsákban lévő liszt tömegének. Hány kg liszt volt a zsákokban eredetileg?

109.• Az egyik konténerben 3-szor több szén volt, mint a másikban. Miután az első konténerből 300 kg szenet átöntöttek a másikba, az első konténerben maradt szén tömege a másik konténerben lévő szénnek a 60 %-át tette ki. Hány kilogramm szén volt a konténerekben eredetileg?

110.• Az egyik munkásnak 90, a másiknak 60 alkatrészt kellett elkészíteni. Az első munkás naponta 4 alkatrészt készített el, a másik pedig 5-öt. Hány nap múlva kell az első munkásnak 2-szer annyi alkatrészt elkészítenie, mint a másiknak, ha figyelembe vesszük, hogy egyszerre kezdtek el dolgozni?

111.• Az egyik tartályban 200, a másikban pedig 640 liter víz volt. Miután a második tartályból kétszer annyi vizet használtak el, mint az elsőből, a másodikban 3,5 szer több víz maradt, mint az elsőben. Hány liter vizet használtak el mindegyik tartályból?

112.• Két, egymástól 385 km-re lévő városból egy személygépkocsi és egy teherautó indult el egymással szemben. A gépkocsi sebessége 80 km/ó, a teherautóé pedig 50 km/h volt. Hány óra múlva találkoznak, ha a teherautó 4 órával később indult el, mint a személygépkocsi?

113.• Az egyik településről a másikba egy gyalogos indult el 4 km/h sebességgel. 1,5 óra múlva a másik faluból vele szemben elindult egy kerékpáros 16 km/h sebességgel. Hány perc múlva találkozik a kerékpáros a gyalogossal, ha a két település közötti távolság 14 km?

114.• A két város közötti távolság a folyón 55 km-rel rövidebb, mint az országúton. Az egyik városból a másikba eljuthatunk hajóval 6 óra alatt, vagy autóbusszal az országúton 3 óra 30 perc alatt. Határozzátok meg a hajó és az autóbusz sebességét, ha a hajó sebessége 30 km/ó-val kisebb az autóbuszénál!

115.• A motoros hajó 4 órán keresztül ment a vízfolyás irányában és 3 órán át a vízfolyással szemben. A hajó a vízfolyás irányában 48 km-rel hosszabb utat tett meg, mint a vízfolyással szemben. Határozzátok meg a hajó sebességét állóvízben, ha a vízfolyás sebessége 2,5 km/h!

116.• A turista a folyón 5 órán át utazott egy tutajon a vízfolyás irányában, aztán 1,5 órát egy motorcsónakon a vízfolyással szemben. A csónak sebessége állóvízben 24 km/h. Határozzátok meg a vízfolyás sebességét, ha a turista a vízfolyással szemben 23 km-rel többet haladt, mint a vízfolyás irányában!

117.•• A turisták sátrakba való elhelyezése során kiderült, hogy ha minden sátorban 6 főt szállásolnak el, akkor 5 főre nem lesz elég hely, ha pedig 7 főt, akkor 6 hely marad szabad. Hány turista volt ekkor jelen?

118.•• A 7. osztályos tanulók újévi ajándékainak elkészítése során kiderült, hogy ha minden ajándékcsomagba 4 narancsot teszünk, akkor 3 narancs hiányozni fog, és ha 3 narancsot teszünk, akkor 25 narancs marad meg. Hány narancs volt összesen?

119.•• Két dobozban összesen 55 kg keksz volt. Miután az első dobozban lévő keksz mennyiségének az $\frac{1}{3}$ részét átrakták a másikba, az első dobozban 5 kg-mal több keksz lett, mint a másodikban. Mennyi keksz volt a két doboz mindegyikében eredetileg?

120.•• Két kosárban 24 kg körte volt. Miután az egyik kosárban lévő körte $\frac{3}{7}$ részét átrakták a másikba, a másik kosárban kétszer annyi körte lett, mint amennyi az elsőben maradt. Hány kg körte volt a kosarakban eredetileg?

121.•• Három polcon könyvek vannak. Az első polcon az összes könyv $\frac{4}{15}$-e áll, a másikon a 60%-uk, a harmadikon pedig 8 könyvvel kevesebb volt, mint az elsőn. Hány könyv van összesen a három polcon?

122.•• Egy bizonyos mennyiségű tejet négy kannába öntötték szét. Az első kannába került az összes tej 30%-a, a másodikba az elsőbe öntött tej $\frac{5}{6}$ része, a harmadikba 26 l-rel kevesebb, mint az elsőbe, a negyedikbe pedig 10 l-rel több, mint a másodikba. Hány liter tej lett a négy kannában?

123.•• A munkás úgy tervezte, hogyha naponta elkészít 20 alkatrészt, akkor időben elkészül a feladatával. Mivel a tervezettnél mindennap 8 alkatrésszel többet készített el, ezért már 2 nappal a határidő előtt 8 alkatrésszel több volt a tervezettnél. Hány nap alatt kellett volna elkészítenie a munkásnak az alkatrészeket?

124.•• A vizsgára készülve a tanuló úgy tervezte, hogy naponta megold 10 feladatot. Mivel mindennap 4 feladattal többet oldott meg, ezért 3 nappal a vizsga előtt már csak 2 olyan feladata volt, amit még nem oldott meg. Összesen hány feladatot tervezett megoldani a tanuló?

125.•• A kétjegyű számban a tízesek száma 3-szor nagyobb, mint az egyesek száma. Ha ezeket a számjegyeket felcseréljük, akkor a kapott szám 54-gyel lesz kisebb az eredeti számnál. Határozzátok meg az eredeti kétjegyű számot!

126.•• A kétjegyű számban a tízesek száma 2-szor nagyobb, mint az egyesek száma. Ha ezeket a számjegyeket felcseréljük, akkor a kapott szám $1\frac{3}{4}$-szerese lesz az eredeti számnak. Határozzátok meg az eredeti kétjegyű számot!

127.•• Két városból, melyek között a távolság 270 km, egyidejűleg, egymással szembe két gépkocsi indult el. 2 óra múlva a köztük lévő távolság 30 km lett. Határozd meg mindkét gépkocsi sebességét, ha az egyiknek a sebessége 10 km/h-val nagyobb, mint a másiké?

128.•• Egy társaság 7 tagú. Lehet e mindegyiküknek:

1) pontosan négy személy

2) pontosan 5 személy közülük a barátja?

129.•• Van két réz-cink ötvözetünk. Az első 9 % cinket tartalmaz, a második pedig 30 %-ot. Hány kilogramm ötvözetet kell vennünk mind a két fajtából, hogy olyan 300 kg ötvözetet készítsünk, amelyben a cink részaránya 23 %?

130.•• Két víz-só oldatunk van. Az első oldat 25 % sót tartalmaz, a második pedig 40 %-ot. Hány kilogrammot kell venni az egyes oldatokból, hogy 50 kg tömegű, 34 % sót tartalmazó oldatot kapjunk?

131.* Az ország adott régiójában 8 város található. Elmondható-e, hogy bármelyik városból bármelyik másik városba lehet utazni, ha minden városból van: 1) legalább három útvonal; 2) négy útvonal?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

132. Számítsátok ki a kifejezések értékét:

1) $-9{,}6 : 12 - 29 : (-5{,}8) + 4 : (-25)$;

2) $-3{,}4 \cdot (4 - 4{,}6) + 12{,}4 \cdot (-08, - 2{,}2)$;

3) $\left(0{,}4 - \frac{3}{20}\right) \cdot 6\frac{2}{3} - 1{,}75 : \left(-7\frac{7}{8}\right)$;

4) $\left(6{,}3 : \left(-\frac{9}{20}\right) - 2{,}6 : \left(-\frac{1}{20}\right)\right) \cdot \left(-\frac{4}{19}\right) - 0{,}6 : (-0{,}36)$.

133. Számítsátok ki a kifejezések értékét:

1) $14 - 6x$, ha $x = 4; -2; 0; -0{,}3; \frac{3}{8}$

2) $a^2 + 3$, ha $a = 7; -2; 0; 0{,}4; -1\frac{1}{3}$;

3) $(2m - 1)\,n$, ha $m = 0{,}2$, $n = -0{,}6$.

134. A megadott x értékeknek megfelelően számítsátok ki a $-3x + 2$ kifejezés értékét, majd töltsétek ki az alábbi táblázatot:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$-3x + 2$									

135. Milyen számjegyet kell írnunk a 37 bal és jobb oldalára, hogy az így kapott szám osztható legyen 6-tal?

136. Vannak-e gyökei az egyenletnek:

1) $x^2 = 0$; 2) $x^2 = -1$; 3) $|x| = x$; 4) $|x| = -x$?

137. Lehet-e egész szám a kifejezés értéke:

1) $\frac{1}{x}$; 2) $\frac{x}{x+1}$?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

138. Határozzátok meg az n minden természetes értékét, amelyeknél az $n - 2$, $n + 24$, $n + 26$ kifejezések értéke prímszám lesz.

1. SZÁMÚ FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. Számítsátok ki az $5 - 4b$ kifejezés értékét, ha $b = -2$!

A) 3; B) –3; C) 13; D) –13.

2. Számítsátok ki az $\frac{1}{5}m + \frac{1}{3}n$, kifejezés értékét, ha $m = 35$, $n = -18$.

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

3. Az alábbiak közül melyik kifejezés fejezi ki az a és b szorzatának és a c számnak a különbségét?

A) $a - bc$; B) $ab - c$; C) $a(b - c)$; D) $(a - b)c$.

4. Az alábbi algebrai kifejezések közül válasszátok ki az egész kifejezést!

A) $\frac{b}{b-7}$; B) $\frac{b+5}{b-7}$; C) $\frac{b+5}{7}$; D) $\frac{b+5}{b}$.

5. Határozzátok meg a $7x + 2 = 3x - 6$ egyenlet gyökét!

A) 2; B) 1; C) –2; D) –1.

6. Az alábbi egyenletek közül melyik lineáris?

A) $2x = -3$; C) $|x| = 4$;

B) $\frac{1}{x} = 0$; D) $(x - 1)(x - 2) = 0$.

7. Oldjátok meg az $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 6$. egyenletet!

A) 12; B) 36; C) –6; D) –1.

8. Oldjátok meg a $2(x - 3) - (x + 4) = x - 10$ egyenletet!

A) 0; C) x – bármely szám lehet;

B) nincs gyöke; D) 10.

9. Az a mely értékénél nem lesz gyöke az $(a + 4)\,x = a - 3$ egyenletnek?

A) 3; B) –4; C) 0; D) nem létezik ilyen szám.

10. Tudjuk, hogy az a szám 45 %-a 7-tel nagyobb az a szám $\frac{1}{3}$-nál. Határozzátok meg az a számot!

A) 36; B) 45; C) 60; D) 90.

11. Három munkás 70 alkatrészt készített. Az első munkás 2-szer kevesebb alkatrészt gyártott, mint a második, a harmadik pedig 10-zel többet, mint az első. Legyen x az első munkás által elkészített alkatrészek száma. Az alábbi kifejezések közül melyik felel meg a feladat feltételének?

A) $x + 2x + 2x + 10 = 70$; C) $x + 2x + 2x - 10 = 70$;
B) $x + 2x + x + 10 = 70$; D) $x + 2x + x - 10 = 70$.

12. Az első földrészlegen 4-szer annyi málnabokor van, mint a másodikon. Miután az első részlegről 12 bokrot átültettek a másodikra, a második részlegen 2-szer kevesebb lett a málnabokrok száma, mint az elsőn. Tegyük fel, hogy a második részlegen x bokor volt eredetileg. Az alábbi kifejezések közül melyik lesz a feladatban előforduló esemény matematikai modellje?

A) $2\,(4x - 12) = x + 12$; C) $4x + 12 = 2\,(x - 12)$;
B) $2\,(4x + 12) = x - 12$; D) $4x - 12 = 2\,(x + 12)$.

4. Egyenlő kifejezések. Azonosságok

Megvizsgálunk két pár kifejezést:

1) $x5 - x$ és $5x^3 - 5x;$

2) $2\,(x - 1) - 1$ i $2x - 3$.

A táblázatok e kifejezések értékeit tartalmazza az x változó néhány értéke esetén.

x	–2	–1	0	1	2
$x^5 - x$	–30	0	0	0	30
$5x^3 - 5x$	–30	0	0	0	30

x	–2	–1	0	1	2
$2(x-1)-1$	–7	–5	–3	–1	1
$2x-3$	–7	–5	–3	–1	1

Látjuk, hogy ezek az értékek egybeesnek mindegyik kifejezéspár esetén.

Teljesül-e ez a törvényszerűség az x *változó tetszőleges* értékére?

Az első táblázatban szereplő kifejezéseknél láthatjuk, hogy nem teljesül. Például, ha $x = 3$, akkor az $x^5 - x = 3^5 - 3 = 240$, és az $5x^3 - 5x = 5 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3 = 120$.

Ugyanakkor a második táblázatba foglalt kifejezések értékei mindig egyenlők lesznek az x változó bármely értékénél. Bebizonyítjuk ezt. $2(x-1)-1 = 2x-2-1 = 2x-3$, vagyis miután egyszerűbb alakra hoztuk a $2(x-1)-1$ kifejezést, a $2x-3$ kifejezést kaptuk.

Meghatározás. Azokat a kifejezéseket, amelyeknek az értéke egyenlő egymással a változó bármely értéke mellett, azonosan egyenlő kifejezéseknek nevezzük.

Például a $2(x-1)-1$ és $2x-3$ kifejezések azonosan egyenlőek, az $x^5 - x$ és $5x^3 - 5x$ kifejezések pedig nem azonosan egyenlők. Lássunk néhány példát azonosan egyenlő kifejezésekre:

$$7(a+b) \text{ és } 7a+7b;$$

$$3x+y \text{ és } y+3x;$$

$$m^2np \text{ és } mn^2p$$

$$a-(b+c) \text{ és } a-b-c.$$

Megvizsgáljuk a $7(a+b) = 7a+7b$ egyenlőséget. A szorzás széttagolhatósági tulajdonsága alapján elmondhatjuk, hogy ez az egyenlőség mindig igaz lesz az a és b változó bármely értéke mellett.

Meghatározás. Azt az egyenlőséget, amely igaz a változó bármely értéke mellett, azonosságnak nevezzük.

Egy azonosan egyenlő kifejezéspárból nagyon könnyen azonosságot kaphatunk.

Például mind a három egyenlőség

$$3x + y = y + 3x;$$
$$m^2np = mn^2p;$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$

azonosság lesz.

Megjegyezzük, hogy azonosságokkal már találkoztatok korábban is. Például az összeadás és a szorzás tulajdonságait kifejező egyenlőségek azonosságnak tekinthetők:

$$a + b = b + a;$$
$$(a + b) + c = a + (b + c);$$
$$ab = ba;$$
$$(ab)\ c = a\ (bc);$$
$$a\ (b + c) = ab + ac.$$

Meghatározzuk a $11a - 3a + 2$ kifejezés értékét, ha $a = \frac{1}{8}$. Természetesen kiszámíthatjuk a kifejezést úgy is, hogy rögtön behelyettesítjük az a helyére az $11 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{8} + 2$. De sokkal egyszerűbb, ha először összevonjuk az egynemű tagokat, így a $11a - 3a + 2$ kifejezés azonosan egyenlő lesz a $8a + 2$ kifejezéssel. Ha most behelyettesítjük az a helyére az $a = \frac{1}{8}$. megkapjuk: $8 \cdot \frac{1}{8} + 2 = 3$.

Az adott kifejezés cseréjét a vele azonosan egyenlő kifejezéssel, a **kifejezés azonos átalakításának** nevezzük.

Az egynemű összeadandók összevonása, a zárójelek felbontása a kifejezések azonos átalakításának tekinthetők. Ha egyszerűsítjük a kifejezést, valójában egy vele azonosan egyenlő kifejezésre cseréljük.

Ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy az adott egyenlőség azonosság (vagy, ahogy mondani szokták bebizonyítani az egyenlőséget), a következő technikákat (módszereket) alkalmazzuk:

- *azonosan átalakítjuk az adott egyenlőség egyik oldalát úgy, hogy megkapjuk a másik oldalt;*
- *azonosan átalakítjuk az egyenlőség mindkét oldalát úgy, hogy az egyenlőség mindkét oldalán ugyanazt a kifejezést kapjuk;*
- *megmutatjuk, hogy az egyenlőség bal és jobb oldalának a különbsége azonosan egyenlő nullával.*

PÉLDA 1 be az azonosságokat:

1) $2(3a + 4b) + 3(a - 7b) - 7(2a - 7b) = -5a + 36b$;
2) $0{,}6(x - 5) + 0{,}4(x + 1) = 0{,}8(x + 2) + 0{,}2(x - 21)$;
3) $a(b - c) + b(c - a) = c(b - a)$.

Megoldás:

1) Egyszerűbb alakra hozzuk az egyenlőség bal oldalát:

$$2(3a + 4b) + 3(a - 7b) - 7(2a - 7b) =$$
$$= 6a + 8b + 3a - 21b - 14a + 49b = -5a + 36b.$$

Bebizonyítottuk az azonosságot.

2) Egyszerűbb alakra hozzuk az egyenlőség bal és jobb oldalát:

$$0{,}6(x - 5) + 0{,}4(x + 1) = 0{,}6x - 3 + 0{,}4x + 0{,}4 = x - 2{,}6;$$
$$0{,}8(x + 2) + 0{,}2(x - 21) = 0{,}8x + 1{,}6 + 0{,}2x - 4{,}2 = x - 2{,}6.$$

Mivel ugyanazt a kifejezést kaptuk, ezzel az azonosságot bebizonyítottuk.

3) Megvizsgáljuk a bal és a jobb oldal különbségét:

$$a(b - c) + b(c - a) - c(b - a) =$$
$$= ab - ac + bc - ab - bc + ac = 0.$$

Bebizonyítottuk az azonosságot. ◀

PÉLDA 2 be, hogy az

$$(a + 2)(a - 3) = a^2 - 6$$

egyenlőség nem azonosság!

Megoldás: A bizonyításhoz elegendő felhozni egy ellenpéldát: megmutatni a változónak olyan értékeit (ha lehet néhányat), amelyeknél az adott egyenlőség nem teljesül.

Például, ha $a = 1$, akkor:
$(a + 2)(a - 3) = (1 + 2)(1 - 3) = -6$; $a^2 - 6 = 1 - 6 = -5$.
Tehát az adott egyenlőség nem azonosság. ◀

?

1. Mit nevezünk azonosan egyenlő kifejezéseknek?
2. Mit nevezünk azonosságnak?
3. Mit nevezünk az kifejezés azonos átalakításának?
4. A kifejezések milyen azonos átalakításait ismeritek?
5. Milyen módszereket alkalmazunk az azonosságok bizonyításánál?

У назвах сотень від 200 до 900 (складні числівники) відмінюємо обидві частини, наприклад: Н. в. *двісті, п'ятсот, сімсот,* Р. в. *двохсот, п'ятисот, семисот,* Д. в. *двомстам, п'ятистам, семистам,* Зн. в. *двісті, п'ятсот, сімсот,* Ор. в. *двомастами, п'ятьмастами, сьомастами,* М. в. (*на*) *двохстах, п'ятистах, семистах.*

Зверніть увагу: змінюючи складені числівники, кожне слово і відмінюємо, і пишемо окремо, наприклад: *шістдесяти двох, сімдесятьома трьома, на семистах дев'яноста шістьох.*

GYAKORLATOK

139.° A számtani műveletek mely tulajdonságainak felhasználásával tudjuk igazolni, hogy az alábbi kifejezések azonosan egyenlők:

1) $ab + cd$ és $cd + ab$;
2) $(a + 1) + b$ és $a + (1 + b)$;
3) $a \cdot 4b$ és $4ab$;
4) $(x + 2)(x + 3)$ és $(3 + x)(2 + x)$;
5) $7(a - 4)$ és $7a - 28$?

140.° Azonosságok-e az alábbi egyenlőségek:

1) $2x - 12 = 2(x - 6)$;
2) $a - b = -(b - a)$;
3) $3m + 9 = 3(m + 9)$;
4) $(a + b) \cdot 1 = a + b$;
5) $(a + b) \cdot 0 = a + b$;
6) $(a - a)(b + b) = 0$;
7) $3a - a = 3$;
8) $4x + 3x = 7x$;

9) $a - (b + c) = a - b + c$;
10) $m + (n - k) = m + n - k$;
11) $4a - (3a - 5) = a + 5$;
12) $(a - 5)\ (a + 3) = (5 - a)\ (3 + a)$?

141.° Azonosan egyenlők-e az alábbi egyenlőségek:
1) $8\ (a - b + c)$ és $8a - 8b + 8c$;
2) $-2\ (x - 4)$ és $-2x - 8$;
3) $(5a - 4) - (2a - 7)$ és $3a - 11$?

142.° Hasonlítsátok össze az a^2 és $|\ a\ |$ kifejezések értékeit, ha $a = -1; 0; 1$. Kijelenthetjük-e, hogy az $a^2 = |\ a\ |$ egyenlőség azonosság?

143.° Az alábbi kifejezések közül melyik lesz azonosan egyenlő a $-3a + 8b - a - 11b$ kifejezéssel:
1) $-4a + 3b$;
2) $-3a + 3b$;
3) $-4a - 3b$;
4) $-3a - 3b$?

144.° A $-10a + 7$, $-10a - 7$, $-14a + 7$, $-14a - 7$ kifejezések között találjátok meg azt, amelyik azonosan egyenlő a $-12a + (7 - 2a)$ kifejezéssel!

145.° Bizonyítsátok be az azonosságokat:
1) $-5x - 6\ (9 - 2x) = 7x - 54$;
2) $\frac{1}{3}(12 - 0{,}5y) + 0{,}3y = 0.1y + 4$;
3) $3\ (7 - a) - 7\ (1 - 3a) = 14 + 18a$;
4) $(6x - 8) - 5x - (4 - 9x) = 10x - 12$;
5) $3\ (2{,}1m - n) - 0{,}9\ (7m + 2n) = -4{,}8n$;
6) $\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{8}x + 6\right) - \frac{1}{6}\left(24 - 1\frac{1}{2}x\right) = 0$.

146.° Bizonyítsátok be az azonosságokat:
1) $-0{,}2\ (4b - 9) + 1{,}4b = 0{,}6b + 1{,}8$;
2) $(5a - 3b) - (4 + 5a - 3b) = -4$;
3) $5\ (0{,}4x - 0{,}3) + (0{,}8 - 0{,}6x) = 1{,}4x - 0{,}7$;
4) $\frac{1}{9}(3y - 27) - 2\left(\frac{1}{12}y - 1{,}5\right) = \frac{1}{6}y$.

147.• Az alábbi egyenlőségek közül melyek azonosságok:

1) $(2a - 3b)^2 = (3b - 2a)^2$;
2) $(a - b)^3 = (b - a)^3$;
3) $|\, a + 5 \,| = a + 5$;
4) $|\, a - b \,| = |\, b - a \,|$;
5) $|\, a^2 + 4 \,| = a^2 + 4$;
6) $|\, a + b \,| = |\, a \,| + |\, b \,|$;
7) $|\, a - 1 \,| = |\, a \,| - 1$;
8) $a^2 + b^2 = (a + b)^2$?

148.• Írjátok fel egyenlőségek formájában az alábbi állításokat:

1) két ellentett szám összege egyenlő nullával;
2) az adott szám és az 1 szorzata egyenlő 1-gyel;
3) az adott szám és a –1 szorzata egyenlő az adott szám ellentettjével;
4) az ellentett számok abszolút értéke egyenlő egymással;
5) az ellentett számok különbsége egyenlő nullával.

Melyik azonosság a fenti egyenlőségek közül?

149.• Bizonyítsátok be az azonosságokat:

1) $4\,(2 - 3m) - (6 - m) - 2\,(3m + 4) = -17m - 6$;
2) $a + b - 10ab = 2a\,(3 - b) - 3b\,(a - 2) - 5\,(ab + a + b)$;
3) $6\,(5a - 3) + (10 - 20a) - (6a - 4) = 5a - (3a - (2a - 4))$.

150.• Bizonyítsátok be az azonosságokat:

1) $(3m - 7) \cdot 0{,}6 - 0{,}8\,(4m - 5) - (-1{,}7 - 1{,}4m) = 1{,}5$;
2) $b + 4c) - 3a\left(b + \frac{1}{3}c\right) = 9a\,(2b + 3c)$.

151.• Bizonyítsátok be, hogy az alábbi egyenlőségek nem lesznek azonosságok:

1) $(a + 3)^2 = a^2 + 9$;
2) $(b - 1)\,(b + 1) = (b - 1)\,b + 1$;
3) $(c + 1)^3 = c^3 + 1$;
4) $|\, m \,| - |\, n \,| = |\, n \,| - |\, m \,|$.

152.• Bizonyítsátok be, hogy az alábbi kifejezések nem azonosságok:

1) $4 - m^2$ és $(2 - m)^2$;
2) $|\, -m \,|$ és m;
3) $m^3 + 8$ és $(m + 2)(m^2 + 4)$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

153. A személyvonat a két állomás közötti utat 12 óra alatt teszi meg. Ha ezekről az állomásokról egyidejűleg, egymással szemben elindul egy személyvonat és egy tehervonat, akkor az indulástól számítva 8 óra múlva találkoznak. Mennyi idő alatt ér el a tehervonat a másik állomásra?

154. Tudjuk, hogy $a > 0$ és $a + b < 0$. Hasonlítsátok össze:

1) b és 0; 2) $|a|$ és $|b|$.

155. Az áru árát először 50%-kal felemelték, aztán 50%-kal csökkentették. Több vagy kevesebb lett az áru ára az eredetihez viszonyítva, ha igen, akkor hány százalékkal?

156. A Dnyipro folyó összesen 2201 km hosszú. Ebből az ukrajnai szakasza 981 km. A Gyeszna folyó hossza 1130 km, ebből az ukrajnai szakasza 591 km. Százalékban számítva melyik folyónak hosszabb az ukrajnai szakasza?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

157. A táblára fel vannak írva az 1, 2, 3, …, 10 számok. Az első lépésben kiválasztunk két számot, mindkettőjükhöz hozzáadhatunk 5-öt vagy mindkettőjükből elvehetünk 1-et. Ezeknek a lépéseknek a segítségével elérhetjük-e, hogy a táblán lévő összes szám egyenlő legyen?

5. A természetes kitevőjű hatvány

Már tudjátok, hogy a matematikában megtalálták a módját az azonos tényezőket tartalmazó szorzat rövidebb felírásának.

Például: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Az $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ kifejezést **hatványnak** nevezzük, az $\frac{1}{2}$ a **hatvány alapja**, a 3 a **hatvány kitevője**.

Meghatározás. **Az *a* szám természetes *n* kitevőjű, 1-nél nagyobb, hatványának nevezzük azt az *n* tényezőből álló szorzatot, amelynek minden tagja *a*-val egyenlő.**

Az a alapú és n kitevőjű hatványt a^n alakban írjuk fel és így olvassuk: a az n-edik hatványon. Ha a hatványkitevő 2 és 3, akkor az a^2 kifejezést így olvassuk: az a négyzeten, az a^3-t pedig: az a köbön.

Felhívjuk a figyelmetek a természetes kitevőjű hatvány meghatározásában az $n > 1$ feltételre. Kézenfekvő, nem vizsgálhatunk egy olyan szorzatot, amelyik csak egy tényezőből áll.

És lehet-e 1 a hatványkitevő? Erre a kérdésre a választ a következő meghatározás adja meg.

Meghatározás. **Az *a* szám az első hatványon magával az *a* számmmal lesz egyenlő.**

A fenti meghatározás szerint minden számra úgy tekinthetünk, mint az adott szám első hatványára.

A két meghatározás alapján felírhatjuk:

$$a^n = \underbrace{aa\cdot \ \ldots \cdot a}_{n \text{ tényező}}, \ \text{ahol } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

Könnyen kiszámíthatjuk, hogy $2^5 = 32$. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a 2-t az ötödik hatványra emeltük, és 32-t kaptunk. De azt is mondhatjuk, hogy **elvégeztük a 2 ötödik hatványra való emelését**.

A $(–3)^2 = 9$ egyenlőség azt jelenti, hogy a – 3-at **négyzetre emeltük**, és eredményül 9-et kaptunk, a $(–3)^3 = –27$ egyenlőség azt jelenti, hogy a – 3-at **köbre emeltük**, és eredményül –27-et kaptunk.

Megjegyezzük, hogy az algebrai kifejezések az összeadáson, kivonáson, szorzáson és osztáson kívül hatványozást is tartalmazhatnak.

Könnyen belátható, hogy amikor $a > 0$, akkor $a^n > 0$; ha $a = 0$, akkor $0^n = 0$.

Tehát, ha ***egy nem negatív számot hatványra emelünk, eredményül szintén nem negatív számot kapunk***.

- Ha a hatványkitevő páros szám, akkor hatványra emelésnél a tényezőket párosíthatjuk.

Például $(-2)^6 = ((-2)\ (-2)) \cdot ((-2)\ (-2)) \cdot ((-2)\ (-2))$.

- Ha a hatványkitevő páratlan szám, akkor a párosítás után egy számnak nem marad párja.

Például $(-2)^5 = ((-2)\ (-2)) \cdot ((-2)\ (-2)) \cdot (-2)$.

Mivel két negatív szám szorzata pozitív szám, ezért igazak a következő állítások:

negatív szám hatványra emelésekor, ha a hatványkitevő páros szám, akkor eredményül pozitív számot kapunk, ha pedig a negatív szám hatványkitevője páratlan, akkor az eredmény negatív szám.

Lehet-e például az 5-öt 0 vagy –2 hatványra emelni? A válasz igen. Hogy hogyan kell ezt elvégezni, erről a 8. osztályban fogtok tanulni.

PÉLDA 1 Oldjátok meg az $(x - 10)^8 = -1$ egyenletet!

Megoldás: Mivel bármely negatív szám hatványra emelésekor, ha a hatványkitevő páros, eredményül nemnegatív számot kapunk, ezért az adott egyenletnek nincs megoldása.

Felelet: nincs megoldás. ◀

PÉLDA 2 Bizonyítsátok be, hogy a $10^{200} + 2$ kifejezés értéke osztható 3-mal.

Megoldás: A 10^{200} kifejezés értéke egy 1-es számjegyből és 200 darab nullából áll, a $10^{200} + 2$ kifejezés eredménye egy 1-es, egy 2-es számjegyből és 200 darab nullából áll. Tehát, ha összeadjuk a kifejezés értékének a számjegyeit, az összeadás eredményéül 3-at kapunk, ezért maga a szám is osztható 3-mal. ◀

PÉLDA 3 Bizonyítsátok be, hogy a $9^n - 1$ kifejezés értéke osztható 10-zel bármely páros n esetén.

Megoldás: Ha n páros szám, akkor a 9^n kifejezést olyan szorzatként írhatjuk fel, amelyik páros számú kilencesből áll:

$$9^n = (9 \cdot 9)\,(9 \cdot 9)\,\ldots\,(9 \cdot 9).$$

Mivel ezért $9 \cdot 9 = 81$ a $(9 \cdot 9)\,(9 \cdot 9)\,\ldots\,(9 \cdot 9)$ kifejezés értékének utolsó számjegye 1. Tehát a $9^n - 1$ kifejezés értékének utolsó számjegye 0.

Levonhatjuk a következtetést, hogy a $9^n - 1$ kifejezés értéke osztható 10-zel bármely páros n esetén. ◀

?

1. Mit nevezünk az a szám természetes n kitevős hatványának $n > 1$ esetén?
2. Hogyan olvassuk el a következő kifejezéseket: an, a^2, a^3?
3. Mit nevezünk az a szám első hatványának?
4. Mennyivel egyenlő a 0^n kifejezés értéke bármely természetes n esetén?
5. Pozitív vagy negatív számot kapunk pozitív szám hatványra emelésekor?
6. Pozitív vagy negatív számot kapunk negatív szám hatványra emelésekor, ha a hatványkitevő páros? Ha páratlan?

Під час відмінювання іменників можуть відбуватися чергування голосних звуків: звук [і] в закритому складі замінює звук [е] або [о] у відкритому складі. Наприклад: *степ**і**нь — степ**е**ня, степ**е**нем, тотожн**і**сть — тотожн**о**сті, власти**ві**сть — власти**во**сті.*

GYAKORLATOK

158.° Olvassátok el a kifejezéseket, nevezzétek meg a hatvány alapját és a hatványkitevőt:

1) 9^6; 3) $0{,}3^5$; 5) $(-0{,}6)^3$; 7) 73^1;
2) $2{,}4^7$; 4) $(-8)^2$; 6) $(-a)^{11}$; 8) $(3p)^{12}$;

159.° Írjátok fel hatvány alakjában az aonos tényezőket tartalmazó kifejezéseket:

1) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$; 5) $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$;

2) $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$; 6) $\underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{10 \text{ tényező}}$;

3) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$; 7) $\underbrace{0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot \ldots \cdot 0{,}4}_{k \text{ tényező}}$;

4) $2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m$; 8) $\underbrace{\mathrm{c} \cdot \mathrm{c} \cdot \ldots \cdot \mathrm{c}}_{m \text{ tényező}}$.

160.° Írjátok fel hatvány alakjában a szorzatot:

1) $c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c$; 3) $\underbrace{(-x) \cdot (-x) \cdot \ldots \cdot (-x)}_{19 \text{ tényező}}$;

2) $5b \cdot 5b \cdot 5b$; 4) $\underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{d \text{ tényező}}$.

161.° A hatvány meghatározásának felhasználásával írjátok fel szorzat alakjában a hatványokat:

1) 11^6; 3) $\left(-\frac{1}{6}\right)^2$; 5) $(-3{,}6)^7$;

2) $0{,}1^4$ 4) $(5c)^8$; 6) $(a+b)^8$.

162.° A hatvány meghatározásának felhasználásával írjátok fel szorzat alakjában a hatványokat:

1) 3^7; 2) $\left(2\frac{1}{7}\right)^4$; 3) $(c+d)^3$; 4) $(a+b)^2$.

163.° Mivel lesz egyenlő a kifejezés értéke:

1) $0{,}6^2$; 2) 0^6; 3) $(-9)^2$; 4) 0^{12}; 5) $(-1)^{12}$ 6) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$?

164.° Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) 8^3; 3) $(-1{,}9)^2$; 5) $(-0{,}6)^3$; 7) $(-0{,}01)^3$;

2) $1{,}5^3$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^3$; 6) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$; 8) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^5$.

165.° Végezzétek el a hatványra emelést:

1) 7^2; 3) $1{,}2^3$; 5) $(-0{,}8)^3$;

2) $0{,}5^3$; 4) $(-0{,}1)^7$; 6) $\left(\frac{1}{6}\right)^4$.

166.° Töltsétek ki a táblázatot:

a	2	–2	10	–10	0,1	–0,1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
a^2								
a^3								
a^4								

167.° Töltsétek ki a táblázatot:

a	–6	6	–0,4	0,4	3	0,03	$\frac{1}{2}$	–1	0
$10a^2$									
$(10a)^2$									

168.° A Krím félsziget Ukrajna legnagyobb félszigete. Területe $2{,}55 \cdot 10^4$ km². Fejezzétek ki ezt a területet természetes számmal négyzetkilométerekben!

169.° A Föld és a Nap közötti távolság $1{,}495 \cdot 10^{11}$ m. Fejezzétek ki ezt a távolságot természetes számmal méterekben!

170.° A szárazföld és a szigetek területe a Földön $1{,}49 \cdot 10^8$ km², az óceánok területe pedig $3{,}61 \cdot 10^8$ km². Fejezzétek ki ezeknek a területeknek a nagyságát természetes számmal.

171.° Számítsátok ki:

1) $8^2 - 1^{10}$; 2) $0,3 - 2^4$; 3) $(4,2 - 4,1)^4 \cdot 25^2$;

172.° Számítsátok ki:

1) $4^3 + 3^5$; 2) $0,6^3 - 0,4^3$; 3) $0,12 \cdot 5^4$;

173.° Határozzátok meg a kifejezések értékét:

1) $x^2 - x^3$ ha $x = 0,1$;
2) $15a^2$, ha $a = 0,4$;
3) $(x - y)^5$, ha $x = 0,8$, $y = 0,6$;
4) a^2b^3, ha $a = 0,6$, $b = 0,5$;
5) $(x^2 - y^2) : (x - y)$, ha $x = 5$, $y = 3$;
6) $(x^2 - y^2) : x - y$, ha $x = 5$, $y = 3$;
7) $x^2 - y^2 : (x - y)$, ha $x = 5$, $y = 3$;
8) $x^2 - y^2 : x - y$, ha $x = 5$, $y = 3$.

174.° Határozzátok meg a kifejezések értékét:

1) $16 - c^3$, ha $c = 2$;
2) $(16x)^6$, h,a $x = 0,125$;
3) a^2b^3, ha $a = 10$, $b = 0,1$;
4) $4a^4 - a$, ha $a = 3$.

175.° A kifejezések kiszámítása nélkül tegyétek ki a megfelelő relációs jelet:

1) $(-5,8)^2$ és 0;
2) 0 és $(-3,7)^3$;
3) $(-12)^7$ és $(-4)^4$;
4) -8^8 és $(-8)^8$;
5) $(-17)^6$; és 17^6;
6) $(-34)^5$; és $(-39)^5$.

176.° A kifejezések kiszámítása nélkül tegyétek ki a megfelelő relációs jelet:

1) 0 és $(-1,9)^{10}$;
2) 0 és $(-76)^{15}$;
3) $(-0,1)^{12}$; és $(-12)^{25}$;
4) $\left(-4\frac{7}{9}\right)^9$ és $\left(-5\frac{8}{11}\right)^9$.

177.° Igaz-e a következő egyenlőség:

1) $3^2 + 4^2 = 7^2$;
2) $5^2 + 12^2 = 13^2$;
3) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 13^2$;
4) $(1 + 2 + 3) = 1^3 + 2^3 + 3^3$?

178.° Bizonyítsátok be, hogy $1^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 = 11^2$!

179.• Hasonlítsátok össze 0-val a kifejezések értékét: 2^{100}; $(-2)^{100}$; -2^{100}; $-(-2)1^{00}$. Van-e közöttük olyan kifejezés, amelynek azonos az értéke?

180.• Hasonlítsátok össze 0-val a kifejezések értékét: 5^{101}; -5^{101}; $(-5)^{101}$; $-(-5)^{101}$. Van-e a közöttük olyan kifejezés, amelynek különböző az értéke?

181.• Rendezzétek csökkenő sorrendbe a kifejezéseket:

1) $0{,}3$; $0{,}3^2$; $0{,}3^3$;

2) $-0{,}4$; $(-0{,}4)^2$; $(-0{,}4)^3$;

182.• ***(Gyakorlati házi feladat)*** Rendezzétek csökkenő sorrendbe a kifejezéseket:

$$\left(-\frac{1}{9}\right)^1 \text{X},\quad \left(-\frac{1}{9}\right)^2 \text{A},\quad \left(-\frac{1}{9}\right)^3 \text{A},\quad \left(\frac{1}{9}\right)^1 \text{H},\quad \left(\frac{1}{9}\right)^3 \text{L},\quad \left(-\frac{1}{9}\right)^4 \text{P}.$$

Az ezeknek a kifejezéseknek megfelelő betűk egy kiemelkedő ukrán sportoló, olimpiai bajnok vezetéknevét alkotják. Keressetek információt az interneten arról, hogy milyen sportot űz, és milyen sporteredményekkel rendelkezik.

183.• Hasonlítsátok össze nullával a kifejezések értékét:

1) $(-4)^7 \cdot (-12)^9$;

2) $(-5)^6 \cdot (-17)^{11}$;

3) $(-14)^4 \cdot (-25)^{14}$;

4) $(-7)^9 \cdot 0^6$;

184.• Hasonlítsátok össze nullával a kifejezések értékét:

1) $(-2)^{14} \cdot (-3)^{15} \cdot (-4)^{16}$;

2) $(-5)^{17} \cdot (-6)^{18} \cdot (-7)^{19}$.

185.• Írjátok fel:

1) a 16-ot; a 64-et; a 256-ot 4 hatványaként;

2) a 0,09-ot; a 0,027-et; 0,00243-et 0,3 hatványaként!

186.• Írjátok fel a: 1) 10 000; 2) –32; 3) 0,125; 4) –0,00001; 5) $-\frac{8}{343}$ számokat egynél nagyobb hatványkitevővel és az abszolút értéke szerint a legkisebb lehetséges alappal!

187.• Írjátok fel számkifejezés alakjában az alábbi kifejezéseket, és számítsátok ki az értéküket:

1) 7 és 5 különbségének a négyzete;
2) 7 és 5 négyzeteinek különbsége;
3) 4 és 3 összegének köbe;
4) 4 és 3 köbének összege!

188.• Írjátok fel számkifejezés alakjában, és számítsátok ki az értékét:

1) 5 köbének és 8 négyzetének összege;
2) 9 és 8 különbségének köbe;
3) 2,5 és 0,25 négyzeteinek összege;
4) 7,8 és 8,2 összegének négyzete!

189.• Hány: 1) méter; 2) centiméter; 3) milliméter van 1 km-ben? A válaszokat írjátok fel 10-es alapú hatványok alakjában.

190.• Milyen számot kell a * helyére tenni, hogy igaz egyenlőséget kapjunk:

1) 1 ha = 10^* a;
2) 1 ha = 10^* м^2;
3) 1 a = 10^* м^2;
4) 1 ha = 10^* cм^2?

191.• A fény sebessége légüres térben 300 000 km/sec.

1) Írjátok fel ezt a számot 10-es alapú hatvány alakjában!
2) Fejezzétek ki a fény sebességét méter per szekundumban; a kapott számot írjátok fel 10-es alapú hatvány alakjában!

192.• Hány:

1) négyzetdeciméter;
2) négyzetcentiméter;
3) négyzetmilliméter van 1 négyzetméterben?

A feleletet írjátok fel 10-es alapú hatvány alakjában.

193.• A következő táblázatban a Nap és a naprendszer néhány bolygólya közötti távolságot mutatja:

Bolygó	Mars	Szaturnusz	Merkúr	Jupiter
A Nap és a bolygó közötti távolság, km	$2{,}28 \cdot 10^8$	$1{,}427 \cdot 10^9$	$5{,}79 \cdot 10^7$	$7{,}781 \cdot 10^8$

Írjátok fel a bolygók neveit, a távolságuk szerint csökkenő sorrendben!

194.• A következő táblázat néhány európai ország területét tartalmazza.

Ország	Olaszország	Andorra	Luxemburg	Magyarország
Az ország területe, km^2	$3{,}013 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^2$	$2{,}6 \cdot 10^3$	$9{,}3 \cdot 10^4$

Írjátok fel ezeknek az országoknak a neveit, területók szerint növekvő sorrendben!

195.• A –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3számok közül melyek lesznek az egyenlet gyökei:

1) $x^4 = 16$; 3) $x^2 + x = 2$;
2) $x^5 = -243$; 4) $x^3 + x^2 = 6x$?

196.• Az x mely értékénél lesz az alábbi kifejezések értéke nulla:

1) $(2x + 3)^2$; 2) $(x + 4)^4$; 3) $(6x - 1)^5$?

197.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $x^{10} = -1$; 2) $(x - 5)^4 = -16$.

198.• Mely természetes n szám értékére teljesül a következő egyenlőtlenség: $8 < 3^n < 85$?

199.• Mely természetes m szám értékére teljesül a következő egyenlőtlenség: $0{,}07 < 0{,}4^m < 0{,}5$?

200.•• Bizonyítsátok be, hogy az $x^2 + (x - 1)^2$ kifejezés csak pozitív értéket vehet fel!

201.•• Bizonyítsátok be, hogy az $(x + 1)^2 + |x|$ kifejezésnek csak pozitív értéke lehet a változó bármely értéke mellett!

202.•• Bizonyítsátok be, hogy az alábbi egyenleteknek nincs pozitív gyöke:

1) $2x^2 + 5x + 2 = 0$; 2) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$;

203.•• Bizonyítsátok be, hogy az alábbi egyenleteknek nincs negatív gyöke:

1) $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 7x + 5 = 0$;

2) $x^8 + x^4 + 1 = x^7 + x^3 + x$.

204.•• Az x és az y mely értékei mellett igazak az alábbi egyenlőségek:

1) $x^2 + y^2 = 0$; 2) $(x^2 - 1)^4 + (y + 2)^6 = 0$?

205.•• Az x és az y mely értékei mellett igaz az $x^8 + (y - 3)^2 = 0$ egyenlőség?

206.•• A változó mely értéke mellett lesz a kifejezésnek legkisebb az értéke:

1) $x^2 + 7$; 2) $(x - 1)^4 + 16$?

207.•• A változó mely értéke mellett lesz a kifejezésnek legnagyobb az értéke:

1) $10 - x^2$; 2) $24 - (x + 3)^6$?

208.•• Bizonyítsátok be, hogy az alábbi kifejezés:

1) $101^{101} + 103^{103}$ maradék nélkül osztható 2-vel;

2) $16^7 + 15^8 - 11^9$ maradék nélkül osztható 10-zel;

3) $10^{10} - 7$ maradék nélkül osztható 3-mal!

209.•• Bizonyítsátok be, hogy az alábbi kifejezés:

1) $10^{100} + 8$ maradék nélkül osztható 9-cel!

210.* Bizonyítsátok be, hogy bármilyen természetes n esetében:

1) $6^n - 1$; 2) $111^n - 6$.

maradék nélkül osztható 5-tel!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

211. Számítsátok ki a kifejezés értékét:

$$\left(3\frac{1}{3}\cdot 1,3 - 7,2\cdot\frac{2}{27} - 9,1 : 3,5\right) : \frac{2}{5}.$$

212. Misi és Katinka gombát szedtek. Misi 5-ször kevesebbet szedett, mint Katinka Az összes gomba hányad részét szedte Katinka?

213. 25 kg rezet adtunk egy 400 kg-os, 15 % rezet tartalmazó ötvözetthez. Hány százalék volt a réz az új ötvözetben?

214. Az egyik zsákban 80 kg cukor volt, a másodikban pedig 60 kg. Az első zsákból háromszor annyi cukrot szedtek ki, mint a másodikból, akkor a második zsákban kétszer több cukor maradt, mint az elsőben. Hány kilogramm cukrot szedtek ki mindegyik zsákból?

215. Oldjátok meg az egyenletet:

1) $9(2x-1)-5(11-x)=3(x+4)$;
2) $5x-26=12x-7(x-4)$.

216. Ismert, hogy az a, b és c számok közül egy pozitív, a másik negatív, a harmadik pedig nullával egyenlő, és $|a| = b^2(b-c)$. Állapítsátok meg, hogy melyik szám lesz pozitív, melyik negatív és melyik nulla!

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

217. Hasonlítsátok össze a kifejezések értékeit:

1) $2^2 \cdot 2^3$ és 2^5;
2) $4^2 \cdot 4^1$ és 4^3;
3) $(3^3)^2$ és 3^6;
4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^3$ és $\left(\frac{1}{2}\right)^9$;
5) $5^3 \cdot 2^3$ és $(5 \cdot 2)^3$;
6) $(0{,}25 \cdot 4)^2$ és $0{,}25 \cdot 4^2$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

218. Egy város bármelyik metróállomásáról eljuthatunk bármelyik másik állomásra (lehet, hogy csak átszállásokkal). Bizonyítsátok be, hogy létezik egy olyan állomás, amelyiket, ha bezárjuk (nem utazhatunk át rajta), a megmaradt állomások bármelyikéről ugyanúgy el tudunk jutni bármelyik másik állomásra!

6. A természetes kitevőjű hatvány tulajdonságai

Megvizsgálunk egy olyan szorzatot, amelyik két azonos alapú hatványból áll: a^2a^5. Ezt a kifejezést felírhatjuk a alapú hatványként:

$$a^2a^3 = (aa) \cdot (aaaaa) = aaaaaaa = a^7.$$

Tehát: $a^2a^5 = a^{2+5}$.

Hasonlóképpen meggyőződhetünk például arról, hogy $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$, $a \cdot a^9 = a^{1+9} = a^7$.

Megfigyelhetjük a következő törvényszerűséget: $a^m a^n = a^{m+n}$, ahol m és n természetes számok.

Azonban tetszőleges számú konkrét példa esetén sem tudjuk garantálni, hogy a vizsgált egyenlőség mindig igaz bármely természetes m és n esetén. Az egyenlőség helyességéről csak **bizonyítás** útján győződhetünk meg.

A matematikában az olyan állítást, amelynek helyességéről bizonyítás segítségével tudunk meggyőződni, **tételnek** nevezzük.

6.1. tétel. ***Bármely a és bármely természetes m és n számra igaz a következő egyenlőség:***

$$\boldsymbol{a^m a^n = a^{m+n}}$$

Bizonyítás. Az $m > 1$ és $n > 1$ esetében:

$$a^m a^n = (\underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ tényező}})(\underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tényező}}) = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{(m\,+\,n) \text{ tényező}} = a^{m+n}.$$

Mivel nem elfogadott az egy tényezőből álló szorzat vizsgálata, ezért a bizonyítás teljessége érdekében külön-külön megvizsgáljuk a következő eseteket: $m = 1$ és $n > 1$;$m > 1$ és $n = 1$; $m = n = 1$. Tehát, ha $m = 1$ és $n > 1$, akkor

$$a \cdot a^n = a \cdot (\underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tényező}}) = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{(n\,+\,1) \text{ tényező}} = a^{n+1}.$$

Az $m > 1$ és $n = 1$ vagy $m = n = 1$ eseteket vizsgáljátok meg önállóan.

Az $a^m a^n = a^{m+n}$ azonosság a hatvány alaptulajdonságát fejezi ki.

Ez a tulajdonság igaz három vagy több hatvány szorzata esetében is. Például:

$$3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^7 = (3^2 \cdot 3^3) \cdot 3^7 = 3^{2+3} \cdot 3^7 = 3^{(2+3)+7} = 3^{2+3+7} = 31^2.$$

Tehát *azonos alapú hatványok szorzásánál az alapot változatlanul hagyjuk, a hatványkitevőket pedig összeadjuk.*

Megizsgáljuk az $a^9 : a^4$ kifejezést, ahol $a \neq 0$. Ez a kifejezés két azonos alapú hatvány hányadosa. Mivel $a^4 \cdot a^5 = a^9$, ezért a hányados meghatározása alapján felírhatjuk: $a^9 : a^4 = a^5$, vagyis $a^9 : a^4 = a^{9-4}$. E példa alapján felírhatjuk a következő tételt.

6.2. tétel. ***Bármely nullától különböző a számra és bármely természetes m és n hatványkitevőre (m > n) igaz a következő egyenlőség:***

$$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}.$$

Bizonyítás. Megvizsgáljuk az a^n és az a^{m-n} hatványok szorzatát. Felhasználva a hatvány alaptulajdonságát, felírhatjuk:

$$a^n \cdot a^{m-n} = a^{n+(m-n)} = a^{n+m-n} = a^m.$$

Tehát a hányados meghatározása alapján:

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \ \bullet$$

Ebből a tételből a következő szabály következik:

azonos alapú hatványok osztásánál az alapot változatlanul hagyjuk, az osztandó hatványkitevőjéből pedig kivonjuk az osztó hatványkitevőjét.

Megvizsgáljuk az $(a^3)^4$ kifejezést. Ennek a kifejezésnek az alapja a^3, a hatványkitevője pedig 4. Ezért felírhatjuk:

$$(a^3)^4 = a^3a^3a^3a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3 \cdot 4} = a^{12}.$$

A fenti példa a következő tétel felírására ad lehetőséget.

6.3. tétel. ***Bármely a szám és természetes m és n számok esetén igaz a következő egyenlőség:***

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Bizonyítás: Könnyen belátható, ha $n = 1$, akkor igaz az egyenlőség. Ha $n > 1$, akkor felírhatjuk:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ tényező}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ összeadandó}}} = a^{mn}.$$

Ebből a tételből a következő szabály következik:

hatvány hatványozásánál a hatványkitevőket összeszorozzuk, az alapot pedig változatlanul hagyjuk.

Például: $(3^7)^2 = 3^{7 \cdot 2} = 3^{14}$; $(x^k)^3 = x^{k \cdot 3} = x^{3k}$.

Az $(ab)^3$ kifejezés példáján megmutatjuk, hogyan tudjuk átalakítani a szorzat hatványát:

$$(ab)^3 = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) = (aaa) \cdot (bbb) = a^3b^3.$$

Általános esetben felírhatjuk a következő tételt:

6.4. tétel. ***Bármely a és b szám és természetes n szám esetén igaz a következő egyenlőség:***

$$(ab)^n = a^nb^n.$$

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogyha $n = 1$, akkor a bizonyítandó egyenlőség igaz. Ha $n > 1$, akkor felírhatjuk:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ tényező}} = (\underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tényező}})(\underbrace{bb \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ tényező}}) = a^nb^n.$$

Ez a tulajdonság igaz három vagy akár több tényező esetén is. Például:

$$(abc)^n = ((ab) \cdot c)n = (ab)n \cdot cn = a^nb^nc^n.$$

Tehát, ***a szorzat hatványozásánál a tényezőket külön-külön hatványra emeljük, majd a kapott eredményeket összeszorozzuk.***

PÉLDA 1 Hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $(a^5)^2 \cdot (a^6)^7$ 2) $(-a^4)^9$; 3) $(-a^4)^8$.

Megoldás: 1) Egymás után alkalmazzuk a hatvány hatványozásának és az azonos alapú hatványok szorzásának szabályait:

$$(a^5)^2 \cdot (a^6)^7 = a^{10} \cdot a^{42} = a^{52}.$$

2) Mivel $-a^4 = -1 \cdot a^4$ ezért alkalmazva a szorzat hatványozásának képletét, a következőt kapjuk:

$$(-a^4)^9 = (-1 \cdot a^4)^9 = (-1)^9 \cdot (a^4)^9 = -1 \cdot a^{36} = -a^{36}.$$

3) A következőt kapjuk: $(-a^4)^8 = (-1 \cdot a^4)^8 = (-1)^8 \cdot (a^4)^8 = 1 \cdot a^{32} = a^{32}$. ◀

PÉLDA 2 Írjátok fel hatvány alakjában a $216a^3b^6$ kifejezést.

Megoldás: Felírhatjuk:

$$216a^3b^6 = 6^3 \cdot a^3 \cdot (b^2)^3 = (6ab^2)^3. \text{ ◀}$$

PÉLDA 3 Határozzátok meg a kifejezés értékét: $\left(1\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$.

Megoldás:

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = \left(\frac{4}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}. \text{ ◀}$$

PÉLDA 4 Hasonlítsátok össze a kifejezéseket:

1) $(-11)^{14} \cdot (-11)^{14}$ és $(-11)^{16}$;
2) $(-12)^{19}$ és $(-12)^{15}$;
3) 5^{30} és 9^{20};
4) 16^3 és 65^2.

Megoldás:

1) Felírhatjuk: $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 = (-11)^{17} < 0$. Ezzel együtt felírhatjuk: $(-11)^{16} > 0$.

Tehát $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 < (-11)^{16}$.

2) Mivel $|(-12)^{19}| > |(-12)^{15}|$, és a számok, amelyeket összehasonlítunk negatívak, ezért $(-12)^{19} < (-12)^{15}$.

3) Mivel $5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$ és $9^{20} = (9^2)^{10} = 81^{10}$, ezért $5^{30} > 9^{20}$.

4) Felírhatjuk: $16^3 = (4^2)^3 = (4^3)^2 = 64^2$. Tehát $16^3 < 65^2$. ◀

PÉLDA 5 Milyen számjegyre végződik a 2^{100} kifejezés értéke?

Megoldás: Felírhatjuk: $2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25}$. Mivel $6 \cdot 6 = 36$, ezért bármelyik 6-ra végződő szám szorzatának az utolsó számjegye 6 lesz.

Ezért a 6-ra végződő szám bármilyen hatványa 6-ra végződik.

Felelet: 6. ◀

?

1. Írjátok fel azt az azonosságot, amely kifejezi a hatvány alaptulajdonságát!

2. Hogyan lehet azonos alapú hatványokat szorozni?

3. Hogyan lehet azonos alapú hatványokat osztani?

4. Hogyan emeljük hatványra a hatványokat?

5. Hogyan emeljük hatványra a szorzatot?

Пригадайте. Нерівності читаємо так: ліву частину — у називному відмінку, а праву — у родовому відмінку, наприклад: $23 < 49$ — *двадцять три менше від сорока дев'яти;* $n > 6$ — *«ен» більше за шість*; $3^2 < 10$ — *три у квадраті менше від десяти*.

GYAKORLATOK

219.° Adjátok meg hatvány alakjában a szorzatot:

1) m^5m^4;
2) xx^7;
3) a^3a^3;
4) $6^8 \cdot 6^3$;
5) $y^3y^5y^9$;
6) c^8c^9c;
7) $(b-c)^{10}(b-c)^6$;
8) $11^2 \cdot 11^4 \cdot 11^6$;
9) $x^4xx^{11}x^2$;
10) $(ab)^5 \cdot (ab)^{15}$;
11) $(2x+3y)^6 \cdot (2x+3y)^{14}$;
12) $(-xy)^2 \cdot (-xy)^7 \cdot (-xy)^9$.

220.° Adjátok meg hatvány alakjában a kifejezést:

1) a^5a^8;
2) a^2a^2;
3) a^9a;
4) aa^2a^3;
5) $(m+n)^{13} \cdot (m+n)$;
6) $(cd)^8 \cdot (cd)^{18} \cdot (cd)$.

221.° A csillag helyére írjatok olyan a alapú hatványt, hogy igaz egyenlőséget kapjunk:

1) $a^6 \cdot * = a^{14}$ 2) $* \cdot a^6 = a^7$; 3) $a^{10} \cdot * \cdot a^2 = a^{18}$.

222.° Az a^{12} kifejezést írjátok fel két a alapú hatvány szorzataként, amelyek közül az egyik:

1) a^6; 2) a^4; 3) a^3; 4) a^5; 5) a.

223.° Adjátok meg hatvány alakjában a hányadost:

1) $a^{12} : a^3$; 3) $c^7 : c^6$;
2) $b^6 : b$; 4) $(a+b)^8 : (a+b)^4$.

224.° Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $7^7 : 7^5$; 3) $0{,}6^9 : 0{,}6^6$;
2) $10^{18} : 10^{14}$; 4) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^5 : \left(-1\frac{1}{8}\right)^3$.

225.° Végezzétek el az osztást:

1) $m^{10} : m^2$; 2) $x^5 : x^4$; 3) $y^{18} : y^6$.

226.° Adjátok meg a kifejezést m alapú hatvány alakjában:

1) $(m^5)^3$; 3) $((m^2)^4)^6$;
2) $(m^3)^4$; 4) $(m^7)^2 \cdot (m^4)^9$.

227.° Adjátok meg a kifejezést n alapú hatvány alakjában:

1) $(n^2)^8$; 3) $((n^3)^2)^{10}$;
2) $(n^9)^5$; 4) $(n^{12})^4 \cdot (n^{21})^2$.

228.° Adjátok meg a hatványt hatványok szorzataként:

1) $(ab)^6$; 3) $(3c)^7$; 5) $(-0{,}2cd)^4$;
2) $(mnp)^5$; 4) $(-8xy)^3$; 6) $\left(\frac{3}{7}kt\right)^9$.

229.° Adjátok meg a hatványt hatványok szorzataként:

1) $(ax)^2$; 2) $(xyz)^{12}$; 3) $(7m)^8$; 4) $(-0{,}3bc)^{11}$.

230.° Adjátok meg hatvány alakjában:

1) a^3b^3; 3) $9m^2n^2$; 5) $-\frac{27}{343}c^3d^3$;
2) $-m^7$; 4) $64x^3y^3$; 6) $0{,}0001k^4p^4$.

231.° Adjátok meg hatvány alakjában:

1) $x^{12}y^{12}$;
2) $-125m^3n^3$;
3) $32p^5q^5$;
4) $1\,000\,000\,000a^9b^9c^9$.

232.° ***(Keressétek meg a hibát)*** Keressétek meg és javítsátok ki a hibát, melyet Ledascsenko Vaszil ejtett, miközben átalakította a hatványokat tartalmazó kifejezéseket:

1) $a^4a^3 = a^{12}$;
2) $a \cdot a = 2a$;
3) $(a^3)^2 = a^9$;
4) $3^2 \cdot 5^2 = 15^4$;
5) $2^2 \cdot 7^3 = 14^5$;
6) $(2a)^4 = 8a^4$;
7) $3 \cdot 4^3 = 12^3$;
8) $a^7b^7 = (ab)^{14}$;
9) $a^3b^2 = (ab)^6$.

233.° Adjátok meg a kifejezést hatvány alakjába és számítsátok ki az értékeit (ha szükséges, alkalmazzátok a könyv borítóján található 2 és 3 számok hatványainak értéktáblázatát):

1) $2^3 \cdot 2^4$;
2) $(3^2)^3$;
3) $0{,}2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}2^3$;
4) $0{,}5^{12} \cdot 2^{12}$;
5) $2^{12} : 2^8$;
6) $(3^4)^5 : 3^{19}$;
7) $\left(\frac{1}{3}\right)^9 \cdot 9^9$;
8) $2{,}5^5 \cdot 40^5$.

234.° Adjátok meg a kifejezést hatvány alakjába és számítsátok ki az értékeit (ha szükséges, alkalmazzátok a könyv borítóján található 2 és 3 számok hatványainak értéktáblázatát):

1) $2^2 \cdot 2^3$;
2) $(2^2)^3$;
3) $3^2 \cdot 3 \cdot 3^3$;
4) $0{,}3^8 : 0{,}3^5$;
5) $7^9 \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^9$;
6) $12{,}5^3 : 8^3$.

235.• Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

1) $-x \cdot x^2$;
2) $(-x)^2 \cdot x$;
3) $-x \cdot (x)^2$;
4) $(-x) \cdot (-x)^2 \cdot (-x)$.

236.• Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

1) $(-a)^2 \cdot a^3$;
2) $-a^2 \cdot a^3$;
3) $a^2 \cdot (-a)^3$;
4) $-a^2 \cdot (a)^3$;

237.• Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

1) $(-a^5)^2$;
2) $(-a^3)^3$;
3) $(-a^4)^7 \cdot (-a^2)^6$.

238.• Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

1) $((-a^6)^5)^9$;
2) $((-a^{11})^2)^3$.

239.• Helyettesítsétek a csillagokat olyan kifejezéssel, hogy igaz egyenlőséget kapjatok:

1) $(*)^4 = c^{20}$; 2) $(*)^2 = c^{14}$; 3) $(*)^n = c^{8n}$; 4) $(*)^7 = c^{7n}$,

ahol n természetes szám!

240.• Írjátok fel az a^7 hatványt két, a alapú hatvány szorzataként az összes lehetséges módon!

241.• Írjátok fel hatvány alakjában a kifejezéseket:

1) $a^n a^5$; 2) aa^n; 3) $a^3 a^n$; 4) $(a^3)^n$; 5) $(a^n)^2 \cdot (a^5)^n$.

ahol n természetes szám!

242.• Írjátok fel hatvány alakjában a kifejezéseket:

1) $2^4 \cdot 2^4$; 2) $2^4 + 2^4$; 3) $2^n \cdot 2^n$ 4) $2^n + 2^n$,

ahol n természetes szám!

243.• Írjátok fel hatvány alakjában a kifejezéseket:

1) $3^5 + 3^5 + 3^5$;

2) $4^k + 4^k + 4^k + 4^k$, ahol k – természetes szám

244.• Bizonyítsátok be, hogyha a négyzet oldalát n-szeresére növeljük, akkor a területe n^2-szeresére nő!

245.• Hányszorosára nő a kocka térfogata, ha az élét m-szeresére növeljük?

246.• Adjátok meg a kifejezéseket olyan hatvány alakjában, amelynek kitevője 2:

1) a^2b^6; 3) $x^4y^{10}z^{18}$; 5) $81c^{10}d^{32}p^{44}$.

2) x^8y^{14}; 4) $4m^{12}n^{16}$;

247.• Adjátok meg a kifejezéseket olyan hatvány alakjában, amelynek kitevője 3:

1) a^3b^6; 2) x^9y^{15}; 3) $8x^{12}y^{18}z^{24}$; 4) $0{,}001m^{30}n^{45}$.

248.• Adjátok meg a kifejezéseket olyan hatványok alakjában, amelynek 5 az alapja:

1) 125^6; 2) $(25^4)^2$.

249.• Adjátok meg a kifejezéseket olyan hatványok alakjában, amelynek –5 az alapja:

1) 625^5; 2) $((-25)^2)^3$.

250.$^\bullet$ Adjátok meg a kifejezéseket olyan hatványok alakjában, amelynek 2 az alapja:

1) $8^9 \cdot 4^5$; 2) $32 \cdot 16^6 \cdot 64^3$.

251.$^\bullet$ Számítsátok ki a kifejezések értékét:

1) $(6^4)^4 : (6^5)^3$; 3) $\dfrac{7^{14} \cdot (7^2)^3}{(7^3)^6 \cdot 7^2}$; 5) $\dfrac{3^8 \cdot 7^8}{21^7}$;

2) $8^3 : 4^4$; 4) $\dfrac{25^3 \cdot 125^2}{5^{10}}$; 6) $\dfrac{5^9 \cdot 4^6}{20^6}$.

252.$^\bullet$ Számítsátok ki:

1) $100^5 : 1000^2$; 3) $\dfrac{4^3 \cdot 16^2}{2^{12}}$;

2) $\dfrac{3^{10} \cdot (3^3)^5}{(3^5)^4 \cdot 3}$; 4) $\dfrac{45^{10}}{5^8 \cdot 3^{19}}$.

253.$^\bullet$ Számítsátok ki:

1) $\left(1\dfrac{1}{6}\right)^9 \cdot \left(\dfrac{6}{7}\right)^{10}$; 2) $5^{14} \cdot 0{,}2^{12}$; 3) $\left(-1\dfrac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^8$.

254.$^\bullet$ Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $10^5 \cdot 0{,}1^7$; 2) $1{,}9^{14} \cdot \left(\dfrac{10}{19}\right)^{15}$.

255.$^\bullet$ Hasonlítsátok össze a kifejezéseket:

1) $(-5)^{21} \cdot (-5)$ és $(-5)^{24}$; 3) $(-8)^5 \cdot (-8)^4$ és $(-8)^8$;
2) $(-7)^8 \cdot (-7)^7$ és $(-7)^{17}$; 4) $(-6)^3 \cdot (-6)^9$ és $(-6)^{13}$;

256.$^{\bullet\bullet}$ Helyettesítsétek a csillagot olyan hatvánnyal, hogy igaz egyenlőséget kapjunk:

1) $8 \cdot * = 2^8$; 2) $a^n \cdot * = a3^{n+2}$, ahol n – természetes szám!

257.$^{\bullet\bullet}$ Írjátok fel a 3^{24} kifejezést olyan hatványként, amelynek alapja:

1) 3^3; 2) 3^{12}; 3) 9; 4) 81.

258.$^{\bullet\bullet}$ Írjátok fel a 2^{48} kifejezést olyan hatványként, amelynek alapja:

1) 2^4; 2) 2^{16}; 3) 8; 4) 64.

259.$^{\bullet\bullet}$ Oldjátok meg az egyenletet:

1) $x^7 = 6^{14}$; 2) $x^4 = 5^{12}$.

260.•• Hasonlítsátok össze a kifejezések értékeit:

1) 2^{300} és 3^{200};
3) 27^{20} és 11^{30};
2) 4^{18} és 18^{9};
4) $3^{10} \cdot 5^{8}$ és 15^{9}.

261.•• Hasonlítsátok össze a kifejezések értékeit:

1) 10^{40} és $10\,001^{10}$;
3) 8^{12} és 59^{6};
2) 124^{4} és 5^{12};
4) 6^{14} és $2^{16} \cdot 2^{12}$.

262.* Tudjuk, hogy a $625 + 625 + \ldots + 625$ összeg egyenlő 5^{101}. Hány összeadandóból áll az összeg?

263.* Milyen számjegyre végződik a kifejezés értéke (n természetes szám):

1) 4^{100}; 2) 3^{4n}; 3) 4^{n}; 4) 3^{n}?

264.* Milyen számjegyre végződik a kifejezés értéke (n természetes szám):

1) 9^{2n}; 2) 7^{4n}; 3) 7^{2n}?

265.* Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értéke:

1) $17^{8} + 19$ osztható 10-zel;
2) $64^{64} - 1$ osztható 5-tel;
3) $3^{4n} + 14$, ahol n természetes szám, osztható 5-tel.

266.* Bizonyítsátok be, hogy a kifejezések értéke:

1) $4^{40} - 1$; 2) $2004^{171} + 171^{2004}$

osztható 5-tel!

267.* Bizonyítsátok be, hogy $48^{25} < 344^{17}$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

268. A Fedorenko család hat emberből áll: egy apa, egy anya, egy diáklány, két iskoláskorú gyermek és egy nyugdíjas nagypapa. A havi családi költségvetés az apa fizetéséből 21 300 hrv., az anyai fizetésből (22 200 hrv.), a lánya ösztöndíjából (1 230 hrv.) és a nagyapa nyugdíjából (8 820 hrv.) alakul ki. Hány hrivnya esik havonta a hat családtag mindegyikére?

269. (*Ukrán folklórból származó feladat*.) Azt kérdezi János gazda István gazdától: „Hány kacsád van?” Erre István gazda azt válaszolta: „Annyi kacsám van, hogyha megülnének, és ugyanannyi kiskacsát költenének ki, mint amennyi kacsám jelenleg van, és vennék hozzájuk még 3-szor annyit, mint amennyi nagykacsa és kiskacsa van összesen, akkor pontosan 100 kacsám lenne.” Hány kacsája volt István gazdának?

270. Az egyik szobafestő 6 óra alatt tudja kifesteni a szobát, a másik 4 óra alatt. Először az első munkás dolgozott 2 órát, aztán csatlakozott hozzá a másik munkás. Hány óra alatt festették ki együtt a szobát?

271. A turisták egy csoportja hajón indult el a mólóról lefelé, és arra számított, hogy 4 óra múlva tér vissza. A csónak sebessége állóvízben 10 km/h, az áramlat sebessége 2 km/h. Mekkora a maximális távolság, amelyet a turisták elhajózhatnak a mólótól, ha 2 órára meg akarnak állni a visszatérés előtt?

272. Oldjátok meg az egyenletet:

1) $2{,}5 - 3x = 3\,(x - 2{,}5) - 2$;

2) $17\,(2 - 3x) - 5\,(x + 12) = 8\,(1 - 7x) - 34$.

273. Hatjegyű számban az első és negyedik, második és ötödik, harmadik és hatodik számjegy megegyezik. Bizonyítsuk be, hogy ez a szám 7, 11 és 13 többszöröse.

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

274. Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $3a \cdot (-1{,}2)$; 3) $-7a \cdot 9b$; 5) $-\frac{3}{14}m \cdot \frac{7}{9}n$;

2) $-0{,}2b \cdot (-0{,}5)$; 4) $2{,}4x \cdot 2y$; 6) $-\frac{1}{4}a \cdot \frac{4}{3}b \cdot (-3c)$.

275. Hozzátok egyszerűbb alakra a $20m \cdot (-0{,}3n)$ kifejezést, és számítsátok ki az értékét, ha Hozzátok egyszerűbb alakra a $20m \cdot (-0{,}3n)$ kifejezést, és számítsátok ki az értékét, ha $m = 5/12$, $n = –4$!, $n = –4$!

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

276. A villamosjegyek sorszáma 000 000-tól 999 999-ig terjed. A sorszámot szerencsésnek mondják, ha az első három számjegy összege egyenlő az utolsó három számjegy összegével. Bizonyítsátok be, hogy a szerencsés jegyek száma páros szám lesz!

7. Egytagú algebrai kifejezések

Megvizsgáljuk a:

$2b$; $\frac{1}{3}xy^2$; $-ab$; $m^3 \cdot 3k^5$; $(3{,}14)^2\, pq^3 \cdot (-7)r^2t^4$. kifejezéseket.

Közülük mindegyik számok, változók és azok hatványainak szorzata. Az ilyen kifejezéseket **egytagú algebrai kifejezéseknek** vagy **egytagoknak** nevezzük.

Egytagú algebrai kifejezéseknek nevezzük az összes számot, változót és azok hatványait. Például egytagú algebrai kifejezés a következők is:

$$-5;\ 0{,}3;\ x;\ t^2;\ 2^3.$$

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy a

$$2a + b,\ x - 1,\ a : b,\ y^2 + y - 2$$

kifejezések nem egytagúak, mivel a szorzáson és a hatványozáson kívül egyéb műveleteket is tartalmaznak.

Amikor látjuk a $3ab^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)abc$, kifejezést, természetes számunkra, hogy egyszerűbb alakra hozzuk. Egyszerűsítés után a következő kifejezést kapjuk:

$$3ab^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)abc = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)aab^3bc = -2a^2b^4c.$$

A kapott egytagú kifejezés már csak egy nullától eltérő számot tartalmaz, amely a kifejezés elején áll. Az összes többi tényező különböző alapú hatvány. Az ilyen **egytagú algebrai kifejezést normálalakúnak** nevezzük.

Felírunk még néhány normálalakú egytagot:

$$-\frac{1}{8}xy;\ 2{,}8a^3;\ 7x^2yz^3t^5.$$

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy az $a^2 \cdot 2b^3$ és $-3x^2xy^3$ egytagú algebrai kifejezések nem normálalakúak, mivel ugyan az elsőben csak egy szám van, de az nem az első helyen áll, a másodikban pedig az x alapú hatvány kétszer szerepel. чі.

Az ilyen kifejezések könnyen átalakíthatók normálalakú egytagú algebrai kifejezésé:

$$a^2 \cdot 2b^3 = 2a^2b^3 \text{ és } -3x^2xy^3 = -3x^3y^3.$$

A normálalakú egytagú algebrai kifejezések közé sorolhatjuk a nullától különböző számokat, a változókat és azok hatványait. Például a -2; 3^2; x; b^3 kifejezések normálalakú egytagú algebrai kifejezések lesznek.

A 0 szintén egytagú kifejezés, amelyik azonosan egyenlő nullával. Például a $0x^2$, $0ab$ kifejezéseket, amelyek azonosan egyenlők nullával, nulla együtthatójú egytagú kifejezésnek nevezzük. Az ilyen egytagokat nem soroljuk a normálalakú egytagok közé.

Meghatározás. A normálalakú egytagú algebrai kifejezésben a számtényezőt az egytagú algebrai kifejezés együtthatójának (koefficiensének) nevezzük.

Például a $-3a^2bc$ és $0{,}07x$ egytagú algebrai kifejezések együtthatói -3-mal és $0{,}07$-dal egyenlők.

Összegezve: bármely normálalakú egytagú algebrai kifejezésnek van együtthatója. Például az x^2y és $-mn$ egytagok együtthatóját nem tesszük ki, de tudjuk, hogy együtthatóik megfelelően 1-gyel és -1-gyel egyenlők. Ez érthető, mivel $x^2y = 1 \cdot x^2y$, $-mn = -1 \cdot mn$.

Megvizsgáljuk a és a $\frac{2}{3}x^3yz$ és a $-2zx^3y$ egytagú algebrai kifejezéseket. Ezekben az egytagú kifejezésekben a változók egyformák, vagyis a változókat tartalmazó rész azonosan egyenlő egymással. Az ilyen egytagú algebrai kifejezéseket **egyneműeknek** nevezzük. Az egynemű egytagú kifejezésekhez tartoznak a számok is. Például a 7 és a -5 egynemű egytagok.

Felhívjuk a figyelmeteket például arra, hogy $\frac{2}{3}x^3y^2z$ és $-2zx^3y$ egytagok változókat tartalmazó része nem egyforma, bár ugyanazokból a változókból állnak, ezért ezek az egytagú algebrai kifejezések nem egyneműek.

Meghatározás. **Az egytagú algebrai kifejezés fokszámának a benne található összes változó hatványkitevőjének összegét nevezzük. Ha az egytag nullától különböző szám, akkor a fokszámát nullának tekintik.**

Szintén úgy tekintjük, hogy a nulla együtthatójú egytagú algebrai kifejezésnek nincs foka. Például a $-3{,}8m^2xy^7$ fokszáma 10, az x^3 és 9 egytagú algebrai kifejezés fokszáma megfelelően 3 és 0.

Megvizsgáljuk az $\frac{1}{5}ab^3$ és $10abx$ egytagú algebrai kifejezéseket. Az egytagú algebrai kifejezések szorzatuk $\frac{1}{5}ab^3 \cdot 10abx$. Leegyszerűsítjük:

$$\frac{1}{5}ab^3 \cdot 10abx = \left(\frac{1}{5} \cdot 10\right)(aa)(b^3b)x = 2a^2b^4x.$$

Tehát, két egytagú algebrai kifejezés szorzata is egytagú algebrai kifejezés lesz. Ezt a normálalakjában írjuk fel.

Az egytagú algebrai kifejezés hatványa szintén egytagú algebrai kifejezés lesz. Például, ha felemeljük a negyedik hatványra a $-\frac{1}{2}xy^3z^2$. egytagú algebrai kifejezést, a következőt kapjuk:

$$\left(-\frac{1}{2}xy^3z^2\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot x^4 \cdot (y^3)^4 \cdot (z^2)^4 = \frac{1}{16}x^4y^{12}z^8.$$

PÉLDA 1 Egyszerűbb alakra a $0{,}2a^2b^4 \cdot (-5a^3b)^2$ kifejezést.

Megoldás:

$$0{,}2a^2b^4 \cdot (-5a^3b)^2 =$$
$$= 0{,}2a^2b^4 \cdot (-5)^2 \cdot (a^3)^2b^2 = 0{,}2a^2b^4 \cdot 25a^6b^2 =$$
$$= 0{,}2 \cdot 25a^2a^6b^4b^2 = 5a^8b^6.$$ ◀

PÉLDA 2 Az a és a b változó értéke olyan, hogy $4a^3b^4 = 7$. Határozzátok meg a $-\frac{2}{7}a^6b^8$. kifejezés értékét.

Megoldás:

$$-\frac{2}{7}a^6b^8=-\frac{1}{56}\cdot 16a^6b^8=-\frac{1}{56}\cdot(4a^3b^4)^2=-\frac{1}{56}\cdot 7^2=-\frac{1}{56}\cdot 49=-\frac{7}{8}.$$ ◀

?

1. Mit nevezünk egytagú kifejezésnek? **2.** Magyarázzátok meg, milyen egytagú kifejezést nevezünk normálalakúnak! **3.** Mit nevezünk az egytagú kifejezés együtthatójának? **4.** Mit nevezünk egynemű egytagú kifejezésnek? **5.** Mit nevezünk az egytag fokszámának?

GYAKORLATOK

277.° Melyik lesz egytagú algebrai kifejezés az alábbiak közül:

1) $5xy$; 5) 0; 9) m^4m;

2) $-\frac{1}{3}a^2b^3c$; 6) $\frac{4}{7}pk^4$; 10) $3(a^2-b^2)$;

3) $m+n$; 7) $\frac{6m^2k^3}{11a^5}$; 11) $-2\frac{4}{9}aa^2b^3b^6$;

4) 8; 8) b^9; 12) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^2x^5x^3yz^{10}$?

278.° Nevezzétek meg a normálalakú egytagú algebrai kifejezéseket:

1) $5mnm^2$; 3) $-7t^3\cdot 4t^5$; 5) $\frac{6}{13}x^8y^9$;

2) $1{,}4ab^7c^3$; 4) $-abc$; 6) $m^6n^4\cdot 10$.

279.° Egyneműek-e az egytagú algebrai kifejezések:

1) $5a$ és $7a$; 4) $3y^2$ és $2y^3$;

2) $3a^2b^3c$ és $6a^2b^3c$; 5) $\frac{1}{2}m^7n^8$ és $\frac{1}{2}m^8n^7$;

3) $8x^2y^4$ és $8x^2y^5$; 6) $-0{,}1a^9b^{10}$ és $0{,}1a^9b^{10}$?

280.° Írjatok fel az adott egytagú algebrai kifejezéssel olyan egynemű egytagot, amelynek együtthatója 4-szer nagyobb az adott egytagú algebrai kifejezéssnél:

1) $1{,}4x^3y^7$; 2) $c^4d^{10}p^2$; 3) $1\frac{1}{4}a^5b^5c^9$.

281.° Töltsétek ki a táblázatot:

Egytagú algebrai kifejezés	Az egytagú algebrai kifejezés normálalakja	Az egytagú algebrai kifejezés együtthatója	Az egytagú algebrai kifejezés fokszáma
$1{,}2c^4c^8$			
$0{,}6m^2n^3 \cdot 4m^5n^2$			
$\frac{2}{7}a^2 \cdot 3{,}5b$			
$-5x^2 \cdot 0{,}2xy$			
$-1{,}6x^3y^6 \cdot 0{,}5x^2y^5$			

282.° Írjátok fel az adott egytagú algebrai kifejezést normálalakban. Határozzátok meg az együtthatójukat és a fokszámukat:

1) $9a^4aa^6$;
2) $3x \cdot 0{,}4y \cdot 6z$;
3) $7a \cdot (-9ac)$;
4) $-3\frac{1}{3}m^5 \cdot 9mn^9$;
5) $-5x^2 \cdot 0{,}1x^2y \cdot (-2y)$;
6) $c \cdot (-d) \cdot c^{18}$.

283.° Írjátok fel az egytagú algebrai kifejezést normálalakban, és húzzátok alá az együtthatójukat:

1) $6bb^2$;
2) $1{,}5c^3d^4 \cdot 8c^2d^5$;
3) $2u^4 \cdot 4t^3 \cdot (-3t^7)$;
4) $4{,}5a^2bc^7 \cdot 2a^8b^6c$.

284.° Határozzátok meg az egytagú algebrai kifejezések értékét:

1) $5x^2$, ha $x = -4$;
2) $-4{,}8a^4b^3$, ha $a = -1$; $b = \frac{1}{2}$;
3) $\frac{4}{9}m^3n^2p^3$, ha $m = -3$; $n = 5$; $p = -1$.

285.° Határozzátok meg az egytagú algebrai kifejezés értékét:

1) $3m^3$, ha $m = -3$;
2) $\frac{7}{16}a^2b^4$, ha $a = -\frac{1}{7}$, $b = 2$.

286.° Határozzátok meg az egytagú algebrai kifejezések szorzatát:

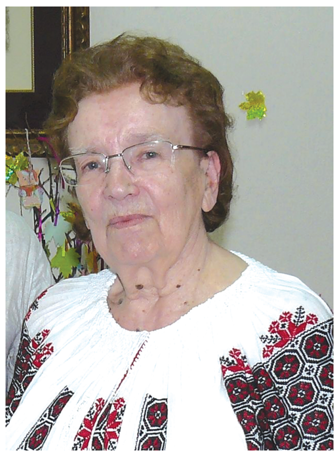
1) $2a$ és $5b$; 2) $-m$ és $4n$; 3) $6x$ és $-8y^2$; 4) $-\frac{1}{7}x^3$ és $-7x^2$.

287.° Végezzétek el az egytagú algebrai kifejezések szorzását:

1) $13c^2d \cdot (-3cd)$;
3) $0{,}7x^6y^9 \cdot 0{,}3xy$;
2) $-4m^3 \cdot 0{,}25m^6$;
4) $56x^5y^{14} \cdot \frac{2}{7}x^2y$.

288.° ***(Gyakorlati házi feladat)*** Határozzátok meg egy kiváló ukrán tudós, matematikus, a fizikai és matematikai tudományok doktora, professzornak a vezetéknevét! A példa sorszáma annak a pozíciónak felel meg, ahol az adott betű áll a névben.

1) $0{,}6a^4b^3 \cdot 4a^2b$;
2) $-2{,}8a^2b^5 \cdot 0{,}5a^4b^2$;
3) $-3ab \cdot (-7a^2b)$;
4) $1{,}6a^2b \cdot (-0{,}25a^3b^2)$;
5) $-0{,}7a^2b^2 \cdot (-3a)$;
6) $\frac{3}{4}a^2b^4 \cdot \frac{2}{15}a^2b^2$;
7) $-2{,}6a^3b \cdot \frac{2}{13}a^2b^3$;
8) $1{,}2a^5b^3 \cdot (-2ab)$.



Felelet	$21a^3b^2$	$2{,}1a^3b^2$	$0{,}1a^4b^6$	$-2{,}4a^6b^4$
Betű	Р	Е	Н	О
Felelet	$-1{,}4a^6b^7$	$-0{,}4a^5b^3$	$2{,}4a^6b^4$	$-0{,}4a^5b^4$
Betű	І	Ч	В	К

Keressetek az interneten információkat ennek a tudósnak az életéről és tevékenységéről, különösen arról, hogy mely külföldi matematikai társaságoknak a tagja?

289.° Végezzétek el az egytagú algebrai kifejezés négyzetre emelését:

1) $6a$; 3) $-9a^4b^5$; 5) $\frac{1}{8}x^3y^6$;

2) $3b^2$; 4) $-0{,}2m^8n^9$; 6) $-\frac{5}{7}ab^2c^8$.

290.° Végezzétek el az egytagú algebrai kifejezés négyzetre emelését:

1) $2b$; 3) $\frac{1}{3}x^5$; 5) $-\frac{1}{4}x^3y^2$;

2) $10c^4$; 4) $-0{,}1m^7n^{10}$; 6) $-a^3b^2c$.

291.° Alakítsátok át a kifejezéseket normálalakú egytagú algebrai kifejezéssé:

1) $(3a^2b)^2$; 3) $(-10m^2y^8)^4$;

2) $(-0{,}2x^3y^4)^3$; 4) $(6x^6y^7z^8)^2$.

292.° Végezzétek el az egytagú algebrai kifejezések hatványra emelését:

1) $(-7x^9y^{10})^2$; 2) $(0{,}5a^{12}b^{14})^2$; 3) $(3ab^4c^5)^4$.

293.• Igaz-e az állítás (magyarázzátok meg a választ):

1) a $6x^2$ egytagú kifejezés az x bármely értékénél pozitív lesz;

2) a $0{,}4a^4b^6$ egytagú kifejezés az a és b bármely értékénél nem negatív;

3) a $-\frac{1}{3}a^3$ egytagú kifejezés az a bármely értékénél negatív lesz;

4) a $-5b^2$ egytagú kifejezés a b bármely értékénél negatív értéket vesz fel?

294.• Adjátok meg az alábbi kifejezéseket két egytagú algebrai kifejezés szorzataként, amelyek közül az egyik: $3a^2b^6$:

1) $3a^6b^8$; 3) $-2{,}7a^5b^7$;

2) $-12a^2b^{1}0$; 4) $2\frac{2}{7}a^{20}b^{30}$.

295.• Milyen egytagú algebrai kifejezéssel kell helyettesíteni a csillagot, hogy igaz egyenlőséget kapjunk:

1) $* \cdot 3b^4 = 12b^6$
2) $-5a^5b^2 \cdot * = -20a^6b^8$;
3) $-7a^3b^9 \cdot * = 4{,}2a^5b^{12}$;
4) $23a^{12}b^{16} \cdot * = -23a^{29}b^{17}$?

296.• Végezzétek el az egytagú algebrai kifejezések szorzását, ahol m és n természetes számok:

1) $2\frac{5}{6}a^{n+2}b^{m+3} \cdot \frac{9}{17}a^{5n-4}b^{2m-1}$;
2) $-7\frac{1}{3}a^{2n-1}b^{3n-1} \cdot 1\frac{1}{11}a^{n+6}b^{3n+1}$.

297.• Adjátok meg a kifejezést normálalakú egytagú algebrai kifejezés négyzeteként:

1) $4a^{10}$;
2) $36a^8b^2$;
3) $0{,}16a^{14}b^{16}$;
4) $289a^{20}b^{30}c^{40}$.

298.• Adjátok meg a kifejezést normálalakú egytagú algebrai kifejezés köbeként:

1) $8x^6$;
2) $-27x^3y^9$;
3) $0{,}001x^{13}y^{18}$;
4) $-\frac{125}{216}x^{15}y^{21}z^{24}$.

299.• Adjátok meg a $64a^6b^{12}$ egytagú algebrai kifejezést:

1) két olyan egytagú algebrai kifejezés szorzataként, amelyek közül az egyik $2a^2b^8$;
2) normálalakú egytagú algebrai kifejezés négyzeteként;
3) normálalakú egytagú algebrai kifejezés köbeként!

300.• Adjátok meg a $81m^4n^{16}$ egytagú algebrai kifejezést:

1) két olyan egytagú algebrai kifejezés szorzataként, amelyek közül az egyik $-\frac{1}{3}mn^{14}$;
2) normálalakú egytagú algebrai kifejezés négyzeteként;
3) normálalakú egytagú algebrai kifejezés negyedik hatványaként!

301.• Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $2a^3 \cdot (-5a^4b^5)^2$;

2) $(-x^6y)^3 \cdot 11x^4y^5$;

3) $(-0{,}6a^3b^5c^6)^2 \cdot 3a^2c^8$;

4) $-1\frac{3}{11}m^4n^9 \cdot \left(-\frac{1}{7}mn^3\right)^2$;

5) $(3m^6n^3)^4 \cdot \left(-\frac{1}{81}m^9n\right)$;

6) $-(-2c^2d^5)^7 \cdot \left(-\frac{1}{2}c^4d^5\right)^4$.

302.• Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $20a^8 \cdot (9a)^2$;

2) $(-b^5)^4 \cdot 12b^6$;

3) $(0{,}2x^7y^8)^3 \cdot x^6y^2$;

4) $\left(-\frac{1}{2}ab^4\right)^3 \cdot (4a^6)^2$.

303.•• Helyettesítsétek a csillagokat olyan egytagú algebrai kifejezéssel, hogy teljesüljön az egyenlőség:

1) $(*)^2 \cdot (*)^3 = 9a^2b^3c^5$;

2) $(*)^3 \cdot (*)^4 = 16a^7b^6c^8$;

3) $(*)^3 \cdot (*)^2 = -72m^8n^{11}$;

4) $(*)^2 \cdot (*)^5 = 32x^{29}y^{21}z^9$.

304.•• Az x és az y változó értéke olyan, hogy $5x^2y^4 = 6$. Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $1{,}5x^2y^4$; 2) $25x^4y^8$; 3) $-25x^6y^{12}$.

305.•• Az a és a b változó értéke olyan, hogy $3ab^2 = 4$. Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $-1{,}2ab^3$; 2) $27a^3b^9$; 3) $-\frac{2}{3}a^2b^6$.

306.•• Az a, b és c változó értéke olyan, hogy $2a^2b = 7$ és $a^3b^2 = 2$. Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $6a^5bc^2$; 2) $a^7b^2c^2$; 3) $2\frac{1}{7}a^8bc^4$.

307.•• Az m, n és p változó értéke olyan, hogy $m^3n^2 = 7$ és $\frac{1}{3}n^3p^2 = 5$. Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $m^3n^5p^2$; 2) $2m^3n^8p^4$; 3) $-4m^{12}n^{11}p^2$;

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

308. Az irodaszerboltban az eladó azt mondta Dénesnek, hogy 9 egyforma filctoll-készletért 245 hrivnyát kell fizetni. Dénes azonnal közölte, hogy az eladó tévedett. Hogyan állapította meg ezt?

309. Valamely számot először 10 %-kal csökkentették, majd a kapott eredményt 20 %-kal növelték. Eredményül egy olyan számot kaptak, amely 48-cal nagyobb az eredetinél. Határozzátok meg a keresett számot!

310. A csillagot helyettesítsétek olyan számjegyekkel, hogy:б:

1) a *5* szám osztható legyen 3-mal is és 10-zel is;
2) a 13*2* szám osztható legyen 9-cel is és 5-tel is;
3) az 58* szám osztható legyen 2-vel is és 3-mal is.

Keressétek meg az összes lehetséges megoldást.

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

311. Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

1) $6x - 12x + 15x - 9x$;
2) $7a - 9b - 12a + 14b$;
3) $-0{,}8k + 0{,}9 - 1{,}7k + 0{,}5k + 1{,}4$;
4) $-\frac{1}{6}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{9}a - \frac{3}{4}b$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

312. Hányféleképpen rakhatjuk fel a sakktáblára a fehér és a fekete bástyákat úgy, hogy ne üssék egymást?

8. Polinomok (Többtagok)

Már tudjátok, hogy két egytagú kifejezés szorzata szintén egytagú kifejezés lesz. Más a helyzet az egytagú kifejezések összeadásánál. Például a $2a + b^2$ és $2a - b^2$ kifejezések nem egytagú kifejezések. Az első közülük a $2a$ és b^2 egytagú kifejezések, a másik pedig a $2a$ és $-b^2$ egytagok összege.

Meghatározás. Néhány egytagú algebrai kifejezés összegét polinomnak (többtagnak) nevezzük.

Lássunk még néhány példát polinomokra:

$7xy + y - 11$; $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1$; $3a - a + b$; $11x - 2x$.

Azokat az egytagú kifejezésekett, amelyekből a polinom összetevődik, a **polinom tagjainak** nevezzük. Így például a $7xy + y - 11$ polinom tagjai a $7xy$, y és a -11 egytagok.

Azt a polinomot, amelyik két egytagú kifejezésből áll **két-tag**ú algebrai kifejezés**nek**, azt pedig, amelyik három egytagból tevődik össze, **háromtag**ú algebrai kifejezés**nek** nevezzük. Az egytagú algebrai kifejezés a polinom részesete. Úgy tekintjük, hogy az egytagú algebrai kifejezés olyan polinom, amelyik egy tagból áll.

A polinomok, az egytagú algebrai kifejezések és a számok közötti összefüggést a 5. ábra mutatja.

5. ábra

Ha azok között az egytagú kifejezések között, amelyekből a polinom áll találunk hasonlókat, akkor ezeket a többtag **egynemű tagjainak** nevezzük. Például: $\underline{7a^2b} - \underline{\underline{3a}} + \underline{\underline{\underline{4}}} - \underline{a^2b} - \underline{\underline{\underline{1}}} + \underline{\underline{a}} + b$ a polinom egynemű tagjait egyenlő számú vonalkával húztuk alá.

Az egynemű tagok összevonásának szabályát alkalmazva egyszerűbb alakra hozzuk a következő polinomot:

$$7a^2b - 3a + 4 - a^2b - 1 + a + b = 6a^2b - 2a + b + 3.$$

Az ilyen egyszerűsítést a **polinom egynemű tagjai összevonásának** nevezzük. Ez az átalakítás lehetőséget ad nekünk arra, hogy a polinomot helyettesítsük egy vele azonosan egyenlő polinommal, amelyik egyszerűbb és kevesebb tagból áll, mint az eredeti.

Megvizsgáljuk a $2x^3y - xy + 1$ polinomot. Ez a polinom csak normálalakú egytagú algebrai kifejezésekből áll, amelyek között nincsenek egynemű tagok.

Meghatározás. Az olyan polinomot, amelyik normálalakú egytagokból áll, amelyek között nincsenek egynemű tagok, normálalakú polinomnak nevezzük.

Például az $xy^2 + x^2y$, $2a^2b$, 5 kifejezések normálalakú polinomok lesznek.

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy a $3bab^2 + a \cdot 5 + a \cdot 2b^3 - a$ nem normálalakú polinom, de könnyen azzá alakíthatjuk: először a polinomot alkotó egytagú algebrai kifejezéseket írjuk fel normálalakban, majd összevonjuk az egynemű tagjait.

Következőt kapjuk:

$$3bab^2 + a \cdot 5 + a \cdot 2b^3 - a = \underline{3ab^3} + \underline{\underline{5a}} + \underline{2ab^3} - \underline{\underline{a}} = 5ab^3 + 4a.$$

Megvizsgáljuk a $2x^3y - x^2y^2 + 5x^2y + y - 2$ normálalakú polinomot. A következő egytagú algebrai kifejezésekből áll: $2x^3y$, $-x^2y^2$, $5x^2y$, y; -2, amelyek fokszáma megfelelően egyenlő: 4, 4, 3, 1, 0. Ezek közül a legnagyobb fokszámú egytagú kifejezés negyedfokú. Ezért azt mondjuk, hogy a polinom is negyedfokú.

Meghatározás. A normálalakú polinom fokszáma a legmagasabb fokszámú tagjának a fokszáma lesz.

Felhozunk még néhány példát:

- a $x^2 - xy + 5y^2$ polinom fokszáma 2-vel egyenlő;
- a $3x^4y^2$ polinom fokszáma 6-tal egyenlő;
- a 3 polinom fokszáma nulla.

A 0-t és mindazokat a polinomokat, amelyek azonosan egyenlők 0-val (például: $0a + 0b$, $x - x$ stb.), nulladfokú polinomnak nevezzük. Az ilyen polinomokat nem soroljuk a normálalakú polinomok közé.

Úgy tekintjük, hogy a nulladfokú polinomnak nincs fokszáma.

?

1. Mit nevezünk polinomnak?
2. Milyen polinomot nevezünk kéttagú algebrai kifejezésnek?
3. Háromtagú algebrai kifejezésnek?
4. Milyen polinomot nevezünk normálalakú polinomnak?
5. Mit nevezünk a normálalakú polinom fokszámának?

GYAKORLATOK

313.° Polinom e a következő kifejezés:

1) $x^2 + 1$;
2) $4x^2y \cdot 3y$;
3) $\dfrac{1}{x^2+1}$;
4) 9;
5) $xy\,(x^3 - 3y)$;
6) $2x^3 - 2x + 2$;
7) $(m + 1)\,(m - 4)$;
8) $(x + 3y)^2$?

314.° Nevezzétek meg az egytagú algebrai kifejezéseket, melyek összege a következő polinom:

1) $-5a^4 + 3a^2 - a + 8$;
2) $6x^3 - 10x^2y + 7xy^2 + y^3$;
3) $t^3 + 3t^2 - 4t + 5$;
4) $1{,}8a^3b - 3{,}7a^2b^2 + 16ab^3 - b^4$.

315.° Írjátok fel azt a polinomot, amely a következő egytagú algebrai kifejezésekből áll:

1) $3a$ és $2b$;
2) $6c$ és $-5p$;
3) x^3, $2x^2$ és $-3x$;
4) x^2, $-xy$ és y^2.

316.° Írjátok fel azt a polinomot, amely a következő egytagú kifejezésekből áll:

1) $-4a$ és $5b$;
2) p^2 és $-5p$;
3) a^2, $2ab$ és b^2;
4) x^4, $-x^3y$, x^2y^2 és $-xy^3$.

317.° Határozzátok meg az alábbi polinomok értékét:

1) $2x^2 + x - 3$ ha $x = 0{,}5$;
2) $x^3 + 5xy$ ha $x = 3$, $y = -2$;
3) $a^2 - 2ab + b^2$ ha $a = -4$, $b = 6$;
4) $y^4 + 7y^3 - 2y^2 - y + 10$ ha $y = -1$.

318.° Határozzátok meg a $2y^3 - 3y^2 + 4y - 6$ polinom értékét, ha:

1) $y = 1$; 2) $y = 0$; 3) $y = -5$!

319.° Az adott polinom harmadfokú -e:

1) $3a^2 + 3a + 3$;
2) $a^3 - 1$;
3) $a^2 + 2a - 6$;
4) $a^2b + b^2 - 1$;
5) $a^3 + a^2b^2 + b^3$;
6) $a^3 + a + 1$?

320.° Az adott polinom negyedfokú -e:

1) $a^4 + 2a^2 - 1$;
2) $aa^3 - 5a + 6$;
3) $a^4 + a^2b^2 - a^4$;
4) $a^3b - 2ab^3 + b^5$?

321.° Alakítsátok át a polinomokat normálalakú polinomokká. Határozzátok meg a fokszámát:

1) $4b^2 + a^2 + 9ab - 18b^2 - 9ab$;
2) $8m^3 - 13mn - 9n^2 - 8m^3 - 2mn$;
3) $2a^2b - 7ab^2 - 3a^2b + 2ab^2$;
4) $0{,}9c^4 + 1{,}1c^2 + c^4 - 0{,}6c^2$;
5) $3x^2 + 6x - 5 - x^2 - 10x + 3$;
6) $b^3 - 3bc + 3b^3 + 8bc - 4b^3$.

322.° Alakítsátok át a polinomokat normálalakú polinomokká. Határozzátok meg a fokszámát:

1) $5x^2 - 10x + 9 - 2x^2 + 14x - 20$;
2) $-m^5 + 2m^4 - 6m^5 + 12m^3 - 18m^3$;
3) $0{,}2a^3 + 1{,}4a^2 - 2{,}2 - 0{,}9a^3 + 1{,}8a^2 + 3$;
4) $6x^2y - xy^2 - 8x^2y + 2xy^2 - xy + 7$.

323.° Fejezzétek be a polinom tagjainak felírását a változó hatványainak csökkenő sorrendjében:

1) $8x - 3x^2 + 6x^3 - 4 = 6x^3 - 3x^2 + \ldots$;

2) $x^4 - 5x^6 - 3x^2 + 3x^3 - 7x + 2 = -5x^6 + x^4 + \ldots$;
3) $3 - 10x^5 + x = -10x^5 + \ldots$.

324.° Rendezzétek a polinom tagjait a változó növekvő hatványai szerint:
1) $4m^3 - 5m - m^2 + 6$;
2) $9a - 8a^4 + 5a^3 + 7 - a^2$;
3) $8m^4 - 4 + 7m^6 - 10m^3 + m^2$.

325.• Vonjátok össze a polinom egynemű tagjait, majd határozzátok meg a kapott polinom értékét a változók adott értékei mellett:
1) $-3a^5 + 4a^3 + 7a^5 - 10a^3 + 12a$, ha $a = -2$;
2) $x^3y - 3xy^2 - 4x^3y + 8xy^2$, ha $x = -1$, $y = -3$;
3) $0{,}8x^2 - 0{,}3x - x^2 + 1{,}6 + 1{,}1x - 0{,}6$, ha $x = 5$;
4) $\frac{1}{3}a^2c + \frac{3}{4}ac^2 + \frac{1}{6}a^2c + 1{,}25ac^2$, ha $a = -4$, $c = 3$.

326.• Vonjátok össze a polinom egynemű tagjait, majd határozzátok meg a kapott polinom értékét a változók adott értékei mellett:
1) $2a^3 + 3ab - b^2 - 6a^3 - 7ab + 2b^2$, ha $a = 2$, $b = -6$;
2) $mn - 6mn^2 - 8mn - 6mn^2$, ha $m = 0{,}5$, $n = -2$;
3) $10xy^2 - 12x^2y + 9x^2y - 9xy^2$, ha $x = \frac{1}{3}$, $y = 9$.

327.•• A $4a$, $-3ab$, $7a^2$, $-8a^2$, $9ab$, $5a$ egytagú algebrai kifejezések közül válasszatok ki néhányat, és alkossatok belőlük:
1) normálalakú polinomot;
2) olyan polinomot, amelyikben vannak egynemű tagok;
3) az összes adott egytagú kifejezést felhasználásával két normálalakú polinomot!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

328. A tapétatekercsre rá van írva, hogy a tapétaszövet hossza legfeljebb 0,8%-kal tér el a névleges hossztól. A tekercsben lévő vászon névleges hossza 10 m. Állapítsd meg, hogy az alábbi értékek közül melyik nem lehet egyenlő a tekercsben lévő tapéta hosszával!

1) 10,06 m; 2) 9,94 m; 3) 9,9 m; 4) 10,02 m.

329. A 210 hr/kg árú cukorkákat 285 hr/kg árú cukorkákkal keverték össze, és 240 hr/kg-os keveréket kaptak. Az egyes típusú cukorkák mekkora tömege van 1 kg keverékben?

330. Valamely bank ATM-jéből történő készpénzfelvétel esetén a felvett összeg 1,5 %-ának megfelelő díjat számítanak fel. Mekkora összeg kerül levonásra a bankszámláról, ha 2000 UAH készpénzt vesz fel ATM-ből?

331. Az üzlet darabonként 120 hr nagykereskedelmi áron vásárol csészéket, és 30 %-os felárral értékesíti. Mennyibe kerül egy ilyen csésze ebben a boltban?

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

332. Az alábbi kifejezések közül melyikkel lesz azonosan egyenlő a $-9x + (4x - 7)$ kifejezés:

1) $13x - 7$; 2) 3) $-5x - 7$; 4) $13x + 7$?

333. Az alábbi kifejezések közül melyikkel lesz azonosan egyenlő a $-8y - (3y - 1)$ kifejezés:

1) $-11y + 1$; 2) $-5y + 1$; 3) $-11y - 1$; 4) $-5y - 1$?

334. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

1) $(2a + b) - (b - 2a)$; 3) $(m + n) - (2m + n) - (m - 4n)$;
2) $(3a - 4) + (3 - 5a)$; 4) $(5c - 2) - (6c + 1) + (c - 8)$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

335. Egy csillag körül néhány bolygó kering, amelyek között a távolság nem változik és páronként különböző. Mindegyik bolygón tartózkodik egy űrhajós, aki a legközelebbi bolygót tanulmányozza. Bizonyítsátok be, hogy létezik két olyan bolygó, ahol az űrhajósok egymás bolygóját tanulmányozzák!

9. A polinomok összeadása és kivonása

Össze kell adni a $3xy^2 = 5x^2y^2 - 7xy + x + 11$ és a $-2xy^2 + x^2y^2 + 2xy + y - 2$. polinomokat. Ehhez zárójelbe tesszük mindkét polinomot, és kitesszük a két zárójel közé a plusz jelet. Ezután felbontjuk a zárójeleket, majd összevonjuk az egynemű tagokat (ha vannak ilyenek).

A következőt kapjuk:

$$(3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11) + (-2xy^2 + x^2y^2 + 2xy + y - 2) =$$

$$= \underline{3xy^2} + \underline{\underline{5x^2y^2}} - \underline{\underline{\underline{7xy}}} + x + 11 - \underline{2xy^2} + \underline{\underline{x^2y^2}} + \underline{\underline{\underline{2xy}}} + y - 2 =$$

$$= xy^2 + 6x^2y^2 - 5xy + x + y + 9.$$

Az így kapott polinom a két adott polinom összege lesz.

Most az első polinomból kivonjuk a második polinomot. Ehhez mindkét polinom zárójelbe tesszük, és a két zárójel közé kitesszük a mínuszjelet. Ezután felbontjuk a zárójeleket, majd összevonjuk az egynemű tagokat.

A következőt kapjuk:

$$(3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11) - (-2xy^2 + x^2y^2 + 2xy + y - 2) =$$

$$= \underline{3xy^2} + \underline{\underline{5x^2y^2}} - \underline{\underline{\underline{7xy}}} + x + 11 + \underline{2xy^2} - \underline{\underline{x^2y^2}} - \underline{\underline{\underline{2xy}}} - y + 2 =$$

$$= 5xy^2 + 4x^2y^2 - 9xy + x - y + 13.$$

Az így kapott polinom a két adott polinom különbsége lesz.

Polinomok összeadásakor és kivonásakor az eredmény mindig polinom lesz.

PÉLDA 1 Bizonyítsátok be, hogy két olyan kétjegyű szám különbsége, amelyek közül a második ugyan azokból a számjegyekből áll, mint az első, csak fordított sorrendben osztható 9-cel!

Megoldás: Az adott szám a tízesből és b egyesből áll. Felírhatjuk a következő alakban: $10a + b$.

Az a szám, amelyik ugyan ezekből a számjegyekből áll, csak fordított sorrendben, egyenlő: $10b + a$-val.

Megvizsgáljuk a következő különbséget: $(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9\,(a - \mathrm{b})$.

Könnyen belátható, hogy a $9(a - b)$ szám osztható 9-cel. ◀

A kétjegyű számot a következőképen jelöljük: $\overline{ab}$. A szám a tízest és b egyest tartalmaz, vagyis felírhatjuk $\overline{ab} = 10a + b$ alakban. Hasonló az $\overline{abc}$ háromjegyű szám jelölése, amelyikben van a százas, b tízes és c egyes, vagyis $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

PÉLDA 2 Bizonyítsátok be, hogy a $(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}) - (\overline{ba} + \overline{ca} + \overline{cb})$ különbség osztható 18-cal!

Megoldás:

$$(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}) - (\overline{ba} + \overline{ca} + \overline{cb})$$
$$= (10a + b + 10a + c + 10b + c) -$$
$$- (10b + a + 10c + a + 10c + b) =$$
$$= (20a + 11b + 2c) - (20c + 11b + 2a) =$$
$$= 20a + 11b + 2c - 20c - 11b - 2a =$$
$$= 18a - 18c = 18\,(a - c).$$

Könnyen belátható, hogy a $18(a - c)$ szám maradék nélkül osztható 18-cal. ◀

PÉLDA 3 Bizonyítsátok be, hogy négy egymást követő páros természetes szám összege nem osztható maradék nélkül 8-cal!

Megoldás: Legyen az első szám $2n$, ahol n tetszőleges természetes szám. Akkor a többi három számot megfelelően felírhatjuk: $2n + 2$, $2n + 4$, $2n + 6$.

A vizsgált összeg a következőképpen néz ki:

$$2n + (2n + 2) + (2n + 4) + (2n + 6) = 8n + 12.$$

Az első összeadandó $8n$ osztható 8-cal, de a második összeadandó, a 12 viszont nem. Tehát a $8n + 12$ összeg sem osztható maradék nélkül 8-cal. ◀

GYAKORLATOK

336.$^\circ$ Határozzátok meg a polinomok összegét:

1) $-6 - a^2$ és $a^2 + 13$; 3) $3x + 14$ és $-x^2 - 3x - 18$.

2) $a^2 - b + c^3$ és $-a^2 + b + c^2$;

337.$^\circ$ Határozzátok meg a polinomok összegét:

1) $-5x^2 - 4$ és $8x^2 - 6$; 2) $2x + 16$ és $-x^2 - 6x - 20$.

338.$^\circ$ Határozzátok meg a polinomok különbségét:

1) $x^2 + 8x$ és $4 - 3x$;

2) $2x^2 + 5x$ és $4x^2 - 2x$;

3) $4x^2 - 7x + 3$ és $x^2 - 8x + 11$;

4) $9m^2 - 5m + 4$ és $-10m + m^3 + 5$.

339.$^\circ$ Határozzátok meg a polinomok különbségét:

1) $-5{,}4m + n^2$ és $n^2 + 3{,}9m$;

2) $a^2 - b^2$ és $-b^2 + a^2 - c^2$;

3) $3x^2 - 6x + 2$ és $x^2 - 7x + 15$.

340.$^\circ$ Határozzátok meg a kéttagú algebrai kifejezések összegét és különbségét:

1) $a + b$ és $a - b$; 3) $b - a$ és $a - b$;

2) $a - b$ és $b - a$; 4) $b - a$ és $-a - b$.

341.$^\circ$ Határozzátok meg a kéttagú algebrai kifejezések összegét és különbségét:

1) $2a - b$ és $3a + b$; 3) $2a + b$ és $3a - b$;

2) $b - 2a$ és $b - 3a$; 4) $b - 2a$ és $3a - b$.

342.$^\circ$ Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $(5a^4 + 3a^2b - b^3) - (3a^4 - 4^a2^b - b^2)$;

2) $(12xy - 10x^2 + 9y^2) - (-14x^2 + 9xy - 14y^2)$;

3) $(7ab^2 - 8ab + 4a^2b) + (10ab - 7a^2b)$;

4) $(2c^2 + 3c) + (-c^2 + c) - (c^2 + 4c - 1)$.

343.$^\circ$ Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $(3x^2 - 2x) + (-x^2 + 3x)$;

2) $(4c^2 - 2cd) - (10c^2 + 8cd)$;

3) $(12m^2 - 7n - 3mn) - (6mn - 10n + 14m^2)$;

4) $(3n^3 - 2mn + 4m^3) - (2mn + 3n^3)$.

344.• Milyen kéttagú algebrai kifejezést kell hozzáadni az adott kéttagú algebrai kifejezéshez, hogy a kapott összeg 0-val legyen azonosan egyenlő:

1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) $-a - b$?

345.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $10 - (7 - 4x - x^2) = x^2 + 8x - 9$;
2) $(5x^2 - 3) - (2x + 5) = 5x^2$;
3) $6 + x^3 - (2x - 9 + x^3) = 5$;
4) $12 - (6 - 9x - x^2) = x^2 + 5x - 14$;
5) $3x^2 - (2x^2 - 8x) - (x^2 - 3) = x$;
6) $4y^3 - (4y^3 - 8y) - (6y + 3) = 7$;
7) $(y^2 - 4y - 17) - (6y^2 - 3y - 8) = 1 - y - 5y^2$.

346.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $5y^3 - (6y + 1) = 19 - 2y + 5y^3$;
2) $7x - 2x^2 - (10 - 2x^2) = 11$;
3) $8x^2 + 6x - (2x + 8x^2 - 12) = 4$;
4) $x^2 - (x + 1) - (x^2 - 7x + 32) = 3$;
5) $(y^3 + 3y - 8) - (5y - y^3 + 7) = 2y^3 - 2y - 15$.

347.• Bizonyítsátok be az azonosságot:

1) $(a^2 + b^2 - c^2) - (b^2 + c^2 - a^2) + (c^2 - a^2) = a^2 - c^2$;
2) $(4 - 3a^2) - a^2 + (7 + 2a^2) - (-2a^2 + 11) = 0$;
3) $(x^3 + 4x^2) - (x + 6) + (1 + x - x^3) = 4x^2 - 5$.

348.• Bizonyítsátok be az azonosságot:

1) $4a^2 - (6a^2 - 2ab) + (3ab + 2a^2) = 5ab$;
2) $(9x^6 - 4x^3) - (x^3 - 9) - (8x^6 - 5x^3) = x^6 + 9$.

349.• Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $(5a^3 - 20a^2) - (4a^3 - 18a^2)$, ha $a = -3$;
2) $4b^2 - (7b^2 - 3bc) + (3b^2 - 7bc)$, ha $b = -1{,}5$, $c = 4$.

350.• Számítsátok ki a kifejezés értékét:

1) $(5{,}7a^2 - 2{,}1ab + b^2) - (3{,}9ab - 0{,}3a^2 + 2b^2)$, ha $a = -1$, $b = 5$;

2) $(5m^2n - m^3) + 7m^3 - (6m^3 - 3m^2n)$, ha $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{3}{16}$.

351.• Bizonyítsátok be, hogy a következő kifejezések értékei nem függnek a változó értékétől:

1) $1{,}6 - 7a^2 - (0{,}8 - 4a^2) + (3a^2 - 0{,}7)$;
2) $3x^2 - 9x - (8 - 5x^2 - (9x - 8x^2))$.

352.• Bizonyítsátok be, hogy a

$$(2c^2 - 3c) + 1{,}8 - c^2 - (c^2 - 3c - 2{,}2)$$

kifejezés értéke nem függ a változó értékétől!

353.• Milyen polinomot kell hozzáadni a $2a^2 - 5a + 7$ háromtagú algebrai kifejezéshez, hogy a kapott összeg egyenlő legyen:

1) 5; 2) 0; 3) a^2; 4) $-2a^2$?

354.• Milyen polinomot kell kivonni a $4a^3 - 8$ kéttagú algebrai kifejezésből, hogy a kapott különbség egyenlő legyen:

1) -4; 2) 9; 3) $-2a^3$; 4) $3a$?

355.• A csillag helyére írjatok olyan polinomot, hogy azonosságot kapjatok:

1) $* - (3x^2 - 4xy + 2y^2) = 9x^2 + y^2$;
2) $a^3 - 6a^2 + 2a - (*) = a^5 + 2a^2 - 7$.

356.• A csillag helyére írjatok olyan polinomot, hogy azonosságot kapjatok:

1) $* - (3x^2 - 4xy + 2y^2) = 9x^2 + y2$;
2) $a^3 - 6a^2 + 2a - (*) = a^5 + 2a^2 - 7$.

357.• Adjátok meg polinom alakjában azt a számot, amely:

1) 4 százasból, x tízesből és y egyesből áll;
2) a ezresből, b százasból, 5 tízesből és c egyesből áll!

358.• Adjátok meg polinom alakjában az alábbi kifejezéseket:

1) $\overline{cba}$; 2) $\overline{abc} - \overline{ab}$; 3) $\overline{a0c} + \overline{ac}$.

359.• Adjátok meg polinom alakjában az alábbi kifejezéseket:

1) $\overline{cab} + \overline{ca}$; 2) $\overline{abc} + \overline{bca}$; 3) $\overline{ab9} + \overline{7a}$.

360.• Bizonyítsátok be, hogy a $(9 - 18n) - (6n - 7)$ kifejezés 8 többszöröse az n változó bármely természetes értéke mellett!

361.• Bizonyítsátok be, hogy a $(6m + 8) - (3m - 4)$ kifejezés 3 többszöröse az m változó bármely természetes értéke mellett!

362.• Bizonyítsátok be, hogy az n bármely természetes értéke mellett az $(5n + 9) - (5 - 2n)$ kifejezés 7-tel való osztásakor a maradék 4-gyel egyenlő!

363.• Mennyi lesz a maradék a $(16n + 8) - (7n + 3)$ kifejezés 9-cel való osztásakor, ha n tetszőleges természetes szám?

364.• Bizonyítsátok be, hogy a $13m + 20n$ és $7m + 2n$, kéttagú algebrai kifejezések, ahol m és n bármilyen természetes szám, különbsége osztható 6-tal!

365.• Bizonyítsátok be, hogy a $16a - 6b$ és $27b - 2a$, kéttagú algebrai kifejezések, ahol a és b bármilyen természetes szám, különbsége osztható 7-tel!

366.•• A csillag helyére olyan polinomot írjatok, hogy az egynemű tagok összevonása után a kapott polinom ne tartalmazza az a változót:

1) $4a^2 - 3ab + b + 8 + *$; 2) $9a^3 - 9a + 7ab^2 + bc + bm + *$.

367.•• A csillag helyére olyan polinomot írjatok, hogy az egynemű tagok összevonása után a kapott polinom $3x^2 + 5x^2y + 7x - 8y + 15 + *$ ne tartalmazzon:

1) olyan tagot, amelyben x^2 van;
2) olyan tagot, amelyben x változó van;
3) olyan tagot, amelyben y változó van!

368.•• Írjátok át a $3a^2b + 8a^3 - 6a + 12b - 9$ polinomot olyan két polinom összegeként, melyek közül az egyikben ne legyen b változó!

369.•• Írjátok át a

$$4mn^2 + 11m^4 - 7m^5 + 14mn - 9n + 3$$

polinomot olyan két polinom különbségeként, melyeknek pozitívak a koefficiensei!

370.•• Írjátok át a $6x^2 - 3xy + 5x - 8y + 2$ polinomot olyan két polinom különbségeként, melyek közül az egyikben ne legyen y változó!

371.•• Az $x^2 – 6x + 14$ polinomot írjátok fel:

1) két kéttagú   2) egy háromtagú és egy egytagú

agebrai kifejezés különbségeként!

372.•• A $3x^2 + 10x – 5$ polinomot írjátok fel egy kéttagú és egy háromtagú algebrai kifejezés különbségeként!

373.•• Bizonyítsátok be, hogy a

$$(2x^4 + 4x - 1) - (x^2 + 8 + 9x) + (5x + x^2 - 3x^4)$$

kifejezés értéke az x bármilyen értékénél negatív lesz! Milyen lesz ennek a kifejezésnek a legnagyobb értéke, és milyen x értéknél veszi ezt fel?

374.•• Bizonyítsátok be, hogy a $(7y^2 - 9y + 8) - (3y^2 - 6y + 4) + 3y$ ifejezés értéke az y bármilyen értékénél pozitív lesz! Milyen lesz ennek a kifejezésnek a kisebb értéke, és milyen y értéknél veszi ezt fel?

375.•• Bizonyítsátok be, hogy:

1) öt egymást követő természetes szám összege maradék nélkül osztható 5-tel;
2) 3 egymást követő páros természetes szám összege maradék nélkül osztható 6-tal;
3) 4 egymást követő páratlan természetes szám összege maradék nélkül osztható 8-cal; 4) 4 egymást követő természetes szám összege nem osztható maradék nélkül 4-gyel;
4) 6 egymást követő természetes szám összegének 6-tal való osztásakor a maradék 3!

376.•• Bizonyítsátok be, hogy:

1) három egymást követő természetes szám összege 3 többszöröse;
2) 7 egymást követő természetes szám összege maradék nélkül osztható 7-tel;
3) 4 egymást követő páros természetes szám összege maradék nélkül osztható 4-gyel;
4) 5 egymást követő páros természetes szám összege maradék nélkül osztható 10-zel!

377.•• Bizonyítsátok be, hogy:

1) az $\overline{ab}$, és $\overline{ca}$ számok összege maradék nélkül osztható 11-gyel;
2) az $\overline{abc}$ és $\overline{cba}$ számok különbsége maradék nélkül osztható 99-cel!

378.•• Bizonyítsátok be, hogy:

1) az $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ és $\overline{cab}$ számok összege 111 többszöröse;
2) az $\overline{abc}$ számnak és e szám számjegyei összegének a különbsége maradék nélkül osztható 9-cel!

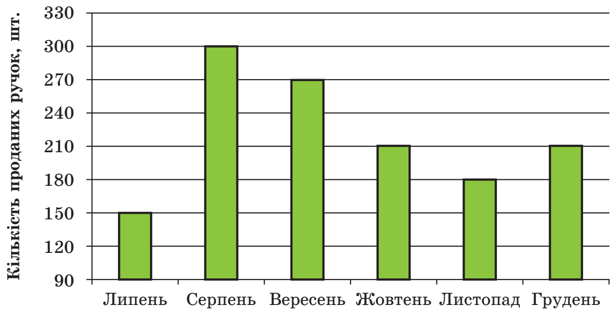
379.* Bizonyítsátok be, hogy az x és y változónak nem létezik olyan értéke, amelyeknél az $5x^2 - 6xy - 7y^2$ és a $-3x^2 + 6xy + 8y^2$ polinomok értéke egyidejűleg negatív lenne!

380.* Tegyétek ki a zárójeleket úgy, hogy az egyenlőségekből azonosságokat kapjunk:

1) $x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = 2;$
2) $x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = -2;$
3) $x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = 0.$

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

381. Novemberben a tévé 22 000 hrivnyába került. December 1-én az üzletben felemelték a televízió árát 15%-kal, December 15-én az üzlet bejelentette a szilveszteri ünnepi akciók megkezdését, és 10%-kal csökkentette a tévéárakat. Mikor volt jövedelmezőbb tévét venni: novemberben vagy a karácsonyi akciók idején?



6. ábra

382. A diagram (6. ábra) a tollak eladási mennyiségét mutatja egy írószer boltban 6 hónapon keresztül. Hány tollat adtak el átlagosan havonta?

383. A kabát 4000 hrivnyába került. Először 5 %-kal csökkentették az árát, majd 5 %-kal megemelték. Mennyi volt a kabát új ára?

384. Az egyik csövön keresztül 3 óra alatt telik meg teljesen a medence, a másikon pedig 6 óra alatt. Először két órára megnyitották az első csövet, aztán elzárták, és kinyitották a másikat. Mennyi idő alatt telik meg a medence vízzel?

385. Tudjuk, hogy a parkban található fák $\frac{7}{24}$-e gesztenye-, az $\frac{5}{18}$-a pedig nyírfa. Hány fa van összesen a parkban, ha tudjuk, hogy a számuk több mint 100, de kevesebb, mint 200?

386. Egy gyalogos 4 km/h sebességgel ment a faluból az állomásra. Egy órával később egy kerékpáros 10 km/h-s sebességgel hagyta el a falut, 0,5 órával korábban ért az állomásra, mint a gyalogos. Mennyi a távolság a falutól az állomásig?

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

387. A szorzás széttagolhatósági tulajdonságát alkalmazva határozzátok meg a kifejezések értékét:

1) $12 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)$; 2) $36 \cdot \left(\frac{17}{18} - \frac{5}{12} + \frac{4}{9}\right)$; 3) $\left(\frac{5}{7} + \frac{5}{14}\right) \cdot \frac{28}{25}$.

388. Bontsátok fel a zárójeleket:

1) $4\,(2a - 3b)$;
2) $0{,}3\,(9x - 5y + 7)$;
3) $(-2{,}6m + 3{,}5n - 7{,}2) \cdot (-10)$;
4) $-m\,(-n + 8k - 12)$.

389. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

1) $3m^2n \cdot 0{,}4mn^3$;
2) $7\frac{1}{3}b^3c^2 \cdot \frac{9}{11}a^4b^5$;
3) $-5x^4y^2z^8 \cdot (-0{,}8x^6y^8z^2)$;
4) $-5\frac{3}{7}abc \cdot 3{,}5a^{12}b^{10}c$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

390. Sanyi és Laci egy 30-jegyű szám felírása közben csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket használják. Az első számjegyet Sanyi írja fel, a másodikat Laci és így tovább. Laci olyan számot szeretne kapni, amelyik 9 többszöröse. Meghiúsíthatja-e ezt Sanyi?

2. SZÁMÚ FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. Az alábbi egyenlőségek közül melyik nem azonosság?

A) $-3\,(a - b) = -3a + 3b$;
B) $9a - 8a + a = 2a$;
C) $8a - (4a + 1) = 4a - 1$;
D) $-(x + 3y) + (2x - y) = 3x + 2y$.

2. Határozzátok meg a $(-2{,}4 + 0{,}4)^4$ kifejezés értékét.

A) -8; B) 8; C) 16; D) -16.

3. Egyszerűsítsétek le a $(-a^6)^3 \cdot (-a^7)^4$ kifejezést!

A) a^{20}; B) $-a^{20}$; C) a^{46}; D) $-a^{46}$.

4. Végezzétek el a $(0{,}3a^4)^2$. hatványra emelését!

A) $0{,}9a^6$; B) $0{,}9a^8$; C) $0{,}09a^6$; D) $0{,}09a^8$.

5. Az alábbi kifejezések közül melyik egytag?

A) $0{,}4x + y$; B) $0{,}4x - y$; C) $0{,}4xy$; D) egyik sem.

6. Az alábbi egytagú algebrai kifejezések közül melyikkel egyenlő a $0{,}7a^3b^2 \cdot \frac{1}{7}a^2b^4$? kifejezés?

A) $7a^5b^6$; B) $7a^6b^8$; C) $0{,}1a^5b^6$; D) $0{,}1a^6b^8$.

7. Az alábbi egytagú algebrai kifejezések közül melyiknek a négyzete az $\frac{1}{4}b^{64}c^{100}$? kifejezés?

A) $-\frac{1}{2}b^8c^{10}$; B) $\frac{1}{2}b^{32}c^{50}$; C) $\frac{1}{2}b^8c^{10}$; D) $-\frac{1}{2}b^{32}c^{10}$.

8. Ismert, hogy $m < 0$ és $n < 0$. Hasonlítsátok össze 0-val az m^5n^6 kifejezés értékét!

A) $m^5n^6 = 0$; C) $m^5n^6 < 0$;
B) $m^5n^6 > 0$; D) nem lehet megállapítani.

9. Vonjátok össze a $2x^2 + 6xy - 5x^2 - 9xy + 3y^2$ többtag egynemű tagjait!

A) $-3xy$; C) $3x^2y^2$;
B) $-3x^2 - 3xy + 3y^2$; D) $3x^2 + 3xy + 3y^2$.

10. Határozzátok meg az $x^2 - 3x - 4$ és az $x - 3x^2 - 2$ többtagok különbségét!

A) $4x^2 - 4x - 2$; C) $-2x^2 - 2x - 6$;
B) $-2x^2 - 4x - 2$; D) $4x^2 - 4x - 6$.

11. Az alábbi kifejezések közül melyik vesz fel csak negatív értékeket?

A) $x^6 + 4$; B) $x^6 - 4$; C) $-x^6 + 4$; D) $-x^6 - 4$.

12. Melyik az $(x - 7)^2 + 2$ kifejezés legkisebb értéke?

A) 2; B) 7; C) 5; D) 9.

10. Egytagú algebrai kifejezés és a polinom szorzása

Megszorozzuk a $2x$ egytagú algebrai kifejezést a $3x + 2y - 5$ polinommal. Ehhez felírjuk a $2x\,(3x + 2y - 5)$ szorzatot. Felbontjuk a zárójelet a szorzás széttagolhatósági tulajdonságának felhasználásával. A következőt kapjuk:

$$2x\,(3x + 2y - 5) = 2x \cdot 3x + 2x \cdot 2y - 2x \cdot 5 = 6x^2 + 4xy - 10x.$$

A kapott $6x^2 + 4xy - 10x$ polinom lesz a $2x$ egytagú kifejezés és a $3x + 2y - 5$ polinom szorzata.

Az egytag és a többtag szorzatát mindig felírhatjuk többtagként.

Egytagú algebrai kifejezést a polinommal úgy szorzunk, hogy az egytagot megszorozzuk az adott polinom mindegyik tagjával, és a kapott szorzatokat összeadjuk.

Az egytagú kifejezés és a polinom szorzásánál teljesül a szorzás felcserélhetőségi tulajdonsága. Ezért a fenti szabályt felhasználhatjuk a polinomnak az egytagú kifejezéssel való szorzásánál is.

PÉLDA 1 Hozzátok egyszerűbb alakra a $6x\,(x-1)-3\,(2x^2-3x+4)$ kifejezést!

Megoldás. A következőt kapjuk:

$$6x\,(x-1)-3\,(2x^2-3x+4)=$$
$$=\underline{6x^2}-\underline{\underline{6x}}-\underline{6x^2}+\underline{\underline{9x}}-12=3x-12.$$ ◀

PÉLDA 2 Oldjátok meg a $0{,}5\underline{x}\,(3+4\underline{x})=2\underline{x}\,(\underline{x}-2)-11$ egyenletet!

$$0{,}5x\,(3+4x)=2x\,(x-2)-11.$$

Megoldás:

$$1{,}5x+2x^2=2x^2-4x-11;$$
$$1{,}5x+2x^2-2x^2+4x=-11;$$
$$5{,}5x=-11;$$
$$x=-2.$$

Felelet: –2. ◀

PÉLDA 3 Oldjátok meg az egyenletet:

$$\frac{5x+4}{12}-\frac{x+3}{8}=2.$$

Megoldás: Az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk 24-gyel, ez a szám az egyenlet törtjeinek legkisebb közös nevezője. A következőt kapjuk:

$$\left(\frac{5x+4}{12}-\frac{x+3}{8}\right)\cdot 24=2\cdot 24.$$

Innen
$$24\cdot\frac{5x+4}{12}-24\cdot\frac{x+3}{8}=48;$$
$$2\,(5x+4)-3\,(x+3)=48;$$
$$10x+8-3x-9=48;$$
$$7x-1=48;$$
$$x=7.$$

Felelet: 7. ◀

PÉLDA 4 Bizonyítsátok be, hogy a változó bármilyen értékénél a $3a\ (a^2 - 4) - 2a^2\ (1{,}5a + 4a^4 + 6\ (2a - 1)$ kifejezés negatív lesz!

Megoldás: $3a\ (a^2 - 4) - 2a^2\ (1{,}5a + 4a^4) + 6\ (2a - 1) = = 3a^3 - 12a - 3a^3 - 8a^6 + 12a - 6 = -8a^6 - 6$.

A $-8a^6$ kifejezés értéke az a változó bármely értéke mellett nem pozitív. Tehát a $-8a^6 - 6$ kifejezés értéke negatív az a változó bármely értéke mellett. ◀

PÉLDA 5 Az m természetes szám 6-tal való osztásának maradéka 5, az n természetes szám 4-gyel való osztásának maradéka pedig 2. Bizonyítsátok be, hogy a $2m + 3n$ kifejezés értéke osztható 4-gyel és nem osztható 12-vel!

Megoldás: Az m szám 6-tal való osztásának nem teljes hányadosa legyen a, és a 4-gyel való osztásának pedig b. Ekkor $m = 6a + 5$, $n = 4b + 2$.

Tehát,

$$2m + 3n = 2\ (6a + 5) + 3\ (4b + 2) =$$
$$= 12a + 10 + 12b + 6 = 12a + 12b + 16.$$

A kapott összeg mindegyik összeadandója osztható 4-gyel, ezért az összegük is osztható lesz 4-gyel.

Az első két összeadandó osztható 12-vel, a harmadik pedig nem osztódik vele. Ezért az összeg nem fog 12-vel osztódni. ◀

? Hogyan szorzunk egytagot polinommal?

GYAKORLATOK

391.° Végezzétek el a szorzást:

1) $a\ (a - b)$;
2) $m\ (m + n - 4)$;
3) $-c\ (4 + c)$;
4) $-a^2\ (a^2 - a + 1)$.

392.° Végezzétek el a szorzást:

1) $m(n - 3)$;
2) $x(y - z + 4)$;
3) $-m(m - 6)$;
4) $-a(a^3 - b + c)$.

393.° Alakítsátok polinommá a szorzatokat:

1) $3x(2x + 5)$;
2) $4x(x^2 - 8x - 2)$;
3) $-2a(a^2 + a - 3)$;
4) $5b^2(3b^2 - 7b + 10)$;
5) $mn(m^2n - n^3)$;
6) $2ab(a^3 - 3a^2b + b^2)$;
7) $(4y^3 - 6y + 7) \cdot (-1{,}2y^3)$;
8) $0{,}4x^2y(3xy^2 - 5xy + 13x^2y^3)$;
9) $(2{,}3a^3b - 1{,}7b^4 - 3{,}5b) \cdot (-10a^2b)$;
10) $-4pk^3(3p^2k - p + 4k - 2)$.

394.° Végezzétek el a szorzást:

1) $3x(4x^2 - x)$;
2) $-5a^2(a^2 - 6a - 3)$;
3) $(8b^2 - 10b + 2) \cdot 0{,}5b$;
4) $x^3(x^5 - x^2 + 7x - 1)$;
5) $-2c^2d^4(4c^2 - c^3d + 5d^4)$;
6) $(5m^3n - 8mn^2 - 2n^6) \cdot (-4m^2n^8)$.

395.° Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $8x - 2x(3x + 4)$;
2) $7a^2 + 3a(9 - 5a)$;
3) $6x(4x - 7) - 12(2x^2 + 1)$;
4) $c(c^2 - 1) + c^2(c - 1)$;
5) $2m(m - 3n) + m(5m + 11n)$;
6) $8x(x^2 + y^2) - 9x(x^2 - y^2)$;
7) $5b^3(2b - 3) - 2{,}5b^3(4b - 6)$;
8) $x(5x^2 + 6x + 8) - 4x(2 + 2x + x^2)$.

396.° ***(Keresd meg a hibát)*** Megoldva a feladatot, melyben egyszerűsíteni kellett a kifejezést, Ledascsenko Vaszil a következőképpen oldotta meg:

$$4m^2(2m^2 - m) - 3m^3(m - 2) =$$
$$= 8m^4 - 4m^3 - 3m^4 - 6m^3 = 5m^4 - 10m^3.$$

Állapítsd meg, hogy hol van a hiba a megoldásban?

397.° Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $7x(x - 4) - x(6 - x)$;
2) $5ab(4a + 3b) - 10a^2(2b - 4)$;
3) $xy(2x - 11y) - x(xy + 14y^2)$;
4) $5c^3(4c - 3) - 2c^2(8c^2 - 12)$.

398.• Egyszerűsítsétek a kifejezést és számítsátok ki az értékét:

1) $3x(2x - 5) - 8x(4x - 3)$, ha $x = -1$;
2) $2x(14x^2 - x + 5) + 4x(2,5 + 3x - 7x^2)$, ha $x = 7$;
3) $8ab(a^2 - 2b^2) - 7a(a^2b - 3b^3)$, ha $a = -3$, $b = 2$.

399.• Egyszerűsítsétek a kifejezést és számítsátok ki az értékét:

1) $6x(6x - 4) + 9x(3 - 4x)$, ha $x = -\frac{1}{9}$;
2) $2m(m - n) - n(3m - n) - n(n + 6)$, ha $m = -4$, $n = 0,5$.

400.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $5x(3x - 2) - 15x(4 + x) = 140$;
2) $1,2x(4 + 5x) = 3x(2x + 1) - 9$;
3) $6x(7x - 8) - 2x(21x - 6) = 3 - 30x$;
4) $12x - 3x(6x - 9) = 9x(4 - 2x) + 3x$;
5) $7x^2 - x(7x - 5) - 2(2,5x + 1) - 3 = 0$;
6) $8(x^2 - 4) - 4x(3,5x - 7) = 20x - 6x^2$.

401.• Határozd meg az egyenlet gyökét:

1) $0,4x(5x - 6) + 7,2 = 2x(x + 0,6)$;
2) $x(3x + 2) - 9(x^2 - 7x) = 6x(10 - x)$;
3) $12(x^3 - 2) - 7x(x^2 - 1) = 5x^3 + 2x + 6$.

402.• Bizonyítsátok be az azonosságot:

1) $ab(b - c) + ac(c - b) - a(b^2 - 3bc + c^2) = abc$;
2) $4a(a + b) - a(3a - 4b) - 8ab = a^2$;
3) $a(a + 2b) + b(a + b) = b(2a + b) + a(a + b)$;
4) $a(b + c - bc) - b(a + c - ac) = (a - b)c$.

403.• Bizonyítsátok be az azonosságot:

1) $a(a + b) - b(a - b) = a^2 + b^2$;

2) $b(a-b)+b(b+c)=b(a+b)-b(b-c)$.

404.• Bizonyítsátok be, hogy a

$$x(12x+11)-x^2(x^2+8)-x(11+4x-x^3)$$

не залежить від значення змінної.

405.• Bizonyítsátok be, hogy a

$$6x(x-3)-9\left(\frac{2}{3}x^2-2x+7\right)$$

kifejezés értéke független a változó értékétől!

406.• Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $15a\cdot\dfrac{a+4}{3}+12a^2\cdot\dfrac{5-2a}{6}$;

2) $24c^3\cdot\dfrac{c^2+2c-3}{8}-18c^2\cdot\dfrac{c^3-c^2+2}{9}$;

3) $34x\cdot\dfrac{x-y}{17}-45y\cdot\dfrac{x-2y}{15}-y(6y-5x)$.

407.• Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $6b^2\cdot\dfrac{5b^2-4}{3}+20b\cdot\dfrac{3b-2b^3}{4}$;

2) $14m\cdot\dfrac{m+n}{7}-\dfrac{m-n}{8}\cdot16n-2(m^2+n^2)$.

408.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $\dfrac{x-7}{4}-\dfrac{x}{6}=2$;

2) $\dfrac{x+6}{2}-\dfrac{x-7}{7}=4$;

3) $\dfrac{2x+3}{6}+\dfrac{1-4x}{8}=\dfrac{1}{3}$;

4) $3x-\dfrac{2x+3}{2}=\dfrac{x+6}{3}$.

409.• Határozd meg az egyenlet gyökét:

1) $x-\dfrac{7x+1}{8}=\dfrac{4x+3}{4}$;

2) $\dfrac{2x+1}{6}-\dfrac{3x+1}{7}=2$.

410.• A változó mely értékénél lesz a $8y(y-7)$ kifejezés értéke 15-tel nagyobb, mint a $2y(4y-10{,}5)$ kifejezésé?

411.• A téglalap hossza háromszor nagyobb, mint a szélessége. Ha a téglalap szélességét 6 cm-rel csökkentjük, a területe 144 cm^2-rel csökken. Határozzátok meg a téglalap eredeti szélességét!

412.• A téglalap szélessége 8 cm-rel kisebb, mint a hossza. Ha a téglalap hosszát 6 cm-rel növeljük, akkor területe 72 cm^2-rel nő. Határozzátok meg ennek a téglalapnak a kerületét!

413.•• Helyettesítsétek a csillagot olyan egytagú algebrai kifejezéssel, hogy azonosságot kapjatok:

1) $* \cdot (a - b + c) = -abc + b^2c - bc^2$;
2) $* \cdot (ab - b^2) = a3^b - a^2b^2$;
3) $-3a^2(* - *) = 6a^3 + 15a^4$.

414.•• Helyettesítsétek a csillagot olyan egytagú algebrai kifejezéssel, hogy azonosságot kapjatok:

1) $(x - y) \cdot * = x^2y^2 - x^3y$;
2) $(-9x^2 + *) \cdot y = * + y^4$;
3) $(1{,}4x - *) \cdot 3x = * - 0{,}6x^3$;
4) $*(* - x^2y^5 + 5y^6) = 8x^3y^3 + 5x^3y^8 - *$.

415.•• Bizonyítsátok be, hogy ha:

1) $a + b + c = 0$, akkor $a\,(bc - 1) + b\,(ac - 1) + c\,(ab - 1) = 3a$ bc;
2) $a^2 + b^2 = c^2$, akkor $c\,(ab - c) - b\,(ac - b) - a\,(bc - a) + abc$ $= 0$.

416.•• Bizonyítsátok be, hogy a $4(x^2 - 2x + 4) - 0{,}5x(6x - 16)$ kifejezés értéke az x bármilyen értékénél pozitív!

417.•• Bizonyítsátok be, hogy a $3x^2(3 - 4x) - 6x(1{,}5x - 2x^2 + x^3)$ kifejezés értéke az x bármilyen értékénél nem negatív!

418.•• Bizonyítsátok be, hogy a $7a^4(a + 3) - a^3(21a + 7a^2 - 3a^5)$ kifejezés értéke az a bármilyen értékénél nem negatív!

419.•• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $\frac{6x-7}{5} - \frac{3x+1}{6} = \frac{11-x}{15}$; 2) $\frac{5x-3}{9} - \frac{4x+3}{6} = x - 1$;

3) $\frac{8x-5}{3}-\frac{4x+3}{4}+\frac{2-9x}{2}=-3$;

4) $\frac{8x^2-3x}{16}-\frac{6x^2+1}{12}=-1$.

420.•• Határozd meg az egyenlet gyökét:

1) $\frac{2x+3}{3}-\frac{5x+13}{6}+\frac{5-2x}{2}=6$;

2) $\frac{4x^2+5x}{14}+\frac{10-2x^2}{7}=5$.

421.•• Három nap alatt 108 km-t tett meg a turista. A második napon 6 km-rel többet tett meg, mint az elsőn, a harmadikon pedig az első két napon megtett távolság $\frac{5}{13}$-át. Hány kilométert gyalogolt a turista ezeken a napokon?

422.•• Három munkásbrigád egy műszakban 80 alkatrészt gyártott. Az első brigád 12-vel kevesebb részt készített, mint a második brigád, a harmadik brigád pedig a $\frac{3}{7}$-ét készítette annak, amit az első és a második brigád együttvéve. Hány alkatrészt készítettek az egyes brigádok?

423.•• Az a természetes számot 3-mal osztva a maradék 1, a b számot 9-cel osztva a maradék pedig 7. Bizonyítsátok be, hogy aa $4a + 2b$ osztható 3-mal!

424.•• Az m természetes számot 5-tel osztva a maradék 3, az n számot 3-mal osztva a maradék pedig 2. Bizonyítsátok be, hogy a $3m + 5n$ nem osztható 15-tel!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

425. Az akció során a cipő új ára 0,68 része lett a régi árának. Hány százalékkal csökkent a cipők ára?

426. A helyközi buszon való utazásra szóló jegy felnőtteknek 200 hrivnyába kerül, az iskolásoknak a jegy ára pedig a felnőtt jegy árának 60 %-a. A csoport 22 iskolásból és három felnőttből áll. Mennyibe kerül az utazás az egész csoportnak?

427. Ukrajna három legnagyobb torkolata, a Dnyeper–Bugi-limán, a Dnyeszter-limán és a Szaszik (Kuduk)–limán, a Fekete-tengerbe ömlik. Az összterületük 1364,8 km^2. A Dnyeszter-limán területe $2\frac{2}{9}$-szer kisebb a Dnyeper–Bugi-limán területénél, a Szaszik-limán területe 25,6 %-a Dnyeper–Bugi-limán területének. Határozzátok meg mindegyik limán területét!

428. Az első napon Lackó elolvasta a könyv $\frac{2}{7}$ részét, a második napon a könyv 64 %-át, a harmadikon pedig a maradék 54 oldalt. Hány oldalas a könyv?

429. A kerékpáros az előtte álló útnak az első felét 3 óra alatt tette meg, a másodikat pedig 2,5 óra alatt, mivel növelte a sebességét 3 km/h – val. Milyen távolságot tett meg eközben a kerékpáros?

430. Az egyik raktárban 184 tonna ásványi műtrágya volt, a másodikban 240 tonna. Az első raktárból naponta 15 tonna, a másodikból pedig 18 tonna műtrágyát szállítottak el. Hány nap múlva lesz az első raktárban lévő műtrágya tömege $\frac{2}{3}$-a, a második raktárban maradó műtrágya tömegének?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

431. Az egyfordulós röplabdatornán (azaz minden csapat egyszer játszott egymással) a csapatok 20 %-a egyetlen meccset sem nyert meg. Hány csapat vett részt ezen a tornán? (*Megjegyzés*: A röplabdában nincs döntetlen, mindig az egyik csapat nyer, a másik veszít.)

11. Polinom szorzása polinommal

Megmutatjuk, hogyan kell összeszorozni egy többtagot egy másik többtaggal a következő példán: $(a+b)\,(x-y-z)$. Ha a második tényezőt c-vel helyettesítjük, akkor a következőt kapjuk:

$$(a+b)\,(x-y-z) = (a+b)\,c = ac + bc.$$

Most az $ac + bc$ kifejezésben a c helyére behelyettesítjük az $x - y - z$ polinomot. Felírjuk:

$$ac + bc = a(x-y-z) + b(x-y-z) = ax - ay - az + bx - by - bz.$$

A kapott polinom a keresett szorzat.

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a szorzatot a következő séma szerint határozzuk meg:

$$(a + b)\,(x - y - z)$$

A séma alapján a következő szabályt írhatjuk fel:

Polinomot polinommal úgy szorzunk, hogy az első polinom mindegyik tagját megszorozzuk a másik polinom minden egyes tagjával, és a kapott szorzatokat összeadjuk.

Tehát polinomnak polinommal való szorzásakor mindig polinomot kapunk eredményül.

PÉLDA 1 Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezést:

$$(3x-4)\,(2x+3)-(x-2)\,(x+5).$$

Megoldás:

$$(3x-4)\,(2x+3)-(x-2)\,(x+5) =$$
$$= 6x^2 + 9x - 8x - 12 - (x^2 + 5x - 2x - 10) =$$
$$= \underline{6x^2} + \underline{\underline{9x}} - \underline{\underline{8x}} - 12 - \underline{x^2} - \underline{\underline{5x}} + \underline{\underline{2x}} + 10 = 5x^2 - 2x - 2.$$ ◀

PÉLDA 2 Adjátok meg a kifejezést polinom alakban:

$$(a+2)\,(a-5)\,(a+3).$$

Megoldás: $(a+2)\,(a-5)\,(a+3) =$

$$= (a^2 - 5a + 2a - 10)\,(a+3) = (a^2 - 3a - 10)\,(a+3) =$$
$$= a^3 + \underline{3a^2} - \underline{3a^2} - \underline{\underline{9a}} - \underline{\underline{10a}} - 30 = a^3 - 19a - 30.$$ ◀

PÉLDA 3 Határozzátok meg azt a négy egymást követő természetes számot, amelyek közül a harmadiknak és a negyediknek a szorzata 38-cal nagyobb az első és a második szám szorzatánál!

Megoldás: Legyen a legkisebb szám x, akkor a három következő szám $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$. Mivel a feltétel szerint az $(x + 2)(x + 3)$ szorzat 38-cal nagyobb az $x(x + 1)$ szorzatnál, ezért felírhatjuk:

$$(x + 2)(x + 3) - x(x + 1) = 38.$$

Innen

$$x^2 + 3x + 2x + 6 - x^2 - x = 38;$$

$$4x = 38 - 6;$$

$$x = 8.$$

Tehát a keresett számok: 8, 9, 10 és 11. ◀

PÉLDA 4 Bizonyítsátok be, hogy az

$$(n + 39)(n - 4) - (n + 31)(n - 3)$$

kifejezés értéke 7 többszöröse az n bármely természetes értéke mellett.

Megoldás: Elvégezzük az átalakítást:

$$(n + 39)(n - 4) - (n + 31)(n - 3) =$$
$$= n^2 - 4n + 39n - 156 - (n^2 - 3n + 31n - 93) =$$
$$= \underline{n^2} - \underline{\underline{4n}} + \underline{\underline{39n}} - 156 - \underline{n^2} + \underline{\underline{3n}} - \underline{\underline{31n}} + 93 =$$
$$= 7n - 63 = 7(n - 9).$$

Az adott kifejezést felírtuk két olyan tényező szorzataként, amelyek közül az egyik 7, a másik pedig csak egész értékeket vesz fel. Tehát bármely természetes n esetén az adott kifejezés értéke osztható 7-tel. ◀

? Hogyan szorzunk többtagot többtaggal?

GYAKORLATOK

432.° Végezzétek el a szorzást:

1) $(a - 2)(b + 5)$;
2) $(m + n)(p - k)$;
3) $(x - 8)(x + 4)$;
4) $(x - 10)(x - 9)$;
5) $(c + 5)(c + 8)$;
6) $(3y + 1)(4y - 6)$;

7) $(-2m - 3)(5 - m)$;
8) $(5x^2 - x)(6x^2 + 4x)$;
9) $(-c - 4)(c^3 + 3)$;
10) $(x - 5)(x^2 + 4x - 3)$;
11) $(2a + 3)(4a^2 - 4a + 3)$;
12) $a(5a - 4)(3a - 2)$.

433.° Alakítsátok polinommá a kifejezést:
1) $(a + b)(c - d)$;
2) $(x - 6)(x - 4)$;
3) $(a - 3)(a + 7)$;
4) $(11 - c)(c + 8)$;
5) $(d + 13)(2d - 1)$;
6) $(3y - 5)(2y - 12)$;
7) $(2x^2 - 3)(x^2 + 4)$;
8) $(x - 6)(x^2 - 2x + 9)$;
9) $(5x - y)(2x^2 + xy - 3y^2)$;
10) $b(6b + 7)(3b - 4)$.

434.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:
1) $(x + 2)(x + 11) - 2x(3 - 4x)$;
2) $(a + 5)(a - 2) + (a - 4)(a + 6)$;
3) $(y - 9)(3y - 1) - (2y + 1)(5y - 7)$;
4) $(4x - 1)(4x - 3) - (2x - 10)(8x + 1)$.

435.° Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket:
1) $(a - 2)(a - 1) - a(a + 1)$;
2) $(b - 5)(b + 10) + (b + 6)(b - 8)$;
3) $(2c + 3)(3c + 2) - (2c + 7)(2c - 7)$;
4) $(3d + 5)(5d - 1) - (6d - 3)(2 - 8d)$.

436.• Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket, és számítsátok ki az értékeit:
1) $(x + 2)(x - 5) - (x - 3)(x + 4)$, ha $x = -5{,}5$;
2) $(y + 9)(y - 2) + (3 - y)(6 + 5y)$, ha $y = -1\frac{1}{2}$.

437.• Hozzátok egyszerűbb alakra a kifejezéseket, és számítsátok ki az értékeit:
1) $(a + 3)(a - 10) - (a + 7)(a - 4)$, ha $a = -0{,}01$;
2) $(8c + 12)(3c - 1) + (3c + 2)(-5c - 6)$, ha $c = 1\frac{1}{3}$.

438.• Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $(2x - 3)(4x + 3) - 8x^2 = 33$;
2) $(2x - 6)(8x + 5) + (3 - 4x)(3 + 4x) = 55$;
3) $21x^2 - (3x - 7)(7x - 3) = 37$;
4) $(x + 1)(x + 2) - (x - 3)(x + 4) = 12$;
5) $(-4x + 1)(x - 1) - x = (5 - 2x)(2x + 3) - 17$.

439.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $(2x - 1)(15 + 9x) - 6x(3x - 5) = 87$;
2) $(14x - 1)(2 + x) = (2x - 8)(7x + 1)$;
3) $(x + 10)(x - 5) - (x - 6)(x + 3) = 16$;
4) $(3x + 7)(8x + 1) = (6x - 7)(4x - 1) + 93x$.

440.• Végezzétek el a szorzásokat:

1) $(x + 2)(x - 1)(x - 4)$;
2) $(2x + 1)(x + 5)(x - 6)$;
3) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x - 3)$;
4) $(a + 2b - c)(a - 3b + 2c)$;
5) $(a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$;
6) $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

441.• Alakítsátok át a kifejezést többtaggá:

1) $(a + 1)(a - 2)(a - 3)$;
2) $(3a - 2)(a + 3)(a - 7)$;
3) $(a2 - 2a + 1)(a^2 + 3a - 2)$;
4) $(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$.

442.• Alakítsátok át a hatványt szorzattá, majd a szorzatot többtaggá:

1) $(a + 5)^2$; 2) $(4 - 3b)^2$; 3) $(a + b + c)^2$; 4) $(a - b)^3$.

443.• Bizonyítsátok be, hogy az $(x + 3)(x^2 - 4x + 7) - (x^2 - 5)(x - 1)$ értéke 16-tal egyenlő, a változó bármely értéke mellett!

444.• Bizonyítsátok be, hogy az $(x - 3)(x^2 + 7) - (x - 2)(x^2 - x + 5)$ értéke –11-gyel egyenlő, a változó bármely értéke mellett!

445.• Gondoltunk négy természetes számot. A második szám 1-gyel nagyobb az elsőnél, a harmadik 5-tel nagyobb a másodiknál, a negyedik pedig 2-vel nagyobb a harmadiknál. Határozzátok meg ezt a négy számot, ha az első szám úgy aránylik a harmadikhoz, mint a második a negyedikhez!

446.• Gondoltunk három természetes számot. A második szám 4-gyel nagyobb az elsőnél, a harmadik pedig 6-tal nagyobb a másodiknál. Határozzátok meg ezeket a számokat, ha az első szám úgy aránylik a másodikhoz, mint a második a harmadikhoz!

447.• Határozzátok meg azt a négy egymást követő természetes számot, amelyek közül a negyedik és a második szorzata 17-tel nagyobb a harmadik és az első szám szorzatánál!

448.• Határozzátok meg azt a három egymást követő természetes számot, amelyek közül a másodiknak és a harmadiknak a szorzata 50-nel nagyobb az első szám négyzeténél!

449.• A négyzet oldala 3 cm-rel rövidebb a téglalap egyik oldalánál, és 5 cm-rel hosszabb a másiknál. Határozzátok meg a négyzet oldalát, ha a területe 45 cm^2-rel nagyobb az adott téglalap területénél!

450.• A téglalap kerülete 60 cm. Ha az egyik oldalát 5 cm-rel megrövidítjük, a másikat pedig 3 cm-rel meghosszabbítjuk, akkor a területe 21 cm^2-rel kisebb lesz az eredetinél. Határozzátok meg az adott téglalap oldalait!

451.• A téglalap hossza 2 cm-rel nagyobb a szélességénél. Ha a hosszát 2 cm-rel növeljük, a szélességét pedig 4 cm-rel rövidítjük, akkor a területe 40 cm^2-rel kisebb lesz, mint eredetié. Határozzátok meg az eredeti téglalap oldalainak hosszát.

452.• Bizonyítsátok be az azonosságokat:

1) $x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7)$;
2) $y^2(y - 7)(y + 2) = y^4 - 5y^3 - 14y^2$;
3) $a^3 - 8 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$;
4) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) = a^4 - 1$;
5) $(a^4 - a^2 + 1)(a^4 + a^2 + 1) = a^8 + a^4 + 1$.

453.• Bizonyítsátok be az azonosságokat:

1) $3a^2 + 10a + 3 = 3(a + 3)\left(a + \frac{1}{3}\right)$;
2) $(a + 1)(a^2 + 5a + 6) = (a^2 + 3a + 2)(a + 3)$;
3) $(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) = a^5 + 1$.

454.• Igaz-e, hogy az $(n + 9)(n + 11) - (n + 3)(n + 5)$ kifejezés értéke az n bármely értéke mellett 12 többszöröse?

455.$^{\bullet}$ Igaz-e, hogy az $(n + 29)(n + 3) - (n + 7)(n + 1)$ kifejezés értéke az n bármely értéke mellett 8 többszöröse?

456.$^{\bullet\bullet}$ A csillagot olyan egytagú algebrai kifejezéssel helyettesítsétek, hogy azonosságot kapjunk:

1) $(a - 2)(* + 6) = a^2 + * - *$;
2) $(2a + 7)(a - *) = * + * - 14$.

457.$^{\bullet\bullet}$ A csillagot olyan egytagú algebrai kifejezéssel helyettesítsétek, hogy azonosságot kapjunk:

1) $(x + 3)(* + 5) = 3x^2 + * + *$;
2) $(x - 4)(x + *) = * + * + 24$.

458.$^{\bullet\bullet}$ Kiválasztottak négy egymást követő természetes számot és kiszámolták a második és a harmadik szám szorzata valamint az első és negyedik számok szorzata közötti különbséget. Függ-e a különbség értéke a számok kiválasztásától?

459.$^{\bullet\bullet}$ Kiválasztottak három egymást követő természetes számot és kiszámolták a második négyzetének valamint az első és harmadik szorzatának különbségét. Függ-e a különbség értéke a számok kiválasztásától?

460.$^{\bullet\bullet}$ Bizonyítsátok be, hogy az $\overline{ab} \cdot \overline{ba} - ab$ kifejezés értéke maradék nélkül osztható 10-zel függetlenül az a és b értékétől?

461.$^{\bullet\bullet}$ Az x természetes szám 6-tal való osztásának maradéka 3, az y természetes szám 6-tal való osztásakor a maradék 2. Bizonyítsátok be, hogy az x és y számok szorzata osztható 6-tal!

462.$^{\bullet\bullet}$ Bizonyítsátok be, hogy ha $ab + bc + ac = 0$, akkor

$$(a - b)(a - c) + (b - c)(b - a) + (c - a)(c - b) = a^2 + b^2 + c^2.$$

463.* Az a természetes szám 8-cal való osztásának maradéka 3, a b természetes szám 8-cal való osztásakor a maradék 7. Bizonyítsátok be, hogy az a és b számok szorzatának a 8-cal való osztásakor a maradék 5 lesz!

464.* Az m természetes szám 11-gyel való osztásának maradéka 9, az n természetes szám 11-gyel való osztásakor a maradék 5. Bizonyítsátok be, hogy az m és n számok szorzatának a 11-gyel való osztásakor a maradék 1 lesz!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

465. A személyi jövedelemadó a munkabér 18 %-a. A jövedelemadó levonása után a mérnök 19 680 hrivnyát kapott. Mennyi volt a felszámolt fizetése?

466. 20 százalékos drágulás után az öltöny 2760 hrivnyába került. Mennyi volt az öltöny ára az áremelés előtt?

467. Két munkás együtt 108 alkatrészt készített. Az első 5 órát, a második pedig 3 órát dolgozott. Hány alaktarészt készítettek óránként ezek a munkások, ha együtt 1 óra alatt 26 alkatrészt állítottak elő?

468. Összekevertek 72 gramm 5 %-os és 48 gramm 15 %-os sóoldatot. Hány százalékos sóoldatot kaptak?

469. Oldjátok meg az egyenletet:

1) $\overline{1x} + \overline{2x} = \overline{x6}$; 2) $\overline{x4} + \overline{x8} = \overline{1x2}$.

470. Bizonyítsátok be az azonosságot:

1) $18^{16n} = 12^{8n} \cdot 9^{12n}$; 2) $75^{8n} = 225^{4n} \cdot 625^{2n}$,

ha n természetes szám!

471. *(Ősrégi görög feladat.)* Démokritosz[1] hosszú életének negyedét kisfiúként, ötödét ifjúként, harmadát férfiként és 13 évet öregként élte le. Hány évet élt Démokritosz?

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

472. Számítsátok ki a szorzás széttagolhatósági tulajdonságának alkalmazásával:

1) $4{,}8 \cdot 2{,}9 + 4{,}8 \cdot 7{,}1$; 3) $3\frac{9}{14} \cdot 0{,}3 - 0{,}3 \cdot 1\frac{10}{21} + 0{,}3 \cdot 1\frac{1}{6}$.

2) $3\frac{9}{14} \cdot \frac{7}{9} - 2\frac{5}{14} \cdot \frac{7}{9}$;

[1] Démokritosz (i. e. IV–III. század) – ókori görög politikus, szónok és történész.

473. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $x\,(x + 4) = 0$;
2) $(x - 6)\,(x + 9) = 0$;
3) $(3x + 5)\,(10 - 0{,}4x) = 0$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

474. Egy 5 × 5 tábla minden négyzetében ül egy bogár. Egy bizonyos pillanatban mindegyik bogár átmászik a szomszédos négyzetbe (vagy vízszintes vagy függőleges irányban). Mindenképpen üresen marad-e ekkor valamelyik négyzet?

12. Polinomok tényezőkre bontása. A közös tényező kiemelése a zárójel elé

Megszorozzuk a $2x - 1$ polinomot az $x + 1$ polinommal. Felírjuk:

$$(2x - 1)\,(x + 1) = 2x^2 + 2x - x - 1 = 2x^2 + x - 1.$$

A $(2x - 1)\,(x + 1) = 2x^2 + x -1$, polinomot, amelyet felírhatjuk a következő módon is: $2x^2 + x - 1 = (2x - 1)\,(x + 1)$.

Ebben az esetben a $2x^2 + x - 1$ többtagot a $2x - 1$ és az $x + 1$ **tényezőire bontottuk**.

Általánosságban elmondható, hogy a polinomok felírását néhány tényező szorzataként, a **polinom tényezőkre bontásának** nevezzük.

Sok feladat megoldásának kulcsa a polinomok tényezőkre bontása. Például a $2x - 1 = 0$ és az $x + 1 = 0$ egyenleteket nagyon könnyű megoldani, de a $2x^2 + x - 1 = 0$ egyenlet megoldása számotokra még ismeretlen. De, ha tényezőkre bontjuk a $2x^2 + x - 1$ polinomot, akkor a $2x^2 + x - 1 = 0$ egyenletet a következőképpen írhatjuk fel:

$$(2x - 1)\,(x + 1) = 0.$$

Innen $2x - 1 = 0$ vagy $x + 1 = 0$. A keresett gyökök a 0,5 és a –1.

Tehát a többtag tényezőkre való bontása vezetett ahhoz, hogy az összetett egyenlettől eljutottunk két egyszerű egyenlet megoldásához.

Több módszer is létezik, amelyek segítségével tényezőkre tudjuk bontani a polinomokat. Az egyik legegyszerűbb ezek közül **a közös tényező kiemelése a zárójel elé**.

Ez az átalakítás számotokra már ismert. Például a hatodik osztályban az $1{,}62 \cdot 1{,}08 - 0{,}08 \cdot 1{,}62$ kifejezést a következő módon számítottátok ki:

$$1{,}62 \cdot 1{,}08 - 0{,}08 \cdot 1{,}62 = 1{,}62\,(1{,}08 - 0{,}08) = 1{,}62.$$

Itt a szorzás összeadásra vonatkoztatott $c\,(a + b) = ac + bc$ széttagolhatósági tulajdonságát alkalmaztuk, de most jobbról balra olvasva: $ac + bc = c\,(a + b)$ egyenlőséget használtuk.

Ezt a módszert alkalmazzuk a következő példák megoldásánál.

PÉLDA 1 Bontsátok tényezőkre:

1) $a^2b^2 + ab^3$; 2) $8a^2b^2 - 12ab^3$; 3) $10a^8 - 5a^5$.

Megoldás: 1) Az a^2b^2 és ab^3 egytagú algebrai kifejezések a következő közös tényezőket tartalmazzák: a, b, ab, b^2 és ab^2. Ezek közül a tényezők közül bármelyiket kiemelhetjük a zárójel elé. De a közös tényezőt úgy választjuk ki, hogy a zárójelben maradó polinom tagjainak már ne legyenek közös betűtényezői. Ez a gondolatmenet azt sugallja, hogy a zárójel elé az ab^2 közös tényezőt kell kiemelnünk:

$$a^2b^2 + ab^3 = ab^2\,(a + b).$$

Ahhoz hogy leellenőrizzük, helyesen bontottuk-e tényezőkre a polinomot, össze kell szoroznunk a kapott tényezőket.

2) Ha a polinom együtthatói egész számok, akkor a zárójel elé e számok abszolút értékeinek a legnagyobb közös osztóját emelik ki (a mi esetünkben ez a 4-es szám):

$$8a^2b^2 - 12ab^3 = 4ab^2 (2a - 3b).$$

3) Felírhatjuk: $10a^8 - 5a^5 = 5a^5 (2a^3 - 1)$. ◀

PÉLDA 2 Írjátok fel a kifejezéseket polinomok szorzataként:

1) $a (m - 3) + b (m - 3)$;
2) $x (c - d) + y (d - c)$;
3) $6x (x - 7) - (x - 7)^2$.

Megoldás: 1) *Ebben az esetben az $m - 3$ többtag a közös tényező:*

$$a (m - 3) + b (m - 3) = (m - 3) (a + b).$$

2) Felírjuk:

$$x (c - d) + y (d - c) = x (c - d) + y \cdot (-1) \cdot (c - d) =$$
$$= x (c - d) - y (c - d) = (c - d) (x - y).$$

3) Felírjuk:

$$6x (x - 7) - (x - 7)^2 = (x - 7) (6x - (x - 7)) =$$
$$= (x - 7) (6x - x + 7) = (x - 7) (5x + 7).$$ ◀

PÉLDA 3 Emeljétek ki a közös tényezőt a zárójel elé a $(12x - 18y)^2$ kifejezésben.

Megoldás: Felírjuk:

$$(12x - 18y)^2 = (6 (2x - 3y))^2 =$$
$$= 6^2 (2x - 3y)^2 = 36 (2x - 3y)^2.$$ ◀

PÉLDA 4 Oldjátok meg az egyenleteket: 1) $4x^2 - 12x = 0$; 2) $(3x - 7) (x + 4) + (x - 1) (x + 4) = 0$.

Megoldás: 1) Tényezőkre bontjuk az egyenlet bal oldalát, és felhasználjuk azt a szabályt, hogy egy szorzat mikor egyenlő nullával, felírjuk:

$$4x (x - 3) = 0;$$
$$x = 0 \text{ vagy } x - 3 = 0;$$
$$x = 0 \text{ vagy } x = 3.$$

Felelet: 0; 3.

2) $$(3x - 7)(x + 4) + (x - 1)(x + 4) = 0;$$
$$(x + 4)(3x - 7 + x - 1) = 0;$$
$$x + 4 = 0 \text{ vagy } 4x - 8 = 0;$$
$$x = -4 \text{ vagy } x = 2.$$

Felelet: –4; 2. ◀

PÉLDA 5 Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értéke:

1) $8^7 - 4^9$ maradék nélkül osztható 14-gyel;

2) $20^3 - 4^4$ osztható 121-gyel!

Megoldás: Felírjuk a 8^7 és 4^9 kifejezéseket 2-es alapú hatványként, majd kivisszük a közös tényezőt a zárójel elé. A következőt kapjuk:

$$8^7 - 4^9 = (23)^7 - (22)^9 = 2^{21} - 2^{18} = 2^{18}(2^3 - 1) = 2^{18} \cdot (8 - 1) =$$
$$= 2^{18} \cdot 7 = 217 \cdot 2 \cdot 7 = 2^{17} \cdot 14.$$

Tehát az adott kifejezés két természetes szám szorzatával egyenlő, amelyek közül az egyik 14. Ebből következik, hogy a $8^7 - 4^9$ kifejezés maradék nélkül osztható 14-gyel.

2) Felírjuk: $20^3 - 4^4 = (5 \cdot 4)^3 - 4^4 = 5^3 \cdot 4^3 - 4^4 = 4^3(5^3 - 4) =$
$= 4^3(125 - 4) = 4^3 \cdot 121.$

Tehát a kifejezés értéke maradék nélkül osztható 121-gyel. ◀

PÉLDA 6 Az a mely értékénél lesz az $(x + 2) \cdot (x + a) - x(x + 1) = 3a + 1$ egyenletnek számtalan megoldása?

Megoldás:

$$x^2 + ax + 2x + 2a - x^2 - x = 3a + 1;$$
$$ax + x + 2a = 3a + 1;$$
$$ax + x = a + 1;$$
$$(a + 1)x = a + 1.$$

Ha $a = -1$, akkor az utolsó egyenletet felírhatjuk $0x = 0$ alakban, és ennek az egyenletnek számtalan gyöke van. Megjegyezzük, ha $a \neq -1$, akkor az egyenletnek egyetlen gyöke van, mégpedig $x = (a + 1) : (a + 1)$, amelyik egyenlő 1-gyel.

Felelet: ha $a = -1$. ◀

1. Magyarázzátok meg, hogy mit értünk a polinom tényezőkre bontásán! **2.** A szorzás melyik tulajdonságát használjuk fel, amikor kiemeljük a közös tényezőt a zárójel jele elé?

GYAKORLATOK

475.° Bontsátok tényezőkre:
1) $am + an$; 2) $6x - 6y$; 3) $-cx - cy$; 4) $7c - 7$.

476.° Vigyétek ki a közös tényezőt a zárójel elé:
1) $9a + 9b$; 2) $ab - bc$; 3) $ax + a$; 4) $4bk + 4bt$.

477.° Fejezzétek be a polinom tényezőkre bontását:
1) $4a - 12b = 4$ (...;
2) $x^3 - 2x^2y = x^2$ (...;
3) $27a^2b + 18ab^2 = 9ab$ (...;
4) $6x^2 + 12x^4 - 18x^5 = 6x^2$ (... .

478.° Fejezzétek be a polinom tényezőkre bontását:
1) $7m + 3mn = m$ (...;
2) $a^7 + a^4 = a^4$ (...;
3) $-m^3 - mnp = -m$ (...;
4) $x^5y - x^4y^3 + x^3y^2 = x^3y$ (... .

479.° Emeljétek ki a közös tényezőt a zárójel elé:
1) $4b + 16c$;
2) $12x - 15y$;
3) $-8a - 18b$;
4) $24x + 30y$;
5) $10mx - 15my$;
6) $x^2 + xy$;
7) $3d^2 - 3cd$;
8) $4a^2 + 16ab$;
9) $a^6 - a^3$;
10) $b^2 + b^8$;
11) $7p^3 - 5p$;
12) $15c^2d - 3cd$;
13) $14x^2y + 21xy^2$;
14) $-2x^9 + 16x^6$;
15) $8a4b^2 - 36a^3b^7$.

480.° ***(Találd meg a hibát)*** Keresd meg a hibákat, melyet Ledascsenko Vaszil vétett, amikor tényezőkre bontotta a polinomokat:
1) $4a + 4 = 4\ (a + 4)$;
2) $6ab - 3b = b\ (6a - 2b)$;
3) $-5x - 10y = -5\ (x - 2y)$;
4) $x^6 - x^4 + x^2 = x^2(x^3 - x^2 + x)$.

481.° Bontsátok tényezőkre a polinomokat:

1) $3a + 6b$;
2) $12m - 16n$;
3) $10ck - 15cp$;
4) $8ax + 8a$;
5) $5b - 25bc$;
6) $14x^2 + 7x$;
7) $n^{10} - n^5$;
8) $m^6 + m^7$;
9) $9x - 27x^4$;
10) $18y^5 + 12y^4$;
11) $56a^{10}b^6 - 32a^4b^8$;
12) $36mn^5 + 63m^2n^6$.

482.° Számítsátok ki, a közös tényező kiemelése után:

1) $516^2 - 516 \cdot 513$;
2) $214 \cdot 314 - 214^2$;
3) $0{,}4^3 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}6$.

483.° Számítsátok ki a kifejezés értékét:

1) $516^2 - 516 \cdot 513$;
2) $0{,}7^3 + 0{,}7 \cdot 0{,}51$;
3) $0{,}2^4 - 0{,}2^3 \cdot 1{,}2$.

484.° Számítsátok ki, alkalmazva a közös tényező kiemelését:

1) $6{,}32x - x^2$, ha $x = 4{,}32$;
2) $a^3 + a^2b$, ha $a = 1{,}5$, $b = -2{,}5$;
3) $m^3p - m^2n^2$, ha $m = 3$, $p = \frac{1}{3}$, $n = -3$.

485.° Számítsátok ki, alkalmazva a közös tényező kiemelését:

1) $0{,}74x^2 + 26x$, ha $x = 100$;
2) $x^2y^3 - x^3y^2$, ha $x = 4$, $y = 5$.

486.° Oldjátok meg az egyenletet:

1) $y^2 - 6y = 0$;
2) $x^2 + x = 0$;
3) $4m^2 - 20m = 0$;
4) $13x^2 + x = 0$;
5) $9x^2 - 6x = 0$;
6) $12x - 0{,}3x^2 = 0$.

487.° Oldjátok meg az egyenletet:

1) $x^2 - x = 0$;
2) $p^2 + 15p = 0$;
3) $5x^2 - 30x = 0$;
4) $14x^2 + 18x = 0$.

488.° Fejezzétek be a tényezőre bontást:

1) $3a(x - y) + b(x - y) = (x - y)\ \ldots$;
2) $b(c - 2) + (c - 2) = (c - 2)\ \ldots$;

3) $x(y-6)+z(6-y)=x(y-6)-z(y-6)=\ldots$;
4) $m(8-n)-5(n-8)=m(8-n)+5(\ldots$.

489.° Fejezzétek be a tényezőre bontást:
1) $a(b-c)-(b-c)=(b-c)\ldots$;
2) $2x(3c-y)+7y(y-3c)=2x(3c-y)-7y(\ldots$.

490.° Bontsátok tényezőkre:
1) $2x(a+b)+y(a+b)$;
2) $(a-4)-b(a-4)$;
3) $5a(m-n)+7b(m-n)$;
4) $a(c-d)+b(d-c)$;
5) $x(x-6)-10(6-x)$;
6) $b(b-20)+(20-b)$.

491.° Polinomok szorzataként írd fel a kifejezést:
1) $c(x-3)-d(x-3)$;
2) $m(p-k)-(p-k)$;
3) $m(x-y)-n(y-x)$;
4) $x(2-x)+4(x-2)$;
5) $4x(2x-y)-5y(y-2x)$.

492.• Bontsátok tényezőkre:
1) $2a^5b^2-4a^3b+6a^2b^3$;
2) $mn^3+5m^2n^2-7m^2n$;
3) xy^2+x^2y-xy;
4) $9x^3+4x^2-x$;
5) $-6m^4-8m^5-2m^6$;
6) $42a^4b-28a^3b^2-70a^5b^3$.

493.• Vigyétek ki a közös tényezőt a zárójel elé:
1) $m^2n+mn+n$;
2) $3x^6+6x^5-15x^4$;
3) $7a^4b^3-14a^3b^4+21a^2b^5$;
4) $20b^6c^5-45b^5c^6-30b^5c^5$.

494.• Bizonyítsátok be, hogy bármilyen természetes szám és e szám négyzetének összege páros szám lesz!

495.• Bontsátok tényezőkre:
1) $(m-9)^2-3(m-9)$;
2) $a(a+5)^2+(a+5)$;
3) $(m^2-3)-n(m^2-3)^2$;

4) $8c(p-12)+7d(p-12)^2$;
5) $a(2a+b)(a+b)-4a(a+b)^2$;
6) $3m^2(m-8)+6m(m-8)^2$;
7) $(2a+3)(a+5)+(a-1)(a+5)$;
8) $(3x+7)(4y-1)-(4y-1)(2x+10)$;
9) $(5m-n)^3(m+8n)^2-(5m-n)^2(m+8n)^3$.

496.• Polinomok szorzataként írjátok fel a kifejezést:
1) $(y+1)^2-4y(y+1)$;
2) $10(a^2-5)+(a^2-5)^2$;
3) $(a-2)^2-6(a-2)$;
4) $(x-6)(2x-4)+(x-6)(8-x)$;
5) $(x^2-2)(3y+5)-(x^2-2)(y+12)$;
6) $(4a-3b)(5a+8b)+(3b-4a)(2a+b)$;
7) $(p-9)^4(2p+1)^3+(p-9)^3(2p+1)^4$.

497.• Tényezőre bontást felhasználva, oldjátok meg az egyenletet:
1) $(x-3)(x+7)-(x+7)(x-8)=0$;
2) $(4x-9)(x-2)+(1-x)(x-2)=0$;
3) $0{,}2x(x-5)+8(x-5)=0$;
4) $7(x-7)-(x-7)^2=0$;

498.• Tényezőre bontást felhasználva, oldjátok meg az egyenletet:
1) $(2x-9)(x+6)-x(x+6)=0$;
2) $(3x+4)(x-10)+(10-x)(x-8)=0$;
3) $3(3x+1)^2-4(3x+1)=0$;
4) $(9x-12)-x(9x-12)=0$.

499.• Vigyétek ki a közös tényezőt a zárójel jele elé:
1) $(2x-6)^2$;
2) $(5y+5)^2$;
3) $(36x+30y)^2$;
4) $(2x+4)^4$;
5) $(6x-9y)^3$;
6) $(a^2+ab)^2$;
7) $(-7a-14ab)^2$;
8) $(3c^4-6c3)^4$.

500.• Vigyétek ki a közös tényezőt a zárójel jele elé:

1) $(4x - 4y)^2$;
2) $(18a + 27b)^2$;
3) $(8m - 10n)^3$;
4) $(a^2 - 9a)^2$;
5) $(16x^2y + 40xy^2)^2$;
6) $(22x^4 - 28x^2y^3)^5$.

501.•• Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értéke:

1) $19^5 + 19^4$ a 20;
2) $8^{10} - 8^9 - 8^8$ a 11 többszöröse;
3) $8^7 + 2^{15}$ az 5 többszöröse;
4) $27^4 - 9^5$ a 24 többszöröse;
5) $12^4 - 4^6$ a 130 többszöröse;
6) $2 \cdot 3^{2006} + 5 \cdot 3^{2005} + 7 \cdot 3^{2004}$ a 10 többszöröse!

502.•• Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értéke:

1) $25^{25} + 25^{24}$ osztható 1-vel;
2) $16^4 + 8^5 - 4^7$ osztható 10-zel;
3) $36^5 + 6^9$ osztható 42-vel;
4) $10^5 - 5^7$ osztható 7-tel!

503.•• Bizonyítsátok be, hogy ha:

1) $a + b = 2$, akkor $a2^b + ab^2 - 2ab = 0$;
2) $3a + 4b = -2$, akkor $12a^3b + 16a^2b^2 + 32a^2b = 24a^2b$.

504.•• Bizonyítsátok be, hogy ha:

1) $a + b + c = 0$, akkor $a^3b^3c^2 + a^2b^4c^2 + a^2b^3c^3 = 0$;
2) $a^2 - b^2 = 2ab + 1$, akkor $a^6b^4 - 2a^5b^5 - a^4b^6 = a^4b^4$.

505.•• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $8x^2 - 3(x - 4) = 12$;
2) $5x^3 - x(2x - 3) = 3x$;
3) $4x - 0{,}2x(x + 20) = x^3$;
4) $9x(x - 3) + (x - 4)(x - 5) = 20$.

506.•• Határozzátok meg az egyenlet gyökeit:

1) $(3x - 2)(3x + 2) - (2x - 5)(8x - 3) = 4x - 19$;
2) $\frac{1}{3}(12 + x^3) = \frac{1}{9}x^2 + 4$.

507.•• Egyszerűsítsétek a kifejezést, felhasználva a közös tényező kiemelését a zárójel elé:

1) $(a - 1)(a + 2) - (a - 2)(a + 2) + (a - 3)(a + 2) - (a - 4)(a + 2)$;
2) $(3a - 2)(5b^2 - 4b + 10) + (2 - 3a)(5b^2 - 6b + 10)$;
3) $(4a - 7b)(2a^2 - 4ab + b^2) - (4a - 7b)(2a^2 - 4ab - b^2)$.

508.•• Egyszerűsítsétek a kifejezést, felhasználva a közös tényező kiemelését a zárójel elé:

1) $ab(a^2 + ab + b^2) - ab(a^2 - ab + b^2)$;
2) $(a + b)(a + 1) - (a + b)(1 - b) + (b + a)(b - a)$.

509.•• Oldjátok meg a $4x^2 - 1{,}2x = a$ egyenletet, ha az egyenlet egyik gyöke 0,3!

510.•• Oldjátok meg a $5x^2 + 8x = a$ egyenletet, ha az egyenlet egyik gyöke –1,6!

511.•• Ismert, hogy az $y^2 - 4y + 2$ kifejezés értéke valamely y értéke mellett 6-tal egyenlő. Határozzátok meg ugyan ennél az y értéknél a következő kifejezés értékét:

1) $5y^2 - 20y + 10$;
2) $y^2(y^2 - 4y + 2) - 4y(y^2 - 4y + 2)$;
3) $3y^2 - 12y + 8$.

512.•• Ismert, hogy az $a^2 - 4a + 2$ kifejezés értéke valamely a értéknél –4–el egyenlő. Határozzátok meg ugyan ennél az a értéknél a következő kifejezés értékét:

1) $-2a^2 - 4a + 10$;
2) $a^2(a^2 + 2a - 5) + 2a(a^2 + 2a - 5)$;
3) $4a^2 + 8a - 16$.

513.* Az a mely értékénél nincs gyöke az egyenletnek:

1) $(x + 1)(x - 3) - x(x - 3) = ax$;
2) $x(5x - 1) - (x - a)(5x - 1) = 4x - 2a$;
3) $(2x - 5)(x + a) - (2x + 3)(x + 1) = 4$?

514.* Az a mely értékénél számtalan gyöke lesz az egyenletnek:

1) $(x - 4)(x + a) - (x + 2)(x - a) = -6$;
2) $x(3x - 2) - (x + 2a)(3x + 2) = 5a + 6$?

515.* Határozzátok meg az összes olyan kétjegyű számot, amelyek egyenlők számjegyeik szorzatának eggyel növelt értékével!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

516. Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $0{,}42ac^3 \cdot 1\frac{3}{7}a^4c^2$; 3) $-2\frac{1}{3}m^2np^3 \cdot \left(\frac{3}{7}np^4\right)^2$;

2) $1{,}2xyz \cdot 2\frac{1}{6}x^5y^6$; 4) $\left(1\frac{1}{2}x^2y^3\right)^3 \cdot \frac{16}{27}x^8y^2$.

517. Az irodában hetente 1200 papírlapot használnak fel. Hány csomag papírt kell megvásárolni ahhoz, hogy az iroda 8 hétig működjön, ha egy csomag papír 500 lapot tartalmaz?

518. A tengervíz 5 % sót tartalmaz. Hány kg édesvizet kell hozzáönteni 30 kg tengervízhez, hogy a kapott oldat sótartalma 3 %-os legyen?

519. Az iskola felújításához festéket vásároltak. Az első napon 2 dobozzal többet használtak el, mint az összes festék fele. A második napon, az első napon felhasznált festék $\frac{5}{8}$-át használták el.2 doboz festék maradt ezután. Hány doboz festéket vásároltak a felújításhoz?

520. Létezik-e olyan kétjegyű szám, melyben a tízesek száma 4-gyel nagyobb, mint az egyeseké, valamint az adott szám és a számjegyeinek felcserélésével kapott szám különbsége 27-tel egyenlő?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

521. Egy kartonlapból kivágtak néhány azonos méretű egyenlő oldalú háromszöget. Mindegyik csúcsába beírták az 1, 2, 3 számokat. Ezután ezeket a háromszögeket egymásra rakták. Előfordulhat-e, hogy a halom mindegyik széle mentén a számok összege 55 lesz?

13. A polinomok tényezőkre bontása. A csoportosítási módszer

Az $ax + bx + ay + by$ polinomot nem lehet tényezőkre bontani a közös tényező zárójel elé való kiemelésével, mivel nem tartalmaz olyan tényezőt, amelyik közös lenne mindegyik összeadandóban. Ugyanakkor a polinom tagjait csoportosíthatjuk úgy, hogy a csoportok tagjai tartalmazzanak közös tényezőt:

$$ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by) = x(a + b) + y(a + b).$$

Egy olyan kifejezést kaptunk, amelyben mindkét tag közös tényezője az $(a + b)$. Kivisszük a zárójel elé:

$$x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y).$$

Az adott többtagot sikerült tényezőkre bontani, mivel megfelelő módon csoportosítottuk a tagjait. Ezért a többtagok tényezőkre bontásának ezt a módját **csoportosítási módszernek** nevezzük.

PÉLDA 1 Bontsátok tényezőkre a polinomot:

1) $2ac + 2bc + 5am + 5bm$;

2) $x^4 - 2x^3 - 3x + 6$;

3) $xy - 12 + 4x - 3y$.

Megoldás: 1) A polinom tagjait úgy csoportosítjuk, hogy mindegyik csoportban a tagoknak legyen közös tényezőjük. A következőt kapjuk:

$$2ac + 2bc + 5am + 5bm = (2ac + 2bc) + (5am + 5bm) =$$
$$= 2c(a + b) + 5m(a + b) = (a + b)(2c + 5m).$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha az összeadandókat másképp csoportosítjuk:

$$(2ac + 5am) + (2bc + 5bm) = a(2c + 5m) + b(2c + 5m) =$$
$$= (2c + 5m)(a + b).$$

2) Felírjuk $x^4 - 2x^3 - 3x + 6 = (x^4 - 2x^3) - (3x - 6) =$

$$= x^3(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x^3 - 3).$$

3) $xy - 12 + 4x - 3y = (xy + 4x) + (-12 - 3y) =$
$= x\,(y + 4) - 3\,(4 + y) = (y + 4)\,(x - 3)$. ◀

PÉLDA 2 Bontsátok tényezőkre az $x^2 + 6x + 8$ háromtagú algebrai kifejezést!

Megoldás: Miután a $6x$ összeadandót felírjuk $2x + 4x$ összegeként, alkalmazzuk a csoportosítási módszert:

$$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x + 4x + 8 = (x^2 + 2x) + (4x + 8) =$$
$$= x\,(x + 2) + 4\,(x + 2) = (x + 2)\,(x + 4).$$ ◀

GYAKORLATOK

522.° Fejezzétek be a polinom tényezőre bontását:

1) $3m + 3n + mx + nx = (3m + 3n) + (mx + nx) =$
$= 3\,(m + n) + x\,(m + n) = ...;$

2) $8c - 8 - ac + a = (8c - 8) + (-ac + a) = = 8\,(c - 1) - a\,(...;$

3) $4ab + 8b + 3a + 6 = (4ab + 8b) + (3a + 6) =$
$= 4b\,(a + 2) + ...;$

4) $a^2b + 2c^2 - abc - 2ac = a^2b - abc + 2c^2 - 2ac =$
$(a^2b - abc) + (2c^2 - 2ac) = ab\,(a - c) + 2c\,(c - a) = ...$.

523.° Fejezzétek be a polinom tényezőre bontását:

1) $5a + 5c - ab - bc = (5a + 5c) + (-ab - bc) = 5\,(a + c) -$
$- b\,(a + c) = ...;$

2) $xy + 2y - x - 2 = (xy + 2y) + (-x - 2) = y\,(x + 2) - ...;$

3) $x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2) + (x + 1) = ...$.

524.° Adjátok meg szorzat alakban a kifejezést:

1) $a\,(b + c) + 4b + 4c$;
2) $x\,(y - 8) + 6y - 48$;
3) $m\,(n - 2) + n - 2$;
4) $x\,(m - n) + n - m$.

525.° Bontsátok tényezőkre:

1) $b\,(p - k) + cp - ck$;
2) $a\,(b + 9) + b + 9$;
3) $a\,(c - 6) + 5c - 30$;
4) $7 - x + y\,(x - 7)$.

526.• Bontsátok tényezőkre a polinomot:

1) $ma + mb + 4a + 4b$;
2) $3x + cy + cx + 3y$;
3) $5a - 5b + ap - bp$;
4) $7m + mn + 7 + n$;

5) $a - 1 + ab - b$;
6) $xy + 8y - 2x - 16$;
7) $ab + ac - b - c$;
8) $3p - 3k - 4ap + 4ak$.

527.$^{\bullet}$ Adjátok meg szorzat alakban a kifejezést:

1) $ay - 3y - 4a + 12$;
2) $9a + 9 - na - n$;
3) $6x + ay + 6y + ax$;
4) $8x - 8y + xz - yz$;
5) $mn + m - n - 1$;
6) $ab - ac - 2b + 2c$.

528.$^{\bullet}$ Bontsátok tényezőkre a polinomot:

1) $a^3 + a^2 + a + 1$;
2) $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 12$;
3) $c^6 - 10c^4 - 5c^2 + 50$;
4) $y^3 - 18 + 6y^2 - 3y$;
5) $a^2 - ab + ac - bc$;
6) $20a^3bc - 28ac^2 + 15a^2b^2 - 21bc$;
7) $x^2y^2 + xy + axy + a$;
8) $24x^6 - 44x^4y - 18x^2y^3 + 33y^4$.

529.$^{\bullet}$ Bontsátok tényezőkre a polinomot:

1) $8c^3 - 2c^2 + 4c - 1$;
2) $x^2y + x + xy^2 + y$;
3) $9a^2b - 3a^2 + 3b^2 - b$;
4) $8a^2 - 2ab - 4ac + bc$;
5) $2b^3 - 7b^2c - 4b + 14c$;
6) $6x^5 + 4x^2y^2 - 9x^3y - 6y^3$.

530.$^{\bullet}$ Először tényezőre bontva, határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $2a^3 - 3a^2 - 2ab + 3b$, ha $a = 0{,}5$, $b = 2{,}25$;
2) $xy + y^2 - 12x - 12y$, ha $x = 10{,}8$, $y = -8{,}8$;
3) $27x^3 - 36x^2 + 6x - 8$, ha $x = -1\frac{1}{3}$.

531.$^{\bullet}$ Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $2a + b + 2a^2 + ab$, ha $a = -3$, $b = 4$;
2) $3x^3 - x^2 - 6x + 2$, ha $x = \frac{2}{3}$.

532.• Fejezzétek be a kifejezés értékének a meghatározását:

1) $38{,}14 \cdot 12{,}26 + 12{,}26 \cdot 11{,}86 - 24{,}37 \cdot 2{,}26 - 2{,}26 \cdot 25{,}63 =$ $= (38{,}14 \cdot 12{,}26 + 12{,}26 \cdot 11{,}86) + (-24{,}37 \cdot 2{,}26 - 2{,}26 \cdot 25{,}63) = 12{,}26 \cdot (38{,}14 + 11{,}86) - 2{,}26 \cdot (24{,}37 + 25{,}63) = ...;$

2) $0{,}7 \cdot 2{,}48 - 0{,}3 \cdot 1{,}62 - 0{,}4 \cdot 2{,}48 + 0{,}3 \cdot 3{,}14 =$ $= (0{,}7 \cdot 2{,}48 - 0{,}4 \cdot 2{,}48) + (0{,}3 \cdot 3{,}14 - 0{,}3 \cdot 1{,}62) = ...$

533.• Számítsátok ki a kifejezés értékét, nem használva a zsebszámológépet:

1) $3{,}742 + 3{,}74 \cdot 2{,}26 - 3{,}74 \cdot 1{,}24 - 2{,}26 \cdot 1{,}24;$

2) $58{,}7 \cdot 1{,}2 + 36 \cdot 3{,}52 - 34{,}7 \cdot 1{,}2 - 2{,}32 \cdot 36;$

3) $2\frac{4}{9} \cdot 3\frac{2}{7} + 1\frac{5}{7} \cdot 2{,}8 + 2\frac{5}{9} \cdot 3\frac{2}{7} + 1\frac{5}{7} \cdot 2{,}2.$

534.• Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $34{,}4 \cdot 13{,}7 - 34{,}4 \cdot 8{,}7 - 15{,}6 \cdot 8{,}7 + 13{,}7 \cdot 15{,}6;$

2) $0{,}63 - 2 \cdot 0{,}62 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}82 - 2 \cdot 0{,}83.$

535.•• Bontsátok tényezőkre a polinomot:

1) $ax^2 + ay - bx^2 - by + cx^2 + cy;$

2) $a^2b + a + ab^2 + b + 3ab + 3;$

3) $x^3 - x^2 + x^2y + x - xy + y;$

4) $m^2n + mn - 5 - 5m + n - 5m^2;$

5) $x6 - 2x^5 + 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10;$

6) $a^3b + ab^2 - abc^3 - a^2c - bc + c^4.$

536.•• Adjátok meg polinomok szorzataként a következő kifejezést:

1) $ab + ac + ad + bx + cx + dx;$

2) $7p - 7k - px + kx + k - p;$

3) $x^3y^3 - x^2y^2 + xy - 6 + 6xy - 6x^2y^2;$

4) $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5.$

537.•• Bontsátok tényezőkre a háromtagú algebrai kifejezést, előzőleg felírva egyet a tagjai közül egynemű tagok összegeként:

1) $x^2 + 8x + 12;$

2) $x^2 - 5x + 4;$

3) $x^2 + 7x - 8;$

4) $x^2 - 4x - 5.$

538.•• Bontsátok tényezőkre a háromtagú algebrai kifejezést:

1) $x^2 + 4x + 3$; 3) $x^2 + 3x - 18$;

2) $x^2 - 10x + 16$; 4) $x^2 - 4x - 32$.

539.* Bizonyítsátok be, hogy az n összes természetes értéke mellett az $n^3 + 3n^2 + 2n$ kifejezés osztható 6-tal!

540.* Bontsátok tényezőkre az $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$ polinomot!

541.* Bizonyítsátok be, hogy az n bármely 1-nél nagyobb értékénél a $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ kifejezés értéke osztható 10-zel!

542.* Ismert, hogy az x és az y néhány értéke mellett igaz az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlőség. Az x és az y ugyanezen értékei mellett határozzátok meg a $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2$ kifejezés értékét!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

543. Egy termékek árát először 20%-kal csökkentették, majd 20%-kal emelték. Hogyan változott ennek a terméknek az ára az eredeti árhoz képest (emelkedett vagy csökkent), és hány százalékkal?

544. Egy termék árát kezdetben 10%-kal emelték, majd 30%-kal csökkentették. Hogyan változott ennek a terméknek az ára az eredeti árhoz képest (emelkedett vagy csökkent), és hány százalékkal?

545. (*Ukrán folklórból származó feladat*.) A pásztor kihajtotta a juhokat a legelőre. A legelőn cövekek vannak. Ha a pásztor mindegyik cövekhez kiköt egy bárányt, akkor egynek nem jut cövek. Ha mindegyik cövekhez két bárányt köt ki, akkor viszont egy cövek felesleges lesz. Hány bárányt hajtott ki a pásztor a legelőre?

546. Peti és Miki, ha együtt dolgoznak, akkor 2,4 óra alatt locsolják meg a veteményest. Peti egyedül ezt a munkát 4 óra alatt tudja elvégezni. Mennyi időre van szüksége Mikinek a munka elvégzéséhez?

547. Az egyik kannában 4-szer több tej van, mint a másikban. Amikor az első kannából 10 l tejet átöntenek a másikba, akkor a második kannában $\frac{2}{3}$-a lesz annak a mennyiségnek, mint amennyi az első kannában maradt. Hány liter tej volt eredetileg mindkét kannában?

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

548. Emeljétek négyzetre az egytagokat:

1) $2a$; 3) $3b^3$; 5) $0{,}3x$; 7) $\frac{1}{6}a^2b^3c^4$;

2) a^3; 4) $7x^4$; 6) $0{,}4y^5z^2$; 8) $1\frac{1}{3}m^6n$.

549. Írjátok fel kifejezés alakjában:

1) az a és c összegét;
2) az m és n különbségét;
3) az x és y összegének és különbségének szorzatát;
4) az x és y különbségének a négyzetét;
5) az x és y négyzetének a különbségét!

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

550. A kieséses rendszerű sportversenyen (aki veszít, az kiesik) n teniszező vesz részt. Hány mérkőzést kell lejátszani ahhoz, hogy ki tudják hirdetni a győztest?

3. SZÁMÚ FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. Adjátok meg polinom alakban a $3y^2(y^3 + 1)$ kifejezést!

A) $3y^6 + 1$; C) $3y^5 + 1$;
B) $3y^6 + 3y^2$; D) $3y^5 + 3y^2$.

2. Hozzátok egyszerűbb alakra a $-9y(y - 3) + 4{,}5y(2y - 4)$ kifejezést!

A) $45y$; C) $-9y$;
B) $-45y$; D) $9y$.

3. Melyik polinommal egyenlő az $(x-3)(x+7)$ kifejezés?

A) $x^2+4x-21$; C) $x^2+10x-21$;
B) $x^2-4x-21$; D) $x^2-10x-21$.

4. Hozzátok egyszerűbb alakra a $(3x+2)(2x-1)-(5x-2)(x-4)$ kifejezést!

A) $x^2-23x-10$; C) $x^2-21x+6$;
B) $x^2+23x-10$; D) $x^2+21x+6$.

5. Emeljétek ki a közös tényezőt a zárójel elé: $3mn-4mk$!

A) $n(3m-4k)$; C) $n(4m-3k)$;
B) $m(3n-4k)$; D) $m(4n-3k)$.

6. Bontsátok tényezőkre az m^2n+mn^2 kifejezést!

A) $m(m+n)$; C) $mn(m+n)$;
B) $n(m+n)$; D) $m^2n^2(m+n)$.

7. Bontsátok tényezőkre az $mn-mn^2$ kifejezést!

A) $mn(1-n)$; C) $m(1-n)(1-n)$;
B) $mn(1+n)$; D) $n(1-m)(1-m)$.

8. Írjátok fel a $2x^2-4x^6$ polinomot egytagú kifejezés és polinom szorzataként.

A) $2x^2(1-2x^3)$; C) $2x^2(2-x^3)$;
B) $2x^2(1-2x^4)$; D) $2x^2(2-x^4)$.

9. Oldjátok meg az $x^2-2x=0$ egyenletet!

A) 0; C) 0; 2;
B) 0; –2; D) 2.

10. Írjátok fel az $ax-ay+5x-5y$ polinomot szorzat alakjában!

A) $(x-y)(a+5)$; C) $(x+y)(a-5)$;
B) $(x-y)(a-5)$; D) $(x+y)(a+5)$.

11. Oldjátok meg az $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}=1$ egyenletet!

A) 11; C) 7;
B) 1; D) 5.

12. Az a változó értéke olyan, hogy az a^2-7a+3 kifejezés értéke egyenlő 2-vel. Határozzátok meg a $2a^2-14a+10$ kifejezés értékét!

A) 4; C) 8; B) 12; D) 14.

14. Két kifejezés különbségének és összegének a szorzata

A matematikában nem ritka, hogy az általános törvényen (tételen) kívül egyedi esetekben sokszor használunk más szabályt is.

Például tizedes törtek 10-zel, 100-zal, 1000-rel történő szorzásakor nincs értelme a szokásos módon (egymás alá írva) összeszorozni a számokat, sokkal kézenfekvőbb alkalmazni a tizedesvessző áthelyezésének szabályát.

Egyedi szituációk fordulnak elő a polinomok szorzásánál is.

Megvizsgálunk egy olyan esetet, amikor két polinom szorzásakor az egyik tényező két kifejezés különbsége, a másik pedig e két kifejezés összege.

Felíjuk:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

A következő azonosságot kaptuk:

$$\boxed{(a - b)(a + b) = a^2 - b^2}$$

Ezek után két kifejezés különbségének és összegének a szorzásakor lerövidíthetjük a munkánkat, és rögtön felírhatjuk az eredményt e két kifejezés négyzetének különbségeként. Ezért ezt az azonosságot a **rövidített szorzás képletének** nevezzük. Ezt a következő szabály fejezi ki:

Két kifejezés különbségének és összegének a szorzata egyenlő e kifejezések négyzetének a különbségével.

PÉLDA 1 el a polinomok szorzását:

1) $(2a - 5b)(2a + 5b)$;
2) $(y^2 + 3x^4)(3x^4 - y^2)$;
3) $(-4mn - p)(4mn - p)$.

Megoldás: 1) $(2a - 5b)(2a + 5b) = (2a)^2 - (5b)^2 = 4a^2 - 25b^2$.

2) $(y^2 + 3x^4)(3x^4 - y^2) = (3x^4 + y^2)(3x^4 - y^2) = (3x^4)^2 - (y^2)^2 = 9x^8 - y^4$.

3) $(-4mn - p)(4mn - p) = (-p - 4mn)(-p + 4mn) = (-p)^2 - (4mn)^2 = p^2 - 16m^2n^2$. ◀

PÉLDA 2 a kifejezést:

1) $(b - 3)(b + 3) - (2b + 1)(2b - 1)$;

2) $-2x(x + 5)(5 - x)$;

3) $(a^3 - 2)(a^3 + 2)(a^6 + 4)$.

Megoldás: 1) $(b - 3)(b + 3) - (2b + 1)(2b - 1) = b^2 - 9 - (4b^2 - 1) = b^2 - 9 - 4b^2 + 1 = -3b^2 - 8$.

2) $-2x(x + 5)(5 - x) = -2x(25 - x^2) = -50x + 2x^3$.

3) Kétszer felhasználva két kifejezés különbségének és összegének szorzatát, a következőt kapjuk:

$$(a^3 - 2)(a^3 + 2)(a^6 + 4) = (a^6 - 4)(a^6 + 4) = a^{12} - 16.$$ ◀

?

1. Mivel egyenlő két kifejezés különbségének és összegének a szorzata? **2.** Adjátok meg két kifejezés különbségének és összegének a szorzatát kifejező képletet!

GYAKORLATOK

551.° Azonosság e a következő egyenlőség:

1) $(b - c)(b + c) = b^2 - c^2$;

2) $(m + n)(m - n) = m^2 + n^2$;

3) $(x + y)(y - x) = y^2 - x^2$;

4) $(p - q)(p + q) = (p - q)^2$?

552.° Az alábbi polinomok közül melyikkel azonosan egyenlő a $(7a - 2b)(7a + 2b)$ szorzat:

1) $7a^2 - 2b^2$;

2) $7a^2 + 2b^2$;

3) $49a^2 - 4b^2$;

4) $49a^2 + 4b^2$?

553.° Fejezzétek be a kifejezés polinommá való átalakítását:

1) $(c - 8)(c + 8) = c^2 - 8^2 = \ldots$;

2) $(5x - 7y^2)(5x + 7y^2) = (5x)^2 - (7y^2)^2 = \ldots$;

3) $(a^4 + b^3)(b^3 - a^4) = (b^3 + a^4)(b^3 - a^4) = (b^3)^2 - (a^4)^2 = \ldots$;

4) $(-9xy - z)(9xy - z) = -(9xy + z)(9xy - z) = -((9xy)^2 - z^2) = \ldots$.

554.° Fejezzétek be a kifejezés polinommá való átalakítását:

1) $(2ab + 3)(2ab - 3) = (2ab)^2 - 3^2 = \ldots;$

2) $(6m^2 - 11p^5)(11p^5 + 6m^2) = (6m^2 - 11p^5)(6m^2 + 11p^5) =$
$= (6m^2)^2 - \ldots .$

555.° Végezzétek el a polinomok szorzását:

1) $(m - n)(m + n)$;
2) $(x - 1)(x + 1)$;
3) $(9 - y)(9 + y)$;
4) $(3b - 1)(3b + 1)$;
5) $(10m - 7)(10m + 7)$;
6) $(4a - b)(b + 4a)$;
7) $(5b + 1)(1 - 5b)$;
8) $(3x - 5y)(3x + 5y)$;
9) $(13c - 10d)(13c + 10d)$;
10) $(8m + 11n)(11n - 8m)$.

556.° Írjátok fel a kifejezést polinom alakjában:

1) $(c - 2)(c + 2)$;
2) $(12 - x)(12 + x)$;
3) $(3x + y)(3x - y)$;
4) $(6x - 9)(6x + 9)$;
5) $(x + 7)(7 - x)$;
6) $(5a - 8b)(5a + 8b)$;
7) $(8m + 2)(2 - 8m)$;
8) $(13c - 14d)(14d + 13c)$.

557.° Végezzétek el a szorzást:

1) $(a^2 - 3)(a^2 + 3)$;
2) $(5 + b^2)(b^2 - 5)$;
3) $(3x - 2y^2)(3x + 2y^2)$;
4) $(10p^3 - 7k)(10p^3 + 7k)$;
5) $(4x^2 - 8y^3)(4x^2 + 8y^3)$;
6) $(11a^3 + 5b^2)(5b^2 - 11a^3)$;
7) $(7 - xy)(7 + xy)$;
8) $\left(8a^3b - \frac{1}{3}ab^2\right)\left(8a^3b + \frac{1}{3}ab^2\right)$.

558.° Végezzétek el a szorzást:

1) $(x^3 + 4)(x^3 - 4)$;
2) $(ab - c)(ab + c)$;
3) $(x - y^2)(y^2 + x)$;
4) $(3m^2 - 2c)(3m^2 + 2c)$;
5) $(6a^3 - 8b)(6a^3 + 8b)$;
6) $(5n^4 - m^4)(5n^4 + m^4)$.

559.° Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $(2a - b)(2a + b) + b^2$;
2) $10x^2 + (y - 5x)(y + 5x)$;
3) $64m^2 - (8m + 9)(8m - 9)$;
4) $3a(a - b) - (3a + 2b)(3a - 2b)$.

560.° Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $(9a - 2)(9a + 2) - 18a^2$;
2) $25m^2 - (5m - 7)(5m + 7)$;
3) $4x(3x - 10y) - (4x + y)(4x - y)$.

561.• Milyen kifejezéssel kell megszorozni a $0{,}3x^3 - xy^2$ polinomot, hogy eredményül a $0{,}09x^6 - x^2y^4$ többtagot kapjuk?

562.• Milyen kifejezéssel kell megszorozni a $7t^4 + 9p^5$ polinomot, hogy eredményül a $49t^8 - 81p^{10}$ polinomot kapjuk?

563.• Melyik egytagú algebrai kifejezéssel kell helyettesíteni a csillagot, hogy azonosságot kapjunk:

1) $(* - 12a)(* + *) = 9b^2 - *$;
2) $(* - 5c)(* + 5c) = 16d^2 - *$;
3) $(0{,}7p + *)(* - 0{,}7p) = \frac{1}{9}m^8 - 0{,}49p^2$;
4) $(3m^2 + *)(* - *) = 9m^4 - n^6$?

564.• Helyettesítsétek a csillagot olyan egytagú algebrai kifejezéssel, hogy azonosságot kapjunk:

1) $(8a^2b - *)(8a^2b + *) = * - 25c^6$;
2) $\left(* - \frac{1}{12}x^4y^5\right)\left(\frac{1}{15}a^2 + *\right) = \frac{1}{225}a^4 - \frac{1}{144}x^8y^{10}$.

565.• Írjátok fel a kifejezést polinom alakban:

1) $a(a - 2)(a + 2)$;
2) $-3(x + 3)(x - 3)$;
3) $7b^2(b + 4)(4 - b)$;
4) $(c - d)(c + d)(c^2 + d^2)$;
5) $(2a - 1)(2a + 1)(4a^2 + 1)$;
6) $(c3 - 5)(c^3 + 5)(c^6 + 25)$.

566.• Végezzétek el a szorzásokat:

1) $5b(b - 1)(b + 1)$;
2) $(c + 2)(c - 2) \cdot 8c^2$;
3) $(m - 10)(m^2 + 100)(m + 10)$;
4) $(a^2 + 1)(a^2 - 1)(a^4 + 1)$.

567.• Végezzétek el a kéttagú algebrai kifejezések szorzását (n — természetes szám):

1) $(a^n - 4)(a^n + 4)$;
2) $(b^{2n} + c^{3n})(b^{2n} - c^{3n})$;
3) $(x^{4n} + y^n + 2)(y^n + 2 - x^{4n})$;
4) $(a^{n+1} - b^{n-1})(a^{n+1} + b^{n-1})$, $n > 1$.

568.• Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $(4x - 7y)(4x + 7y) + (7x - 4y)(7x + 4y)$;
2) $(a - 2)(a + 3) + (6 - a)(a + 6)$;
3) $(8a - 3)(8a + 3) - (7a + 4)(8a - 4)$;
4) $0{,}6m(2m - 1)(2m + 1) + 0{,}3(6 + 5m)(6 - 5m)$;
5) $(7 - 2x)(7 + 2x) - (x - 8)(x + 8) - (4 - 3x)(5 + 3x)$;
6) $-b^2c(4b - c^2)(4b + c^2) + 16b^4c$.

569.• Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $(b + 7)(b - 4) + (2b - 6)(2b + 6)$;
2) $(x + 1)(x - 1) - (x + 5)(x - 5) + (x + 1)(x - 5)$;
3) $81a^8 - (3a^2 - b^3)(9a^4 + b^6)\mathrm{c}(3a^2 + b^3)$.

570.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $8x(3 + 2x) - (4x + 3)(4x - 3) = 9x - 6$;
2) $7x - 4x(x - 5) = (8 - 2x)(8 + 2x) + 27x$;
3) $(6x + 7)(6x - 7) + 12x = 12x(3x + 1) - 49$;
4) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)(x^4 + 16) = x^8 + 10x$.

571.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(x - 17)(x + 17) = x^2 + 6x - 49$;
2) $(1{,}2x - 4)(1{,}2x + 4) - (1{,}3x - 2)(1{,}3x + 2) =$
$= 0{,}5x(8 - 0{,}5x)$.

572.• Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értéke független a változó (változók) értékeitől:

1) $(x - 9)(x + 9) - (x + 19)(x - 19)$;
2) $(2a - b)(2a + b) + (b - c)(b + c) + (c - 2a)(c + 2a)$.

573.•• Bizonyítsátok be, hogy a $(7n + 8)(7n - 8) - (5n + 10)(5n - 10)$ kifejezés értéke bármely természetes n esetében osztható 12-vel!

574.•• Bizonyítsátok be, hogy létezik olyan természetes n szám, amelynél a $(4n + 3)(9n - 4) - (6n - 5)(6n + 5) - 3(n - 2)$ kifejezés érétke osztható 8-cal!

575.•• Bizonyítsátok be, hogy a

$$(9n - 4)(9n + 4) - (8n - 2)(4n + 3) + 5(6n + 9)$$

kifejezés értéke bármely természetes n esetében osztható 7-tel!

576.•• Határozzátok meg a kifejezések értékét:

1) $3^{20} \cdot 6^{20} - (18^{10} - 2)(18^{10} + 2)$;
2) $(5 + 28^{17})(5 - 28^{17}) + 14^{34} \cdot 2^{34}$;
3) $7^{36} \cdot 8^{12} - (14^{18} + 3)(14^{18} - 3)$;
4) $(3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1)(3^{32} + 1) - 3^{64}$;
5) $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) - 2^{32}$.

577.•• Mennyivel egyenlő a kifejezések értéke:

1) $81^{15} \cdot 8^{20} - (6^{30} + 1)(6^{30} - 1)$;
2) $5^{24} - (5^3 - 2)(5^3 + 2)(5^6 + 4)(5^{12} + 16)$?

578.* Hasonlítsátok össze a kifejezéseket anélkül, hogy kiszámítanátok értéküket:

1) $415 \cdot 425$ és $426 \cdot 414$;
2) $1\,234\,257 \cdot 1\,234\,569$; és $1\,234\,568^2$.

579.* Hasonlítsátok össze a kifejezéseket anélkül, hogy kiszámítanátok értéküket:

1) $253 \cdot 259$ és $252 \cdot 260$;
2) $987\,654^2$ és $987\,646 \cdot 987\,662$.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

580. Ica és István azonos tollakat vásárolt. Mindegyik ára a hrivnyában egész szám. Ica 65 hrivnyát fizetett a tollakért, István pedig 39 hrivnyával többet. Mennyibe kerül egy toll? Hány tollat vett István?

581. A faluból állomásra Laci kerékpárral 3 óra, gyalogosan 7 óra alatt tud eljutni. A gyalog a sebessége 8 km/h-val kisebb, mint a kerékpáron. Milyen gyorsan biciklizik Laci? Milyen messze van a falu az állomástól?

582. Az egyik zsákban 60 kg, a másodikban 100 kg cukor volt. Amikor a második zacskóból 4-szer több cukrot vettek ki, mint az elsőből, akkor az elsőben 2-szer több cukor maradt, mint a másodikban. Hány kilogramm cukrot vettek ki egy-egy zacskóból?

583. Egy tehergépkocsi 10 óra alatt, a másik 12 óra alatt, a harmadik 15 óra alatt szállítja le a betakarított termést. Hány óra múlva tudják közösen elszállítani a termést?

584. *(Ősrégi egyiptomi feladat.)* Hét ember mindegyikének hét macskája van, s mindegyik macska hét egeret eszik meg, minden egér hét kalászt pusztít el, minden kalászból hét marék árpa lenne. Egy marék árpa súlya 80 gramm. Hány marék magot mentenek meg a macskák évente? Mennyi ez tonnában kifejezve? A választ kerekítsétek százasokra!

585. Oldjátok meg az egyenletet:

1) $\frac{4x-1}{12}-\frac{3x+1}{8}=x+1;$ 2) $\frac{3x-2}{9}-\frac{2x+1}{6}=\frac{5-x}{3}.$

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

586. Adjátok meg za egytagú algebrai kifejezés négyzeteként:

1) x^6; 3) $4x^2$; 5) a^6b^{10}; 7) $1{,}21m^{10}n^{20}$;

2) y^4; 4) $\frac{1}{9}x^4$; 6) $0{,}36x^6y^{12}$; 8) $1\frac{9}{16}a^{14}b^{16}$.

587. Felírhatjuk-e a kifejezéseket két egytagú kifejezés négyzetének különbségeként:

1) $a^2 - 16b^2$; 3) $100b^4 - 25c^6$; 5) $-a^{12} - 49c^8$;

2) $25c^2 + 9b^2$; 4) $-64 + a^{10}$; 6) $-0{,}01a^4 + 0{,}04b^4$?

Igenlő válasz esetén írjátok le négyzetek különbségeként.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

588. A teherszállításra 4, 7 és 8 tonnás teherautókat használnak. Mindegyik autó csak egyszer fordulhat. Hány teherautóra van szükség mindegyik fajtából, hogy elszállítsanak 44 t terhet?

15. Két kifejezés négyzetének a különbsége

A többtag tényezőkre bontásának két módját már ismeritek: a közös tényező kiemelését a zárójel elé és a csoportosítási módszert.

Az $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ képletet a következőképpen írhatjuk át:

$$\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$$

Ezt az azonosságot **két kifejezés négyzetének különbsége képlet**ének nevezzük.

Megfogalmazzuk a következő szabályt:

Két kifejezés négyzetének a különbsége e két kifejezés különbségének és összegének a szorzatával egyenlő.

Felírunk néhány példát arra, hogyan tudjuk tényezőkre bontani a többtagokat a fenti képlet segítségével.

PÉLDA 1 Bontsátok tényezőkre:

1) a^2-4; 2) $36m^2-2\frac{7}{9}n^8$; 3) $-a^2b^6+1$.

Megoldás: 1) Felírjuk:

$$a^2-4=a^2-2^2=(a-2)(a+2).$$

2) $36m^2-2\frac{7}{9}n^8=36m^2-\frac{25}{9}n^8=(6m)^2-\left(\frac{5}{3}n^4\right)^2=$

$$=\left(6m-\frac{5}{3}n^4\right)\left(6m+\frac{5}{3}n^4\right).$$

3) $-a^2b^6+1=1-a^2b^6=(1-ab^3)(1+ab^3)$. ◄

PÉLDA 2 Bontsátok tényezőkre, felhasználva a négyzetek különbségének képletét:

1) $100-(a+5)^2$; 2) $(2a+3b)^2-(3a-b)^2$.

Megoldás: 1) $100-(a+5)^2=10^2-(a+5)^2=$ $=(10-(a+5))(10+(a+5))=(10-a-5)(10+a+5)=$ $=(5-a)(15+a)$.

2) $$(2a + 3b)^2 - (3a - b)^2 =$$
$$= ((2a + 3b) - (3a - b))\,((2a + 3b) + (3a - b)) =$$
$$= (2a + 3b - 3a + b)\,(2a + 3b + 3a - b) =$$
$$= (4b - a)\,(5a + 2b).$$ ◀

PÉLDA 3 Oldjátok meg az egyenletet:
1) $x^2 - 36 = 0$; 2) $(2x - 7)^2 - 81 = 0$.

Megoldás: 1) A négyzetek különbsége képletének és a szorzat 0-val való egyenlősége szabályának felhasználásával megkapjuk:
$$(x - 6)\,(x + 6) = 0;$$
$$x - 6 = 0 \text{ або } x + 6 = 0;$$
$$x = 6 \text{ або } x = -6.$$

Felelet: 6; –6.

2) Felírjuk:
$$(2x - 7 - 9)\,(2x - 7 + 9) = 0;$$
$$(2x - 16)\,(2x + 2) = 0;$$
$$2x - 16 = 0 \text{ або } 2x + 2 = 0;$$
$$x = 8 \text{ або } x = -1.$$

Felelet: 8; –1. ◀

PÉLDA 4 Bizonyítsátok be, hogy bármely természetes n esetében a $(6n + 7)^2 - (2n - 1)^2$ kifejezés értéke osztható 8-cal!

Megoldás:
$$(6n + 7)^2 - (2n - 1)^2 = (6n + 7 - 2n + 1)\,(6n + 7 + 2n - 1) =$$
$$= (4n + 8)\,(8n + 6) = 4(n + 2) \cdot 2(4n + 3) = 8(n + 2)\,(4n + 3).$$

A kapott kifejezés három tényező szorzata, amelyek közül az egyik 8, a másik kettő pedig szintén természetes szám. Ebből következik, hogy a kifejezés értéke maradék nélkül osztható 8-cal bármely természetes n esetén. ◀

?

1. Írjátok fel két kifejezés négyzetének különbségét képlet alakjában!
2. Fogalmazzátok meg a két kifejezés négyzetei különbségének tényezőkre bontási szabályát!

GYAKORLATOK

589.° Az alábbi szorzatok közül melyikkel lesz azonosan egyenlő az $a^2 - 144$ polinom:

1) $(a - 12)^2$;
2) $(a - 12)(a + 12)$;
3) $(12 - a)(12 + a)$;
4) $(12 - a)(-12 - a)$?

590.° Az alábbi egyelőségek közül melyik azonosság:

1) $-49 + b^2 = (7 - b)(7 + b)$;
2) $-49 + b^2 = (b - 7)(b + 7)$;
3) $-49 + b^2 = (7 - b)^2$;
4) $-49 + b^2 = (b - 49)(b + 49)$?

591.° Tényezőkre bonthatók-e az alábbi kifejezések a négyzetek különbségének felhasználásával:

1) $a^2 - 9$;
2) $b^2 + 1$;
3) $4 - c^2$;
4) $25 + x^2$;
5) $1 - y^2$;
6) $16a^2 - b^2$;
7) $81 + 100p^2$;
8) $81 - 100p^2$;
9) $m^2n^2 - 25$;
10) $- m^2n^2 - 25$?

Ha ez lehetséges, akkor végezzétek el a tényezőkre bontást!

592.° Bontsátok tényezőkre:

1) $b^2 - d^2$;
2) $x^2 - 1$;
3) $-x^2 + 1$;
4) $36 - c^2$;
5) $4 - 25a^2$;
6) $49a^2 - 100$;
7) $900 - 81k^2$;
8) $16x^2 - 121y^2$;
9) $b^2c^2 - 1$;
10) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2$;
11) $-4a^2b^2 + 25$;
12) $144x^2y^2 - 400$;
13) $a^2b^2c^2 - 1$;
14) $100a^2 - 0{,}01b^2$;
15) $a^4 - b^2$;
16) $p^2t^2 - 0{,}36k^2d^2$;
17) $y^{10} - 9$;
18) $4x^{12} - 1\frac{11}{25}y^{16}$.

593.° Bontsátok tényezőkre:

1) $16 - b^2$;
2) c2 − 49;
3) $0{,}04 - a^2$;
4) $x^2 - \frac{4}{9}$;
5) $4x^2 - 25$;
6) $81c^2 - 64d^2$;
7) $0{,}09x^2 - 0{,}25y^2$;
8) $a^2b^4 - c^6d^8$;
9) $4a^2c^2 - 9x^2y^2$;
10) $x^{24} - y^{22}$;
11) $-1600 + a^{12}$;
12) $a^{18} - \frac{49}{64}$.

594.° Bontsátok tényezőkre a négyzetek különbsége képletének felhasználásával:

1) $86^2 - 76^2$;
2) $107^2 - 93^2$;
3) $7{,}32^2 - 6{,}32^2$;
4) $19{,}4^2 - 19{,}3^2$;
5) $8{,}54^2 - 1{,}44^2$;
6) $\left(3\frac{2}{3}\right)^2 - \left(2\frac{1}{3}\right)^2$.

595.° Határozzátok meg az $x^2 - y^2$ értékét, ha:

1) $x = 75$, $y = 25$;
2) $x = 10{,}5$, $y = 9{,}5$;
3) $x = 5{,}89$, $y = 4{,}11$;
4) $x = 3{,}04$, $y = 1{,}96$.

596.° Oldjátok meg az egyenletet:

1) $x^2 - 49 = 0$;
2) $\frac{1}{4} - z^2 = 0$;
3) $x^2 + 36 = 0$;
4) $x^2 - 0{,}01 = 0$;
5) $9x^2 - 4 = 0$;
6) $0{,}04x^2 - 1 = 0$.

597.° Oldjátok meg az egyenletet:

1) $c^2 - 0{,}25 = 0$;
2) $81x^2 - 121 = 0$;
3) $-0{,}09 + 4x^2 = 0$.

598.• Bontsátok tényezőkre a négyzetek különbsége képletének felhasználásával:

1) $(x + 2)^2 - 49$;
2) $(x - 10)^2 - 25y^2$;
3) $25 - (y - 3)^2$;
4) $(a - 4)^2 - (a + 2)^2$;
5) $(m - 10)^2 - (n - 6)^2$;
6) $(8y + 4)^2 - (4y - 3)^2$;
7) $(5a + 3b)^2 - (2a - 4b)^2$;
8) $4(a - b)^2 - (a + b)^2$;
9) $(x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - x + 2)^2$;
10) $(-3x^3 + y)^2 - 16x^6$.

599.$^{\bullet}$ Írjátok fel a kifejezéseket szorzat alakjában:

1) $(x-2)^2-4$;
2) $(b+7)^2-100c^2$;
3) $121-(b+7)^2$;
4) $a^4-(7b-a^2)^2$;
5) $(4x-9)^2-(2x+19)^2$;
6) $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$.

600.$^{\bullet}$ Határozzátok meg a kifejezés értékét:

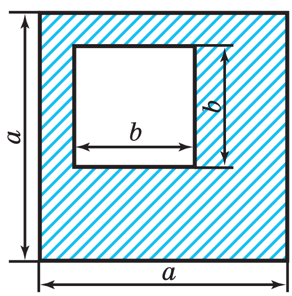
1) $(9x-4)^2-(7x+5)^2$, ha $x=1{,}5$;
2) $(5x+3y)^2-(3x+5y)^2$, ha $x=2{,}1$, $y=1{,}9$.

601.$^{\bullet}$ Határozzátok meg a

$$(2{,}5a-1{,}5b)^2-(1{,}5a-2{,}5b)^2,$$

kifejezés értékét, ha $a=-1{,}5$, $b=-3{,}5$!

602.$^{\bullet}$ Mivel egyenlő a 7. ábrán látható besatírozott alakzat területe? Határozzátok meg a kapott kifejezés értékét, ha a = 7,4 cm, b = 2,6 cm!



7. ábra

603.$^{\bullet}$ Két körnek, amelyeknek a sugarai R és r (R > r), közös a középpontjuk. Fejezzétek ki π, R és r segítségével a körvonalak által határolt alakzat területét. Számítsátok ki a kapott kifejezés értékét, ha R = 5,1 cm, r = 4,9 cm.

604.$^{\bullet}$ Írjátok fel három tényező szorzataként a kifejezést:

1) m^4-625;
2) $x^{16}-81$.

605.$^{\bullet}$ Bontsátok tényezőkre:

1) $a^{16}-b^8$;
2) $a^{16}-256$.

606.$^{\bullet}$ Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(3x-5)^2-49=0$;
2) $(4x+7)^2-9x^2=0$;
3) $(a-1)^2-(2a+9)^2=0$;
4) $25(3b+1)^2-16(2b-1)^2=0$.

607.$^{\bullet}$ Oldjátok meg az egyenletet:

1) $16-(6-11x)^2=0$;
2) $(7m-13)^2-(9m+19)^2=0$.

608.•• Bizonyítsátok be, hogy bármely természetes n esetében a kifejezések értéke:

1) $(7n + 4)^2 - 9$ maradék nélkül osztható 7-tel;
2) $(8n + 1)^2 - (3n - 1)^2$ maradék nélkül osztható 11-gyel;
3) $(3n + 7)^2 - (3n - 5)^2$ maradék nélkül osztható 24-gyel;
4) $(7n + 6)^2 - (2n - 9)^2$ maradék nélkül osztható 15-tel!

609.•• Bizonyítsátok be, hogy bármely természetes n esetében a kifejezések értéke:

1) $(5n + 4)^2 - (5n - 4)^2$ maradék nélkül osztható 80-nal;
2) $(9n + 10)^2 - (9n + 8)^2$ maradék nélkül osztható 36-tal;
3) $(10n + 2)^2 - (4n - 10)^2$ maradék nélkül osztható 12-vel!

610.•• Bizonyítsátok be, hogy:

1) két egymást követő természetes szám négyzetének különbsége egyenlő e két szám összegével;
2) két egymást követő páros szám négyzetének különbsége osztható 4-gyel!

611.•• Bizonyítsátok be, hogy:

1két egymást követő páros szám négyzetének különbsége egyenlő e két szám összegének kétszeresével;
2) két egymást követő páratlan szám négyzetének különbsége osztható 8-cal!

612.•• Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$(m^3 - n^3)^2 (m^3 + n^3)^2 - (m^6 + n^6)^2 = -4m^6n^6.$$

613.•• Két kétjegyű szám négyzetének különbsége, melyek ugyanolyan számjegyekkel vannak felírva, 693-mal egyenlő!

614.•• Egy természetes szám 7-tel való osztásának a maradéka 4, egy másiknak pedig 3. Bizonyítsátok be, hogy a négyzeteik különbsége a 7 többszöröse lesz!

615.•• A b mely értékénél a $(b^2 - 4)x = b - 2$: egyenletnek

1) számtalan gyöke lesz;
2) nem lesz gyöke;
3) egy gyöke lesz?

616.•• Az a mely értékénél lesz az $(a^2 - 25)x = a + 5$: egyenletnek
1) számtalan gyöke lesz;
2) nem lesz gyöke;
3) egy gyöke lesz?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

617. A Style üzletben az öltöny ára először 10%-kal, majd további 10%-kal csökkent. A Divat üzletben ugyanazon öltöny árát azonnal 20%-kal csökkentették. Melyik üzletben jövedelmezőbb öltönyt vásárolni, ha kezdetben mindkét üzletben azonos volt az öltöny ára?

618. A csónak a folyón a folyás irányában 2,4 órát ment, és 3,6 órát a folyással szemben. A folyás irányában 5,4 km-rel többet tett meg, mint a folyással szemben. Határozzátok meg a csónak saját sebességét, ha a vízfolyás sebessége 2,5 km/h!

619. Három nap alatt 130 kg narancsot adtak el. A második napon eladott narancs az első napon mennyiségének a $\frac{4}{9}$ része, a harmadik napon pedig annyit adtak el, mint amennyit az első és második napon összesen. Hány kg narancsot adtak el az első napon?

620. Az …, a, b, c, d, 0,1, 1, 2, 3, 5, 8, … sorozatban, minden szám egyenlő az előtte lévő két szám összegével. Mivel egyelő az a?

621. Oldjátok meg az egyenletet:
1) $\frac{2x-1}{8} - \frac{x+2}{4} = x$; 2) $3(2x+3) - 2(3x+5) = -1$.

622. A két tagból álló kifejezésekben határozzátok meg az a összes olyan értékét, amelyek mellett a kifejezések második tagja 3-szor nagyobb az első tag megfelelő értékénél:
1) a és $3a$; 2) a^2 és $3a^2$; 3) $a^2 + 1$ és $3a^2 + 3$;

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

623. Írjátok fel kifejezés alakjában:
1) az a és a b számok összegének négyzetét;
2) az a és a b számok négyzetének összegét;
3) az a és a b számok kétszeres szorzatát;

4) a $3m$ és a $4n$ egytagú algebrai kifejezések különbségének négyzetét!

624. Határozzátok meg az egytagú kifejezések kétszeres szorzatát:

1) a^2 és $3b$; 2) $5x$ és $6y$; 3) $0{,}5m$ és $4n$; 4) $\frac{1}{3}m^2$ és $6m$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

625. Az étlapon 101 étel szerepel. Bizonyítsátok be, hogy páratlan számú ételből ugyanannyiféleképpen választhatjuk ki az ebédet, mint páros számúból, azzal a feltétellel, hogy nem választhatjuk ki az összes ételt az étlapról!

16. Két kifejezés összegének és különbségének a négyzete

Átalakítjuk az $(a + b)^2$ kifejezést. Felírjuk:

$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Tehát,

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Képlet alakjában megkaptuk **két kifejezés összegének négyzetét**. Megfogalmazhatjuk a következő szabályt:

Két kifejezés összegének négyzetét úgy határozzuk meg, hogy az első kifejezés négyzetéhez hozzáadjuk e két kifejezés kétszeres szorzatát, majd hozzáadjuk a második kifejezés négyzetét.

Átalakítjuk az $(a - b)^2$ kifejezést. Felírjuk:

$(a - b)^2 = (a - b)\,(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Képlet alakjában megkaptuk két kifejezés különbségének négyzetét.

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Két kifejezés különbségének négyzetét úgy kapjuk meg, hogy az első kifejezés négyzetéből kivonjuk e két kifejezés kétszeres szorzatát, majd hozzáadjuk a második kifejezés négyzetét.

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy két kifejezés különbségének négyzetét megkaphatjuk a két kifejezés összegének négyzetéből is:

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

A kapott képletek segítségével egyszerűbben emelhetjük négyzetre két kifejezés összegét vagy különbségét anélkül, hogy felhasználnánk a polinomok szorzásának a szabályát. Ezért ezeket a képleteket a rövidített szorzás képletei közé soroljuk.

PÉLDA 1 Írjátok fel többtag alakjában a kifejezéseket:

1) $(3b-4c)^2$; 2) $(a^3+5a)^2$.

Megoldás: 1) Két kifejezés különbségének négyzete alapján felírhatjuk:

$$(3b-4c)^2 = (3b)^2 - 2\cdot 3b\cdot 4c + (4c)^2 = 9b2 - 24bc + 16c^2.$$

2) Két kifejezés összegének négyzete alapján felírhatjuk:

$$(a^3+5a)^2 = (a^3)^2 + 2\cdot a^3\cdot 5a + (5a)^2 = a^6 + 10a^4 + 25a^2.$$ ◀

PÉLDA 2 Alakítsátok át polinommá a kifejezéseket:

1) $(-a-b)^2$; 2) $(-x^2-6)^2$.

Megoldás: 1) Képlet alapján : $(-a-b)^2 = (-a)^2 - 2(-a)\cdot b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Ezt a példát megoldhatjuk másképpen is. Mivel

$$(-a-b)^2 = (-1\cdot(a+b))^2 = (-1)^2\cdot(a+b)^2 = (a+b)^2,$$

vagyis a $(-a-b)^2$ és $(a+b)^2$ kifejezések azonosan egyenlők, ezért felírhatjuk:

$$(-a-b)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

2) $(-x^2-6)^2 = (x^2+6)^2 = x^4 + 12x^2 + 36$. ◀

PÉLDA 3 Oldjátok meg az $(x-10)^2 = (x+7)^2 - 17$ egyenletet!

$$(x-10)^2 = (x+7)^2 - 17.$$

Megoldás:

$$x^2 - 20x + 100 = x^2 + 14x + 49 - 17;$$
$$x^2 - 20x - x^2 - 14x = 49 - 17 - 100;$$
$$-34x = -68;\ x = 2.$$

Felelet: 2. ◀

PÉLDA 4 Bizonyítsátok be, hogy a természetes szám négyzetének 3-mal való osztásánál a maradék vagy 0 vagy 1!

Megoldás: Legyen n valamely természetes szám. Megvizsgálunk három esetet.

1) Az n szám három többszöröse. Ekkor $n = 3k$, ahol k természetes szám.

Felírjuk: $n^2 = (3k)^2 = 9k^2$. A $9k^2$ kifejezés értéke 3 többszöröse, vagyis n^2 3-mal való osztásakor a maradék 0.

2) Ha az n szám 3-mal való osztásakor a maradék *1*, akkor az n számot felírhatjuk az $n = 3k + 1$ alakban, ahol k természetes szám. Felírjuk: $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3p + 1$, ahol $p = 3k^2 + 2k$ az n^2-nek 3-mal történő osztásakor a nem teljes hányados, a maradék pedig 1.

3) Ha az n számnak 3-mal történő osztásakor a maradék 2, akkor $n = 3k + 2$, ahol k természetes szám.

Felírjuk: $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = (9k^2 + 12k + 3) + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Könnyen belátható, hogy ebben az esetben az n^2-nek 3-mal történő osztásakor a maradék 1. ◀

?

1. Melyik azonosság fejezi ki két kifejezés összegének négyzetét?
2. Fogalmazzátok meg, hogyan emeljük négyzetre két kifejezés összegét!
3. Melyik azonosság fejezi ki két kifejezés különbségének négyzetét?
4. Fogalmazzátok meg, hogyan emeljük négyzetre két kifejezés különbségét!

GYAKORLATOK

626.° Két kifejezés összegének vagy különbségének a négyzete lesz e az adott kifejezés:

1) $(a + 50)^2$; 3) $(5 - x)^2$; 5) $(xy + mn)^2$;
2) $a^2 + b^2$; 4) $m^2 - n^2$; 6) $(6 - c)^3$?

627.° Az alábbi polinomok közül melyikkel lesz azonosan egyenlő az $(5a + 3)^2$ kifejezés:

1) $25a^2 + 15a + 9$;
2) $25a^2 + 30a + 9$;
3) $25a^2 + 9$;
4) $5a^2 + 3$?

628.° Az adott egyenlőségek közül, melyik azonosság:

1) $(12a - b)^2 = 144a^2 - b^2$;
2) $(12a - b)^2 = 144a^2 + 24ab + b^2$;
3) $(12a - b)^2 = 144a^2 - 24ab + b^2$;
4) $(12a - b)^2 = 12a^2 - 24ab + b^2$?

629.° Írjátok fel a kifejezést polinom alakjában:

1) $(a + x)^2$; 3) $(y - 1)^2$; 5) $(y - 13)^2$;
2) $(x + 2)^2$; 4) $(5 - p)^2$; 6) $(13 - y)^2$.

630.° Emeljétek négyzetre a kifejezést:

1) $(a + 8)^2$; 3) $(7 + c)^2$; 5) $(6 - d)^2$;
2) $(b - 2)^2$; 4) $(4 + k)^2$; 6) $(d - 6)^2$.

631.° Fejezzétek be a kéttag négyzetre emelését:

1) $(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2 = \ldots$;
2) $\left(\frac{1}{2}a + 6b\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot 6b + (6b)^2 = \ldots$;
3) $\left(\frac{1}{3}x^4 + 0{,}6y^5\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x^4\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{3}x^4 \cdot 0{,}6y^5 + (0{,}6y^5)^2 = \ldots$.

632.° Fejezzétek be a kéttag négyzetre emelését:

1) $(ab - 9)^2 = (ab)^2 - 2 \cdot ab \cdot 9 + 92 = \ldots$;
2) $(4a^2 - a^3)^2 = (4a^2)^2 - 2 \cdot 4a^2 \cdot a^3 + (a^3)^2 = \ldots$.

633.° Alakítsátok át polinommá a kifejezést:

1) $(3a - 2)^2$; 4) $(0{,}4m - 0{,}5n)^2$; 7) $(a^2 + 4b)^2$;
2) $(7b + 6)^2$; 5) $\left(3a + \frac{1}{3}b\right)^2$; 8) $(a^2 + a)^2$;
3) $(8x + 4y)^2$; 6) $(b^2 - 11)^2$; 9) $(3b^2 - 2b^5)^2$.

634.° Végezzétek el a négyzetre emelést:

1) $(2m + 1)^2$; 4) $\left(4x - \frac{1}{8}y\right)^2$; 7) $(m^2 - 3n)^2$;
2) $(4x - 3)^2$; 5) $(0{,}3a + 0{,}9b)^2$; 8) $(m^4 - n^3)^2$;
3) $(10c + 7d)^2$; 6) $(c^2 - 6)^2$; 9) $(5a^4 - 2a^7)^2$.

635.° Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $a^2 + (3a - b)^2$; 4) $c^2 + 36 - (c - 6)^2$;
2) $(4x + 5)^2 - 40x$; 5) $(x - 2)^2 + x(x + 10)$;
3) $50a^2 - (7a - 1)^2$; 6) $3m(m - 4) - (m + 2)^2$.

636.° Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $(x - 12)^2 + 24x$; 3) $2x(x + 2) - (x - 2)^2$;
2) $(x + 8)^2 - x(x + 5)$; 4) $p\,(p - 7) - (p + 7)^2$.

637.° Bizonyítsátok be az azonosságot: $(a - b)^2 = (b - a)^2$.

638.• Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $(y - 9)^2 + (4 - y)\,(y + 6)$; 3) $(2a - 3b)^2 + (3a + 2b)^2$;
2) $(x - 4)\,(x + 4) - (x - 1)^2$; 4) $(x - 5)^2 - (x - 7)\,(x + 7)$.

639.• Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $(y + 7)^2 + (y + 2)\,(y - 7)$;
2) $(a + 1)\,(a - 1) - (a + 4)^2$;
3) $(x - 10)\,(9 - x) + (x + 10)^2$;
4) $(x - 4)\,(3 + x) - (x - 3)^2$.

640.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(x - 8)^2 - x(x + 6) = -2$;
2) $(x + 7)^2 = (x - 3)\,(x + 3)$;
3) $(2x + 1)^2 - (2x - 1)\,(2x + 3) = 0$;
4) $x(x - 2) - (x + 5)^2 = 35$.

641.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(x + 9)^2 - x(x + 8) = 1$;
2) $(x - 11)^2 = (x - 7)\,(x - 9)$;
3) $(x - 4)\,(x + 4) - (x + 6)^2 = -16$;
4) $(1 - 3x)^2 - x(9x - 2) = 5$.

642.• Cseréljétek ki a csillagokat olyan egytagú algebrai kifejezéssel, hogy azonosságot kapjatok:

1) $(* + b)^2 = * + 4ab + b^2$;
2) $(4x - *)^2 = 16x^2 - * + 100y^2$;
3) $(* - 5c)^2 = * - 20b^2c + 25c^2$;
4) $(7a^2 + *)^2 = * + * + 9b^6$.

643.• Cseréljétek ki a csillagokat olyan egytagú algebrai kifejezéssel, hogy azonosságot kapjatok:

1) $(* + 6b)^2 = * + 24ab + *$;
2) $(* - *)^2 = 9m^4 - 42m^2n^8 + *$.

644.• Alakítsátok a kifejezést polinommá:

1) $(-x + 1)^2$;
2) $(-m - 9)^2$;
3) $(-5a + 3b)^2$;
4) $(-4x - 8y)^2$;
5) $(-0{,}7c - 10d)^2$;
6) $\left(-4a^2 + \frac{1}{8}ab\right)^2$.

645.• Emeljétek négyzetre a kifejezést:

1) $(-3m + 7n)^2$;
2) $(-0{,}4x - 1{,}5y)^2$;
3) $(-x^2 - y)^2$;
4) $(-a^2b^2 + c10)^2$.

646.• Emeljétek négyzetre a kifejezést:

1) $(10a^2 - 7ab^2)^2$;
2) $(0{,}8b^3 + 0{,}2b^2c^4)^2$;
3) $\left(1\frac{1}{3}a^2b + 2\frac{1}{4}ab^2\right)^2$;
4) $\left(2\frac{1}{3}x^3y^2 - \frac{9}{14}y^8x\right)^2$.

647.• Alakítsátok a kifejezést polinommá:

1) $6(1-2c)^2$;
2) $-12\left(x + \frac{1}{3}y\right)^2$;
3) $a(a - 6b)^2$;
4) $5b(b^2 + 7b)^2$;
5) $(a + 3)(a - 4)^2$;
6) $(2x + 4)^2(x - 8)$;
7) $(a - 5)^2(a + 5)^2$;
8) $(3x + 4y)^2(3x - 4y)^2$.

648.• Alakítsátok a kifejezést polinommá:

1) $(0{,}02p^3k + 20p^2k^4)^2$;
2) $\left(1\frac{1}{6}mn - \frac{4}{21}m^2n^5\right)^2$;
3) $-15\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{5}b\right)^2$;
4) $7x(x^3 - 2x)^2$;
5) $(5y - 2)^2\,(2y + 1)$;
6) $(10p - k)^2\,(10p + k)^2$.

649.• Egyszerűsítsétek a kifejezést, és határozzátok meg az értékét:

1) $(a + 3)^2 - (a - 9)\,(a + 9)$, ha $a = -2{,}5$;
2) $(5x - 8)^2 - (4x - 3)^2 + 26x$, ha $x = -\frac{1}{3}$;
3) $(3y^2 + 4)^2 + (3y^2 - 4)^2 - 2(1 - 3y^2)\,(1 + 3y^2)$, ha $y = \frac{1}{2}$.

650.• Egyszerűsítsétek a kifejezést, és határozzátok meg az értékét:

1) $2m(m - 6)^2 - m^2(2m - 15)$, ha $m = -4$;
2) $(2x - 5)^2 - 4(x + 1)\,(x - 7)$, ha $x = -3{,}5$.

651.• Az $x + 12$ kéttag négyzete a változó mely értékénél lesz 225-tel több, mint az $x - 13$ kéttag négyzetének megfelelő értéke?

652.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(x - 12)\,(x + 12) = 2\,(x - 6)^2 - x^2$;
2) $(3x - 1)^2 + (4x + 2)^2 = (5x - 1)\,(5x + 1)$;
3) $5(x + 2)^2 + (2x - 1)^2 - 9(x + 3)\,(x - 3) = 22$.

653.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(3x + 2)^2 + (4x - 1)\,(4x + 1) = (5x - 1)^2$;
2) $2\,(m + 1)^2 + 3\,(m - 1)^2 - 5\,(m + 1)\,(m - 1) = -4$.

654.• Határozzátok meg a négyzet oldalát, ha oldalának 5 cm-rel történő növelésekor olyan négyzetet kapunk, amelynek a területe 95 cm^2-rel lesz nagyobb az adott négyzet területénél!

655.• Ha a négyzet oldalát 8 cm-rel kisebbítjük, akkor egy olyan négyzetet kapunk, amelynek a területe 352 cm^2-rel lesz kisebb, mint az adott négyzet területe. Határozzátok meg az eredeti négyzet oldalát!

656.• Határozzátok meg azt a három egymást követő természetes számot, amelyek közül a legnagyobb szám négyzetének kétszerese 79-cel nagyobb a másik két szám négyzetének összegénél!

657.• Határozzátok meg azt a négy egymást követő természetes számot, amelyek közül a második és a negyedik szám négyzetének összege 82-vel nagyobb az első és harmadik szám négyzetének összegénél!

658.• Az a és a b mely értékénél lesz igaz az alábbi egyenlőség:

1) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$; 2) $(a - b)^2 = (a + b)^2$?

659.• Bizonyítsátok be az azonosságot:

1) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;
2) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$;
3) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$;
4) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

660.• Bizonyítsátok be az azonosságot:

1) $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$;
2) $(a - b)^2 + (ab + 1)^2 = (a^2 + 1)(b^2 + 1)$.

661.• Bizonyítsátok be, hogy az $(x - 3)^2 + (x + 3)^2 - 2(x - 6)(x + 6)$ kifejezés értéke független a változó értékétől!

662.• Bizonyítsátok be, hogy az $(6x - 8)^2 + (8x + 6)^2 - (10x - 1)(10x + 1)$ kifejezés értéke független a változó értékétől!

663.•• Páros vagy páratlan szám lesz –e a páratlan természetes szám négyzete?

664.•• Vezessétek le két kifejezés összege köbének a képletét:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

A fenti képlet felhasználásával alakítsátok át polinomokká a kifejezéseket:

1) $(x + 3)^3$; 2) $(2x + y)^3$.

665.•• Vezessétek le két kifejezés különbsége köbének a képletét:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

A fenti képlet felhasználásával alakítsátok át polinomokká a kifejezéseket:

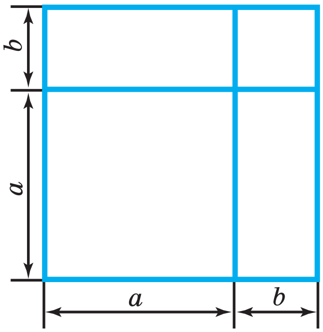
1) $(1 - x)^3$; 2) $(x - 5y)^3$.

666.•• Vezessétek le a háromtag négyzetének a képletét:

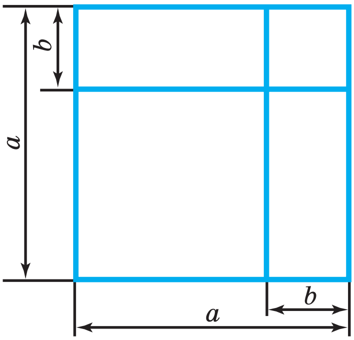
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

A fenti képlet felhasználásával alakítsátok át többtagokká a kifejezéseket: 1) $(a + b - c)^2$; 2) $(a - b + 4)^2$!

667.•• Az ókori görög tudós, Eukleidész (i.sz.e 365–300) két kifejezés összege négyzetének és különbségének képletét geometriai módszerekkel bizonyította be. A 8. és a 9. ábra felhasználásával végezzétek el a bizonyítást!



8. ábra



9. ábra

668.•• Mennyivel egyenlő a maradék, ha páratlan természetes szám négyzetét 8-cal osztjuk?

669.•• Bizonyítsátok be, hogy ha a természetes szám 16-tal történő osztása során a maradék 4, akkor ennek a számnak a négyzete osztható 16-tal!

670.•• Bizonyítsátok be, hogy amikor valamely természetes szám 25-tel történő osztásakor a maradék 5, akkor ennek a számnak a négyzete maradék nélkül osztható 25-tel.

671.•• Valamely természetes szám 9-cel való osztásakor a maradék 5. Mivel lesz egyenlő e szám négyzetének 9-cel való osztásának a maradéka?

672.•• Valamely természetes szám 11-gyel való osztásakor a maradék 6. Mivel lesz egyenlő e szám négyzetének 11-gyel való osztásának a maradéka?

673.•• A rövidített szorzás képleteinek felhasználásával írjátok fel a kifejezést polinom alakjában:

1) $(a + b + c)(a + b - c)$;
2) $(a + b + c)(a - b - c)$;
3) $(a + b + c + d)(a + b - c - d)$.

674.•• A rövidített szorzás képleteinek felhasználásával írjátok fel a kifejezést polinom alakjában:

1) $(a - b - c)(a + b - c)$;
2) $(a - b + c + d)(a - b - c - d)$.

675.•• Az a mely értékénél nincs gyöke az egyenletnek:

$$(6x - a)^2 + (8x - 3)^2 = (10x - 3)^2.$$

676.•• Az a mely értékénél nincs gyöke az egyenletnek:

$$(2a - 3x)^2 + (x - 1)^2 = 10(x - 2)(x + 2).$$

677.* Állapítsátok meg, hogy mennyi lesz a maradék, ha ennek a számnak a négyzetét osztjuk 4-gyel?

678.* Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2.$$

Ez az azonosság az ismert ókori görög tudós, Pitagorasz (i. e. VI. század) nevéhez fűződik. Az azonosság segítségével kiszámíthatjuk a derékszögű háromszög oldalainak a hosszát, ha azok egész számokkal egyenlők. Egy és ugyanazon természetes n értéke esetében a $2n + 1$; $2n^2 + 2n$; $2n^2 + 2n + 1$ kifejezések a derékszögű háromszög oldalai hosszával egyenlők.

679.* *(J. L. Lagrange azonossága[2].)* Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + k^2) - (am + bn + ck)^2 =$$
$$= (an - bm)^2 + (ak - cm)^2 + (bk - cn)^2.$$

680.* Bizonyítsátok be, hogy öt egymást követő természetes szám négyzetének összege nem lehet természetes szám négyzete.

---

[2] Lagrange Joseph Louis (1736–1813) –francia matematikus és csillagász.

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

681. Az Ukrajnában termesztett növények közül a cukorrépának a legmagasabb, 25 % a cukortartalma, míg a cukornádnak csak 18%. Mennyi cukornádat kell feldolgozni ahhoz, hogy annyi cukrot kapjanak, mint amennyit 3600 tonna cukorrépából nyernek?

682. 2017-ben 28 történelmi, irodalmi és művészeti múzeum működött Kijev városában. Művészeti múzeumokból 3,4-szer kevesebb volt, mint történelmi múzeumból, és eggyel kevesebb, mint irodalmi múzeumból. Hány múzeum működött mind a három típusból?

Ukrajna Nemzeti Történeti Múzeuma (Kijev)

683. Az üzletbe 80 ládában, 740 kg narancsot és banánt szállítottak. Minden ládában 10 kg narancs vagy 8 kg banán volt. Hány kilogramm narancsot hoztak ebbe az üzletbe?

684. A munkavállaló fizetése arányos a ledolgozott órák számával. Az első hónapban 170 órát dolgozott, és 11 900 hrivnyát kapott. Hány órát dolgozott a második hónapban, ha 13300 hrivnyát kapott a munkájáért?

685. A változó mely értékénél és milyen legkisebb értéket vesz fel a következő kifejezés:

1) x^2; 2) $x^2 - 16$; 3) $(x + 4)^2 + 20$?

686. A változó mely értékénél és milyen legkisebb értéket vesz fel a következő kifejezés:

1) $-x^2$; 2) $-x^2 + 4$; 3) $12 - (x - 1)^2$?

687. A változó mely értéke mellett teljesül az egyenlőség:

1) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = -10$;
2) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 0$;
3) $(x^2 - 1)^2 + (x + 1)^2 = 0$?

688. Az x és y változó mely értéke mellett teljesül az egyenlőség:

1) $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = -1$;

2) $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 0$?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

689. Ismert, hogy az m és az n természetes számok értékei olyanok, hogy a $10m + n$ kifejezés értéke maradék nélkül osztható 11-gyel. Bizonyítsátok be, hogy a $(10m + n)(10n + m)$ kifejezés osztható 121-gyel.

Pascal-háromszög

A 664. feladat megoldásával bebizonyítottátok a következő azonosságot:

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Ezt az azonosságot a **két kifejezés összege köbének** nevezzük.

Mivel $(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b)$, akkor az $(a + b)^4$ kifejezés, polinommá alakítható. A következő azonosságot kapjuk:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Hasonlóan eljárva lehetséges polinommá alakítani bármely $(a + b)^n$ alakú kifejezést. Azonban ahogy n növekszik, a kifejezés átalakításával kapcsolatos munka mennyisége nő.

A technikai munka csökkenthető bizonyos törvényszerűségek megfigyelésével. Az egyenlőség jobb oldalán lévő összes egytagú kifejezés hatványa megegyezik a kéttag hatványával. Ezeknek a kifejezések a betűrészei rendre a következő alakúak: a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $a^{n-3}b^3$, ..., ab^{n-1}, b^n. Ezeknek az egytagú kifejezések együtthatóinak meghatározásához egy speciális táblázat (10. ábra) létezik, amelyet „Pascal-háromszögnek” neveznek a kiváló francia matematikus és filozófus, Blaise Pascal tiszteletére. Itt nyilak mutatják, hogyan kell meghatározni a táblázat következő sorát az előző alapján: ha két egymás melletti lila számot összeadunk, így egy másik lila számot kapunk, melyet a két megadott szám közé, a következő sorba kell írni.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

10. ábra

Az alábbiakban bemutatjuk, hogyan kell használni ezt a táblázatot.

$$1$$

$(a+b)^1$: $1 \cdot a^1 + 1 \cdot b^1$

$(a+b)^2$: $1 \cdot a^2 + 2 \cdot a^1b^1 + 1 \cdot b^2$

$(a+b)^3$: $1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b^1 + 3 \cdot a^1b^2 + 1 \cdot b^3$

$(a+b)^4$: $1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b^1 + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot a^1b^3 + 1 \cdot b^4$

$(a+b)^5$: $1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4b^1 + 10 \cdot a^3b^2 + 10 \cdot a^2b^3 + 5 \cdot a^1b^4 + 1 \cdot b^5$

Blaise Pascal
(1623 – 1662)

Francia matematikus, fizikus, író és filozófus. A matematikai elemzés, a valószínűségszámítás és a projektív geometria egyik megalapítója. Ő készítette el a számítástechnika első példányait.

17. Polinom átalakítása két kifejezés összegének és különbségének négyzetévé

Felírjuk az összeg és különbség négyzetének képletét fordított sorrendben:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

Az ilyen alakban kapott képlet segítségével a háromtag kéttag négyzetévé alakítható át.

A kéttag négyzeteként felírható háromtagot **teljes négyzetnek** nevezzük.

PÉLDA 1 Írjátok fel a háromtagot kéttag négyzeteként:

1) $x^2 + 10x + 25$; 2) $9a^6 - 42a^3b^2 + 49b^4$.

Megoldás:

1) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x + 5)^2$.

2) $9a^6 - 42a^3b^2 + 49b^4 = (3a^3)^2 - 2 \cdot 3a^3 \cdot 7b^2 + (7b^2)^2 =$
$= (3a^3 - 7b^2)^2$. ◀

PÉLDA 2 A kifejezés kéttaggá való alakításának képlete segítségével határozzátok meg az

5,22 +10,4 · 4,8 + 4,82. kifejezés értékét!

Megoldás:

$$5{,}22 + 10{,}4 \cdot 4{,}8 + 4{,}82 = 5{,}22 + 2 \cdot 5{,}2 \cdot 4{,}8 + 4{,}82 =$$
$$= (5{,}2 + 4{,}8)^2 = 10^2 = 100. ◀$$

PÉLDA 3 Oldjátok meg a $4x^2 - 12x + 9 = 0$ egyenletet!

Megoldás: Az egyenlet bal oldalát felírjuk különbség négyzeteként:

$$(2x - 3)^2 = 0.$$

Mivel a négyzet értéke abban és csakis abban az esetben nulla, ha a hatvány alapja nulla, ezért:

$$2x - 3 = 0;$$
$$x = 1{,}5.$$

Felelet: 1,5. ◀

PÉLDA 4 Bizonyítsátok be, hogy a

$$(2x + 1)^2 - 2\,(2x + 1)\,(2x - 5) + (2x - 5)^2$$

kifejezés értéke nem függ a változó értékétől!

Megoldás: $(2x + 1)^2 - 2\,(2x + 1)\,(2x - 5) + (2x - 5)^2 = ((2x + 1) - (2x - 5))^2 = (2x + 1 - 2x + 5)^2 = = 6^2 = 36.$ ◀

PÉLDA 5 Bizonyítsátok be, hogy az $x^2 - 4x + 5$ kifejezés értéke bármilyen x esetében pozitív. Mennyi a kifejezés legkisebb értéke, és milyen x esetében veszi fel ezt az értéket?

Megoldás: Átalakítjuk a kifejezést:

$$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1.$$

A kifejezés összeg alakjában való felírását, amelyben az egyik összeadandó kéttag négyzete (a mi esetünkben $(x - 2)^2$), a kéttagú kifejezés négyzetének kiemelése.

Mivel bármely x esetén $(x - 2)^2 \geq 0$, ezért az $(x - 2)^2 + 1$ kifejezés csak pozitív értékeket vehet fel. Érthető, hogy $(x - 2)^2 + 1 \geq 1$. Tehát a kifejezés a legkisebb értékét, $x = 2$ esetén veszi fel, ami egyenlő 1-gyel. ◀

PÉLDA 6 Az x és y milyen értékeinél lesz az $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 40$ kifejezés értéke nulla?

Megoldás: $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 40 =$

$$= x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 = (x - 6)^2 + (y + 2)^2.$$

A többtagot két olyan összeadandó összegeként írtuk fel, amelyek kizárólag nem negatív értékeket vehetnek fel. Az összegük és egyben az adott többtag is csak abban az esetben lesz nulla, ha az összes összeadandó nulla, azaz $x = 6$ és $y = -2$.

Felelet: $x = 6$, $y = -2$. ◀

GYAKORLATOK

690.° Az alábbi kifejezések közül melyik azonosan egyenlő az $a^2 - 18a + 81$ többtaggal:

1) $(a - 3)^2$; 2) $a - 9$; 3) $(a - 9)(a + 9)$; 4) $(a - 9)^2$?

691.° Az alábbi egyenlőségek közül melyik azonosság:

1) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a + 8b)^2$;
2) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a + 4b)^2$;
3) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (ab + 4)^2$;
4) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a + 2b)^2$?

692.° Adjátok meg a háromtagú algebrai kifejezést kéttag négyzeteként:

1) $c^2 + 2cd + d^2$;
2) $p^2 - 2pq + q^2$;
3) $x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + 72$.

693.° Bontsátok tényezőkre a polinomot:

1) $m^2 + 2mn + n^2$;
2) $b^2 - 2bc + c^2$;
3) $11^2 - 2 \cdot 11 \cdot p + p^2$.

694.° Adjátok meg a háromtagú algebrai kifejezést összeg négyzeteként vagy különbség négyzeteként:

1) $a^2 + 2a + 1$;
2) $x^2 - 12x + 36$;
3) $y^2 - 18y + 81$;
4) $100 - 20c + c^2$;
5) $a^2 - 6ab + 9b^2$;
6) $9a^2 - 30ab + 25b^2$;
7) $b^4 - 2b^2c + c^2$;
8) $m^8 + m^4n^2 + \frac{1}{4}n^4$;
9) $36a^2b^2 - 12ab + 1$;
10) $x^4 + 2x^2 + 1$.

695.° Adjátok meg a háromtagot kéttag négyzeteként:

1) $b^2 - 2b + 1$;
4) $4a^2 + 4ab + b^2$;

2) $4 + 4n + n^2$;
3) $x^2 - 14x + 49$;
5) $9x^2 - 24xy + 16y^2$;
6) $a^6 - 2a^3 + 1$.

696.° Határozzátok meg a kifejezés értékét, előzőleg kéttagú algebrai kifejezés négyzetévé alakítva azt:

1) $y^2 - 8y + 16$, ha $y = -4$;
2) $c^2 + 24c + 144$, ha $c = -10$;
3) $25x^2 - 20xy + 4y^2$, ha $x = 3$, $y = 5{,}5$;
4) $49a^2 + 84ab + 36b^2$, ha $a = 1\frac{1}{7}$, $b = 2\frac{5}{6}$.

697.° Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $b^2 - 30b + 225$, ha $b = 6$;
2) $100a^2 + 60ab + 9b^2$, ha $a = 0{,}8$, $b = -3$.

698.• Milyen egytagú kifejezést kell tenni a csillag helyett, hogy a kifejezést egy kéttagú algebrai kifejezés négyzeteként lehessen felírni:

1) $* - 56a + 49$;
2) $9c^2 - 12c + *$;
3) $* - 42xy + 49y^2$;
4) $0{,}01b^2 + * + 100c^2$;
5) $a^2b^2 - 4a^3b^5 + *$;
6) $1{,}44x^2y^4 - * + 0{,}25y^6$;
7) $64 - 80y^{20} + *$;
8) $\frac{9}{25}a^6b^2 - a^5b^5 + *$?

699.• A csillagok helyére olyan egytagú algebrai kifejezést tegyetek, hogy azonosság legyen:

1) $n^2 + 60n + * = (* + 30)^2$;
2) $25c^2 - * + * = (* - 8k)^2$;
3) $225a^2 - * + 64b^4 = (* - *)^2$;
4) $0{,}04x^2 + * + * = (* + 0{,}3y^3)^2$.

700.• Írjátok fel a háromtagú kifejezést, ha lehetséges, kéttagú algebraikifejezés négyzeteként vagy olyan kifejezésnek, amely a kéttag négyzete ellenkező előjellel:

1) $-8x + 16 + x^2$;
2) $a^8 + 4a^4b^3 + 4b^6$;
3) $2x - 25 - 0{,}04x^2$;
4) $25m^2 - 15mn + 9n^2$;
5) $81c^2 - 54b^2c + 9b^2$;
6) $b^{10} - a^2b^5 + 0{,}25a^4$;
7) $\frac{1}{16}x^2 - xy + 4y^2$;
8) $-\frac{9}{64}n^6 - 3mn^5 - 16m^2n^4$.

701.• Írjátok fel a háromtagú kifejezést, ha lehetséges, kéttag négyzetének vagy olyan kifejezésnek, amely a kéttag négyzete ellenkező előjellel:

1) $-a^4 - 0{,}8a^6 - 0{,}16a^8$;
2) $121m^2 - 44mn + 16n^2$;
3) $-a^6 + 4a^3b - 4b^2$;
4) $\frac{25}{49}a^8 - 10a^4b^6 + 49b^{12}$;
5) $80xy + 16x^2 + 25y^2$;
6) $b^{10} - \frac{1}{3}b^5c + \frac{1}{9}c^2$.

702.• Adjátok meg a kifejezést kéttagú algebrai kifejezés négyzeteként:

1) $(4a + 3b)^2 - 8b(4a + b)$;
2) $(10x + 3y)^2 - (8x + 4y)(8x - 4y)$.

703.• Adjátok meg a kifejezést kéttagú algebrai kifejezés négyzeteként:

1) $(3m - 2n)^2 + 5m(4n - m)$;
2) $(9x + 2y)^2 - (8x + 3y)(4x - 4y)$.

704.• Alkalmazva a kifejezések két kifejezés összege vagy különbsége négyzetére való átalakítást, határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $1{,}02^2 - 1{,}02 \cdot 1{,}96 + 0{,}98^2$; 2) $242 + 96 \cdot 38 + 76^2$.

705.• Számítsátok ki:

1) $203^2 - 406 \cdot 103 + 103^2$; 2) $1{,}58^2 + 1{,}58 \cdot 2{,}84 + 1{,}42^2$.

706.• Milyen számot kell hozzáadni a $81a^2b^2 - 36ab + 9$ polinomhoz, hogy a kifejezés azonosan egyenlő legyen kéttagú kifejezés négyzetével?

707.• Milyen számot kell hozzáadni a $100m^4 + 120m^2 + 40$ polinomhoz, hogy a kifejezés azonosan egyenlő legyen kéttagú kifejezés négyzetével?

708.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $x^2 - 16x + 64 = 0$; 2) $81x^2 + 126x + 49 = 0$.

709.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $x^2 + 12x + 36 = 0$; 2) $25x^2 - 30x + 9 = 0$.

710.•• Azonosság lesz e az egyenlőség:

$$(a - 2)(a - 3)(a + 3)(a + 2) + a^2 = (a^2 - 6)^2?$$

711.•• Bizonyítsátok be az azonosságot:

1) $(a - 1)^2 + 2(a - 1) + 1 = a^2$;

2) $(a + b)^2 - 2(a + b)(a - b) + (a - b)^2 = 4b^2$;

3) $(a - 8)^2 + 2(a - 8)(3 - a) + (a - 3)^2 = 25$;

4) $(xn - 2)^2 - 2(xn - 2)(xn + 2) + (xn + 2)^2 = 16$, ahol az n — bármilyen természetes szám!

712.•• Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értéke független a változó értékétől:

1) $(3x + 8)^2 - 2(3x + 8)(3x - 8) + (3x - 8)^2$;

2) $(4x - 7)^2 + (4x - 11)^2 + 2(4x - 7)(11 - 4x)$.

713.•• Bizonyítsátok be, hogy az egyenletnek nincs gyöke:

1) $x^2 - 14x + 52 = 0$; 2) $4x^2 - 2x + 1 = 0$.

714.•• Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értéke bármilyen x esetében pozitív! Milyen x esetén lesz a kifejezés értéke a legkisebb? Számítsátok ki az értékét is!

1) $x^2 - 6x + 10$;

2) $16x^2 + 24x + 25$;

3) $x^2 + x + 1$.

715.•• Lehet-e negatív a kifejezés értéke:

1) $x^2 - 24x + 144$; 2) $4x^2 + 20x + 28$?

716.•• Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értéke bármilyen x esetében negatív! Milyen x esetén lesz a kifejezés értéke a legnagyobb? Számítsátok ki az értékét is!

1) $-x^2 + 4x - 12$;

2) $22x - 121x^2 - 2$;

717.•• Lehet -e a kifejezésnek pozitív értéke:

1) $-x^2 + 20x - 100$;

2) $-x^2 - 10 - 4x$?

718.•• Milyen legnagyobb értéket vesz fel a kifejezés és a változó mely értékénél veszi ezt fel?

1) $-x^2 - 16x + 36$;

2) $2 - 16x^2 + 24x$?

719.•• Milyen legkisebb értéket vesz fel a kifejezés és a változó mely értékénél veszi ezt fel?

1) $x^2 - 28x + 200$;

2) $9x^2 + 30x - 25$?

720.•• Adjátok meg a $\frac{81}{16}x^4 + y^8 - \frac{9}{2}x^2y^4$ kifejezést kéttagú kifejezések négyzetének szorzataként!

721.•• Bizonyítsátok be, hogy az $(a - 3b)(a - 3b - 4) + 4$ kifejezés értéke a változók bármely értékénél nem negatív!

722.•• Írjátok fel a kifejezést két kifejezés négyzetének összegeként:

1) $2a^2 - 2a + 1$;

2) $a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2$;

3) $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10$;

4) $10x^2 - 6xy + y^2$;

5) $x^2 + 5y^2 + 4xy - 4y + 4$;

6) $2a^2 + 2b^2$.

723.•• Írjátok fel a többtagot négyzetek különbségeként, majd adjátok meg szorzat alakjában:

1) $a^4 + a^2 + 1$;

2) $x^2 - y^2 + 4x - 4y$;

3) $a^2b^2 + 2ab - c^2 - 8c - 15$;

4) $8a^2 - 12a + 2ab - b^2 + 4$.

724.•• Írjátok fel a polinomot, két kifejezés négyzetének összegeként vagy különbségeként:

1) $a^4 + 17a^2 + 16$;

2) $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 74$;

3) $2x^2 - 6xy + 9y^2 - 6x + 9$;

4) $x^2 - y^2 - 4x - 2y + 3$.

725.•• Az x és y milyen értékeinél lesz a kifejezés értéke nulla:

1) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 41$;

2) $x^2 + 37y^2 + 12xy - 2y + 1$?

726.•• Létezik-e az x-nek és y-nak olyan értéke, amelyeknél a kifejezés értéke nulla:

1) $x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 2$;

2) $9x^2 + y^2 - 12x + 8y + 21$?

727.•• Ismeretes, hogy $a + b = 7$, $ab = 2$. Határozzátok meg az $a^2 + b^2$ kifejezés értékét!

728.•• Az a és b pozitív értékei esetén $a^2 + b^2 = 34$, $ab = 15$. Határozzátok meg az $a + b$ kifejezés értékét!

729.•• Az a és b negatív értékei esetén $a^2 + b^2 = 68$, $ab = 16$. Határozzátok meg az $a + b$ kifejezés értékét!

730.* Adjátok meg a 24-et két szám összegeként úgy, hogy az összeadandók szorzata a legnagyobb értékű legyen!

731.* Határozzátok meg az összes 20 cm kerületű téglalap közül a legnagyobb területű téglalap oldalait!

732.* Ismeretes, hogy $b^2 + \frac{a^2}{4} = 1$, $ab = 3$, $a > 0$, $b > 0$. Határozzátok meg az $a + 2b$ kifejezés értékét!

733.* Ismeretes, hogy $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$. Mivel egyenlő az $a + b - 2c$ kifejezés értéke?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

734. 1 tonna papír előállításához 6,3 m^3 fát vagy 1400 kg papírhulladékot kell felhasználni. Az iskola diákjai 2100 kg papírhulladékot gyűjtöttek össze. Hány köbméter fa takarítható meg az összegyűjtött papírhulladék felhasználásával a papírgyártáshoz?

735. A társaság részvényei 5:2 arányban oszlanak meg az állam és a magánszemélyek között. A társaság teljes évi adózott eredménye 2,8 millió hrivnya volt. Ebből a nyereségből hány hrivnyát kell kifizetni a magánrészvényeseknek?

736. A tengerjáró hajó legénysége 72 főből áll, és maximum 264 turista utazhat rajta. Legalább hány darab mentőcsónak kell hogy a hajón legyen, ha egy csónakot 60 főre terveztek?

737. Az első napon a turista megtette 0,4-ét az előtte álló távnak, a második napon pedig a fennmaradt táv $\frac{2}{3}$-át, a harmadik napon a maradék 20 km-t: Határozzátok meg az útvonalának a hosszát!

738. A tengerivel bevetett két részleg területe 100 ha. Az első részlegről hektáronként 90 t tengerit takarítottak be, a másodikról pedig 80 t-át. Határozzátok meg a két részleg területét, ha az első részlegről 2200 t-val többet takarítottak be, mint a másodikról!

739. Bontsátok tényezőkre:

1) $2ab - 3ab^2$;
2) $8x^4 + 2x^3$;
3) $12a^2b^2 + 6a^2b^3 + 12ab^3$;
4) $2a - 2b + ac - bc$;
5) $m^2 - mn - 4m + 4n$;
6) $ax - ay + cy - cx - x + y$.

740. Az x valamely értékénél a $3x^2 - x + 7$ kifejezés 10-zel egyenlő. Milyen értéke lesz a $6x^2 - 2x + 7$ kifejezésnek ennél az x értéknél?

741. *(Ősi bolgár feladat.)* Hét halász a tavon horgászott. Az egyik minden nap kiment a tóra, a másik csak kétnaponta, a harmadik minden harmadik napon stb., a hetedik minden hetedik napon. Ma mind a heten horgásznak. Legkevesebb hány nap múlva lesznek ismét mind a heten egyszerre a tónál?

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

742. Írjátok fel kifejezések alakjában:

1) az a és b számok összegének köbe;
2) az a és b számok köbének összege;
3) a c és d számok köbének különbsége;
4) a c és d számok különbségének köbe!

743. Emeljétek köbre az egytagot:

1) y^2;
2) $2x^3$;
3) $3a^2b^4$;
4) $0{,}1mn^5$;
5) $\frac{1}{6}b^6c^7$;
6) $\frac{2}{7}p^{10}k^{15}$.

744. Adjátok meg egytagú algebrai kifejezés köbeként:

1) a^3b^6; 3) $\frac{1}{64}c^9$; 5) $0{,}216k^{15}p^{24}$;

2) $8x^3y^9$; 4) $125m^{12}n^{21}$; 6) $0{,}008a^9b^{18}c^{27}$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

745. Feloszthatók-e az 1 és 32 közötti természetes számok három csoportra úgy, hogy mindhárom csoport tagjainak a szorzata egyenlő legyen?

4. SZÁMÚ FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. Végezzétek el a szorzást: $(3n + 1)(3n - 1)$!

A) $9n^2 - 6n + 1$; C) $9n^2 - 1$;
B) $9n^2 + 6n + 1$; D) $9n^2 + 1$.

2. Melyik többtaggal egyenlő a $(4x - 1)^2$ kifejezés?

A) $16x^2 + 8x + 1$; C) $16x^2 + 1$;
B) $16x^2 - 8x + 1$; D) $16x^2 - 1$.

3. Bontsátok szorzótényezőkre a $4a^2 - 25$ kifejezést!

A) $(2a - 5)^2$; C) $(2a - 5)(2a + 5)$;
B) $(2a + 5)^2$; D) $2a(2a - 25)$.

4. Adjátok meg szorzat alakjában: $-0{,}09x^4 + 81y^{16}$!

A) $(0{,}03x^2 - 9y^4)(0{,}03x^2 + 9y^4)$; C) $(9y^8 - 0{,}3x^2)(9y^8 + 0{,}3x^2)$;
B) $(9y^8 - 0{,}03x^2)(9y^8 + 0{,}03x^2)$; D) $(9y^4 - 0{,}3x^2)(9y^4 + 0{,}3x^2)$.

5. Az alábbi kéttagok közül melyik bontható fel tényezőkre a négyzetek különbségének képlete alapján?

A) $-a^2 - 4b^2$; B) $4a^2 + b^2$; C) $a^2 - 4b^2$; D) $4b^2 + a^2$.

6. Adjátok meg az $a^2 - 8a + 16$ kifejezést kéttag négyzeteként.

A) $(a + 4)^2$; B) $(a - 4)^2$; C) $(4a + 1)^2$; D) $(a - 1)^2$.

7. Ismeretes, hogy $\left(\frac{1}{2}x - 3y^2\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + axy^2 + 9y^4$. Mennyi lesz az a értéke?

A) 3; B) –3; C) 6; D) –6.

8. Hozzátok egyszerűbb alakra az $(x + 8)(x - 8) - x(x - 6)$ kifejezést.

A) $6x - 16$; B) $6x + 16$; C) $-6x - 64$; D) $6x - 64$.

9. Melyik polinommal egyenlő a $(7m - 2)^2 - (7m - 1)(7m + 1)$ kifejezés?

A) $-14m + 5$; B) $-14m + 3$; C) $-28m + 5$; D) $-28m + 3$.

10. Hozzátok egyszerűbb alakra a $(c - 4)^2 - (3 - c)^2$ kifejezést!

A) $2c - 7$; B) $7 - 2c$; C) $7 + 2c$; D) $-2c - 7$.

11. Számítsátok ki az $(x - 4)^2 + 2(4 + x)(4 - x) + (x + 4)^2$ kifejezés értékét, ha $x = -1{,}2$!

A) 64; B) 32; C) 48; D) 72.

12. Adjátok meg a $(4 + a^2)(a - 2)(a + 2)$ kifejezést többtag alakjában!

A) $a^2 - 16$; B) $16 - a^2$; C) $16 - a^4$; D) $a^4 - 16$.

18. Két kifejezés köbének összege és különbsége

Meghatározzuk az $a + b$ kéttag és az $a^2 - ab + b^2$ polinom szorzatát. A következőt kapjuk:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Ezzel bebizonyítottuk az

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

azonosságot.

Ez az azonosság a köbök összegének képlete.

A képlet jobb oldalán található $a^2 - ab + b^2$ polinomot a különbség **nem teljes négyzetének** nevezzük. A megnevezés az a és b számok különbsége négyzetéhez $(a^2 - 2ab + b^2)$ való hasonlóságából ered.

Megfogalmazzuk a szabályt.

Két kifejezés köbének összege a két kifejezés összegének és különbségük nem teljes négyzetének a szorzatával egyenlő.

Felírjuk szorzat alakjában az $a^3 - b^3$ kifejezést:

$$a^3 - b^3 = a^3 + (-b)^3 = (a + (-b))\,(a^2 - a(-b) + (-b)^2) =$$
$$= (a - b)\,(a^2 + ab + b^2).$$

Bebizonyítottuk a következő azonosságot:

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

Ez az azonosság a köbök különbségének képlete. Az $a^2 + ab + b^2$ többtagot az összeg nem teljes négyzetének nevezzük.

Megfogalmazzuk a következő szabályt.

Két kifejezés köbének különbsége a két kifejezés különbségének és összegük nem teljes négyzetének a szorzatával egyenlő.

Megjegyezzük, hogy ez a képlet is bebizonyítható a képlet jobb oldalán álló többtagok összeszorzásával.

PÉLDA 1 fel szorzat alakjában.

1) $8a^3 + 27b^3$; 2) $x^6 - y^9$.

Megoldás: 1) A többtagot felírjuk két kifejezés köbének összegeként:

$8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3 = (2a + 3b)\,(4a^2 - 6ab + 9b^2)$.

2) A többtagot felírjuk két kifejezés köbének különbségeként:

$$x^6 - y^9 = (x^2)^3 - (y^3)^3 = (x^2 - y^3)\,(x^4 + x^2y^3 + y^6).$$ ◀

PÉLDA 2 Hozzátok egyszerűbb alakra a $(4y - 1)\,(16y^2 + 4y + 1)$ kifejezést, és számítsátok ki az értékét, ha $y = \frac{1}{2}$.

Megoldás:

$$(4y - 1)\,(16y^2 + 4y + 1) = (4y)^3 - 1 = 64y^3 - 1.$$

Ha $y = \frac{1}{2}$ akkor:

$$64y^3 - 1 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1 = 64 \cdot \frac{1}{8} - 1 = 8 - 1 = 7.$$ ◀

PÉLDA 3 Alakítsátok át az $(m - 4)^3 + 216$ kifejezést szorzattá.

Megoldás: Az összeg köbének a képlete alapján:

$$(m-4)^3 + 216 = (m-4)^3 + 6^3 =$$
$$= (m-4+6)\,((m-4)^2 - 6\,(m-4) + 36) =$$
$$= (m+2)\,(m^2 - 8m + 16 - 6m + 24 + 36) =$$
$$= (m+2)\,(m^2 - 14m + 76).$$ ◀

PÉLDA 4 Bizonyítsátok be, hogy a $253 - 1$ osztható 24-gyel!

Megoldás: Az összeg köbök különbsége képlet alapján:

$$25^3 - 1 = (25-1)\,(25^2 + 25 + 1) = 24\,(25^2 + 26).$$

A kifejezést egy olyan szorzat alakjában írtuk fel, ahol az egyik tényező 24, a másik pedig egy tetszőleges természetes szám. Tehát a kifejezés értéke osztható 24-gyel. ◀

?

1. Milyen azonosságot nevezünk a köbök összege képletének?
2. Milyen polinomot nevezünk a különbség nem teljes négyzetének?
3. Fogalmazzátok meg két kifejezés köbének összege tényezőkre való bontásának szabályát!
4. Milyen azonosságot nevezünk a köbök különbsége képletének?
5. Milyen polinomot nevezünk az összeg nem teljes négyzetének?
6. Fogalmazzátok meg két kifejezés köbének különbsége tényezőkre való bontásának szabályát!

GYAKORLATOK

746.° Az adott kifejezések közül, melyik lesz az összeg nemteljes négyzete, és melyik a különbség nemteljes négyzete?

1) $m^2 + 2mn + n^2$;	4) $m^2 - 4mn + n^2$;
2) $m^2 + mn - n^2$;	5) $m^2 - mn + n^2$;
3) $m^2 + mn + n^2$;	6) $m^2 - 2mn + n^2$?

747.° Azonosság-e a következő egyenlőség:

1) $x^3 + y^3 = (x+y)\,(x^2 + xy + y^2)$;
2) $x^3 - y^3 = (x-y)\,(x^2 + xy + y^2)$;
3) $x^3 + y^3 = (x+y)\,(x^2 - 2xy + y^2)$;
4) $x^3 - y^3 = (x+y)\,(x^2 - xy + y^2)$?

748.° Az adott kifejezések közül melyik lesz azonosanegyenlő az $a^3 - 27$ kifejezéssel:

1) $(a-3)(a^2+6a+9)$;
2) $(a-3)(a^2-9)$;
3) $(a-3)(a^2-3a+9)$;
4) $(a-3)(a^2+3a+9)$?

749.° Bontsátok tényezőkre:

1) a^3+8;
2) c^3-64;
3) $125-b^3$;
4) $1+x^3$;
5) a^3+1000;
6) $27a^3-1$;
7) $1000c^3-216$;
8) a^3b^3-1;
9) $m^3n^3+0{,}001$.

750.° Bontsátok tényezőkre:

1) x^3-1;
2) $27+a^3$;
3) $216-y^3$;
4) $\frac{1}{8}a^3+b^3$;
5) $0{,}001m^3+8n^3$;
6) $a^3b^3-c^3$.

751.° Az adott egyenlőségek közül melyik lesz azonosság:

1) $m^3+8n^6=(m+2n^2)(m^2+2mn^2+4n^4)$;
2) $m^3+8n^6=(m-2n^2)(m^2+2mn^2+4n^4)$;
3) $m^3+8n^6=(m+2n^2)(m^2-2mn^2+4n^4)$;
4) $m^3+8n^6=(m-2n^2)(m^2-2mn^2+4n^4)$?

752.° Fejezzétek be a tényezőkre bontást:

1) $64x^6-0{,}027y^9=(4x^2)^3-(0{,}3y^3)^3=\ldots$;
2) $b^{12}+216c^{15}=(b^4)^3+(6c^5)^3=\ldots$;
3) $\frac{1}{8}p^{18}-\frac{1}{27}b^{21}=\left(\frac{1}{2}p^6\right)^3-\left(\frac{1}{3}b^7\right)^3=\ldots.$

753.° Bontsátok tényezőkre:

1) $a^{12}+b^9$;
2) $x^{18}-y^{27}$;
3) $m^6n^3-p^{12}$;
4) $a^{24}b^{33}+1$;
5) $8m^6+27n^9$;
6) $0{,}027x^{21}+0{,}125y^{24}$;
7) $0{,}216-8c^{27}$;
8) $1000a^{12}b^3+0{,}001c^6d^{15}$.

754.° Írjátok fel a kifejezést szorzat alakban:

1) a^6-8;
2) $m^{12}+27$;
3) $a^3-b^{15}c^{18}$;
4) $1-a^{21}b^9$;
5) $125c^3d^3+0{,}008b^3$;
6) $\frac{64}{729}x^3-\frac{27}{1000}y^6$.

755.° Határozzátok meg a kifejezés értékét, felhasználva a köbök összegének, vagy a különbségének képletét:

1) $\dfrac{9^3+7^3}{32}$;

2) $\dfrac{16^3-10^3}{24}$.

756.° Írjátok fel polinom alakban:

1) $(x-2)(x^2+2x+4)$;

2) $(2a-1)(4a^2+2a+1)$;

3) $(a^2+1)(a^4-a^2+1)$;

4) $(0{,}5xy+2)(0{,}25x^2y^2-xy+4)$.

757.° Végezzétek el a szorzást:

1) $(b-4)(b^2+4b+16)$;

2) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$;

3) $(x^3+6y^2)(x^6-6x3y^2+36y^4)$;

4) $\left(\dfrac{1}{4}a-\dfrac{1}{5}b\right)\left(\dfrac{1}{16}a^2+\dfrac{1}{20}ab+\dfrac{1}{25}b^2\right)$.

758.° Egyszerűsítsétek a kifejezést és határozzátok meg az értékét:

1) $(9a^2+3a+1)(3a-1)$, ha $a=\dfrac{1}{3}$;

2) $(5y-2)(25y^2+10y+4)+8$, ha $y=-\dfrac{1}{5}$.

759.° Egyszerűsítsétek a kifejezést és határozzátok meg az értékét:

1) $(1-b^2)(1+b^2+b^4)$, ha $b=-2$;

2) $2x^3+7-(x+1)(x^2-x+1)$, ha $x=-1$.

760.• Bontsátok tényezőkre:

1) $(a+6)^3-27$;

2) $(2x-1)^3+64$;

3) $8a^6-(4a-3)^3$;

4) $1000+(y-10)^3$;

5) $(x+y)^3-(x-y)^3$;

6) $(a-2)^3+(a+2)^3$.

761.• Írjátok fel szorzat alakjában a kifejezést:
1) $(b-5)^3+125$;
2) $(4-3x)^3-8x^3$;
3) $(a-b)^3+(a+b)^3$;
4) $(c+3)^3-(c-3)^3$.

762.• Egyszerűsítsétek a kifejezést:
1) $(x+1)(x^2-x+1)+(2-x)(4+2x+x^2)$;
2) $(x-4)(x^2+4x+16)-x(x-5)(x+5)$;
3) $a(a-3)^2-(a+3)(a^2-3a+9)$;
4) $(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)(a^6+1)(a^{12}+1)$.

763.• Egyszerűsítsétek a kifejezést:
1) $(a-5)(a^2+5a+25)-(a-1)(a^2+a+1)$;
2) $(y-3)(y^2+3y+9)-y(y-3)(y+3)-(y+3)^2$;
3) $(a-b)(a+b)(a^4+a^2b^2+b^4)$.

764.• A csillagot olyan egytagú algebrai kifejezéssel helyettesítsétek, hogy azonosságot kapjunk:
1) $(7k-p)(* + * + *) = 343k^3-p^3$;
2) $(* + *)(25a^4 - * + 36b^2) = 125a^6+216b^3$;
3) $(mn + *)(* - * + k^6) = m^3n^3+k^9$.

765.• Oldjátok meg az egyenletet:
1) $(3x-1)(9x^2+3x+1)-9x(3x^2-4)=17$;
2) $(x+4)(x^2-4x+16)-x(x-7)(x+7)=15$;
3) $(x+6)(x^2-6x+36)-x(x-9)^2=4x(4{,}5x-13{,}5)$.

766.• Oldjátok meg az egyenletet:
1) $(7-2x)(49+14x+4x^2)+2x(2x-5)(2x+5)=43$;
2) $100(0{,}2x+1)(0{,}04x^2-0{,}2x+1)=5x(0{,}16x^2-4)$.

767.•• Bizonyítsátok be, hogy:
1) 456^3-156^3 osztható 300-zal;
2) 254^3+238^3 osztható 123-mal;
3) 17^6-1 maradék nélkül osztható 36-tal!

768.•• Bizonyítsátok be, hogy:
1) 341^3+109^3 osztható 90-nel;
2) $2^{15}+3^3$ maradék nélkül osztható 35-tel!

769.•• Határozzátok meg azt a legkisebb n természetes számot, amellyel az $x^{2n} - y^{3n}$ kifejezés szorzótényezőkre bontható mind a négyzetek, mind a köbök különbségének képlete alapján! Bontsátok tényezőkre mindkét képlet segítségével.

770.•• Gondoljatok ki olyan többtagot, amelyet szorzótényezőkre bonthattok a négyzetek és a köbök különbségének a képletével is! A gondolt többtagot bontsátok tényezőkre a fenti képletek alapján!

771.•• Igaz-e az állítás, miszerint ha két természetes szám összege maradék nélkül osztható egy harmadikkal, akkor ezzel a számmal maradék nélkül osztható:

1) négyzeteik különbsége;
2) négyzeteik összege;
3) köbeik összege?

772.•• Bizonyítsátok be, hogy két egymást követő páratlan szám köbeinek összege osztható 4-gyel!

773.•• Bizonyítsátok be, hogy két egymást követő természetes szám köbeinek összege, melyek közül egyik sem a 3 többszöröse, osztható 9-cel!

774.•• Ismeretes, hogy $x^2 + y^2 = 1$. Határozzátok meg az $x^6 + 3x^2 y^2 + y^6$ kifejezés értékét!

775.•• Ismeretes, hogy $x^3 - y^2 = 2$. Határozzátok meg az $x^9 - 6x^3 y^2 - y^6$ kifejezés értékét!

776.•• Bizonyítsátok be, hogyha $2a - b = 1$, akkor $8a^3 - b^3 = 6ab + 1$!

777.•• Bizonyítsátok be, hogyha $a + 3b = 2$, akkor $a^3 + 27b^3 = 8 - 18ab$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

778. Akciókat két üzletben tartanak. A Divatos ruhák üzletben egy bizonyos cég bármely ingje 600 hrivnyába kerül, és ha két inget vásárol, akkor a második ingre 60%-os kedvezmény. A Modern ruhák üzletben ugyanennek a cégnek az inge 550 hrivnyába kerül, két ing vásárlásakor pedig a második ing árából 40% a kedvezmény. Melyik üzletben jövedelmezőbb két inget venni?

779. Az egyik ládában 12 kg-mal több alma volt, mint a másikban. Amikor 4 kg almát átraktak az első ládából a másodikba, kiderült, hogy a második ládában lévő almák tömege az elsőben lévő almák tömegének $\frac{5}{7}$-e. Hány kilogramm alma volt eredetileg mindkét ládában?

780. Milyen lesz az utolsó számjegye a $3^{16} + 7^{16}$ kifejezés értékének!

781. Határozzátok meg az adott kifejezések értékeit, ha a = 1 és a = –1:

1) $a + a^2 + a^3 + a^4 + ... + a^{99} + a^{100}$;
2) $a + a^2 + a^3 + a^4 + ... + a^{98} + a^{99}$;
3) $aa^2a^3a^4 ... a^{99}a^{100}$;
4) $aa^2a^3a^4 ... a^{98}a^{99}$.

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

782. Bontsátok tényezőkre:

1) $3x^2 + 12xy$;
2) $10m^5 - 5m$;
3) $ab - ac + 7b - 7c$;
4) $6x - xy - 6y + y^2$;
5) $49b^2 - c^2$;
6) $p^2 + 12pk + 36k^2$;
7) $100a^4 - \frac{1}{9}b^2$;
8) $25a^2 - (a - 3)^2$.

783. Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(x - 4)(x + 3) = 0$;
2) $x^2 - 81 = 0$;
3) $7x^2 + 21x = 0$;
4) $9x^2 - 6x + 1 = 0$;
5) $x(x + 7)(3x - 2) = 0$;
6) $12x^3 - 2x^2 = 0$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

784. 100 kupac érme van, egyenként 100 érmével. Az egyik kupac hamis pénzérmékből áll, amelyek mindegyike 1 grammal könnyebb, mint az igazi. Egy valódi érme tömege 10 g. Mennyi a legkisebb mérlegelési szám egy nyíllal ellátott rugós mérlegen, hogy megtaláljuk a csomó hamis érmét?

19. Polinomok tényezőkre bontásának különböző módszerei

Az előzőkben a polinomok tényezőkre bontásának három módszerével ismerkedtünk meg:

- közös tényező kiemelésével;
- csoportosítási módszerrel;
- rövidített szorzás képleteinek felhasználásával.

Több matematikai feladat megoldása során gyakran többféle módszer bizonyos sorrendben történő együttes használatára van szükség. Egyebek között számtalan olyan polinom létezik, melyeknek tényezőkre bontásához egyszerre többféle módszert kell alkalmazni.

Felmerül a jogos kérdés: milyen módszereket, és milyen sorrendben kell alkalmaznunk a polinomok tényezőkre való felbontásakor? Mindent figyelembe vevő eljárás nem létezik, minden a konkrét többtagtól függ. Mégis megfogalmazunk néhány általános útmutatást:

1) ha lehetséges, a felbontást a közös tényező kiemelésével kezdjük;

2) a továbbiakban megvizsgáljuk a rövidített szorzás képletei felhasználásának lehetőségét;

3) ha nem használhatók a rövidített szorzás képletei, meg kell próbálni a csoportosítási módszert.

PÉLDA 1 Bontsátok tényezőkre a többtagú kifejezést:

1) $3a^2b - 12b$; 3) $24m^4 + 3m$;
2) $-5x^2 + 30xy - 45y^2$; 4) $3a^3 + 21a^2 - 6a^2b - 42ab$.

Megoldás: 1) Előbb kiemeljük a zárójel elé a közös tényezőt, majd felhasználva a négyzetek különbségének a képletét, a következőt kapjuk:

$$3a^2b - 12b = 3b\,(a^2 - 4) = 3b\,(a - 2)\,(a + 2).$$

2) Előbb kiemeljük a zárójel elé a közös tényezőt, majd felhasználva a különbségek négyzetének a képletét, a következőt kapjuk:

$$-5x^2 + 30xy - 45y^2 = -5\,(x^2 - 6xy + 9y^2) = -5\,(x - 3y)^2.$$

3) Előbb kiemeljük a tényezőt a zárójel elé, és felhasználjuk a köbök összegének képletét:

$$24m^4 + 3m = 3m\,(8m^3 + 1) = 3m\,(2m + 1)\,(4m^2 - 2m + 1).$$

4) Kombinálva a közös tényező kiemelését a csoportosítás módszerével, a következőt kapjuk:

$$3a^3 + 21a^2 - 6a^2b - 42ab = 3a\,(a^2 + 7a - 2ab - 14b) =$$
$$= 3a\,((a^2 + 7a) + (-2ab - 14b)) =$$
$$= 3a\,(a\,(a + 7) - 2b\,(a + 7)) = 3a\,(a + 7)\,(a - 2b). ◀$$

PÉLDA 2 Írjátok fel a polinomok szorzataként:

1) $x^{16} - 1$; 2) $a^{12} - b^{12}$.

Megoldás:

1) $x^{16} - 1 = (x^8 - 1)\,(x^8 + 1) = (x^4 - 1)\,(x^4 + 1)\,(x^8 + 1) =$
$$= (x^2 - 1)\,(x^2 + 1)\,(x^4 + 1)\,(x^8 + 1) =$$
$$= (x - 1)\,(x + 1)\,(x^2 + 1)\,(x^4 + 1)\,(x^8 + 1).$$

2) $a^{12} - b^{12} = (a^6 - b^6)\,(a^6 + b^6) = (a^3 - b^3)\,(a^3 + b^3)\,(a^6 + b^6)$.

Három szorzótényezőt kaptunk, melyek közül az egyik köbök különbsége, a másik kettő pedig köbök összege. A megfelelő képletek segítségével a következőt kapjuk:

$$a^{12} - b^{12} = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)\,(a + b)\,\times$$
$$\times\,(a^2 - ab + b^2)\,(a^2 + b^2)\,(a^4 - a^2b^2 + b^4). ◀$$

PÉLDA 3 Bontsátok fel tényezőkre.

1) $m^2 - 16n^2 + 2m - 8n$; 2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16$.

Megoldás: 1) $m^2 - 16n^2 + 2m - 8n =$
$$= (m^2 - 16n^2) + (2m - 8n) = (m - 4n)\,(m + 4n) +$$
$$+ 2\,(m - 4n) = (m - 4n)\,(m + 4n + 2).$$

2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16 = (x^2 + 4xy + 4y^2) - 16 =$
$= (x + 2y)^2 - 4^2 = (x + 2y - 4)\,(x + 2y + 4)$. ◀

PÉLDA 4 Oldjátok meg az

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0 \text{ egyenletet.}$$

Megoldás:

$$x^2(x+1)-4(x+1)=0;$$
$$(x+1)(x^2-4)=0;$$
$$(x+1)(x-2)(x+2)=0;$$
$$x+1=0,\text{ або } x-2=0,\text{ або } x+2=0;$$
$$x=-1,\text{ або } x=2,\text{ або } x=-2.$$

Felelet: –1; 2; –2. ◀

PÉLDA 5 Bontsátok tényezőkre az x^2+8x-9 polinomot, kiemelve először a kéttag négyzetét!

Megoldás: Ha az x^2+8x összeghez hozzáadunk 16-ot, akkor a kapott $x^2+8x+16$ kifejezést felírhatjuk az összeg négyzetének a képlete alapján. Hozzáadva és kivonva a háromtagból 16-ot, a következő kifejezést kapjuk:

$$x^2+8x-9=x^2+8x+16-16-9=(x+4)^2-25=$$
$$=(x+4-5)(x+4+5)=(x-1)(x+9).$$ ◀

PÉLDA 6 Bontsátok tényezőkre az x^4+4y^4 polinomot.

Megoldás: Mivel $x^4=(x^2)^2$, $4y^4=(2y^2)^2$, ezért a polinomhoz hozzáadva, majd kivonva belőle a $4x^2y^2$ egytagot (az x^2 és $2y^2$ egytagok kétszeres szorzatát), a következőt kapjuk:

$$x^4+4y^4=x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2=(x^2+2y^2)^2-4x^2y^2=$$
$$=(x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy).$$ ◀

GYAKORLATOK

785.° Fejezzétek be a tényezőre bontát:

1) $7a^2-7b^2=7(a^2-b^2)=\ldots;$

2) $3y^3-27y=3y(y^2-9)=\ldots;$

3) $m^5-m^3=m^3(m^2-1)=\ldots;$

4) $\frac{49}{64}x^2y^3z^6-0{,}04yz^8=yz^6\left(\frac{49}{64}x^2y^2-0{,}04z^2\right)=\ldots.$

786.° Bontsátok tényezőkre a polinomot:

1) $2a^2 - 2b^2$;
2) $cx^2 - cy^2$;
3) $3x^2 - 3$;
4) $3ab^2 - 27a$;
5) $x^3 - 4x$;
6) $2y^3 - 18y$;
7) $x^4 - x^2$;
8) $0{,}09t^4 - t^6$;
9) $\frac{16}{49}a^2b^4c^5 - b^2c^3$.

787.° Írjátok fel polinomok szorzataként:

1) $12b^2 - 12c^2$;
2) $2a^2c - 2b^2c$;
3) $5a^2 - 20$;
4) $3mn^2 - 48m$;
5) $7y^3 - 7y$;
6) $a^3 - a^5$.

788.° Fejezzétek be a tényezőrebontást:

1) $9a^2b^2 - 6ab^2 + b^2 = b^2 (9a^2 - 6a + 1) = \ldots$;
2) $4b^2c - 20abc + 25a^2c = c (4b^2 - 20ab + 25a^2) = \ldots$;
3) $-3m^3 + 6m^2n - 3mn^2 = -3m (m^2 - 2mn + n^2) = \ldots$.

789.° Bontsátok tényezőkre:

1) $3a^2 + 6ab + 3b^2$;
2) $5m^2 + 5n^2 - 10mn$;
3) $-3x^2 + 12x - 12$;
4) $-7b^2 - 14bc - 7c^2$;
5) $x^2y + 14xy^2 + 49y^3$;
6) $-8a^3b + 56a^2b^2 - 98ab^3$.

790.° Bontsátok tényezőkre:

1) $8x^2 + 16xy + 8y^2$;
2) $-2a^2 + 24ab - 72b^2$;
3) $-12b^3 - 12b^2 - 3b$;
4) $48m^3n - 72m^2n + 27mn$.

791.• Fejezzétek be a tényezőrebontást:

1) $a^4 - 10\,000 = (a^2)^2 - 100^2 = (a^2 - 100)(a^2 + 100) = \ldots$;
2) $m^8 - n^4 = (m^4)^2 - (n^2)^2 = (m^4 - n^2)(m^4 + n^2) = \ldots$.

792.• Írjátok fel polinomok szorzataként:

1) $a^4 - b^4$;
2) $c^4 - 81$.

793.• Bontsátok tényezőkre:

1) $x^4 - 16$;
2) $y^8 - 1$.

794.• Fejezzétek be a tényezőrebontást:

1) $16x - 2x^4 = 2x (8 - x^3) = \ldots$;
2) $3a^5 + 375a^2 = 3a^2 (a^3 + 125) = \ldots$.

795.• Bontsátok tényezőkre:

1) $4a^3 - 4b^3$; 3) $7 + 7b^3$; 5) $2a^4 - 250a$;
2) $2m^3 - 16$; 4) $-x^4 + 27x$; 6) $9a^5 - 9a^2$.

796.• Írjátok fel polinomok szorzataként:

1) $3x^3 + 3y^3$; 2) $5m^4 - 320mn^3$; 3) $6c^5 - 6c^8$.

797.• Bontsátok tényezőkre:

1) $a^7 + ab^6$; 2) $x^8 - y^8$; 3) $c^6 - 1$.

798.• Bontsátok tényezőkre:

1) $c^6 + c^9$; 2) $m^9 - n^9$; 3) $a^8 - b^4$.

799.• Írjátok fel polinomok szorzataként:

1) $3ab + 15b - 3a - 15$; 5) $a^3 + a^2 - a - 1$;
2) $84 - 42y - 7xy + 14x$; 6) $2x^3 - 2xy^2 - 8x^2 + 8y^2$;
3) $abc + 6ac + 8ab + 48a$; 7) $5a^2 - 5b^2 - 15a^3b + 15ab^3$;
4) $m^3 - m^2n + m^2 - mn$; 8) $a^2b^2 - 1 - b^2 + a^2$.

800.• Bontsátok tényezőkre:

1) $15cx + 2cy - cxy - 30c$;
2) $35a^2 - 42ab + 10a^2b - 12ab^2$;
3) $x^3 + x^2y + x^2 + xy$;
4) $mn^4 - n^4 + mn^3 - n^3$.

801.• Bontsátok tényezőkre:

1) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$;
2) $81 - (x^2 + 6x)^2$.

802.• Írjátok fel szorzatként a kifejezést:

1) $(m^2 - 2m)^2 - 1$;
2) $16 - (m^2 + 4m)^2$.

803.• Bontsátok tényezőkre:

1) $x^2(x - 2) - 18x(x - 2) + 81(x - 2)$;
2) $4x(y^2 - 9) + 4x^2(y^2 - 9) - 9 + y^2$;
3) $b^2(a + 1) - a^2(b + 1)$;
4) $(a - b)(b^2 - c^2) - (b - c)(a^2 - b^2)$.

804.• Írjátok fel szorzatként a kifejezést:

1) $x^2(x + 4) - 20x(x + 4) + 100(x + 4)$;
2) $a^2 - 36 - 2a(36 - a^2) - a^2(36 - a^2)$;

3) $a^2(b - 1) - b^2(a - 1)$;
4) $(m - n)(n^3 - p^3) - (n - p)(m^3 - n^3)$.

805.• Oldjátok meg az egyenletet:
1) $x^3 - 4x = 0$;
2) $x^4 - x^2 = 0$;
3) $x^5 - 36x^3 = 0$;
4) $9x^3 - x = 0$;
5) $x^3 - 10x^2 + 25x = 0$;
6) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$;
7) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$;
8) $x^5 - x4 - x + 1 = 0$.

806.• Oldjátok meg az egyenletet:
1) $x^3 - x = 0$;
2) $x^4 + x^2 = 0$;
3) $x^4 - 8x^3 = 0$;
4) $49x^3 + 14x^2 + x = 0$;
5) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$;
6) $x^3 - 4x^2 - 25x + 100 = 0$.

807.• Azonosság -e az egyenlőség:
1) $(a - 1)^3 - 9(a - 1) = (a - 1)(a - 4)(a + 2)$;
2) $(x^2 + 1)^2 - 4x^2 = (x - 1)^2 (x + 1)^2$?

808.• Bizonyítsátok be az azonosságot:
1) $(a + 2)^3 - 25(a + 2) = (a + 2)(a + 7)(a - 3)$;
2) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2 = (a + b + c - d)(a + b - c + d)$.

809.• Bontsátok tényezőkre a kifejezéseket kétféleképpen:
a) használjátok a négyzetek különbségének képletét;
b) bontsátok fel a zárójeleket, majd csoportosítsátok a kifejezéseket:
1) $(ab + 1)^2 - (a + b)^2$;
2) $(a + 2b)^2 - (ab + 2)^2$.

810.•• Bontsátok tényezőkre:
1) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$;
2) $c^2 + 4c + 4 - k^2$;
3) $9a^2 + c^2 + 6ac - 9$;
4) $a^2 - b^2 - 10b - 25$;
5) $49 - y^2 + x^2 - 14x$;
6) $mn^2 - m^3 - 12m^2 - 36m$.

811.•• Írjátok fel szorzatként a kifejezést:
1) $x^2 - 18xy + 81y^2 - z^2$;
2) $64x^2 + 48xy + 9y^2 - 144$;
3) $c^2 - a^2 + 22a - 121$;
4) $100 - 25y^2 - 60x^2y - 36x^4$.

812.•• Bontsátok tényezőkre:

1) $a^2 - b^2 - a - b$;
2) $x - y - x^2 + y^2$;
3) $4m^2 - 9n^2 + 2m + 3n$;
4) $c^2 - d^2 + 4c - 4d$;
5) $5x^2y - 5xy^2 - x^2 + y^2$;
6) $a^2 - 10a + 25 - ab + 5b$;
7) $8mp + 8np - m^2 - 2mn - n^2$;
8) $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2$;
9) $m^3 - 8n^3 - m^2 + 4mn - 4n^2$;
10) $a^3 - 4a^2 + 4a - 1$.

813.•• Bontsátok tényezőkre:

1) $m^2 - n^2 - m + n$;
2) $c + d - c^2 + d^2$;
3) $16x^2 - 25y^2 - 4x - 5y$;
4) $12a^2b^3 + 3a^3b^2 + 16b^2 - a^2$;
5) $49c^2 - 14c + 1 - 21ac + 3a$;
6) $ax^2 + ay^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$;
7) $27c^3 - d^3 + 9c^2 + 3cd + d^2$;
8) $b^3 - 2b^2 - 2b + 1$.

814.•• Írjátok fel a kifejezést kéttag köbeként:

1) $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$;
2) $b^3 - 6b^2 + 12b - 8$.

815.•• Bizonyítsátok be az azonosságot:

1) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(a + c)$;
2) $(a - b)^3 + (b - c)^3 - (a - c)^3 = -3(a - b)(b - c)(a - c)$.

816.•• Bontsátok tényezőkre:

1) $(x - y)(x + y) + 2(x + 3y) - 8$;
2) $(2a - 3b)(2a + 3b) - 4(a + 3b) - 3$.

817.•• Írjátok fel szorzatként:

1) $(5x - y^2)(5x + y^2) - 2(15x - 7y^2) - 40$;
2) $(3m - 2n)(12m + 5n) + 3m(3n + 4) - 2(3n^2 - 20n + 12)$.

818.•• Bontsátok tényezőkre a polinomot, előzőleg kiemelve a kéttag négyzetét:

1) $x^2 - 10x + 24$;
2) $a^2 + 4a - 32$;
3) $b^2 - 3b - 4$;
4) $4a^2 - 12a + 5$;
5) $9x^2 - 24xy + 7y^2$;
6) $36m^2 - 60mn + 21n^2$.

819.•• Bontsátok tényezőkre a polinomot:

1) $x^2 - 10x + 24$;
2) $a^2 + 4a - 32$;
3) $b^2 - 3b - 4$;
4) $4a^2 - 12a + 5$;
5) $9x^2 - 24xy + 7y^2$;
6) $36m^2 - 60mn + 21n^2$.

820.•• Az x_1 és x_2 értékeire érvényesek az $x_2 - x_1 = 8$ és $x_1 \cdot x_2 = 5$ értékeire egyenlőségek. Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $x_1x_2^2 - x_1^2x_2$; 2) $x_1^2 + x_2^2$; 3) $(x_1 + x_2)^2$; 4) $x_1^3 - x_2^3$.

821.•• Az x és y értékei olyanok, hogy $x + y = 6$, $xy = -3$. Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $x^3y^2 + x^2y^3$; 2) $(x - y)^2$; 3) $x^4 + y^4$.

822.* Bizonyítsátok be, hogy bármilyen természetes n értékre a $(2n-1)^3 - 4n^2 + 2n + 1$ osztható 16-tal!

823.* Bontsátok tényezőkre:

1) $x^4 - 5x^2 + 4$;
2) $x^4 + x^2 + 1$;
3) $4x^4 - 12x^2 + 1$;
4) $x^5 + x + 1$;
5) $x^4 + 4$;
6) $x^8 + x^4 - 2$.

824.* Írjátok fel szorzatként a kifejezést:

1) $x^4 + 5x^2 + 9$; 2) $x^4 - 8x^2 + 4$.

825.* Bizonyítsátok be, hogy tetszőleges, 1-től eltérő n természetes szám esetén az $n^4 + n^2 + 1$ kifejezés értéke összetett szám lesz!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

826. Fizetési terminálon keresztül történő szolgáltatások fizetése esetén 3 % díjat számítanak fel. A terminál 10 hrivnya többszörösét fogadja el. Anna legalább 200 hrivnyával szeretné feltölteni mobiltelefonszámláját. Mennyi a legkevesebb pénz, amit ezen a terminálon keresztül kell fizetnie?

827. Három szám van megadva, minden következő 4-gyel több, mint az előző. Határozzuk meg ezeket a számokat, ha közülük a legkisebb és a legnagyobb szorzata 88-cal kisebb, mint a legnagyobb és a középső szorzata!

828. Peti 2,5 km/h-s sebességgel ment fel egy hegyre, majd 4 km/h-s sebességgel ment le egy másik úton. Határozza meg Peti által megtett teljes távolságot, ha a hegyre felfelé vezető út 3 km-rel rövidebb, mint a hegyről lefelé az út, és a teljes útra fordított idő 4 óra!

829. Oldjátok meg az egyenletet:

1) $|7x - 3| = 4$;
2) $||x| - 10| = 8$;
3) $4(x - 2) + 5|x| = 10$;
4) $|x| = 3x - 8$.

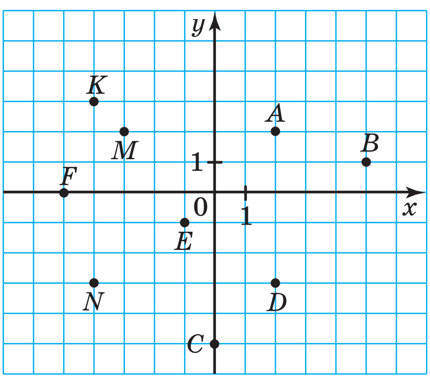
830. Bizonyítsátok be, hogy a háromjegyű szám és a számjegyeinek összegének kétszerese osztható 3-mal!

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

831. Számítsátok ki az y értékét az $y = 0{,}2x - 3$ képlet segítségével, ha:

1) $x = 4$;
2) $x = -3$.

832. A 11. ábra alapján határozzátok meg az A, B, C, D, E, F, K, M és N pontok koordinátáit.



11. ábra

833. Tüntessétek fel a koordinátasíkon az A (2; 3), B (4; 5), C (–3; 7), D (–2; 2), K (–2; –2), M (0; 2), N (–3; 0), P (1; –6), F (–4; –2) pontokat!

834. Szerkesszétek meg az AB és CD szakaszokat, majd határozzátok meg metszéspontjuk koordinátáit, ha A (–5; –2), B (1; 4), C (–3; 2) és D (2; –3)!

835. Hogyan helyezkednek el a koordinátasíkon az x tengelyhez viszonyítva a következő pontok:

1) A (2; 6);
2) B (–3; 1);
3) C (–4; –5);
4) D (–3; 0)?

836. Határozzátok meg a 4 egység oldalú négyzet csúcsainak koordinátáit, ha két oldala a koordinátatengelyen fekszik, az egyik csúcsa koordinátáinak szorzata pedig pozitív szám. Hány megoldása van a feladatnak?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

837. Legyen az x_1 , x_2, ..., x_{25} tetszőleges természetes számok halmaza, az y_1 , y_2, ..., y_{25} az előző halmaz néhány tagja áthelyezése után kapott számsor. Bizonyítsátok be, hogy az $(x_1 - y_1) \cdot (x_2 - y_2)$ ... ... $(x_{25} - y_{25})$ kifejezés értéke páros szám lesz!

5. SZÁMÚ FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. Adjátok meg az $(x - 6)(x^2 + 6x + 36)$ kifejezést többtag alakjában!

A) $x^3 - 36$;
B) $x^3 + 36$;
C) $x^3 - 216$;
Г) $x^3 + 216$.

2. Határozzátok meg az M többtagot, ha $y^3 - 64 = (y - 4) \cdot M$!

A) $y^2 - 8y + 16$;
B) $y^2 + 8y + 16$;
C) $y^2 - 4y + 16$;
D) $y^2 + 4y + 16$.

3. Egyszerűsítsétek le az $(a^2 + 2b^3)(a^4 - 2a^2b^3 + 4b^6)$ kifejezést!

A) $a^6 + 4b^9$;
B) $a^6 - 4b^9$;
C) $a^6 - 8b^9$;
D) $a^6 + 8b^9$.

4. Írjátok fel a $3c^2 - 48$ többtagot szorzat alakjában!

A) $3\,(c - 16)$; C) $3\,(c - 4)^2$;
B) $3\,(c - 4)\,(c + 4)$; D) $3c\,(c - 16)$.

5. Írjátok fel a $7a^2 - 42a + 63$ kifejezést szorzat alakjában!

A) $7\,(a - 3)\,(a + 3)$; C) $7\,(a + 3)^2$;
B) $7\,(a - 3)^2$; D) $7\,(a - 9)^2$.

6. Adjátok meg az $a^8 - a^6$ többtagot szorzat alakjában!

A) $a^6\,(a - 1)$; C) $a^6\,(a + 1)^2$;
B) $a^6\,(a - 1)\,(a + 1)$; D) $a^6\,(a - 1)^2$.

7. Írjátok fel az $m^2 - n^2 + m + n$ kifejezést szorzat alakjában!

A) $(m + n)\,(m - n + 1)$;
B) $(m - n)\,(m - n + 1)$;
C) $(m - n)\,(m + n + 1)$;
D) $(m + n)\,(m + n + 1)$.

8. Adjátok meg az $x^2 - y^2 + 14y - 49$ kifejezést szorzat alakjában.

A) $(x - y + 7)\,(x + y + 7)$;
B) $(x - y - 7)\,(x + y + 7)$;
C) $(x - y + 7)\,(x + y - 7)$;
D) $(x - y - 7)\,(x + y - 7)$.

9. Írjátok fel a $81a^4 - 1$ többtagot szorzat alakjában!

A) $(3a - 1)\,(3a + 1)\,(9a^2 + 1)$;
B) $(3a^2 - 1)\,(3a^2 + 1)\,(9a^2 + 1)$;
C) $(3a - 1)^2\,(3a + 1)^2$;
D) $(3a - 1)^4$.

10. Oldjátok meg a $49x - x^2 = 0$ egyenletet!

A) 0; 7; C) 0; 49;
B) –7; 0; 7; D) –7; 7.

11. Oldjátok meg az $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ egyenletet!

A) –1; 1; C) 1; 3;
B) –1; 3; D) –3; –1; 1.

12. Adjátok meg az $(x^2 - 2)^2 - 4\,(x^2 - 2) + 4$ kifejezést szorzat alakjában!

A) $(x - 4)^2$; C) x^4;
B) $(x - 2)^2\,(x + 2)^2$; D) $(x^2 - 6)^2$.

A mindenki számára érthető nyelv

Az alábbiakban három nyelven – arabul, kínaiul és héberül – írtuk fel a mindenki számára ismert tulajdonságot: az összeadandók felcserélésétől az összeg nem változik.

في الجمع تبديل أماكن الأعداد لا يغير النتيجة

加数的次序不影响加和的结果

כאשר מחברים שני מספרים, אין חשיבות לשאלה מי הראשון ומי השני.

Ha az ember nem ismeri ezeket a nyelveket, természetesen még ezt az egyszerű mondatot sem érti meg. Itt siet a segítségünkre a nemzetközi matematikai nyelv, amelyen a fenti tulajdonság a következőképpen írható fel:

$$a + b = b + a.$$

Mint minden nyelvnek, a matematikainak is megvan a saját ábécéje – a matematikai szimbólumok. Ezek számok, betűk, műveleti jelek stb. Ezekből állnak össze a matematikai nyelv szavai, például a kifejezések. A szavak mondatokat alkotnak, például a képleteket stb.

Azt gondolhatnánk, nincs annál könnyebb, mint felírni a $2x = 4$ lineáris egyenletet. Viszont ezt még a nagy al-Hárizmi[3] is jóval hosszabban írta fel: Két gyök 4 dirhammal[4] egyenlő. Ennek az az oka, hogy al-Hárezmi idejében még nem léteztek matematikai szimbólumok.

Ez nem jelenti azt, hogy a IX. század előtt élt tudósok nem kísérelték meg a matematikai nyelv létrehozását.

---

[3] A 13, 14 oldalakon olvashattatok róla

[4] Dirham – ókori arab ezüstpénz

Még az I. században Alexandriai Héron görög matematikus az ismeretlent a ζ (kszi) betűvel jelölte meg. A szimbólumok létrehozásában a következő lépést a III. században Alexandriai Diophantosz tette meg. Az *Aritmetika* című híres művében nemcsak az ismeretlen jelölését vezette be, hanem annak néhány hatványát is:

első hatvány	—	σ;
második hatvány	—	Δ^{v} (Δυναμι ς – *dunamis, ami erőt, hatványt jelent*);
harmadik hatvány	—	K^{v} (Κυβος – «*kubosz*, azaz *köb*).

Egyenlőségként Diophantosz az ισ jelet használta – az ισοζ – iszosz szó első két betűjét, ami *egyenlőt* jelent.

Diophantosz jeleinek nem egyszerű a használata. Például az összeadás és szorzás műveleteire nem vezetett be semmilyen külön szimbólumot. Az összes ismeretlen egyetlen ζ betűvel való jelölése megnehezítette a többismeretlenes egyenletek megoldását. A kor hanyatlásával a Diophantosz által bevezetett algebrai szimbólumok is feledésbe merültek.

Az algebrai szimbólumok létrehozása a tehetséges német tudós, Jordanus Nemorarius munkáinak köszönhetően a XIII. században újult meg. Ő élesztette újjá az európai matematikában a betűszimbólum ötletét.

A XV. században a neves olasz matematikus, Luca Pacioli által használt szimbólumok terjedtek el széles körben.

Sokat tettek a matematikai szimbólumok tökéletesítésében a XVI. században élt Johannes Widman és Adam Riese német matematikusok is.

A betűszimbólumok megalkotójának joggal tekinthető az egyik leghíresebb francia matematikus, a XVI. században élt Francois Viéte. Ő elsőként nemcsak a változókat, hanem a mennyiségek értékét is betűkkel jelölte meg. Viéte a következőt ajánlotta:

Francois Viйte
(1540–1603)

A keresett mennyiségeket A vagy másik magánhangzóval (E, I, O, U) jelöljük, az adott mennyiségeket pedig B, D, G vagy további mássalhangzókkal. Ezek a jelölések nemcsak egyes egyenletek megoldásához nyújtottak lehetőséget Viétenek, hanem egy teljes csoport egyenlet megoldási folyamatának a vizsgálatához is. Például Viéte szimbólumainak köszönhetően írhatjuk fel a lineáris egyenletet ($ax = b$) a 2. pontban bemutatott alakban.

A népek nyelve folyamatosan fejlődik. Nincs ez másként a matematikában sem. Az új felfedezések új szakkifejezések és szimbólumok bevezetésével járnak.

Az ukrán matematikai szaknyelv fejlesztésében és rendszerezésében nagy szerepe volt Volodimir Levickijnek, a lvivi (lembergi) egyetem fizika-matematika szakos professzorának. Tudományos munkái nagy mértékben elősegítették az ukrán matematikai iskola létrejöttét és fejlődését.

Az ukrán matematikai terminológia fejlesztéséhez és rendszerezéséhez Volodimir Josipovics Levitszkij, a Lvivi Egyetem Fizikai és Matematikai Karának munkatársa nagyban hozzájárult. Tudomá-

V. Levickij
(1872–1956)

M. Zarickij
(1889–1961)

nyos és módszertani munkái nagymértékben hozzájárultak az ukrán matematikai iskola kialakulásához és fejlődéséhez.

Az ukrán matematikai kultúra megalapítójának egyértelműen az európai hírű tudóst, a filozófia doktorát, Miron Zarickij professzort tekintik. Tudományos és módszertani munkái nagymértékben hozzájárultak az ukrán matematikai iskola kialakulásához és fejlődéséhez.

A 1. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Változót tartalmazó kifejezés

Az olyan kifejezést, amely számokat, betűket, matematikai műveleteket, zárójeleket tartalmaz, betűkifejezésnek vagy változót tartalmazó kifejezésnek nevezzük.

Algebrai kifejezések

Számkifejezések és változókat tartalmazó kifejezések (betűkifejezések) alkotják az algebrai kifejezéseket.

Egész algebrai kifejezés

Az olyan kifejezést, amelyikben nem szerepel változóval való osztás, egész algebrai kifejezésnek nevezzük.

Egyváltozós lineáris egyenlet

Az $ax = b$ alakú egyenletet, ahol x változó, az a és b tetszőleges számok, egyváltozós lineáris egyenletnek nevezzük.

Az egyváltozós lineáris egyenlet megoldása

Az a és b értékei	$a \neq 0$	$a = 0,\ b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
Az $ax = b$ egyenlet gyökei	$x = \dfrac{b}{a}$	x – bármely szám	Az egyenletnek nincs gyöke

A szöveges feladatok megoldásának algoritmusa

1) A feladat feltétele alapján felállítani az egyenletet (a feladat matematikai modelljét).
2) Megoldani a kapott egyenletet.
3) Leellenőrizni, hogy a kapott eredmény megfelel-e az adott feladat feltételének, és felírni a feleletet.

Azonosan egyenlő kifejezések

Azokat a kifejezéseket, melyeknek az értéke a változók megfelelő értékeinél egyenlők, azonosan egyenlő kifejezéseknek nevezzük.

Azonosság

Azonosságnak nevezzük a változó bármilyen értékénél azonos egyenlőségeket.

Az azonosság bizonyításának módja

- Az egyenlőség egyik oldalát átalakítva megkapjuk a másik oldalt,
- Az egyenlőség mindkét oldalát átalakítva ugyanazt a kifejezést kapjuk;
- Igazoljuk, hogy az egyenlőség bal és jobb oldalának a különbsége nulla.

Természetes kitevőjű hatvány

Az a szám n ($n > 1$) természetes kitevőjű hatványának az n darab a szám szorzatát nevezzük. Az a szám 1 kitevőjű hatványa maga az a szám.

A hatvány előjele

Nem negatív szám hatványra emelésekor az eredmény szintén nem negatív szám. Negatív szám páros hatványra emelésekor pozitív, míg páratlan hatványra emelésekor negatív számot kapunk.

A természetes kitevőjű hatvány tulajdonsága

$a^m a^n = a^{m+n}$ (a hatvány alaptulajdonsága)

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^n = a^n b^n$

Egytagú algebrai kifejezéskifejezés

A számokat, változókat és azok hatványait tartalmazó kifejezést egytagú algebrai kifejezéskifejezésnek nevezzük.

Az egytagú algebrai kifejezéskifejezés normálalakja

Az egytagú algebrai kifejezés normálalakúnak nevezzük, ha az egytagú algebrai kifejezéskifejezésben az első helyen csak egy, nullától eltérő számtényező található, a többi tényező pedig különböző alapú hatványok szorzata. Az egytagú algebrai kifejezés együtthatója A normálalakú egytagú algebrai kifejezés számtényezőjét az egytagú kifejezés együtthatójának nevezzük.

Az egytagú algebrai kifejezés együtthatója

A normálalakú egytagú algebrai kifejezés számtényezőjét az egytagú kifejezés együtthatójának nevezzük.

Az egytagú algebrai kifejezés fokszáma

Az egytagú algebrai kifejezésben lévő változók hatványkitevőinek összegét az egytagú algebrai kifejezés fokszámának nevezzük. A csak nullától eltérő számból álló egytagú kifejezés fokszáma nulla.

Polinom

Néhány egytagú algebrai kifejezés összegét polinomnak nevezzük.

A polinom normálalakja

A normálalakú egytagú algebrai kifejezésekből álló polinom, ha azok között nincs egynemű, a polinom normálalakjának nevezzük.

A polinom fokszáma

A polinom fokszámának a benne lévő legnagyobb fokszámú egytagú algebrai kifejezés hatványkitevőjét nevezzük.

Egytagú kifejezés szorzása polinommal.

Egytagú kifejezés polinommal szorzása való szorzásakor az egytagú algebrai kifejezést beszorozzuk a polinom minden tagjával, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

Polinomok szorzása

Polinomok szorzásakor az első polinom minden egyes tagját beszorozzuk a második polinom minden tagjával, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

Két kifejezés különbségének és összegének szorzata

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Két kifejezés négyzetének különbsége

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Két kifejezés összegének négyzete

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Két kifejezés különbségének négyzete

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Két kifejezés köbének összege

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Két kifejezés köbének különbsége

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

§ 2 FÜGGVÉNYEK

- Ebben a paragrafusban a mennyiségek közötti összefüggéseket fogjátok tanulmányozni.
- Megismerkedtek ezen összefüggéseket szabályozó fogalommal – a függvényekkel.
- Elsajátítjátok a függvények megadásának módjait.

20. A mennyiségek közötti összefüggések. Függvények

A tanár a táblára ír. Ez alatt változik a kréta hossza, tömege, térfogata, sőt a hőmérséklete is.

Üzemel az iskolai étkezde. A nap leforgása alatt változik az étkező tanulók száma, az elektromos energia és a víz felhasználása, a bevétel.

A körülöttünk végbemenő folyamatokban számtalan mennyiség értéke változik. Egyesek összefüggenek egymással, azaz az egyik mennyiség változása a másik változását eredményezi.

A fizika, kémia, biológia és sok más tudományág is foglalkozik a mennyiségek közötti összefüggések vizsgálatával. A reális folyamatok matematikai modelljeinek a felállításával a matematika szintén kiveszi a részét az összefüggések tanulmányozásából. A matematikai modell fogalmával a 3. pontban már találkozhattatok.

Megvizsgálunk néhány példát.

PÉLDA 1 Változik a négyzet oldala. Érthető, hogy eközben a kerülete is megváltozik. Ha a négyzet oldalát a betűvel jelöljük, a kerületét P-vel, akkor a P változónak az a változó értékeitől való függését a következő képlet segítségével adhatjuk meg:

$$P = 4a.$$

Ez a képlet a négyzet kerülete és oldalhossza közötti összefüggés matematikai modellje. Megadva az oldalhossz bármilyen értékét, a képlet segítségével meghatározható a négyzet megfelelő kerülete.

Ezért ebben a modellben az *a* **független változó**, a *P* pedig **függő változó** vagy függvény.

Kihangsúlyozzuk, hogy az adott képlet azt a szabályt adja meg, melynek segítségével a változó értéke alapján *egyértelműen* meghatározható a függvény értéke. ◀

PÉLDA 2 A család 10 000 hrivnyát tett be a bankba 10%-os kamatra. Egy év múlva a számlán lévő *M* összeg a következő lesz:

$$M = 10\,000 + \frac{10\,000 \cdot 10}{100} = 11\,000 \text{ (hrn)}.$$

Két év múlva ez az összeg így változott meg:

$$M = 11\,000 + \frac{11\,000 \cdot 10}{100} = 12\,100 \text{ (hrn)}.$$

Hasonlóképpen számítható ki, hogy három év múlva $M =$ 13 310 hrn, négy év múlva $M =$ 14 641 hrn, öt év múlva $M =$ 16 105,1 hrn.

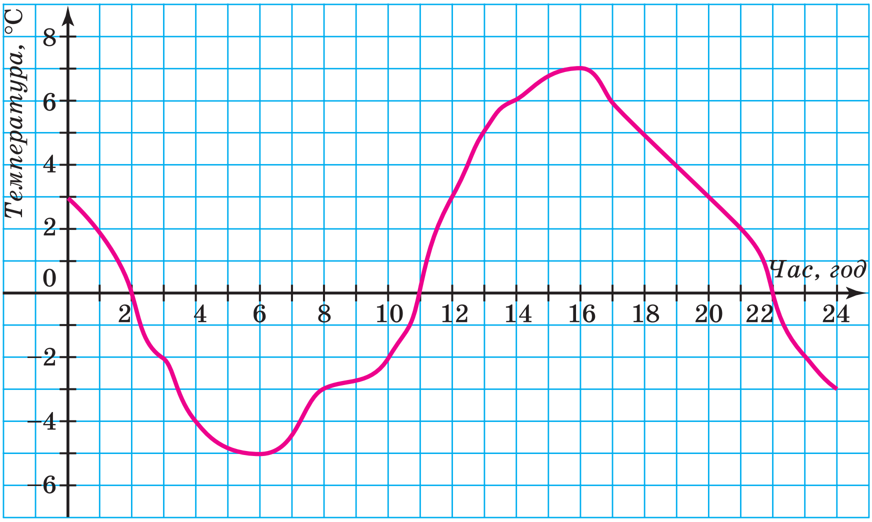
A következő táblázatban látható a számlán lévő pénzösszeg és a számlanyitás óta eltelt évek közötti összefüggés:

Évek száma n	1	2	3	4	5
A számlán lévő pénzösszeg M, hrn	11 000	12 100	13 310	14 641	16 105,1

A létrehozott táblázat az *M* és *n* mennyiségek közötti összefüggés matematikai modellje. Ebben az esetben az *n* független változó, az *M* pedig a függvény.

Kihangsúlyozzuk, hogy a táblázat azt a szabályt adja meg, amelynek segítségével a független változó értéke alapján *egyértelműen* meghatározható a függvény értéke. ◀

PÉLDA 3 A 9. ábrán a hőmérséklet és az idő közötti összefüggés grafikonja látható.



12. ábra

A grafikon segítségével bármely t időpontban meghatározható a levegő *T* hőmérséklete (°C-ban). Ebben az esetben a *t* a független változó, a *T* pedig a függvény.

A grafikonra a *T* (hőmérséklet) és *t* (idő) mennyiségek közötti összefüggés matematikai modelljeként tekinthetünk.

Megjegyezzük, hogy az adott grafikon megadja a független változó alapján a függvény *egyértelmű* hozzárendelési szabályát. ◀

Az előző példák eltérő jellege ellenére, mindhárom esetben a függvény hozzárendelési szabályát adtuk meg a független változó alapján. Ezt a szabályt **függvénynek, a változók egymástól való függését pedig függvénykapcsolatnak** nevezzük.

Tehát az 1–3. példákban leírt szabályok – függvények.

Az egyik változó másiktól való függése nem minden esetben függvénykapcsolat. Legyen például az autóbusz útvonalának hoszsza 15 km. A menetjegy ára a következő táblázat szerint határozható meg:

Menetjegy ára, hrn	12	14	16
Az útvonalszakasz hossza, km	5-ig	5-től 10-ig	10-től 15-ig

Érthető, hogy a menetjegy ára és az útvonalszakasz hossza változók kapcsolatban vannak egymással. Amennyiben a menetjegy árát vesszük független változónak, a leírt összefüggés nem függvény. Valóban, ha az utas 12 hrivnyát fizet, nem állapítható meg *egyértelműen*, hány kilométert utazott.

Ha a 3. példában a T hőmérsékletet tekintjük független változónak, akkor nem minden esetben határozható meg a T mennyiség értéke alapján egyértelműen a t mennyiség értéke. Ezért a t idő és a T hőmérséklet közötti összefüggés nem függvény.

Általában a független változót x betűvel jelölik, a függő változót – y-nal, a függvényt – f-fel. Ha az y és az x változók között függvénykapcsolat van, akkor ezt így jelölik: $y = f(x)$ (olvasd: ipszilon egyenlő ef iksz). Az x változót a **függvény argumentumának** nevezik.

Az argumentum által felvett összes érték képezi a **függvény értelmezési tartományát**. Az 1. példában a függvény értelmezési tartománya az összes pozitív szám; a 2. példában az 1, 2, 3, 4, 5 természetes számok; a 3. példában a 24-nél nem nagyobb negatív számok.

Az f függvény esetében az x argumentum minden értékének az y függvény valamely értéke felel meg. Az y függő változót a **függvény értékének** is nevezik.

A függvénynek az x változó x_0 értékének megfelelő értékét $f(x_0)$-val jelöljük. Például a **függvény értéke** $x = 7$ esetén egyenlő $f(7)$.

Ha az előző három példában leírt szabályt f betűvel jelöljük, akkor az első példában $f(2) = 8$, a másodikban $f(2) = 12\,100$, a harmadikban pedig $f(2) = 0$. Általánosítva tehát elmondhatjuk: az $f(a) = b$ kifejezés azt jelenti, hogy az argumentum a értékének a függvény b értéke felel meg.

A függvény által felvehető értékeket a **függvény értékkészletének** nevezzük.

Az 1. példában a függvény értékkészlete az összes pozitív szám; a 2. példában a táblázat második sorában található számok; a 3. példában az 5 és 7 közötti számok.

?

1. Milyen szabályt neveznek függvénynek?
2. A változók milyen összefüggését nevezik függvénykapcsolatnak?
3. Hogyan olvassuk az $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ kifejezést?
4. Mit nevezünk a függvény argumentumának?
5. Mit nevezünk a függvény értelmezési tartományának?
6. Mit nevezünk a függvény értékének?
7. Mit jelent az $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$ kifejezés?
8. Mit nevezünk a függvény értékkészletének?

GYAKORLATOK

838.° Van-e összefüggés az egyenlő oldalú háromszög kerülete és oldalai között? Ha a háromszög oldala a, a kerülete pedig P, akkor milyen képlettel adható meg a közöttük lévő összefüggés? Van-e függvénykapcsolat a változók között?

839.° Függ-e a négyzet területe az oldala hosszától? Ha a négyzet oldala a, a területe S, milyen képlettel adható meg a közöttük lévő összefüggés? Van-e függvénykapcsolat a változók között?

840.° A gépkocsi sebessége 60 km/h. Hogyan függ az s megtett út a t menetidőtől? Adjátok meg az összefüggést képlet segítségével.

Van-e függvénykapcsolat a változók között? Ha igen, nevezzétek meg a függvény argumentumát!

841.° A tartályban 300 l víz volt. A nyitott csapon percenként 2 l víz folyt ki. Adjátok meg képlet segítségével a tartályban maradt víz V térfogata és a kifolyás t ideje közötti összefüggést. Függvény-e a t és a V változók közötti hozzárendelés? Ha igen, határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

842.° Legyen az a – a kocka élhossza, V – a térfogata. Adjátok meg az a és V változók közötti összefüggés képletét. Van-e függvénykapcsolat a változók között?

843.° A gépkocsi v sebességgel 120 km-t tett meg. Milyen képlettel adható meg az út megtételéhez szükséges t idő és a v sebesség közötti kapcsolat? Van-e függvénykapcsolat a változók között? Ha igen, akkor mutassatok rá a függvény argumentumára!

844.° Két mellékszög értéke α és β. Adjátok meg a β szög α-tól való függőségének a képletét. Függvény-e a közöttük lévő hozzárendelés? Amennyiben igen, úgy nevezzétek meg a függvény argumentumát, és határozzátok meg az értelmezési tartományát valamint értékkészletét.

845.° Az osztályotokban matematikai dolgozatot írtak.

1) Minden tanulóhoz hozzárendelték az általa kapott osztályzatot.
2) Minden osztályzathoz hozzárendelték a tanulót, amelyik az adott osztályzatot kapta.

A két eset közül melyik lesz függvény?

846.° Megvizsgáljuk azt a szabályt, amely szerint minden természetes számnak a vele ellentétes előjelű szám felel meg. Függvény-e az adott hozzárendelés?

847.° Minden nemnegatív számhoz hozzárendelték magát a számot, minden negatív számhoz az ellentétes előjelű értékét. Függvény-e az adott hozzárendelés?

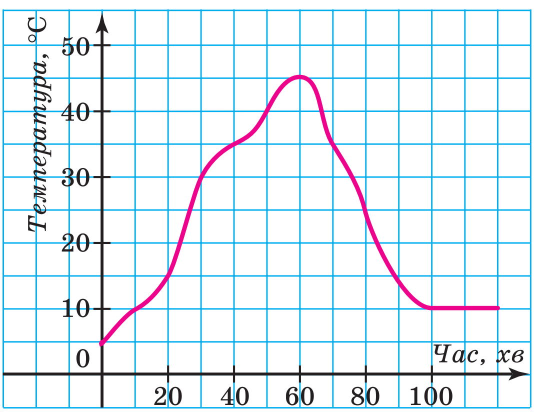
848.° Minden nullától eltérő racionális számhoz hozzárendelték a reciprokát. Függvény-e az adott hozzárendelés?

849.° A napi hőmérséklet és az eltelt idő közötti összefüggés grafikonja alapján (9. ábra) határozzátok meg:

1) hány fok volt 4 órakor; 6 órakor; 10 órakor; 18 órakor; 22 órakor;
2) hány órakor volt a hőmérséklet 5 °C; –2 °C;
3) hány órakor volt a hőmérséklet értéke nulla fok;
4) hány órakor volt legalacsonyabb a hőmérséklet; mennyi volt az értéke;
5) hány órakor volt legmagasabb a hőmérséklet; mennyi volt az értéke;
6) milyen időközben volt a hőmérséklet értéke alacsonyabb 0 °C-nál; magasabb 0 °C-nál;
7) milyen időközben emelkedett a levegő hőmérséklete; milyen időközben csökkent!

A grafikon alapján állítsatok össze táblázatot a levegő napi hőmérsékletének 2 óránkénti változásáról.

850.° A 13. ábrán egy oldat hőmérséklete és a kísérlet időtartama közötti összefüggés grafikonja látható:

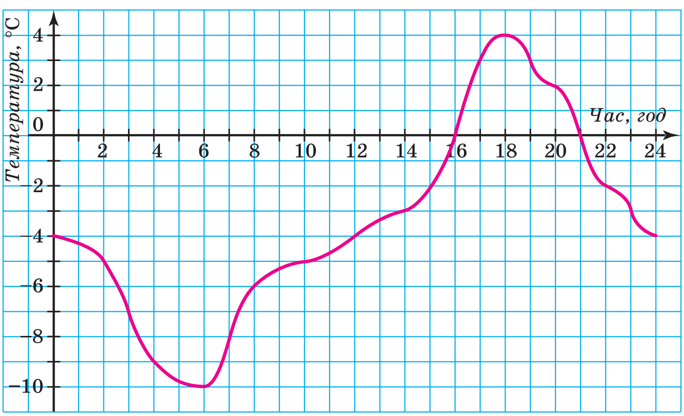


13. ábra

1) Mennyi volt az oldat kezdeti hőmérséklete?
2) Mennyi volt az oldat hőmérséklete a kísérlet kezdete után 30 perccel? Másfél órával?
3) Mennyi volt az oldat legmagasabb hőmérséklete, és mennyi idővel a kísérlet elkezdése után?
4) Hány perccel a kísérlet kezdete után lett az oldat hőmérséklete 35 °C?

A grafikon alapján állítsatok össze táblázatot az oldat hőmérsékletének 10 percenkénti változásáról a kísérlet első két órájában.

851.° A 11. ábrán a napi hőmérséklet és az eltelt idő közötti összefüggés grafikonja látható. A grafikon alapján állapítsátok meg:
1) mennyi volt a levegő hőmérséklete 2 órakor; 8 órakor; 12 órakor; 16 órakor; 22 órakor;
2) hány órakor volt a hőmérséklet –3 °C; –4 °C; 0 °C;
3) hány órakor volt legalacsonyabb a hőmérséklet; mennyi volt az értéke;
4) hány órakor volt legmagasabb a hőmérséklet; mennyi volt az értéke;
5) milyen időközben volt a hőmérséklet értéke alacsonyabb 0 °C-tól; magasabb 0 °C-nál;
6) milyen időközben emelkedett, és milyenben csökkent a hőmérséklet.

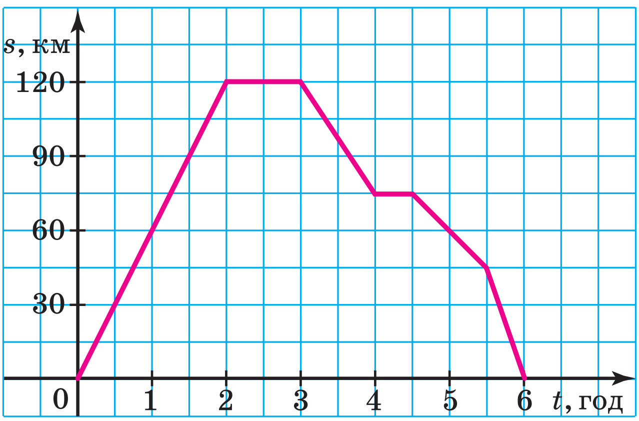


14. ábra

A grafikon alapján állítsatok össze táblázatot a levegő napi hőmérsékletének 2 óránkénti változásáról.

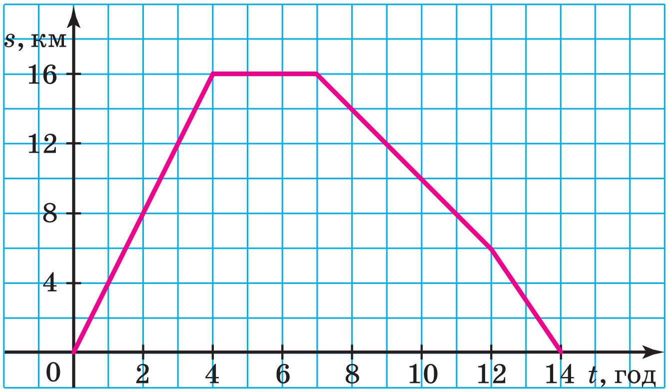
852.• A motorkerékpáros elment otthonról, majd bizonyos idő elteltével hazajött. A 15. ábrán a motorkerékpáros és az otthona közötti távolság változása, valamint az eltelt idő közötti összefüggés grafikonja látható (*a kerékpáros mozgásgrafikonja*). A grafikon segítségével állapítsátok meg:

1) mekkora távolságot tett meg a motorkerékpáros az első óra alatt;
2) a mozgás kezdőpontjától mekkora távolságra állt meg pihenni első alkalommal; második alkalommal;
3) mennyi ideig tartott az első pihenő; a második pihenő;
4) mekkora távolságra volt az otthonától a motorkerékpáros az indulás után 5 órával;
5) milyen sebességgel haladt az utolsó fél órában.



15. ábra

853.• A turista túrázni indult a táborból, majd néhány óra elteltével visszatért oda. A 16. ábrán a mozgásgrafikonja látható.



16. ábra

1) Milyen távolságra volt a turista a tábortól az elindulás után 10 órával?
2) Mennyi időt töltött pihenéssel?
3) Az elindulása után mennyi idő múlva volt 8 km-re a tábortól?
4) Mekkora volt a turista sebessége a pihenőig?
5) Milyen sebességgel tette meg az utolsó két órát?

854.• Minden számhoz hozzárendelték a számot jelölő pont és az origó (koordinátatengely kezdőpontja) közötti távolságot. Magyarázzátok meg, hogy a fent leírt szabály miért függvény! Határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! A függvényt f betűvel jelölve, határozzátok meg az $f(2)$, $f(-5)$, $f(0)$ függvényértékeket!

855.• Megvizsgáljuk a következő szabály szerint megadott g függvényt: minden egyjegyű természetes számhoz hozzárendelték a négyzete értékének utolsó számjegyét.
1) Írjátok le, mivel egyenlő $g(7)$; $g(3)$; $g(1)$; $g(9)$; $g(4)$!
2) Határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

856.• Megvizsgáljuk azt a szabályt, melynek alapján az összes páros számot a 0-hoz rendelik, a páratlanokat pedig az 1-hez. Függvény-e az ilyen hozzárendelés?

857.• Mondjatok példát olyan *f* függvényre, melynek az értelmezési tartománya a természetes számok halmaza, az értékkészlete pedig három szám: 0; 1; 2! Határozzátok meg az *f*(7); *f*(15); *f*(101) függvényértékeket!

858.• Megvizsgáljuk azt az esetet, amikor minden természetes számhoz a szám 7-tel való osztásának maradékát rendelik. Függvény-e az ilyen hozzárendelés? Amennyiben igen, határozzátok meg az értelmezési tartományát és értékkészletét!

859.• A táblázatban a napi hőmérséklet óránkénti értékeit láthatjátok[1]. Az adatok alapján rajzoljatok grafikont!

Idő, h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Hőmérséklet, °C	2	3	1	0	–2	–3	–5	–4	–2	0	1	4	7
Idő, h	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
Hőmérséklet, °C	8	9	7	5	4	3	2	1	0	–2	–3	–6	

A grafikon segítségével határozzátok meg, mennyi ideig emelkedett, illetve mennyi ideig csökkent a hőmérséklet.

860.• A közgazdasági tanulmányokban gyakran használják a keresleti görbét. A keresleti görbe egy grafikon, amely megmutatja, hogy egy áru kereslete hogyan függ az árától. A táblázat egy adott régióban a burgonya iránti kereslet 1 kg burgonya árától való függését mutatja (ezer tonnában).

1 kg burgonya ára, hr	8	9	10	11	12	13
Kereslete, ezer t	15	12	10	6	4	1

[1] A táblázatban az argumentum értéke minden egyes oszlopban az előző értéktől 1-gyel nagyobb. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a táblázat 1 lépésenként van összeállítva.

Ábrázoljátok grafikusan a táblázatban megadott adatokat! A kapott pontok szakaszokkal való összekapcsolása után készítsétek el a burgonya keresleti görbéjét!

861.• A táblázat a folyó vízállásának adatait mutatja a szokásoshoz (átlagos vízálláshoz) képest május 1-től 15-ig.

Dátum	folyó vízállása, cm	Dátum	folyó vízállása, cm	Dátum	folyó vízállása, cm
1	8	6	20	11	4
2	10	7	18	12	0
3	12	8	14	13	–3
4	15	9	10	14	–5
5	16	10	8	15	–6

Rajzoljatok grafikont a folyó vízszintjének változásáról az adott idő alatt!

862.•• A kerékpáros kirándulásra indult. Az első 2 órát 12 km/h sebességgel tette meg, majd miután egy órát pihent, 8 km/h sebességgel ért haza. Rajzoljátok meg a kerékpáros mozgásgrafikonját!

863.•• A melegítés kezdete előtt a víz hőmérséklete 6 °C-os volt. A melegítés folyamán a víz hőmérséklete percenként 2 °C-al növekedett.

1) Írjátok fel a T hőmérséklet és a melegítés t ideje közötti összefüggés képletet!
2) Állítsátok össze a T percenkénti változásának táblázatát 0 és 10 perc időközben!
3) Ábrázoljátok a víz hőmérsékletváltozása és az eltelt idő közötti összefüggés grafikonját az első 10 percben!

864.•• A turistatábor egy egyenes út mellett terül el. A tábortól 5 km-re lévő turista 4 km/h sebességgel indult el az ellenkező irányba.

1) Határozzátok meg a turista és a tábor közötti s távolságot az indulástól számított t idő múlva!
2) Töltsétek ki a táblázatot!

t, h	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
s, km									

3) A táblázat alapján ábrázoljátok a tábor távolsága és a menetidő közötti összefüggés grafikonját.

865.•• Aprajafalva húsz tagú tanácsában két párt képviselői kaptak helyet: a törpök és Hókuszpók hívei. A képviselői testület 20 tagú. A táblázatban a törpök által az elmúlt 8 választás során szerzett képviselői helyek száma található.

Választás	1	2	3	4	5	6	7	8
A törpök által szerzett képviselői helyek száma	14	12	10	16	18	15	14	10

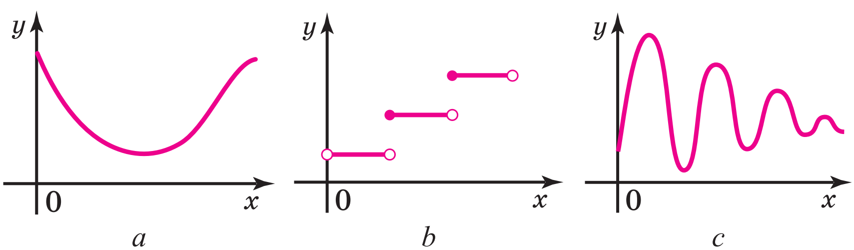
1) Állítsatok össze hasonló táblázatot Hókuszpók pártja esetére is!
2) Ábrázoljátok közös koordináta-rendszerben a két táblázat adatait, és rajzoljátok meg a pártok népszerűségi görbéjét!

866.•• A tartályba, melyben eredetileg 8 l petróleum volt, percenként 4 l petróleumot öntenek.

1) Írjátok fel a tartályban lévő petróleum y literje és az x idő közötti összefüggést, amely alatt a petróleumot a tartályba öntötték!
2) Ábrázoljátok az y változásának grafikonját az x 0-tól 10-ig felvett értékei esetében!

3) A grafikon segítségével határozzátok meg:
   a) hány liter petróleum lesz a tartályban 3 perc múlva; 5 perc múlva?;
   b) hány perc múlva lesz a tartályban 40 l petróleum?
4) Hány perc alatt telik meg a 80 literes tartály?

867.•• A telepre, ahol 100 t szén volt, mindennap még 20 t-t szállítottak.
1) Képlet segítségével fejezzétek ki a szén m mennyisége és a *t* idő közötti összefüggést!
2) Ábrázoljátok az összefüggés grafikonját!



17. ábra

868.•• A 17. ábrán látható grafikonok közül melyik fejezi ki alábbi x és y változók közötti összefüggést:
1) az autóbusz menetjegyének ára 10 km-ként 1 hrivnyával emelkedik (x – az út hossza kilométerben, y – a jegy ára hrivnyában);
2) a fém rugót megnyújtották, majd elengedték (x – az eltelt idő szekundumban (s), y – a rugó hossza centiméterben;
3) a szamóca ára a piacon május–június folyamán (x – az idő napokban, y – a szamóca ára hrivnyában)?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

869. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $-1{,}2x + 7{,}2 = 0$; 3) $3x + 1{,}5 = -2{,}5$;

2) $-\frac{1}{3}x - 6 = 0$; 4) $6 - 0{,}5x = 16$.

870. Bontsátok tényezőkre a kifejezést:

1) $\frac{9}{64}b^6 + 16m^2n^4$; 3) $0{,}027a^{12} + b^9$.

2) $20z^2 + 3xy - 15xz - 4yz$;

871. Bizonyítsátok be, hogy az n bármely természetes értékére a:

1) $(n + 25)(n + 3) - (n + 6)(n + 4) - 6$ kifejezés osztható 9-cel;

2) $(13n - 24)(13n + 24) - (12n - 26)(12n + 26)$ kifejezés osztható 25-tel;

3) $(9n + 2)^2 - (3n - 2)^2$ kifejezés osztható 24-gyel!

872. Ismert, hogy a $2x^2 - 3x + 1$ kifejezés az x valamely értékénél 2 értéket vesz fel. Határozzátok meg a $10x^2 - 15x - 20$ kifejezés értékét ugyanennél az x értéknél!

873. Határozzátok meg az a legkisebb természetes értékét, melynél az $x^2 - 4x + 2a$ kifejezés az a bármilyen értékénél pozitív lesz!

874. A szállodában csak egy- és kétágyas szobák találhatók. Minden 3 egyágyas szobához 2 kétágyas szoba tartozik. 1) Hány százaléka az egyágyas szobák száma az összes szoba számához képest? 2) Hány férőhely van a szállodában, ha 34 kétágyas szoba van?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

875. Az x és y természetes számokra érvényes a $34x = 43y$ egyenlőség. Bizonyítsátok be, hogy az $x + y$ összetett szám!

21. A függvény megadásának módjai

Az előző pontban megvizsgált feladatok arról tanúskodnak, hogy a függvények különböző módon adhatók meg.

A függvényt megadottnak tekintjük, ha ismert az értelmezési tartománya, valamint a szabály, amely szerint a független változó értéke alapján meghatározható a függvény értéke.

Bizonyára sok alkalommal fogalmaztatok meg különféle szabályokat. Mivel a függvény egy szabály, tehát kifejezhető szavakkal is, vagyis a **függvény leírással is megadható**.

Megvizsgálunk néhány példát.

PÉLDA 1 független változó bármilyen értéket felvehet. A függvény meghatározásának szabálya a következő: a független változó 2-szeres szorzatából kivonunk 1-et. Ez a mód lehetőséget ad egyértelműen meghatározni a függvény értékét. Tehát megadtuk az f függvényt, melynek értelmezési tartománya az összes szám. Például: $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 0$; $f(-13{,}4) = (-13{,}4) \cdot 2 - 1 = -27{,}8$ stb. ◀

PÉLDA 2 A független változó 0 kivételével bármilyen értéket felvehet. A független változó és a függvény megfelelő értékei – kölcsönösen fordított (reciprok) értékek. Ebben az esetben adott az f függvény, melynek értelmezési tartománya 0 kivételével az összes szám. Például:

$$f(1) = 1;\ f(3) = \frac{1}{3};\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \text{ stb.}$$ ◀

A függvényeket leggyakrabban **képletek segítségével** adják meg.

Ha az 1. példában a független változót x-szel, a függvényt pedig y-nal jelöljük, megadjuk az értelmezési tartományt, ami az összes szám, akkor az említett függvény az $y = 2x - 1$ képlet segítségével írható fel.

Érthető, hogy a 2. példa függvénye az $y = y = \frac{1}{x}$, képlettel adható meg, ahol x – bármely szám, a 0 kivételével.

Ha a függvény egy olyan képlettel van megadva, amelynek jobb oldala egész kifejezés és eközben nincs megadva az értelmezési tartománya, akkor úgy tekintjük, hogy a függvény értelmezési tartománya bármilyen szám. Például az $y = x^2$; $y = \frac{x-3}{5}$;, $y = x^2 - x + 2$ olyan függvényeket adnak meg, melyen értelmezési tartománya az összes szám.

Ha a függvény az $y = x^3$ képlettel van megadva, akkor azt mondjuk, hogy adott az $y = x^3$ függvény.

Ha ki szeretnénk hangsúlyozni például, hogy az $y = 5 - \frac{x}{3}$ képlet egy f függvényt ad meg, akkor azt így írjuk fel: $f(x) = 5 - \frac{x}{3}$.

Ha azt szeretnék kiemelni például, hogy az $s = 10t + 2$ képlet a t argumentumú függvényt adja meg, ennek a következő a jelölése: $s(t) = 10t + 2$.

Megvizsgáljuk a –1; 0; $f(x) = x - 2x^2$, 1; 3 értelmezési tartományú $f(x) = x - 2x^2$ függvényt.

$$f(-1) = -3;\ f(0) = 0;\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 0;\ f(1) = -1;\ f(3) = -15.$$

A kapott eredményeket táblázatba foglaljuk.

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
$f(x)$	-3	0	0	-1	-15

A táblázat első sorában lévő értékek alkotják az f függvény értelmezési tartományát. A táblázat segítségével meghatározható az argumentum értékeinek megfelelő függvényérték. Tehát az f függvény megadásának még egy módja a **táblázat**.

Ezt a módot abban az esetben célszerű használni, ha a függvény értelmezési tartománya csupán néhány számból áll.

PÉLDA 3 A függvény az $y = 5x + 2$ képlettel van megadva. Határozzátok meg az argumentum azon értékét, melynél a függvény értéke 12.

Megoldás: Behelyettesítve az $y = 5x + 2$ képletbe az y helyett a 12-t, az $5x + 2 = 12$ egyenletet kapjuk, ahonnan $x = 2$.

Felelet: 2. ◀

PÉLDA 4 Az f függvényt a következő képlettel adták meg: $f(x) = x + 7$, ha x –1 és f $(x) = 2$, ha $x \leq -1$. Határozzátok meg az f függvény értékét az argumentum következő értékei esetén: 1) –2; 2) –1; 3) 1.

Megoldás:

1) Mivel $-2 \leq -1$, ezért a függvény értékét az $f(x) = x + 7$ képlettel számítjuk ki. Tehát: $f(-2) = -2 + 7 = 5$.
2) Mivel $-1 \leq -1$, ezért f $(-1) = -1 + 7 = 6$.
3) Mivel $1 > -1$, ezért $f(1) = 2$.

Az adott függvény felírható kapcsos zárójel segítségével:

$$f(x) = \begin{cases} x + 7, & \text{ha } x \leq -1, \\ 2; & \text{ha } x > -1 \end{cases}$$ ◀

PÉLDA 5 A függvények az $y = 4x + 1$ és $y = 2x - 7$ képletekkel vannak megadva. Az argumentum mely értékénél lesz egyenlő a két függvény értéke?

Megoldás: Hogy megtalálhassuk az argumentum keresett értékét, megoldjuk a $4x + 1 = 2x - 7$ egyenletet:

$$4x - 2x = -7 - 1;$$

$$x = -4.$$

Felelet: $x = -4$ esetén. ◀

?

1. Mikor mondhatjuk, hogy a függvény meg van adva?
2. A függvény megadásának milyen módjait ismeritek?

GYAKORLATOK

876.° Jelöljétek meg a függvények argumentumát és a függő változót:

1) $s(t) = 70t$;
2) $y(x) = -2x + 4$;
3) $V(\text{a}) = a^3$;
4) $f(x) = x^2 - 4$.

877.° A függvény az $y = 10x + 1$ képlettel van megadva. Határozzátok meg az y értékét, ha:

1) $x = -1$;
2) $x = 3$;
3) $x = -\frac{1}{5}$;
4) $x = 7$.

878.° A függvény az $f(x) = 3 - 4x$ képlettel van megadva. Igazak-e a következő egyenlőségek:

1) $f(-2) = -5$;
2) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$;
3) $f(0) = -1$;
4) $f(-1) = 7$?

879.° A függvényt az $f(x) = 7x - 5$ képlettel adták meg. Számítsátok ki az

1) $f(2)$;
2) $f(0)$;
3) $f(-3)$;
4) $f(200)$.

880.° A függvény az $f(x) = 2x^2 - 1$ képlettel van megadva. Igazak e a következő egyenlőségek:

1) $f(1) = 1$;	3) $f(-2) = -9$;	5) $f(-1) = 1$;
2) $f(4) = 15$;	4) $f(0) = 0$;	6) $f(-5) = 19$?

881.° A függvény az $f(x) = x^2 - 3$ képlettel van megadva. Határozzátok meg az y értékét, ha:

1) $x = 5$;
2) $x = -4$;
3) $x = 0,1$;
4) $x = 0$.

882.° A függvény az $f(x) = 3 + 4x$ képlettel van megadva. Határozzátok meg az x értékét, ha:

1) $f\ x) = 19$;
2) $f(x) = -3$;
3) $f(x) = 0$;
4) $f(x) = 323$.

883.° A függvény az $f(x) = -0,1x - 2$ képlettel van megadva. Határozzátok meg az x értékét, ha:

1) $f(x) = 1$;
2) $f(x) = -100$;
3) $f(x) = -43,6$.

884.° A függvényt az $y = -\frac{1}{6}x + 2.$ képlettel adták meg. Számítsátok ki:

1) a függvény értékét a következő argumentumok esetén: 12; 6; –6; 0; 1; 2; –4; –3;
2) az argumentum értékét, ha a függvény értéke 4; 3; 0; –1.

885.° A függvényt az $f(x) = 2x - 1$ képlettel adták meg.

1) Számítsátok ki az $f(3)$; $f(-4)$; $f(0)$; $f(-0,5)$; $f(3,2)$.
2) Határozzátok meg az x értékét, amelynél $f(x) = 7$; $f(x) = -9$; $f(x) = 0$; $f(x) = -2,4$.
3) Igazak-e az egyenlőségek: $f(5) = 9$; $f(0,3) = 0,4$; $f(-3) = -7$?

886.° A függvény az $y = x(x + 8)$ képlettel van megadva. Töltsétek ki a táblázatot!

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y							

887.° A függvény az $y = y = -\frac{2}{3}x$. képlettel van megadva. Töltsétek ki a táblázatot!

x	–9	–6	–3	–2	–1	0	1	2	3	6
y										

888.° A függvény az $y = x^2 + x + 1$ képlettel van megadva. Töltsétek ki a táblázatot!

x	–3	–2	–1	0	1	2	4	7
y								

889.• Minden 10-nél nagyobb, de 20-nál kisebb természetes számhoz a 6-tal való osztásának maradékát rendelték.

1) Milyen módon adták meg a függvényt?
2) Milyen a függvény értékkészlete?
3) Adjátok meg a függvényt táblázat segítségével!

890.• A függvény értelmezési tartománya – a kétjegyű természetes számok, melyek a 10 többszörösei, a függvény értékkészlete pedig az argumentum értékeinél 5-ször kisebb számok. Adjátok meg a függvényt táblázat és képlet segítségével!

891.• A függvény értelmezési tartománya – az egyjegyű természetes számok, a függvény értékkészlete pedig az argumentum értékeinél 2-szer nagyobb számok.

1) Milyen módon adták meg a függvényt?
2) Adjátok meg a függvényt táblázat és képlet segítségével!

892.• Adjátok meg a függvényt képlet segítségével, ha értéke:

1) ellentétes előjelű az argumentum megfelelő értékével;
2) ha egyenlő az argumentum megfelelő értékének háromszorosával;
3) ha 4-gyel nagyobb az argumentum megfelelő értékének négyzeténél!

893.• Adjátok meg a függvényt képlet segítségével, ha a függvény értéke:

1) 3-mal kisebb az argumentum megfelelő értékénél;

2) 5-tel több az argumentum megfelelő értékének kétszeresénél!

894.• Állítsatok össze 0,5 lépésenként táblázatot az $y = x^2 + 2x$ képlettel megadott függvény értékeiből, ha $-1 \le x \le 3$.

895.• Állítsatok össze táblázatot 1 lépésenként az $y = x^3 - 1$ képlettel megadott függvény értékeiből, ha $-3 \le x \le 2$.

896.• A függvényt az $y = 0{,}2x - 5$ képlet adja meg. Töltsétek ki a táblázatot!

x	4		–1,5		–3
y		2		–1,4	

897.• A függvényt az y = $y = 8 - \frac{1}{7}x$. képlet adja meg. Töltsétek ki a táblázatot!

x	14		–1,4	
y		0		9

898.• Adott a $g(x) = \frac{20}{x} - 3$ és a $h(x) = 8 - 3x$ függvény. Hasonlítsátok össze:

1) g (1) és h (1);

2) g (5) és h (2);

3) g (–2) és h (6).

899.• Adott a következő függvény $f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{ha } x \le -2, \\ -x^2 & \text{ha } -2 < x < 3, \\ 6, & \text{ha } x \ge 3. \end{cases}$

Számítsd ki: 1) $f(-3)$; 2) $f(-2)$; 3) $f(2)$; 4) $f(3)$; 5) $f(2{,}9)$; 6) $f(8{,}1)$.

900.• Határozd meg az $y = \begin{cases} -2y + 4, \text{ ha } x > 0, \\ 0{,}1y - 5, \text{ ha } x \leq 0, \end{cases}$ яfüggvény értékeit, ha a megfelelő argumentumok a következők:

1) 3; 2) 0,001; 3) 0; 4) –8.

901.• A függvény a következő táblázattal van megadva:

x	2	4	6	8
y	5	7	9	11

1) Milyen számokból áll a függvény értelmezési tartománya?
2) Adjátok meg a függvényt leírással és képlet segítségével is!

902.• A függvényt a következő táblázat adja meg

x	1	3	5	7	9
y	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5

1) Milyen számokból áll a függvény értelmezési tartománya?
2) Adjátok meg a függvényt leírással és képlettel!

903.• Két függvényt az $y = x^2 - 8x$ és $y = 4 - 8x$ képletek adják meg. Az x mely értékeinél lesz egyenlő a két függvény értéke?

904.• A függvény az $f(x) = 3x + 5$ képlettel van megadva. Az x milyen értékénél egyenlő a függvény értéke az argumentumával?

905.• A függvény az $y = x^2 + 2x - 1$ képlettel van megadva. Az x milyen értékeinél lesz egyenlő a függvény az argumentum kétszeresével?

906.* Az f függvényt leírással adták meg: a függvény értéke egyenlő a legnagyobb egész számmal, amelyik nem nagyobb az argumentum megfelelő értékénél[2]. Számítsátok ki: $f(3{,}7)$; $f(0{,}64)$; $f(2)$; $f(0)$; $f(-0{,}35)$; $f(-2{,}8)$!

---

[2] Az említett függvénynek egyedi jelölése van: $y = [x]$ (olvasd: y egyenlő az x egész részével).

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

907. A gazda idén 10%-kal csökkentette a káposzta termőterületét. A káposztatermés idén 12%-kal nőtt a tavalyihoz képest. Nőtt vagy csökkent a káposztatermés mennyisége a tavalyi évhez képest, és hány százalékkal?

908. Az adott egyenletek közül melyiknek van a) egy gyöke; b) két gyöke; c) végteles sok gyöke; d) nincs gyöke:

1) $3{,}4\,(1 + 3x) - 1{,}2 = 2\,(1{,}1 + 5{,}1x)$;
2) $|\,2x - 1\,| = 17{,}3$;
3) $3\,(|\,x - 1\,| - 6) + 21 = 0$;
4) $0{,}2\,(7 - 2x) = 2{,}3 - 0{,}3\,(x - 6)$?

909. Adott három szám, melyek közül minden következő 10-szer nagyobb, mint az előző. Határozzátok meg ezeket a számokat, ha a legnagyobb és a középső szorzata 320-szal nagyobb, a legnagyobb és a legkisebb szorzatánál!

910. Bizonyítsátok be: ha $a + c = 2b$, akkor $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$!

911. Adott, hogy $x + y = x + y = \dfrac{a^2}{4}$, $y + z = -a$; $x + z = 1$. Bizonyítsátok be, hogy a $az\ x + y + z$ kifejezés a csak nem negatív értékeket vesz fel!

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

912. Rajzoljatok az $A(-2; 3)$ és $B(4; 3)$ pontokon áthaladó egyenest. Mivel egyenlők az egyenes pontjainak ordinátái?

913. Rajzoljatok a $C(3; 0)$ és $D(3; -4)$ pontokon áthaladó egyenest. Mivel egyenlők az egyenes pontjainak abszcisszái?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

914. Bizonyítsátok be, hogy bármely 60-jegyű szám esetében, melynek a normálalakja nem tartalmaz nullákat, áthúzható néhány számjegy és az így kapott szám osztható lesz 1001-gyel!

22. A függvény grafikonja

Megvizsgáljuk az $y = x^2 - 4x$ függvényt, ahol $-1 \le x \le 4$. Elkészítjük a függvény értéktáblázatát az argumentum egész értékeire.

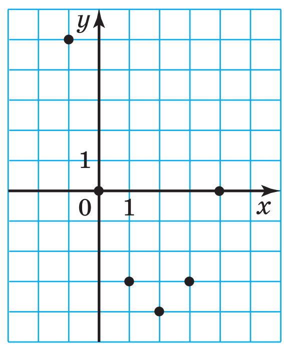
x	–1	0	1	2	3	4
y	5	0	–3	–4	–3	0

Az oszlopokban található számpárokat a koordinátasíkon található pontok $(x; y)$ koordinátájaként vizsgáljuk meg. Az argumentum értéke a pont abszcisszája, a függvény megfelelő értéke pedig a pont ordinátája.

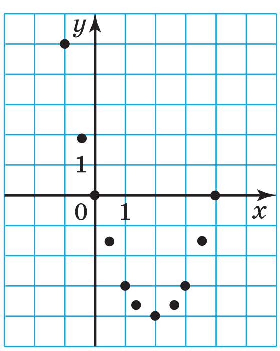
A pontokat a 18 ábrán láthatjátok.

Nyilvánvaló, hogy amennyiben az argumentumnak az értelmezési tartományból más (az egésztől eltérő) értékeket adunk, a függvény értékeinek a meghatározásával egyre több pontot tüntethetünk fel a koordinátasíkon (19, 20 ábra).

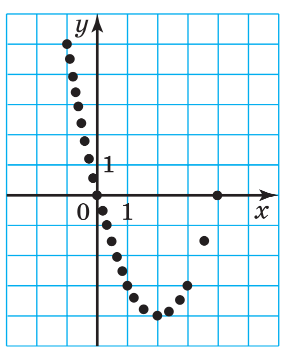
Az így felvett pontok alkotják a **függvény grafikonját**.



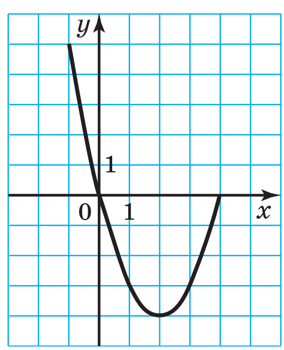
18. ábra



19. ábra



20. ábra

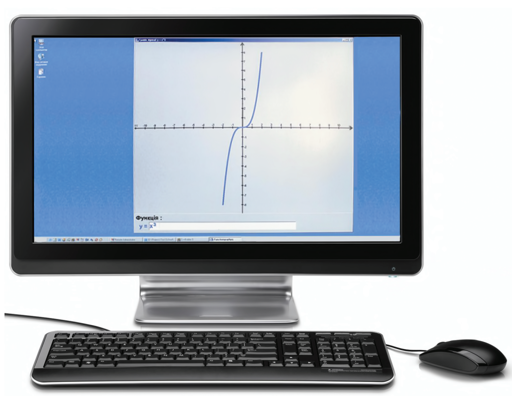


21. ábra

Meghatározás. Az *f* függvény grafikonjának azt a mértani alakzatot nevezzük, amely azokból és csakis azokból a pontokból áll, melyek abszcisszája az *f* függvény argumentumával, ordinátája pedig az *f* függvény megfelelő értékeivel egyenlő.

Nyilvánvaló, hogy az $y = x^2 - 4x$ függvény grafikonját a leírt módon gyakorlatilag lehetetlen megrajzolni, mivel a felvehető pontok száma végtelen. Viszont ha elegendő pontot határozunk meg, majd folytonos vonallal kötjük azokat össze (21. ábra), a kapott görbe annál kevésbé fog eltérni a keresett grafikontól, minél több pontot tüntetünk fel.

Mivel a leírt szerkesztési módszer sok aprólékos munkával jár, annak jelentős része számítógép segítségével is elvégezhető. Manapság számtalan grafikonszerkesztő program létezik. A 18. ábrán az $y = x^3$ függvény grafikonja látható, ahol $-2 \le x \le 2$.



22. ábra

Ha valamely alakzat az f függvény grafikonja, akkor érvényes a következő két feltétel:

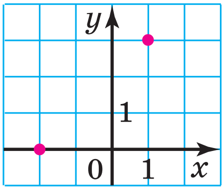
1) *ha* x_0 *az argumentum valamely értéke, az* $f(x_0)$ *pedig a megfelelő függvényérték, akkor az* $(x_0; f(x_0))$ *koordinátájú pont a grafikonhoz tartozik*;

2) *ha* $(x_0;\ y_0)$ *a grafikon tetszőleges pontjának koordinátája, akkor az* x_0 és y_0 *az argumentum és az f függvény megfelelő értékei, azaz* $y_0 = f(x_0)$.

A függvény grafikonja nem minden esetben vonal. A 23. ábrán a következő táblázattal megadott függvény grafikonja látható:

x	1	–2
y	3	0

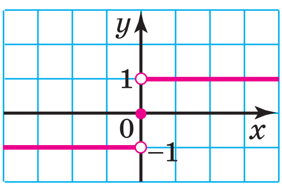
Mindössze két pontból áll.



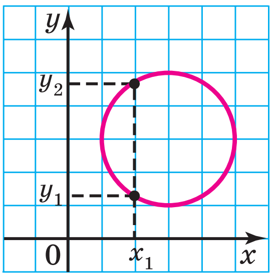
23. ábra

Elkészítjük az leírással megadott függvény grafikonját.

Legyen a függvény értelmezési tartománya az összes szám. Minden pozitív argumentum esetén a függvény értéke 1; minden negatív argumentum esetén pedig –1; ha az argumentum nulla, akkor a függvény értéke is nulla.



24. ábra



25. ábra

A függvény grafikonja a 24. ábrán látható. A grafikon három részből áll: az *O* (0; 0) pontból és két félegyenesből, melyeknek „üres” a kezdőpontja.

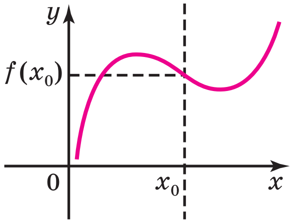
A koordinátasíkon ábrázolt alakzatok nem mindegyike felel meg a grafikon követelményének. Vegyük például a körvonalat, amely nem lehet valamely függvény grafikonja, mivel az *x* változó megadott értékeinek nem minden esetben felel meg egyértelműen az y változó értéke (25. ábra).

A koordinátasíkon ábrázolt alakzat abban az esetben lesz valamely függvény grafikonja, ha az abszcisszatengelyre merőleges bármely egyenesnek az alakzattal nem több mint egy közös pontja van. Azt mondhatjuk, hogy ez az alakzat egy bizonyos függvényt határoz meg. A függvények megadásának ezt a módját **grafikus módnak** nevezzük. Az alakzat pontjainak abszcisszái és ordinátái alkotják a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét.

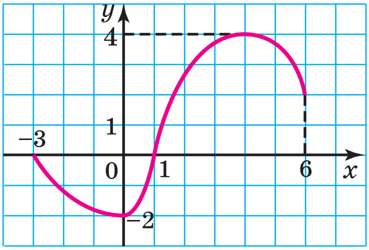
Ha a függvény grafikusan van megadva, akkor az argumentum megadott x_0 értékei alapján a függvény értékeit a következő szabály szerint határozhatjuk meg: az $(x_0; 0)$ ponton keresztül az abszcisszatengelyre merőlegest szerkesztünk, majd megkeressük a merőleges és a grafikon metszéspontját. Az így kapott ordináta értéke $f(x_0)$ (26. ábra).

Ábra, séma vagy fénykép segítségével módunk van vizuálisan elképzelni valamely objektumot, illetve folyamatot. Hasonló szerepe van a függvény esetében a grafikonnak. Például a 27. ábrán látható grafikont tanulmányozva, a következőket állapíthatjuk meg:

1) a függvény értelmezési tartománya: $-3 \le x \le 6$;
2) a függvény értékkészlete: $-2 \le y \le 4$;
3) az argumentum azon értékei, melyeknél a függvény értéke nulla: $x = -3$ vagy $x = 1$;
4) az argumentum azon értékei, melyeknél a függvény értéke pozitív: $1 < x \le 6$;
5) az argumentum azon értékei, melyeknél a függvény negatív értékeket



26. ábra



27. ábra

Az adott pont anyagának elsajátítása után érthetővé válik számotokra, miért terjedtek el olyan széles körben a technikában, orvostudományban, közgazdaságtanban és egyéb tudományágban a különféle grafikonok elkészítésére szolgáló számítógépes programok.

PÉLDA 1 Állapítsátok meg, hozzátartoznak-e az $y = x - 6$ függvény grafikonjához a következő pontok: 1) $A(8; 2)$; 2) $B(2; 4)$.

Megoldás: Hogy megállapíthassuk, hozzátartoznak-e a pontok a grafikonhoz, meghatározzuk a függvény értékét, ha az argumentum értéke egyben az adott pont abszcisszája is.

Ha eközben a függvény értéke megegyezik a pont ordinátájával, akkor a pont a grafikonhoz tartozik, ellenkező esetben nem tartozik a függvényhez.

1) Ha $x = 8$, akkor $y = 8 - 6 = 2$. Tehát az A pont a grafikonhoz tartozik.

2) Ha $x = 2$, akkor $y = 2 - 6 = -4 \neq 4$, vagyis a B pont nem tartozik az $y = x - 6$ függvény grafikonjához. ◀

PÉLDA 2 Szerkesztés nélkül határozzátok meg az $y = x^2 - 4$ függvény grafikonja és a koordinátatengelyek metszéspontjait!

Megoldás: Egy pont abban és csakis abban az esetben fekszik az abszcisszatengelyen, ha az ordinátája 0. Tehát a grafikonnak az abszcisszatengellyel való metszéspontjának koordinátáit megtalálhatjuk, ha megoldjuk az $x^2 - 4 = 0$ egyenletet.

Innen $x = 2$ vagy $x = -2$.

Tehát az adott függvény két pontban metszi az abszcisszatengelyt: A (2; 0) és B (–2; 0).

A pont abban és csakis abban az esetben fekszik az ordinátatengelyen, ha az abszcisszája 0. Ezért, ha $x = 0$, akkor $y = -4$.

Tehát a grafikon a $C(0; -4)$ pontban metszi az ordinátatengelyt. ◀

1. Mit nevezünk a függvény grafikonjának? **2.** Milyen két feltételnek kell teljesülni ahhoz, hogy az adott alakzat az *f* függvény grafikonja legyen? **3.** Állhat-e a függvény grafikonja egy pontból? **4.** Lehet-e a koordinátasíkon elhelyezkedő bármely alakzat az *f* függvény grafikonja? **5.** Mondjatok példát olyan alakzatokra, amelyek nem lehetnek függvény grafikonjai! **6.** Hány közös pontja lehet a függvény grafikonjának és az abszcisszatengelyre merőleges egyenesnek?

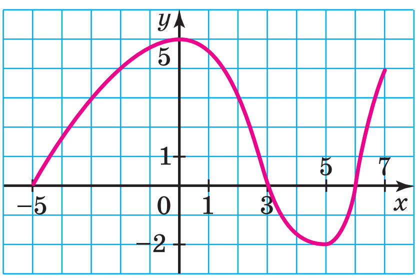
Подвійну нерівність читаємо, починаючи із середнього числа, у називному відмінку, а ліву та праву частини – у родовому відмінку. Наприклад: $5 < 7 < 9$ – *сім більше за п'ять, але менше від дев'яти.*

Подвійну нерівність зі знаками «≤» і «≥» також починаємо читати із середнього числа у називному відмінку, а от ліву та праву частини – у давальному відмінку, наприклад: $-3 \le x \le 2$ – *«ікс» більше або дорівнює мінус трьом, але менше або дорівнює двом*.

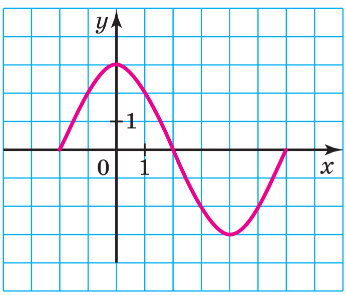
GYAKORLATOK

915.° Az $y = f(x)$ függvény 28. ábrán látható grafikonja segítségével töltsétek ki a táblázatot:

x	–3	–2	0	2	6	7
$f(x)$						



28. ábra

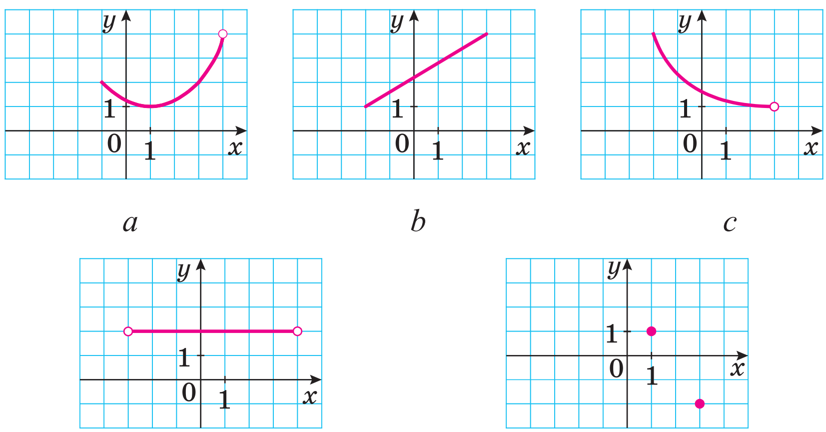


29. ábra

916.° Az $y = f(x)$ függvény 25. ábrán látható grafikonja segítségével töltsétek ki a táblázatot:

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									

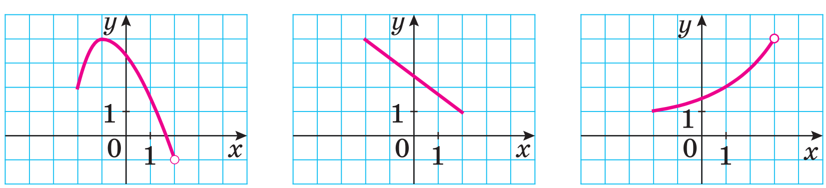
917.° Határozzátok meg a 30. ábrán látható függvények értelmezési tartományát és a függvény értékkészletét!



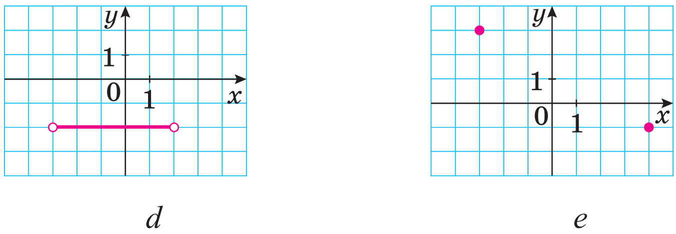
a *b* *c* *d* *e*

30. ábra

918.° Határozzátok meg a 31. ábrán látható függvények értelmezési tartományát és a függvény értékkészletét!



a *b* *c*

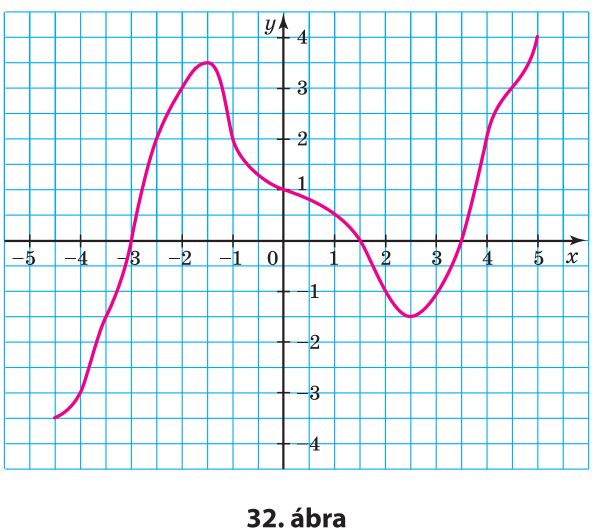


31. ábra

919.° A 25. ábrán egy $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. A grafikon segítségével határozzátok meg:

1) az argumentum értékét, ha $y = 3$;
2) az argumentum azon értékét, melynél a függvény értéke nulla;
3) a függvény értelmezési tartományát;
4) a függvény értékkészletét;
5) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értéke negatív;
6) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értéke pozitív!

920.° A 29. ábrán egy $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. A grafikon segítségével határozzátok meg:

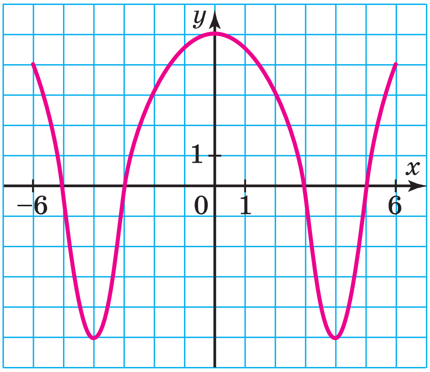


32. ábra

1) az y értékét, ha $x = -3{,}5; -1{,}5; 2; 4$;
2) az x értékét, ha $y = -3; -1{,}5; 2$.
3) az argumentum azon értékét, melynél a függvény értéke nulla;
4) a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét;
5) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értéke pozitív;
6) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értéke negatív!

921.° A 30. ábrán egy $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. A grafikon segítségével határozzátok meg:

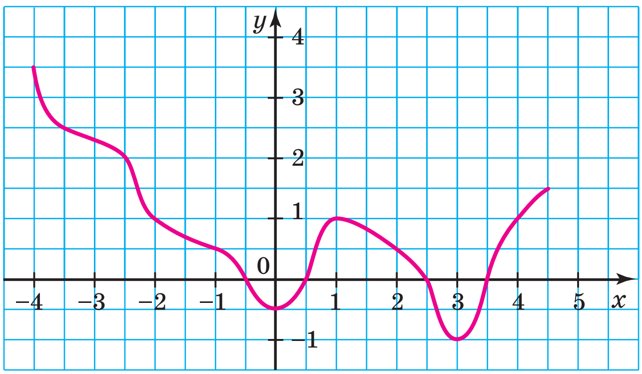
1) a függvény értelmezési tartományát;
2) a függvény értékkészletét;
3) a függvény abszcisszatengellyel való metszéspontjainak koordinátáit;
4) a függvény ordinátatengellyel való metszéspontjainak koordinátáit;
5) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értéke negatív pozitív;
6) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értéke pozitív!



33. ábra

922.° A 34. ábrán egy $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. A grafikon segítségével határozzátok meg:

1) $f(-4)$; $f(-2,5)$; $f(0,5)$; $f(2)$;
2) az x azon értékeit, melyeknél $f(x) = 2,5$; $f(x) = 1$; $f(x) = 0$;
3) a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét;
4) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értéke pozitív;
5) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értéke negatív!



34. ábra

923.° A következő pontok közül melyik tartozik az $y = x^2 + 2$ függvény grafikonjához:
1) $A(0; 2)$; 2) $B(-1; 1)$; 3) $C(-2; 6)$; 4) $D(-3; -7)$?

924.° A következő pontok közül melyik tartozik az $y = -2x^2 - 1$ függvény grafikonjához:
1) $A\left(\frac{1}{2}; -1,5\right)$; 2) $B(-3; 17)$?

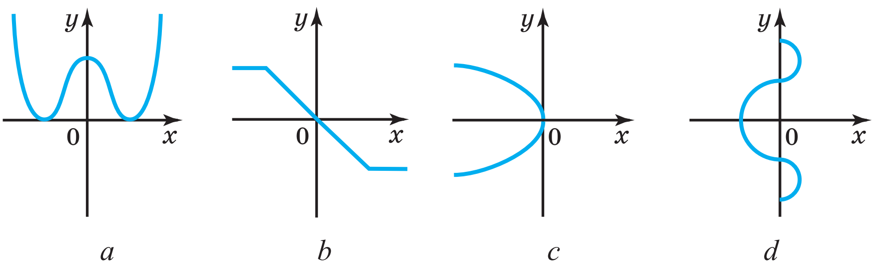
925.° Nevezzetek meg néhány olyan pontot, amelyek az alábbi függvények grafikonjaihoz tartoznak:
1) $y = 7x - 4$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = 4 - |x|$.

926.° Az adott függvények közül melyik grafikonjára illeszkedik az $A(1; 2)$ pont:
1) $y = 1 - 2x$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 4) $y = 0,3x + 0,7$?

927.° Hozzátartoznak-e az $y = \frac{2}{x}$; függvény grafikonjához a következő pontok:

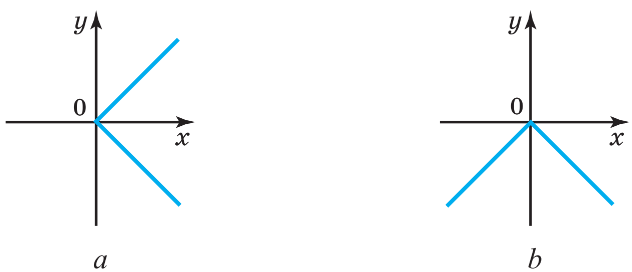
1) $A(9; -3)$;
2) $B(6; 2)$;
3) $C(-1; 3)$;
4) $D(-12; 4)$?

928.° A 35. ábrán látható alakzatok közül melyik lehet az x argumentumú függvény grafikonja?



35. ábra

929.° A 36. ábrán látható alakzatok közül melyik lehet az x argumentumú függvény grafikonja?



36. ábra

930.• A függvény grafikonja az $A(-3; 6)$, $B(-1; 2)$, $C(3; -2)$ és $D(9; 0)$ csúcsokkal rendelkező $ABCD$ töröttvonal.

1) Ábrázoljátok a függvény grafikonját!
2) Határozzátok meg a függvény értékét, ha az argumentum: -2; 0; 2; 6!

3) Határozzátok meg az argumentum értékét, melyeknél a függvény értéke: 1; –1; 0!

931.• Lehet-e az *ABC* töröttvonal valamely függvény grafikonja, ha:

1) $A(-4; -1)$, $B(1; 2)$, $C(2; 4)$;
2) $A(-4; -1)$, $B(1; 2)$, $C(1; 3)$?

932.• Az *MKE* töröttvonal, melynek csúcsai $M(-4; 1)$, $K(2; 4)$, $E(5; -2)$, valamely függvény grafikonja.

1) Ábrázoljátok a függvény grafikonját!
2) Határozzátok meg a függvény értékeit, ha az argumentum: –2; 0; 3!
3) Határozzátok meg az x értékeit, melyeknél $y = -2; 0; 2$!

933.• A függvény az $y = x^2 - 1$ képlettel van megadva, ahol $-2 \leq x \leq 3$.

1) Állítsátok össze a függvény értéktáblázatát 1 lépésenként.
2) Az összeállított táblázat segítségével ábrázoljátok a függvény grafikonját.
3) A grafikon segítségével határozzátok meg, az argumentum milyen értékeinél lesz a függvény értéke kisebb, illetve nagyobb nullánál?
4) A grafikon alapján határozzátok meg a függvény értékkészletét!

934.• A függvény az $y = 4 - x^2$ képlettel van megadva, ahol $-3 \leq x \leq 2$.

1) Állítsátok össze a függvény értéktáblázatát 1 lépésenként!
2) Az összeállított táblázat segítségével ábrázoljátok a függvény grafikonját!
3) A grafikon segítségével határozzátok meg, az argumentum milyen értékeinél lesz a függvény értéke kisebb, illetve nagyobb nullánál?
4) A grafikon alapján határozzátok meg a függvény értékkészletét!

935.• Az $y = f(x)$ függvény értéke 0, ha az argumentum értéke –5 és 4. Melyik igaz a következő állítások közül:

1) a függvény grafikonja a (0; –5) és (0; 4) koordinátájú pontokban metszi az ordinátatengelyt;
2) a függvény grafikonja a (–5; 0) és (4; 0) koordinátájú pontokban metszi az abszcisszatengelyt?

936.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg a koordinátatengelyek és az alábbi függvények grafikonjai metszéspontjainak koordinátáit:

1) $y = x^2 - 16x$;
2) $y = |x| - 2$;
3) $y = x^3 - 9x$;
4) $y = 0{,}8x$.

937.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg a koordinátatengelyek és az alábbi függvények grafikonjai metszéspontjainak koordinátáit:

1) $y = 36 - 9x$;
2) $y = x^2 + x$;
3) $y = 49 - x^2$.

938.• Adott az $y = 1 - x$ függvény, melynek értelmezési tartománya az összes egyjegyű természetes szám. Ábrázoljátok a függvény grafikonját!

939.• Ábrázoljátok az $f(x) = 1{,}5x + 1$ függvény grafikonját, melynek értelmezési tartománya a $-4 \le x \le 2$ intervallumban található egész számok!

940.* Ábrázoljátok annak a függvénynek a grafikonját, melynek az értelmezési tartománya az összes természetes szám, az értéke az argumentum páros értékeinél 1, a páratlanok esetében pedig –1!

941.* Az f függvényt leírással adták meg: a függvény értéke az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb az argumentum megfelelő értékénél. Ábrázoljátok a függvény grafikonját!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

942. Az együtt dolgozó János és Péter traktorosok 21 óra alatt, Péter és Sándor pedig 28 óra alatt, János és Sándor pedig 20 óra alatt tudnak felszántani egy szántót. Mennyi idő alatt tudják János, Péter és Sándor felszántani ezt a mezőt, ha hárman együtt dolgoznak?

943. Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $(c + 2)(c - 3) - (c + 1)(c + 3)$;

2) $(p + 4)(p - 11) + (p + 6)^2$;

3) $3(x - 5)^2 - (8x^2 - 10x)$;

4) $7(2y - 5)^2 - 2(7y - 1)^2$.

944. Bizonyítsátok be az azonosságot:

1) $(4a^2 + 3)^2 + (7 - 4a2)^2 - 2(4a^2 + 3)(4a2 - 7) = 100$;

2) $(a^2 - 6ab + 9b^2)(a^2 + 6ab + 9b^2) - (a^2 - 9b^2)^2 = 0$.

945. Bizonyítsátok be, hogy bármilyen páratlan n esetén a $(4n + 1)^2 - (n + 4)^2$ kifejezés értéke a 120 többszöröse lesz!

946. Keressétek meg az x változó három olyan pozitív egész értékét, amelyekkel az $a^2 - 2x$ kifejezés a négyzetek különbségének képlete segítségével bontható fel A kapott kifejezéseket bontsátok tényezőkre!

947. *(Bhászkara[3] feladata.)* A kadamba virág szirmára a méhraj egyötöde szállt, a mellette virító szimendgára pedig egyharmada. A számuk különbségét add össze háromszor, annyian ültek a jázminra. Csak egy méhecske nem találta a helyét és röpdösött ide-oda, szívta magába a virágok illatát. Most pedig mondd meg, hány méhből állt az egész raj?

---

[3] Bhászkara (1114–1185) hindú matematikus és csillagász. *A csillagászat koronája* (kb. 1150) c. értekezés szerzője, melyben egész sor algebrai feladat megoldását adta meg.

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

948. A táblázatban az x és y megfelelő értékei találhatók. Állapítsátok meg, egyenesen arányosak-e ezek a mennyiségek.

1)

x	2	5	7	9
y	6	15	21	27

2)

x	0,4	1,8	2,3	3,1
y	0,8	3,8	4,6	6,2

949. Töltsétek ki a táblázatot, ha az y és az x egyenesen arányosak.

x	0,3	8	3,2		
y			9,6	2,7	42

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

950. Az egész számú négyzetet tartalmazó négyzet alakú négyzetrácsos papírlapból, a rácsvonalak mentén olyan négyzetet vágtak ki, amely szintén egész számú négyzeteket tartalmaz. Ezután még 71 négyzet maradt. Hány négyzet volt eredetileg a papírlapon?

23. Lineáris függvény. A lineáris függvény grafikonja és tulajdonságai

Megvizsgálunk két példát.

PÉLDA 1 A medencében 200 l víz volt, majd t percen át percenként 80 l vizet szivattyúztak még bele. Mielőtt a medence megtelne, a benne lévő víz V térfogata a következő képlettel határozható meg:

$$V = 80t + 200, \text{ де } t10.$$

A képlet a V változó t változótól való függését adja meg. ◀

PÉLDA 2 Az egyik brigád 25 láda, míg a másik brigád minden tagja 2-2 láda almát szedett. Legyen a második brigád létszáma x fő. A brigádok által szedett alma mennyiségét jelöljük y-nal. Akkor az x és y változók közötti összefüggést a következő képlet fejezi ki:

$$y = 2x + 25 \text{ ahol } x - \text{természetes szám.}$$

A fenti példákban két valós helyzetet leíró függvényt állítottunk össze, melyek két különböző valós helyzezet ír le. Ezek a függvények egymáshoz hasonlók, melyek alakja minkét esetben $y = kx + b$.

Meghatározás. Az $y = kx + b$ képlettel megadható függvényt, ahol k és b – adott számok, x – független változó, lineáris függvénynek nevezzük.

Lineáris függvények példái:

$$y = -2x + 1,\ y = 1 - x,$$
$$y = 5x,\ y = 2.$$

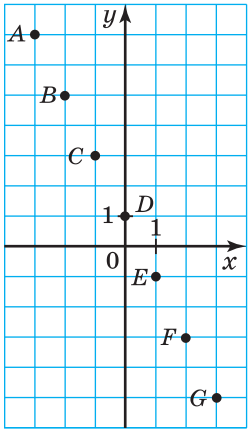
Megjegyezzük, hogy a *lineáris függvények értelmezési tartománya az összes szám*.

Megrajzoljuk az $y = -2x + 1$ függvény grafikonját.

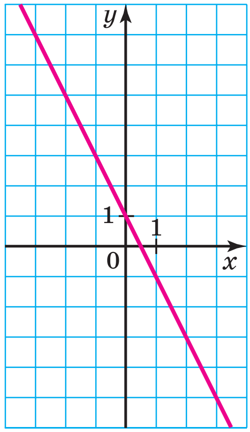
A függvény és az argumentumok értékeiből táblázatot készítünk.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	7	5	3	1	–1	–3	–5

Az A(–3; 7), B(–2; 5), C(–1; 3), D(0; 1), E(1; –1), F(2; –3), G (3; –5) pontok a keresett grafikonhoz tartoznak (37. ábra). Minden pont egy egyenesen fekszik, amely az $y = -2x + 1$ függvény grafikonja (38. ábra).



37. ábra



38. ábra

Majd a 9. osztályban mértanórán bebizonyítjátok, hogy ***a lineáris függvény grafikonja egyenes***.

Megjegyezzük, hogy az egyenes nem lehet függőleges, vagyis merőleges az abszcisszatengelyre. Valóban, a függőleges egyenes nem lesz függvény grafikonja.

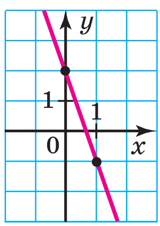
Mivel az egyenes egyértelműen megadható két pont segítségével, ezért a lineáris függvény grafikonjának a megszerkesztéséhez elegendő kiválasztanunk az argumentum két értékét, majd összeállítani a függvény értékeinek táblázatát, amely két oszlopból fog állni.

PÉLDA 3 Ábrázoljátok az $y = -3x + 2$ függvény grafikonját!

Megoldás: Összeállítjuk a függvény értéktáblázatát az argumentum bármely két értékével:

x	0	1
y	2	–1

Felvesszük a koordinátasíkon a (0; 2) és (1; –1) pontokat, majd egyenest húzunk rajtuk keresztül (39. ábra). Ez az egyenes az $y = -3x + 2$ függvény grafikonja. ◀



39. ábra

A $y = kx + b$ képlettel megadható lineáris függvényben előfordul, hogy a $k = 0$ vagy/és $b = 0$.

Megvizsgáljuk azt az esetet, amikor $b = 0$ és $k \neq 0$. Akkor a képlet alakja: $y = kx$. Ebből az következik, hogy a nullától eltérő argumentumértékekre felírható az $\frac{y}{x} = k$. képlet. Ez a képlet azt mutatja, hogy az $y = kx$ függvény esetében, ha $x \neq 0$, a függvény és az argumentum hányadosa állandó marad és k-val egyenlő.

A 6. osztályban már megismerkedtetek a mennyiségek közötti hasonló összefüggésekkel, amelyet **egyenes arányosságnak** nevezünk. Ezek alapján az $y = kx$, ha $k \neq 0$ képlettel megadott függvényt egyenes arányosságnak nevezzük.

Az $y = 2x$; $y = x$; $y = y = -\frac{1}{3}x$; függvények az egyenes arányosság példái.

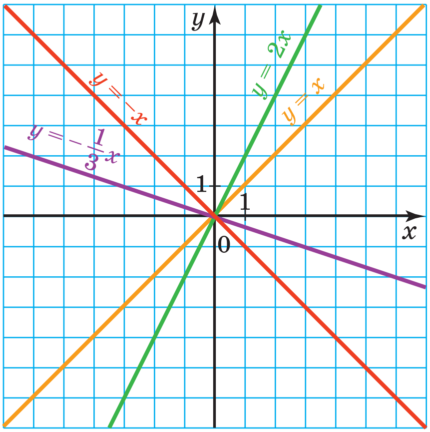
Mivel az egyenes arányosság a lineáris függvények speciális esete (ahogyan a 40. ábrán látható), ezért a grafikonja egy olyan egyenes, amely bármilyen k esetén átmegy az O (0; 0) ponton, azaz az origón. Valóban, ha az $y = kx$ képlet alapján $x = 0$, akkor $y = 0$. Ezért aztán az egyenes arányosság grafikonjának a megszerkesztéséhez elegendő találni egy, az origótól eltérő pontot és meghúzni rajta és az O (0; 0) ponton keresztül az egyenest.

40. ábra

A 41. ábrán a fent felsorolt egyenes arányosságok grafikonjai láthatók.

Megvizsgáljuk a lineáris függvények még egy esetét.

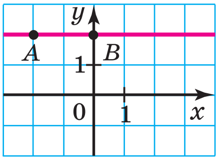
Tekintsük, hogy az $y = kx + b$ képletben $k = 0$. Akkor $y = b$. Érthető, hogy ebben az esetben a függvény értéke változatlan marad bármilyen argumentum esetén.



41. ábra

PÉLDA 4 Ábrázoljátok az $y = 2$ függvény grafikonját.

Megoldás: Mint általában a lineáris függvények esetében, keresnünk kell a grafikonhoz tartozó két pontot. Ezeknek azonos lesz az ordinátájuk – 2. Az abszcissza bármilyen szám lehet. Legyen a –2 és a 0. Ezek után az $A(-2; 2)$ és $B(0; 2)$ pontokon keresztül egyenest húzunk, amely párhuzamos az abszcisszatengellyel (42. ábra). ◀

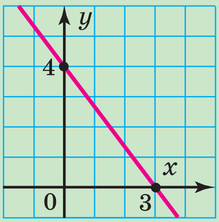


42. ábra

Megjegyezzük, hogy az $y = 0$ függvény grafikonja maga az abszcisszatengely. Az $y = b$, ahol $b \neq 0$ függvény grafikonja az abszcisszatengellyel párhuzamos egyenes.

PÉLDA 5 Írjátok le a 43. ábrán látható függvény képletét!

Megoldás: A grafikon a (0; 4) pontban metszi az ordinátatengelyt. Behelyettesítjük ezeket a koordinátákat az $y = kx + b$ képletbe: $4 = k \cdot 0 + b$. Innen $b = 4$.



43. ábra

Mivel a grafikon a (3; 0) pontban metszi az abszcisszatengelyt, a koordinátákat újból behelyettesítjük az $y = kx + b$ képletbe: $3k + 4 = 0$; $k = k = -\frac{4}{3}$.

Felelet: $y = -\frac{4}{3}x + 4$. ◀

1. Milyen függvényt nevezünk lineárisnak?
2. Milyen a képe a lineáris függvény grafikonjának?
3. Milyen függvényt nevezünk egyenes arányosságnak?
4. Hogyan néz ki az egyenes arányosság grafikonja?
5. Milyen az y = b, ahol b ≠ 0 függvény grafikonja?
6. Milyen függvény grafikonja az abszcisszatengely?
7. Létezik-e olyan függvény, melynek az ordinátatengely a grafikonja?

GYAKORLATOK

951.° Lineárisak-e az alábbi függvények:

1) $y = 3x - 2$;
2) $y = 8 - 7x$;
3) $y = \frac{x}{3} + 2$;
4) $y = \frac{3}{x} + 2$;
5) $y = 2x^2 + 4$;
6) $y = \frac{12x - 8}{4}$;
7) $y = \frac{x}{5}$;
8) $y = -4$;
9) $y = 0$?

Amennyiben igen, úgy nevezzétek meg a k és b együtthatók értékeit.

952.° Egyenes arányosság e az adott függvény:

1) $y = 4x$;

2) $y = \frac{4}{x}$;

3) $y = \frac{x}{4}$;

4) $y = 0$;

5) $y = -4x$;

6) $y = -\frac{x}{4}$?

Ha a válasz igen, adjátok meg a k együttható értékét.

953.° A lineáris függvény az $y = 6x - 5$ képlettel van megadva. Töltsétek ki a táblázatot!

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y							

954.° A függvényt az $y = -2x + 5$ képlet adja meg. Határozzátok meg:

1) a függvénynek a –4; 3,5; 0 argumentumoknak megfelelő értékeit;

2) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értéke 9; –5; 0!

955.° A függvény az $y = 0{,}4x + 3$ képlettel van megadva. Töltsétek ki a táblázatot!

x	–2		0		5	
y		–2		0		–13

956.° A függvény az $y = 0{,}3x - 2$ képlettel van megadva. Határozzátok meg:

1) a függvénynek az 5; –2; 0 argumentumoknak megfelelő értékeit;

2) az argumentum azon értékeit, melyeknél a függvény értéke 1; –11; 0,8!

957.° Töltsétek ki a táblázatot és szerkesszétek meg a függvény grafikonját:

1) $y = x + 3$;

x	0	1
y		

2) $y = \frac{1}{3}x - 5$.

x	0	3
y		

958.° Töltsétek ki a táblázatot és szerkesszétek meg a függvény grafikonját:

1) $y = 3 - 0{,}5x$;

x	0	2
y		

2) $y = \frac{1}{8}x - 1$.

x	0	8
y		

959.° Szerkesszétek meg a függvény grafikonját:

1) $y = x - 5$;
2) $y = 3x + 1$;
3) $y = -\frac{1}{6}x - 2$;
4) $y = 0{,}4x + 3$.

960.° Szerkesszétek meg a függvény grafikonját:

1) $y = 4 - x$; 2) $y = -4x + 5$; 3) $y = 0{,}2x - 3$.

961.° A függvényt az $y = y = \frac{1}{3}x$ képlettel adták meg. Határozzátok meg:

1) az y értékeit, ha $x = 6; -3; -3{,}2$;

2) az x értékeit, melyeknél $y = -2; \frac{1}{3}; 12$!

962.° A függvény az $y = 0{,}6x$ képlettel van megadva. Töltsétek ki a táblázatot!

x	10	0,6	–5	–1,2			
y					4,8	–60	$\frac{1}{3}$

963.° A függvényt az $y = 1{,}2x$ képlettel adták meg. Határozzátok meg:

1) az y értékeit, ha x = 10; 0,6; –5; –4;

2) az x értékeit, melyeknél y = 3,6; –2,4; 6!

964.° Ábrázoljátok az egyenes arányosság grafikonját:

1) $y = 3x$; 2) $y = -2x$; 3) $y = -0{,}6x$; 4) $y = \frac{1}{7}x$.

965.° Ábrázoljátok a függvény grafikonjait:

1) $y = 5x$; 2) $y = 0{,}8x$; 3) $y = -\frac{1}{6}x$.

966.° Szerkesszétek meg ugyanabban a koordinátarendszerben az $y = 3$; $y = -5$; $y = 0$ függvények grafikonját!

967.° Szerkesztés nélkül állapítsátok meg az $y = 1{,}8x - 3$ függvények grafikonja illeszkedik e a következő pontokra: $A(-2; -6{,}6)$; $B(1; 1{,}2)$; $C(0; -3)$; $D(5; 7)$?

968.° Szerkesztés nélkül állapítsátok meg az $y = 8x - 14$ függvények grafikonja illeszkedik e a következő pontokra:

1) $A(-1; -6)$; 2) $B(2; 2)$.

969.• Az x és az y változók közötti összefüggés egyenes arányosság.

1) Töltsétek ki a táblázatot:

x	8	6	2	1	$\frac{1}{2}$	0	–1	–2	–3	–4
y	4									

2) Adjátok meg ennek a függvénynek a képletét;

3) Szerkesszétek meg a grafikonját!

970.• Szerkesszétek meg az $y = 2x - 3$ függvény grafikonját! Felhasználva a grafikont, határozzátok meg:

1) a függvény értékeit, ha az argumentum megfelelő értékekei: 4; –1; 0; 5;

2) az argumentum értékeit, ha a függvény megfelelő értékei: 1; –1; 0;

3) azokat az argumentum értékeket, ahol a függvény pozitív!

971.• Szerkesszétek eg az $y = 2 - 4x$ függvény grafikonját! Felhasználva a grafikont, határozzátok meg:

1) a függvény értékeit, ha az argumentum megfelelő értékekei: 1; 0; –2;
2) az argumentum értékeit, ha a függvény megfelelő értékei: –4; –2; 2;
3) azokat az argumentum értékeket, ahol a függvény negatív!

972.• Szerkesszétek eg az $y = 0{,}5x$ függvény grafikonját! Felhasználva a grafikont, határozzátok meg:

1) a függvény értékeit, ha az argumentum megfelelő értékekei: 4; –6; 3;
2) az argumentum értékeit, ha a függvény megfelelő értékei: 2,5; –2; 1;
3) azokat az argumentum értékeket, ahol a függvény negatív!

973.• Szerkesszétek eg az $y = -4x$ függvény grafikonját! Felhasználva a grafikont, határozzátok meg:

1) a függvény értékeit, ha az argumentum megfelelő értékekei:–4; 2;
2) az argumentum értékeit, ha a függvény megfelelő értékei: 2,5; –2; 1;
3) azokat az argumentum értékeket, ahol a függvény pozitív!

974.• Szerkesszétek meg közös koordinátarendszerben az $y = x - 1$ és az $y = \frac{1}{4}x + 2$ függvények grafikonjait és határozzátok meg ezek metszéspontjának koordinátáit!

975.• Szerkesszétek meg közös koordinátarendszerben az $y = -5x - 6$ és az $y = -2x + 1$ függvények grafikonjait és határozzátok meg ezek metszéspontjának koordinátáit!

976.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg az adott függvény és a koordináta tengelyek a metszéspontjainak koordinátáit:

1) $y = 2{,}5x + 10$;
2) $y = 6x - 4$.

977.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg az adott függvény és a koordináta tengelyek a metszéspontjainak koordinátáit:

1) $y = \frac{2}{3}x - 4;$ 2) $y = 7 - 3x$.

978.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg az $y = 2x - 9$ függvényen határozzátok meg annak a pontnak a koordinátáit:

1) melynek abszcisszája egyenlő az ordinátájával;

2) az ordinátája 6-tal több, mint az abszcisszája!

979.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg az $y = -7x + 8$ függvény grafikonjának azt a pontját, melynek abszcisszája és ordinátája ellentett számok lesznek!

980.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg a függvények metszéspontjának koordinátáit:

1) $y = 3{,}7x + 10$ és $y = 1{,}4x - 13$;

2) $y = 4 - \frac{2}{7}x$ és $y = \frac{9}{7}x + 26.$

981.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg az $y = 4x - 7$ és az $y = -2x + 11$ függvények metszéspontjának koordinátáit!

982.• Az x mely értékeinél lesznek az $f(x) = 4x - 3$ és a $g(x) = 3x - 2$ függvényeknek azonosak az értékeik? Szerkesszétek meg ugyanabban a koordinátarendszerben az f és g függvények grafikonjait! Állapítsátok meg, hogy az x mely értékeinél:

1) $f(x) > g(x)$; 2) $f(x) < g(x)$.

983.• A független változó értékeinél lesznek az $f(x) = 5 - 2x$ és a $g(x) = 2x - 3$ függvényeknek azonosak az értékeik? Szerkesszétek meg ugyanabban a koordinátarendszerben az f és g függvények grafikonjait! Állapítsátok meg, hogy az x mely értékeinél:

1) $f(x) < g(x)$; 2) $f(x) > g(x)$.

984.• Adjátok meg annak a függvénynek a képletét, amely egyenes arányosság, és a grafikonja az $M(2; -5)$ ponton halad át!

985.• Határozzátok meg a b értékét, melynél az $y = -\frac{1}{9}x + b$ függvény grafikonjához tartozik az $A(-27; 4)$ pont!

986.• A k mely értékénél fog a $B(3; –6)$ pont az $y = kx – 15$ függvény grafikonjára illeszkedni?

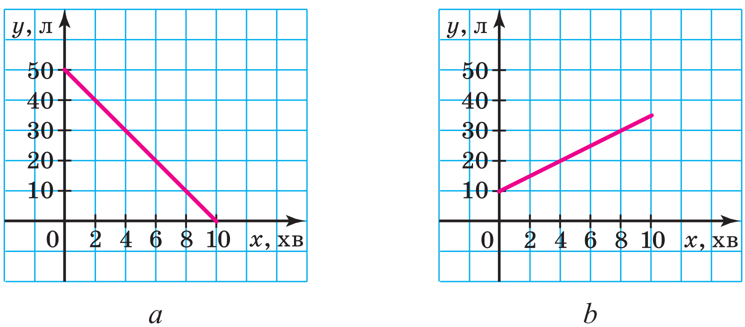
987.• Az $y = kx + b$ függvény grafikonja a $C(0, 4)$ és $D(–8; 0)$ pontokban metszi a koordinátatengelyeket. Határozzátok meg a k és b értékét!

988.• Az $y = kx + b$ függvény grafikonja az $M(3, 0)$ és $K(0; –1)$ pontokban metszi a koordinátatengelyeket. Határozzátok meg a k és b értékét!

989.• Az $y = kx + b$ függvény grafikonja összes pontjának ordinátája –6. Határozzátok meg a k és b értékét!

990.• Az $y = kx + b$ függvény grafikonja párhuzamos az abszcisszatengellyel, és az $A(–2; 3)$ ponton halad át. Határozzátok meg a k és b értékét!

991.• A 44. ábrán látható grafikonok egyike egy tartály vízzel való feltöltését, a másik pedig a víz egy másik tartályból való kifolyását ábrázolja.



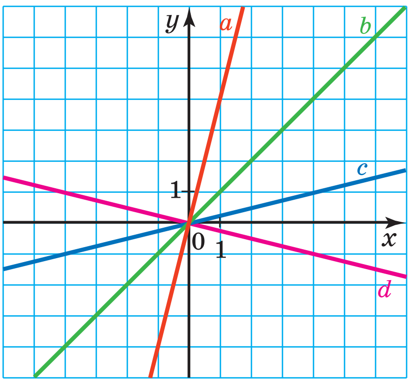
44. ábra

1) Melyik folyamatnak melyik grafikon felel meg a 44.ábrán?
2) Mennyi víz volt a tartályokban kezdetben?
3) Mennyi víz volt a tartályokban a csapok megnyitása után 2 perccel? 6 perccel?
4) A csapok megnyitása után hány perccel lesz egy-egy tartályban 30 l víz?
5) Hány liter víz folyik be az egyik tartályba, illetve folyik ki a másik tartályból percenként?

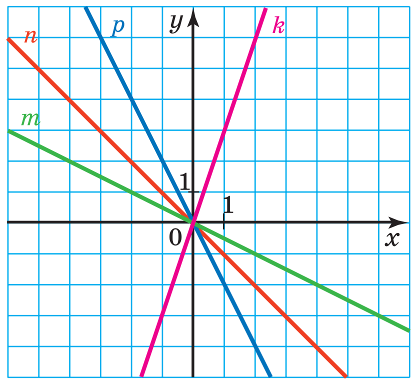
6) Adjátok meg mindkét tartály esetében a bennük lévő víz mennyisége és az eltelt idő közötti összefüggés képletét!

992.• A 45. ábrán melyik egyenes lesz a következő függvények grafikonja:

1) $y = x$; 2) $y = 4x$; 3) $y = \frac{1}{4}x$; 4) $y = -\frac{1}{4}x$?



45. ábra



46. ábra

993.• A 46. ábrán melyik egyenes lesz a következő függvények grafikonja:

1) $y = -x$; 2) $y = 3x$; 3) $y = -\frac{1}{2}x$; 4) $y = -2x$?

994.•• Adjátok meg két olyan lineáris függvény képletét, melynek grafikonjaira illeszkednek a következő pontok?

1) $A(0; 4)$; 2) $B(1; 3)$.

995.•• Az $y = 0{,}5x - 3$, $y = -4x + 6$ és $y = kx$ függvények grafikonjai egy pontban metszik egymást. Határozzátok meg a k értékét! Szerkesszétek meg, egy koordinátarendszerben, ezeknek a függvényeknek a grafikonjait!

996.•• A b mely értékénél fogják az $y = 1{,}5x - 3$, $y = 2{,}5x + 1$ és az $y = 5x + b$ függvények grafikonjai egy pontban metszeni egymást?

997.•• A C pont a 8 cm hosszúságú AB szakaszhoz tartozik. Az AC szakasz hossza x, a BC szakaszé pedig y. Ábrázoljátok az y és x közötti összefüggés grafikonját, ha $0 < x < 8$! Jelöljétek meg a grafikonon azt a pontot, amely annak az esetnek felel meg, ha C az AB szakasz felezőpontja!

998.•• Az $ABCD$ téglalap kerülete 12. $AB = x$, $AD = y$, $0 < x < 6$. Szerkesszétek meg az y változónak x-től való függésének grafikonját! Jelöljétek ezen a grafikonon azt a pontot, amely annak az esetnek felel meg, amikor az $ABCD$ téglalap négyzet lesz!

999.•• Szerkesszétek meg a függvény grafikonját:

1) $y = \begin{cases} x - 4, & \text{ha } x \geq 0, \\ -2x - 4, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$
2) $y = \begin{cases} 3x - 2, & \text{ha } x \leq 1, \\ 1, & \text{ha } x > 1, \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 2, & \text{ha } x \neq 2, \\ 3, & \text{ha } x = 2, \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x < 1, \\ 1, & \text{ha } x = -1, \\ x + 3, & \text{ha } x > -1, \end{cases}$

1000.•• Szerkesszétek meg a függvény grafikonját:

1) $y = \begin{cases} -3x, & \text{ha } x \leq -1, \\ 3, & \text{ha } -1 < x < 1, \\ 2x + 1, & \text{ha } x \geq 1; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 5 - x, & \text{ha } x \leq 3, \\ x + 1, & \text{ha } x > 3. \end{cases}$

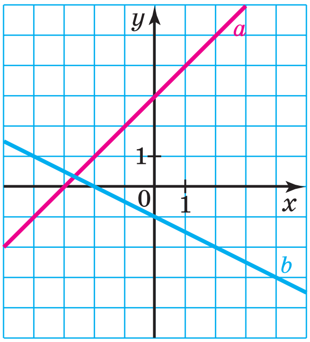
1001.•• Szerkesszétek meg a függvény grafikonját:

1) $y = |x|$;
2) $y = |x| + x$;
3) $y = 4x - |x| + 2$.

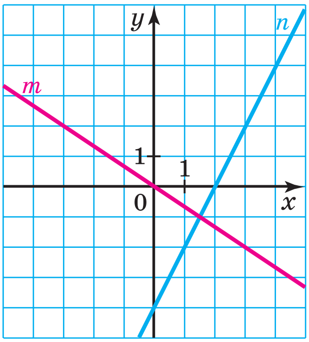
1002.•• Szerkesszétek meg a függvény grafikonját:

1) $y = -|x|$;
2) $y = x - |x|$;
3) $y = 3x + 2|x|$.

1003.•• Adjátok meg annak a lineáris függvénynek a képletét, amelynek grafikonja a 47. ábrán látható: 1) *a* egyenes; 2) *b* egyenes!



47. ábra



48. ábra

1004.•• Adjátok meg annak a lineáris függvénynek a képletét, amelynek grafikonja a 48. ábrán látható: 1) *m* egyenes; 2) *n* egyenes!

1005.* A függvényt leírással adták meg: a függvény értéke egyenlő az argumentum és az argumentum egész része különbségével[4]. Ábrázoljátok a függvény grafikonját!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1006. Három barát úgy döntött, bútorgyártó céget alapít, és beleegyezett, hogy a nyereséget a társaság alaptőkéjébe való hozzájárulásuk arányában megosszák. Az egyik 75 000 hrivnyát tett be a cégbe, a második 125 000 hrivnyát, a harmadik pedig 175 000 hrivnyát. Az első munkaév eredményei szerint a nyereség 1 800 000 hrivnya volt. Mennyi pénzt kapott mindegyik alapító?

1007. Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $(2 + 3a)(5 - a) - (2 - 3a)(5 + a)$ ha $a = -1{,}5$;

2) $(3a + b)^2 - (3a - b)^2$ ha $a = -3\frac{1}{3}$, $b = 0{,}3$.

---

[4] Az adott függvényt a szám törtrészének nevezik, és a következő a jelölése: $y = \{x\}$. A meghatározás szerint $\{x\} = x - [x]$, ahol $[x]$ az x egész része. Például $\{3{,}2\} = 0{,}2$; $\{-3{,}2\} = 0{,}8$; $\{-0{,}16\} = 0{,}84$; $\{2\} = 0$

1008. Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(5x + 1)(2x - 3) = (10x - 9)(x + 2)$;
2) $(7x - 1)(x + 5) = (3 + 7x)(x + 3)$.

1009. Bizonyítsátok be, hogy két egymást követő természetes szám köbeinek összege osztható 3-mal!

1010. Két hordóban azonos mennyiségű víz volt. Az első hordóban a víz térfogatát először 10%-kal növelték, majd 10%-kal csökkentették. A másik hordóban ellenkezőleg, először 10%-kal csökkentették, majd 10%-kal növelték a víz térfogatát. Melyik hordóban lett több víz?

1011. Ismeretes, hogy $x^2 + y^2 = a$, $xy = b$. Mivel egyenlő az $x^4 + x^2 y^2 + y^4$ kifejezés értéke?

1012. Bizonyítsátok be, hogy az $|x| - x$ kifejezés értéke bármilyen x esetén nagyobb lesz, mint a $2x - x^2 - 2$ kifejezésé!

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

1013. Határozzátok meg a kifejezések értékét:

1) $0{,}1x + 5y$, ha $x = -4$, $y = 0{,}6$;
2) $x^2 - 3y + 7$ ha $x = 6$, $y = -2$;
3) $|x| + |y - 6|$, ha $x = -10$, $y = 2$;
4) $(2y - 3)^2 - (x + 4)^2$, ha $x = -4$, $y = 1{,}5$.

1014. Tüntessétek fel a koordinátasíkon az összes olyan $(x; y)$ pontot, melyeknél:

1) $x = -3$, y – tetszőleges szám;
2) $y = 2$, x – tetszőleges szám;
3) $x = 0$, y – tetszőleges szám.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

1015. Van két nyomdagép. Az egyik gép az $(a; b; c)$ számokat tartalmazó kártya alapján az $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b+c}{2}; \frac{a+c}{2}\right)$, számokat tartalmazó kártyát ad ki, a másik az $(a; b; c)$ számok alapján – $(2a - b; 2b - c; 2c - a)$ számokat tartalmazó kártyákat. Kaphatunk-e az említett nyomdagépek segítségével a $(2{,}8; -1{,}7; 16)$ kártyából $(1{,}73; 2; 0{,}4)$ kártyát?

6. SZÁMÚ FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. Az argumentum milyen értékénél lesz az $y = -1{,}5x + 4$ függvény értéke -2?

A) 4; B) -4; C) 2; D) -2.

2. Az alábbi függvények közül melyik lesz egyenes arányosság?

A) $y = 12 + x$; B) $y = 12$; C) $y = \frac{12}{x}$; D) $y = 12x$.

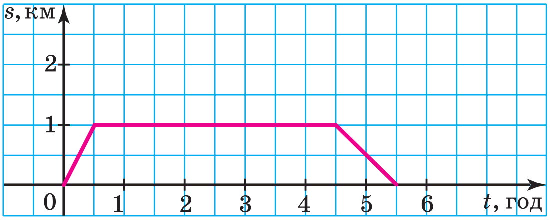
3. Az alábbi függvények közül melyik nem lineáris?

A) $y = -2x + 9$;
C) $y = -\frac{x}{2} + 9$;
B) $y = -\frac{2}{x} + 9$;
D) $y = 9 - 0{,}2x$.

4. Melyik pont illeszkedik az $y = x^2 - 3$ függvény grafikonjához?

A) $A(-3;\ 0)$;
C) $C(-3;\ 3)$;
B) $B(-3;\ 6)$;
D) $D(-3;\ -12)$.

5. Reggel a tanuló iskolába ment, majd a tanítás végeztével hazatért. A 49. ábrán a tanuló és az otthona közötti távolság időtől való függésének grafikonja látható. Hány órát volt a tanuló az iskolában?



49. ábra

A) 5 óra;
C) 4 óra;
B) 4,5 óra;
D) 3,5 óra

6. Melyik függvénynek a grafikonja a koordinátasík középpontján áthaladó egyenes?

A) $y = 20 + x$;
C) $y = 20 - x$;
B) $y = 20x$;
D) $y = x - 20$.

7. Melyik függvény grafikonja vízszintes egyenes?

A) $y = \frac{1}{9}$; C) $y = \frac{1}{9}x + 1$;

B) $y = \frac{1}{9} - x$; D) $y = \frac{1}{9}x$.

8. Melyik pontban metszi az $y = x - 2$ függvény grafikonja az ordinátatengelyt?

A) $A(0; -2)$; C) $C(2; 0)$;

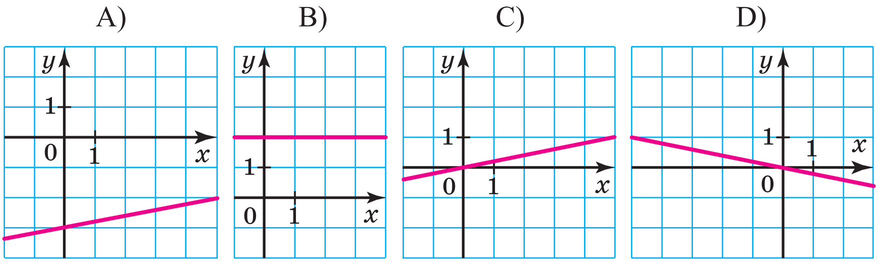
B) $B(0; 2)$; D) $D(-2; 0)$.

9. Határozzátok meg az $y = 8 - 4x$ és $y = x + 14$ függvények grafikonjai metszéspontjának abszcisszáját.

A) –2; C) –1,2;

B) 2; D) 1,2.

10. Melyik ábra tartalmazza az $y = 0{,}2x$ függvény grafikonját (50 ábra)?



50. ábra

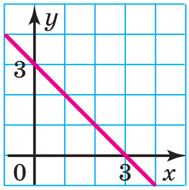
11. Melyik függvény grafikonja látható a 51. ábrán?

А) $y = 3x$;

Б) $y = -x + 3$;

В) $y = x + 3$;

Г) $y = \frac{1}{3}x$.



51. ábra

12. Az m melyik értékénél metszi az $y = mx + 2m - 5$ függvény grafikonja -1 abszcisszájú pontban az x tengelyt?

A) 5; B) –5; C) –3; D) 3.

A 2. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Függvény

Függvénynek nevezzük azt a megfeleltetést, amikor a független változó tetszőleges értékének a függvény egyetlen értéke felel meg.

A függvény értelmezési tartománya

Az argumentum által felvett értékek alkotják a függvény értelmezési tartományát.

A függvény értékkészlete

A függő változó által felvett összes érték alkotja a függvény értékkészletét.

A függvény megadásának módjai

Leírással; képlet segítségével; táblázat formájában; grafikusan.

A függvény grafikonja

Az f függvény grafikonjának azt a mértani alakzatot nevezzük, amely azokból és csakis azokból a pontokból áll, melyek abszcisszája az f függvény argumentumával, ordinátája pedig az f függvény megfelelő értékeivel egyenlő.

Lineáris függvény

Az $y = kx + b$ képlettel megadható függvényt, ahol k és b – számok, x – független változó, lineáris függvénynek nevezzük.

A lineáris függvény grafikonja

A lineáris függvény grafikonja egyenes.

Egyenes arányosság

Az $y = kx$ képlettel megadott lineáris függvényt, ahol $k \neq 0$, egyenes arányosságnak nevezzük.

§ 3 KÉTVÁLTOZÓS LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

- Ebben a paragrafusban megismerkedtek a kétváltozós egyenletekkel és azok rendszerével. Elsajátítjátok megoldásuk egyes módjait.
- Megtudjátok, hogy a kétváltozós egyenlet valós helyzet matematikai modellje is lehet.
- Megtanuljátok a szöveges feladatok megoldásának újszerű, hatásos módszerét.

24. Kétváltozós egyenletek

Megvizsgálunk néhány gyakorlati példát.

PÉLDA 1 A Kijev–Harkiv távolság 450 km. Kijevből Harkivba x km/h sebességgel elindult egy gépkocsi. 1 óra múlva vele szemben Harkivból is elindult egy gépkocsi, melynek sebessége y km/h. Két órával a második gépkocsi indulása után találkoztak.

Összeállítjuk a valós helyzet matematikai modelljét.

A második gépkocsi által a találkozásig megtett út $2y$ km. Mivel az első gépkocsi 1 órával többet volt úton, mint a második, vagyis 3 órát, ezért az a találkozásig $3x$ km távolságot tett meg. Összesen 450 km-t tettek meg.

Ezek alapján: $3x + 2y = 450$.

A kapott kétváltozós egyenlet a leírt valós helyzet matematikai modellje. ◀

Megvizsgálunk még néhány példát olyan helyztekről, melyek leírásának matematikai modelljei kétváltozós egyenletek.

PÉLDA 2 A 10 cm oldalú négyzet területe másik két négyzet területének összegével egyenlő.

A 10 cm oldalú négyzet területe 100 cm^2. Legyen a másik két négyzet oldala x cm és y cm. Akkor a következő egyenlőséget kapjuk:

$$x^2 + y^2 = 100.◀$$

PÉLDA 3 Adott egy derékszögű háromszög.

Jelöljük a hegyesszögeit x-szel és y-nal. Akkor felírhatjuk, hogy

$$x + y = 90.◀$$

PÉLDA 4 Adva van egy 12 cm^2 területű téglalap. Legyen a két oldala x cm és y cm. Akkor

$$xy = 12.◀$$

PÉLDA 5 Vásároltak 5 tollat és 7 füzetet, amiért összesen 19 hrivnyát fizettek.

Ha egy toll ára x hrn, egy füzeté pedig y hrn, akkor:

$$5x + 7y = 190. ◀$$

Mint látjuk, az előző öt példában kapott egyenletek

$$3x + 2y = 450,$$
$$x^2 + y^2 = 100,$$
$$x + y = 90,$$
$$xy = 12,$$
$$5x + 7y = 190.$$

mindegyike két változót tartalmaz, az x-et és y-t. Az ilyen egyenlőségeket **kétváltozós egyenleteknek** nevezzük.

Ha például az $xy = 12$ egyenletbe az x és y helyett 2-t és 6-t helyettesítünk be, igaz egyenlőséget kapunk: $2 \cdot 6 = 12$. Azt mondjuk, hogy az $x = 2$ és $y = 6$ értékpár **kielégíti** az egyenletet vagy az adott egyenlet **megoldása**.

Meghatározás. A változók azon értékpárját, amelyek az egyenletet igaz egyenlőséggé alakítják, a kétváltozós egyenlet megoldásának nevezzük.

A következő számpárok mindegyike megoldása az $x^2 + y^2 = 100$ egyenletnek:

$$x = 8,\ y = 6;$$
$$x = -6,\ y = 8;$$
$$x = 10,\ y = 0.$$

viszont az $x = 5$, $y = 9$ számpár nem megoldása.

A meghatározás hasonló az egyváltozós egyenletek gyökeinek a megfogalmazására. Ennek következtében a számpárokat vagy külön a számokat tévesen az egyenlet gyökének nevezik.

Az a tény, hogy az $x = a$ és $y = b$ számpár az egyenlet megoldása, a következőképpen írható fel: $(a; b)$ az egyenlet megoldása. A zárójelbe az első helyre[1] az x, a másodikra az y értékét írjuk.

Felhasználva a jelölést, felírhatjuk például, hogy az (5; 85), (40; 50), (50; 40) számpárok mindegyike megoldása az $x + y = 90$ egyenletnek.

A három felírt számpáron kívül az egyenletnek számtalan megoldása létezik. Ha az $x + y = 90$ egyenletbe behelyettesítjük az y változó bármelyik értékét, akkor egyváltozós lineáris egyenletet kapunk, melynek az x változó megfelelő értékei lesznek a gyökei. Érthető, hogy számtalan számpár található, amelyek az $x + y = 90$ egyenlet megoldásaként szolgálhatnak.

A kétváltozós egyenletnek nincs minden esetben végtelen számú megoldása. Például az $|x| + |y| = 0$ egyenlet egy megoldással rendelkezik: (0; 0). Valóban, mivel és ezért $x \neq 0$ és $y \neq 0$ esetében az egyenlet bal oldala csak pozitív értékű lehet. Az $x^2 + y^2 = -2$ egyenletnek például egyetlen megoldása sincs.

Megjegyezzük, hogy az $x^2 + y^2 = -2$ egyenleteket megoldottuk, az $x + y = 90$ egyenletet viszont nem.

---

[1] Ha az egyenletben lévő változók jelölése nem x és y, akkor a megoldáspárok felírásánál előre meg kell állapodni, melyik változó értékét írjuk az első, és melyiket a második helyre. Általában az ábécé sorrendet vesszük alapul.

Meghatározás. **Megoldani a kétváltozós egyenletet annyit jelent, mint megtalálni az összes megoldását, vagy megmutatni, hogy nincs megoldása.**

A kétváltozós egyenletek tulajdonságait könnyű megjegyezni: hasonlók az egyváltozós egyenletek esetében megfogalmazott tulajdonságokhoz, amelyekkel a 6. osztályban ismerkedtetek meg.

- Ha az egyenlet jobb és bal oldalához hozzáadjuk (vagy mindkét oldalából kivonjuk) ugyanazt a számot, akkor a kapott egyenletnek is ugyanazok lesznek a megoldásai, mint az eredeti egyenleté.
- Ha valamelyik összeadandót az egyenlet egyik oldaláról átvisszük ellenkező előjellel a másik oldalra, az egyenlet megoldásai nem változnak.
- Ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk (elosztjuk) ugyanazon nullától eltérő számmal, az egyenlet megoldásai nem változnak.

Megvizsgáljuk az $x^2 + y^2 + 2 = 2x - 2y$ egyenletet. Az egyenletek tulajdonságainak felhasználásával átalakítjuk a kifejezést:

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2 = 0.$$

Tovább alakítjuk: $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 0;$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 0.$$

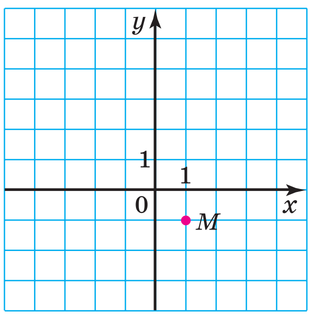
Mivel $(x - 1)^2 \geq 0$ és $(y + 1)^2 \geq 0$, ezért a bal oldal abban az esetben lesz 0, ha egyszerre teljesülnek a következő egyenlőségek: $x - 1 = 0$ és $y + 1 = 0$. Innen következik, hogy az $(1; -1)$ számpár az egyenlet egyetlen megoldása.

Egyes objektumok tanulmányozása során nemcsak a tulajdonságai leírására hagyatkozunk, hanem megpróbáljuk vizuálisan is elképzelni. Mivel a kétváltozós egyenlet megoldása egy számpár, például $(a; b)$, ezért kézenfekvő, hogy a koordinátasíkon egy $M(a; b)$ ponttal ábrázoljuk. Feltüntetve az egyenlet összes megoldását, megkapjuk az **egyenlet grafikonját**.

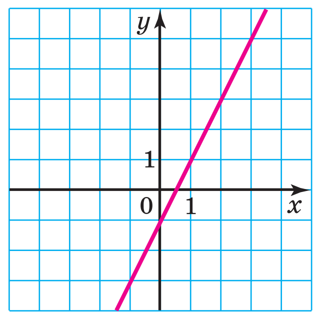
Meghatározás. A kétváltozós egyenlet grafikonjának azt a mértani alakzatot nevezzük, amelyik a koordinátasík azon, és csakis azon pontjaiból áll, melyek koordinátái (számpárok) az egyenlet megoldásai.

Például az imént vizsgált $x^2 + y^2 + 2 = 2x - 2y$ egyenletnek egy megoldása létezik: (1; –1). Ezért a grafikonja egy M (1; –1) pont (52. ábra).

Az 53. ábrán az $y = 2x - 1$ függvény grafikonja látható. Mivel a lineáris függvényt megadó képlet kétváltozós egyenlet, ezért úgy is mondhatjuk, hogy a 53. ábrán az $y = 2x - 1$ egyenlet grafikonja látható.



52. ábra

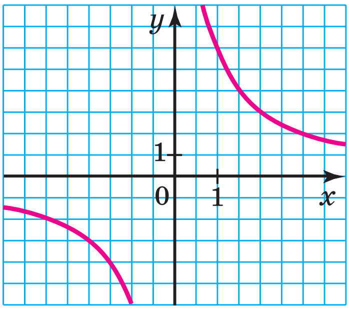


53. ábra

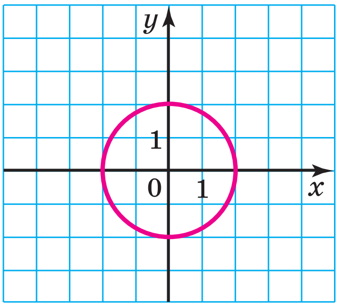
Az egyenlet grafikonját alkotó alakzat esetében igazak a következő két állítások:

1) *az egyenlet mindegyik megoldása a grafikont alkotó pontok koordinátája;*
2) *a grafikonhoz tartozó bármelyik pont koordinátája – az adott egyenlet megoldása*.

Az egyenletek grafikonjai nagyon sokfélék. Többükkel a későbbiekben fogtok megismerkedni az algebra tanulása közben. Például a 8. osztályos algebrából megtudhatjátok, hogy a pont elején vizsgált $xy = 12$ egyenlet grafikonja a 54. ábrán látható alakzat, amelyet hiperbolának neveznek. A 9. osztályos mértanból pedig azt tudhatjátok meg, hogy az $x^2 + y^2 = 4$ egyenlet grafikonja körvonal (55. ábra).



54. ábra



55. ábra

PÉLDA 6 Ábrázoljátok az $xy + 3y = 0$ egyenlet grafikonját!

Megoldás: Átalakítjuk az egyenletet: $y\,(x + 3) = 0$.

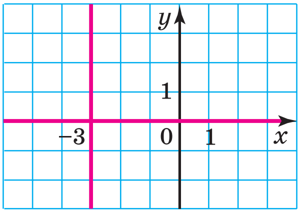
Innen az következik, hogy $y = 0$ vagy $x + 3 = 0$.

Tehát az egyenlet megoldása az összes $(x;\ 0)$ alakú számpár, ahol x – tetszőleges szám, valamint az összes $(–3;\ y)$ alakú számpár, ahol y – tetszőleges szám.

Az összes $(x;\ 0)$ koordinátájú pont, ahol x – tetszőleges szám, az abszcisszatengelyt alkotja.

Az összes $(–3;\ y)$ koordinátájú pont, ahol y – tetszőleges szám, a $(–3;\ 0)$ ponton átmenő az ordinátatengellyel párhuzamos egyenes.

Tehát az adott egyenlet grafikonja az 56. ábrán látható két egyenes. ◀



56. ábra

?

1. Mit nevezünk a kétváltozós egyenlet megoldásának?

2. Mit jelent megoldani a kétváltozós egyenletet?

3. Fogalmazzátok meg a kétváltozós egyenletek tulajdonságait!

4. Mit nevezünk a kétváltozós egyenlet grafikonjának?

GYAKORLATOK

1016.° Az alábbiak közül melyik kétváltozós egyenlet:

1) $2x + y = 8$;
2) $x + y + z = 0$;
3) $a^2 - 3b = 8$;
4) $a^2 - 3b = 8c$;
5) $xy + 1 = 2$;
6) $5m - 3n = 6$;
7) $a^2 - 3b = 8c$;
8) $x^3 - 8y = 100$;
9) $x^3 - 8xy = 100$;

1017.° Megoldása-e a (–2; 3) számpár az egyenleteknek:

1) $4x + 3y = 1$;
2) $x^2 + 5 = y^2$;
3) $xy = 6$?

1018.° A (0; 1); (5; –4); (0; 1,2); (–1; 1); (1; –1) számpárok közül melyek az egyenletek megoldásai:

1) $x^2 + 5y - 6 = 0$;
2) $xy + x = 0$?

1019.° Hozzátartozik-e a $2x^2 - y + 1 = 0$ egyenlet grafikonjához a következő pont:

1) $A(-3; -17)$;
2) $B(2; 9)$;
3) $C(-2; 9)$;
4) $D(-1; 4)$?

1020.° Bizonyítsátok be, hogy a következő pontok nem tartoznak az $xy - 12 = 0$ egyenlet grafikonjához:

1) $A(3; -4)$;
2) $B(-2; 6)$;
3) $C(7; 2)$.

1021.° Metszi-e a koordinátarendszer kezdőpontját a következő egyenletek grafikonja:

1) $12x + 17y = 0$;
2) $x^2 - xy + 2 = 0$;
3) $x^3 - 4y = y^2 + 3x$?

1022.° Nevezzétek meg az egyenletek tetszőleges három megoldását:

1) $x - y = 10$; 3) $x^3 - 4y = y^2 + 3x$?
2) $x = 4y$;

1023.° Nevezzétek meg az egyenletek tetszőleges három megoldását:

1) $x + y = 1$; 2) $5x - y = 2$.

1024.• Az A (6; b) pont illeszkedik a $4x + 3y = 30$ egyenlet grafikonjára. Határozzátok meg a b értékét?

1025.• A B (a; –1) pont illeszkedik a $7x - 5y = 47$ egyenlet grafikonjára. Határozzátok meg az a értékét!

1026.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg a függvények grafikonjai és a koordinátatengelyek metszéspontjainak a koordinátáit!

1) $x + y = 2$; 3) $x^2 + y^2 = 9$;
2) $x^3 + y = 1$; 4) $|x| - y = 5$.

1027.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg a függvények grafikonjai és a koordinátatengelyek metszéspontjainak a koordinátáit!

1) $2x - 3y = 6$; 2) $x^2 + y = 4$; 3) $|x| + |y| = 7$.

1028.• Állítsatok fel olyan kétváltozós egyenleteket, melyeknek megoldásai lesznek a következő számpárok:

1) $x = 1, y = 2$; 2) $x = -3, y = 5$; 3) $x = 10, y = 0$.

1029.• Állítsatok fel olyan kétváltozós egyenleteket, melyek grafikonjaira illeszkedik a következő pont:

1) $A(-2; 2)$; 2) $B(4; -1)$; 3) $C(0; 0)$.

1030.• Gondoljatok ki három olyan egyenletet, melyek grafikonjaira illeszkedik az M (6; –3) pont!

1031.• Gondoljatok ki három olyan egyenletet, melyek grafikonjaira illeszkedik a K (0; 4) pont!

1032.• Hozzátartoznak-e az $x^4 - y = -2$ egyenlet grafikonjához a negatív ordinátájú pontok?

1033.• Hozzátartoznak-e az $x + y^2 = -4$ egyenlet grafikonjához a pozitív abszcisszájú pontok?

1034.• Létezik-e megoldása az egyenleteknek:

1) $x^2 = y^2$;
2) $y^2 = -x^2$;
3) $xy = 0$;
4) $x^2 + y^2 = 25$;
5) $x^2 + y^2 = -25$;
6) $x^2 + y^2 = -9$;
7) $|x| + |y| = 1$;
8) $|x| + |y| = 0$;
9) $|x| + |y| = -1$?

Pozitív válasz esetén mondjatok néhány megoldást.

1035.• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $x^2 + y^2 = 0$;
2) $(x + 2)^2 (y - 3)^2 = 0$;
3) $x^4 + y^6 = -4$;

1036.• Hány megoldása van az egyenletnek:

1) $x^2 + (y - 2)^2 = 0$;
2) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 0$;
3) $9x^2 + 16y^2 = 0$;
4) $(x^2 + y^2)y = 0$;
5) $xy = 2$;
6) $|x + 1| + |y| = 0$;
7) $x^2 + y = -100$;
8) $x + y = 2$?

1037.• Állítsatok fel az x és y változók segítségével olyan egyenletet:

1) melynek egy megoldása van;
2) melynek nincs megoldása;
3) melynek számtalan megoldása van;
4) amelynek bármely számpár a megoldása!

1038.•• Milyen alakzatok a következő egyenletek grafikonjai:

1) $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 0$;
2) $|x + 9| + |y - 8| = 0$;
3) $4x + y = y + 4x$;
4) $(x - 1)(y + 5) = 0$?

1039.•• Szerkesszétek meg az egyenlet grafikonját:

1) $(x + 2)^2 + y^2 = 0$;
2) $|x| + (y - 3)^2 = 0$;
3) $xy = 0$;
4) $(x + 1)(y - 1) = 0$;
5) $xy - 2y = 0$.

1040.•• Szerkesszétek meg az egyenlet grafikonját:

1) $|x - 4| + |y - 4| = 0$;
2) $(x - 4)(y - 4) = 0$;
3) $xy + x = 0$.

1041.•• Határozzátok meg az alábbi egyenletek megoldásának összes természetes $(x; y)$ számpárját:

1) $2x + 3y = 5$;
2) $x + 5y = 16$.

1042.•• Határozzátok meg az $|x| + |y| = 2$ egyenlet megoldásának összes egész $(x; y)$ számpárját!

1043.•• Határozzátok meg az $x^2 + y^2 = 5$ egyenlet megoldásának összes egész $(x; y)$ számpárját!

1044.•• Katinkának a matematikai feladatgyűjteményért 29 hrivnyát kell fizetnie. Csak 2 és 5 hrivnyás bankjegyei vannak. Hányféleképpen számolhat el a könyvért visszajáró nélkül?

1045.•• A 7. osztályos tanulók a matematikaversenyen algebra- és mértanpéldákat oldottak meg. Minden helyesen megoldott algebrafeladatért 2 pont, míg a mértanfeladatért 3 pont járt. A legmagasabb elérhető pontszám 24. Hány feladatot kaptak a versenyzők algebrából és mértanból, ha minden tantárgyból legalább egy feladat volt? Írjátok fel az összes lehetséges megoldást!

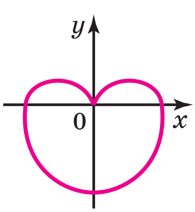
1046.•• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $x^2 + y^2 + 4 = 4y$;
2) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + x + y + 0{,}5 = 0$;
4) $9x^2 + y^2 + 2 = 6x$.

1047.•• Oldjátok meg az egyenleteket:

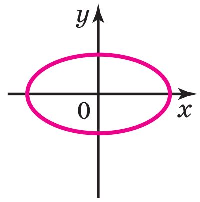
1) $x^2 + 10y + 30 = 10x - y^2 - 20$;
2) $4x^2 + y^2 + 4x = 2y - 3$.

1048.•• Az $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$ egyenlet grafikonja úgynevezett kardioid (57. ábra). Határozzátok meg a koordinátatengelyekkel való metszéspontjai koordinátáit.



57. ábra

1049.•• Az $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ egyenlet grafikonja az 58. ábrán látható ellipszis. Határozzátok meg a koordinátatengelyekkel való metszéspontjai koordinátáit!



58. ábra

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1050. A 150 ml 8%-os savelegyet tartalmazó üvegbe 90 ml vizet öntöttek. Mennyi lesz a kapott elegy savkoncentrációja?

1051. Határozd meg az egyenlet gyökét:

1) $\frac{4x+1}{5}-\frac{2x-3}{3}=x-4;$

2) $\frac{3x-5}{4}-\frac{5x-2}{3}=x+9.$

1052. Egy személygépkocsi és egy teherautó egyszerre indult el *A* városból *B* városba. Az indulás után 3,5 órával az autó megérkezett *B* városba, a kamionnak még 77 km volt hátra. Határozza meg a városok közötti távolságot, ha a teherautó sebessége 1,4-szer kisebb, mint az autó sebessége!

1053. Ki lehet e jelenteni, hogy bármilyen páros, természetes *n* estében a $(5n + 10)^2 - (2n + 4)^2$ 84-gyel osztható?

1054. Adott, hogy az *m*, *n* és *k* valamilyen értékeinél a $3m^2n$ 2-vel egyenlő, és az n^2k^4 egyenlő 3-mal. Határozzátok meg ugyan ezeknél az *m*, *n* és *k* értékeknél a következő kifejezés értékét:

1) $(3m^2n^2k^2)^2$; 2) $(-2m^2nk^2)^3 \cdot (0{,}5n^2k)^2$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

1055. Hasonlítsátok össze az $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 999 \cdot 1000)^2$ és a 1000^{1000} kifejezések értékeit!

25. A kétváltozós lineáris egyenlet és grafikonja

Meghatározás. Kétváltozós lineáris egyenletnek nevezzük az $ax + by = c$ **alakban felírható egyenletet, ahol** x **és** y **– változók,** a, b **és** c **– tetszőleges számok.**

Az előző pontban említett $3x + 2y = 450$; $x + y = 90$ egyenletek lineárisak. A következő egyenletek szintén lineárisok: $x + y = 3$; $0x + 5y = -1$; $-3x + 0y = 5$; $0x + 0y = 0$; $0x + 0y = 2$.

Tisztázzuk, milyen alakzat lesz a lineáris egyenlet grafikonja. Megvizsgálunk három lehetőséget.

1. lehetőség. Adott az $ax + by = c$ lineáris egyenlet, melyben $b \neq 0$. Az egyenletet a következőképpen alakítjuk át:

$$by = -ax + c.$$

Mivel $b \neq 0$, a jobb és bal oldalt elosztjuk b-vel:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Végezzük el a következő helyettesítést: $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{b} = p$. Tehát a képletünk a következő alakban írható fel:

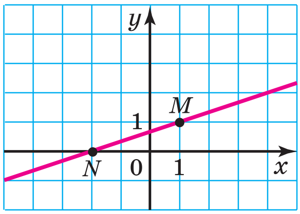
$$by = -ax + c.$$

A kapott képlet lineáris függvényt ad meg, melynek a grafikonja nem függőleges egyenes. Tehát az $ax + by = c$, ahol $b \neq 0$ egyenlet grafikonja nem függőleges egyenes.

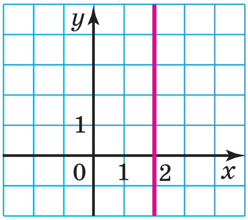
PÉLDA 1 az $x - 3y = -2$ egyenlet grafikonját!

Megoldás: Már tudjuk, hogy az egyenlet grafikonja egyenes. Ezért a grafikon megrajzolásához elég meghatároznunk két tetszőleges pont koordinátáját.

Ha $x = 1$, akkor $y = 1$; ha $x = -2$, akkor $y = 0$. A kapott $M(1; 1)$ és $N(-2; 0)$ pontokon keresztül egyenest húzunk, és megkapjuk a keresett grafikont (59. ábra). ◀



59. ábra



60. ábra

2. lehetőség. Adott az $ax + by = c$ lineáris egyenlet, ahol $a \neq 0$, $b = 0$. Ebben az esetben $ax + 0y = c$. Az ilyen típusú egyenletek grafikonját a 2. példában vizsgáljuk meg.

PÉLDA 2 a $3x + 0y = 6$ egyenlet grafikonját.

Megoldás: Nem okoz nehézséget megtalálnunk az egyenlet néhány megoldását. Vegyük például a következő négy számpárt: $(2; -1)$; $(2; 0)$; $\left(2; \frac{1}{3}\right)$; $(2; -100)$. Érthető, hogy bármely $(2; t)$ alakú számpár, ahol t – tetszőleges szám, megoldása a $3x + 0y = 6$ egyenletnek. Tehát a keresett grafikonhoz tartozik minden olyan pont, melyek abszcisszája 2, ordinátája pedig tetszőleges szám. Mindezek a pontok az abszcisszatengelyre merőleges és a $(2; 0)$ ponton átmenő egyenesen fekszenek (60. ábra). Eközben az egyenesen fekvő pontok bármelyikének a koordinátája – számpár – megoldása lesz az egyenletnek. Tehát a keresett grafikon az említett függőleges egyenes. ◀

Hasonlóképpen gondolkodva igazolhatjuk, hogy az $ax + 0y = c$ egyenlet grafikonja, ahol $a \neq 0$, szintén függőleges egyenes.

Levonhatjuk a következtetést: mindkét esetben: **1) $b \neq 0$; 2) $b = 0$ és $a \neq 0$ – az $ax + + by = c$ egyenlet grafikonja egyenes.**

Az „adva az $y = 2x$ egyenlet” kifejezés helyett az „adott az $y = 2x$ egyenes” kifejezést használják.

3. lehetőség. Adott az $ax + by = c$ lineáris egyenlet, melyben $a = b = 0$. Ekkor $0x + 0y = c$.

Ha $c \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, tehát nincsenek olyan pontok a koordinátasíkon, amelyek az egyenlet grafikonját alkotnák. Ha $c = 0$, akkor:

$$0x + 0y = 0.$$

Ebben az esetben bármely tetszőleges számpár az egyenlet megoldása lesz, és a grafikon a teljes koordinátasík.

A táblázatban összefoglaljuk a tanultakat.

Egyenletek	Az a, b és c értékei	Grafikon
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a és c tetszőleges szám	Nem merőleges egyenes
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c tetszőleges szám	Merőleges egyenes
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	A teljes koordinátasík
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	–

PÉLDA 3 ki a $3x – 2y = 6$ egyenletből az x változót az y által, és találjatok két megoldását.

Megoldás: Az adott egyenletből: $3x = 2y + 6$;

$$x = \frac{2y+6}{3};\ x = \frac{2}{3}y + 2.$$

Az y változónak adott érték alapján az $x = \frac{2}{3}y + 2$ képlet segítségével kiszámíthatjuk az x értékét, amivel a $3x – 2y = 6$ egyenletnek számtalan megoldását kapjuk.

Például,

ha $y = 6$, akkor $x = \frac{2}{3} \cdot 6 + 2 = 6$;

ha $y = –2$, akkor $x = \frac{2}{3} \cdot (-2) + 2 = \frac{2}{3}$.

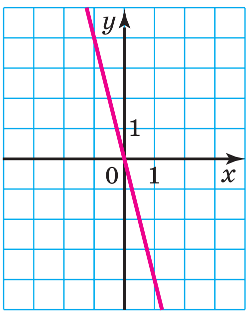
A (6; 6) és a $\left(\frac{2}{3}; -2\right)$ számpárok az adott egyenlet megoldásai. ◀

PÉLDA 4 fel azt a kétváltozós lineáris egyenletet, melynek grafikonja a koordinátarendszer kezdőpontján és az *A*(3; –12) ponton átmenő egyenes. Rajzoljátok meg a grafikonját!

Megoldás: Mivel a keresett egyenlet grafikonja átmegy az *O* (0; 0) és az *A* (3; –12) eltérő abszcisszájú pontokon, ezért nem merőleges egyenes lesz. Akkor az egyenes egyenlete $y = kx + b$ alakban írható fel, ahol k és b – tetszőleges számok.

Abból, hogy a grafikon átmegy az origón, az következik, hogy $b = 0$.

Mivel áthalad az *A* (3; –12) ponton, ezért $-12 = k \cdot 3$, ahonnan $k = -4$. Tehát a keresett egyenlet: $y = -4x$ vagy $4x + y = 0$. Az egyenlet grafikonja az 61. ábrán látható.



61. ábra

Felelet: $4x + y = 0$. ◀

?

1. Milyen egyenletet nevezünk kétváltozós lineáris egyenletnek?

2. Milyen az $ax + by = c$ egyenlet grafikonja, ha $b \neq 0$ vagy amikor $b = 0$ és $a \neq 0$?

3. Milyen az $ax + by = c$ egyenlet grafikonja, ha $a = b = c = 0$?

4. Az a, b és c mely értékeinél nincs megoldása az $ax + by = c$ egyenletnek?

GYAKORLATOK

1056.° Lineárisak-e a kétváltozós egyenletek:

1) $7x + 11y = 36$;

2) $x^2 + 4y = 6$;

3) $12x - 17y = 0$;
4) $-3x + xy = 10$?

1057.° Lineárisak-e a kétváltozós egyenletek:
1) $8x - 0,9y = \frac{1}{6}$;
2) $x - 4y^2 = 5$;
3) $6x + 2xy = 9$;
4) $3x + 4y = 0$?

1058.° Melyek a $3x - 7y = 14$ egyenlet megoldásai a (7; 1), (0; –2), (8; 2), (–7; –5), (10; 3) számpárok közül?

1059.° Melyik egyenlet megoldása a (3; –2) számpár:
1) $4x + 5y = 2$;
2) $3x - 2y = 5$;
3) $0,2x - 0,5y = 1,6$?

1060.° Megoldása e $2x - 9y = 13$ egyenletnek a következő számpár:
1) (2,5; 2);
2) (10,5; 2);
3) $\left(5; -\frac{1}{3}\right)$;
4) (–7; –3)?

1061.° Ismert, hogy a (–5; y) számpár megoldása a $2x + 9y = 17$ egyenletnek. Határozzátok meg az y értékét!

1062.° Ismert, hogy a (8; y) számpár megoldása a $2x - 3y = 4$ egyenletnek. Határozzátok meg az y értékét!

1063.° Ismeretes, hogy az $\left(x; \frac{2}{3}\right)$ számpár a $\frac{1}{7}x + 6y = 1$ egyenlet megoldása. Határozzátok meg az x értékét!

1064.° Ismeretes, hogy az (x; 6) számpár a $8x - 3y = 22$ egyenlet megoldása. Határozzátok meg az x értékét!

1065.° Melyik egyenlet grafikonjához tartozik az $M(1; 4)$ pont:
1) $4y - 2x = -4$;
2) $6x + 11y = 50$?

1066.° Átmegy-e a $3x + y = -1$ egyenlet grafikonja a következő pontok valamelyikén:

1) $M(-3; 10)$; 2) $N(4; -13)$; 3) $K(0; -1)$?

1067.° Fejezzétek ki az egyenletekből az x változót az y által, és határozzátok meg mindegyik egyenlet három-három megoldását:

1) $x + y = 12$; 3) $x + 6y = 10$; 5) $-6x + 5y = 18$;
2) $x - 7y = 5$; 4) $2x + 8y = 16$; 6) $3x - 7y = 1$.

1068.° Fejezzétek ki az egyenletekből az y változót az x által, és határozzátok meg mindegyik egyenlet három-három megoldását:

1) $4x - y = 7$; 2) $-2x + y = 11$; 3) $5x - 3y = 15$.

1069.° Találjátok meg az egyenletek három-három megoldását:

1) $x - y = 10$; 2) $2y - 5x = 11$.

1070.° Határozzatok meg az egyenletek három tetszőleges megoldását:

1) $6x + y = 7$; 2) $2x - 3y = -4$.

1071.° Ábrázoljátok az egyenlet grafikonját:

1) $x - y = 4$; 3) $x - 5y = 5$; 5) $7x - 3y = 21$;
2) $4x + y = 3$; 4) $3x + 2y = 6$; 6) $0,2x + \frac{2}{3}y = 1$.

1072.° Ábrázoljátok az egyenlet grafikonját:

1) $x + y = -3$; 2) $6x + y = 0$; 3) $2x - 3y = 9$.

1073.° Milyen számpárok lesznek az egyenlet megoldásai:

1) $0x + 4y = 20$; 2) $-3x + 0y = 27$?

1074.° Ábrázoljátok az egyenlet grafikonját:

1) $4y = -8$; 2) $1,2x = 3,6$.

1075.° Ábrázoljátok az egyenlet grafikonját:

1) $-0,2x = 1$; 2) $0,5y = 2$.

1076.• Milyen pontban metszi a $7y - 3x = 21$ egyenes:

1) az x tengelyt; 2) az y tengelyt?

1077.• Határozzátok meg a $0,3x + 0,2y = 6$ egyenlet grafikonja és a koordinátatengelyek metszéspontjainak koordinátáit.

1078.• Állítsatok össze olyan kétváltozós lineáris egyenletet, melynek a (–2; 1) számpár a megoldása!

1079.• Állítsatok össze olyan kétváltozós lineáris egyenletet, melynek a (3; 5) számpár a megoldása!

1080.• Határozzátok meg a $7x + 8y = 30$ egyenletnek olyan megoldását, amely két azonos számból áll!

1081.• Határozzátok meg a $-12x + 17y = -87$ egyenletnek olyan megoldását, amely két ellentett számból áll!

1082.• Az a milyen értékénél lesz az $(a; 2a)$ számpár megoldása a $2x + 7y = 16$ egyenletnek?

1083.• Az a milyen értékénél lesz a (–4; 2) számpár megoldása az egyenletnek:

1) $3x + 5y = a$; 2) $ax + 5y = 18$?

1084.• Az a milyen értékénél halad át a $11x - 13y = a + 4$ egyenlet grafikonja az origón?

1085.• Az a milyen értékénél megy át az A (5; –3) ponton a függvény grafikonja:

1) $4x - 9y = a$; 2) $6x - ay = 15$?

1086.• Az a milyen értékénél megy át az $ax + 4y = 0$ egyenlet grafikonja a következő pontokon:

1) $A(12; -4)$; 2) $B(0; 2)$; 3) $O(0; 0)$?

1087.• A b milyen értékénél megy át az $5x + by = 0$ egyenlet grafikonja a következő pontokon:

1) $M(-4; -10)$; 2) $N(0; 1)$; 3) $K(-2; 0)$?

1088.• Melyik egyenletnek lesz ugyanaz az egyenes a grafikonja, mint a $2x - 5y = 3$-nak:

1) $4x - 10y = 6$; 4) $5y - 2x = -3$;
2) $4x - 10y = 3$; 5) $x - 2{,}5y = 1{,}5$;
3) $2x - 5y = 6$; 6) $-0{,}4x - y = 0{,}6$?

1089.• Állítsatok össze kétváltozós egyenleteket a következő feltételek alapján:

1) a téglalap hosszúsága x m, szélessége – y m, kerülete – 18 m;
2) az autóbusz 4 órán át x km/h, 3 órán át pedig y km/h sebességgel haladt, miközben 250 km-t tett meg;

3) a füzet ára x hrn, a tol y hrn, 2 toll 18 hrivnyával drágább 5 füzetnél;
4) az x kg tömegű ötvözet réztartalma 12%, az y kg tömegűé pedig 20%; miután a két ötvözetet összeolvasztották, a kapott ötvözet 9 kg rezet tartalmazott;
5) az egyik ládában x kg, a másikban pedig y kg cukorka volt; miután az egyik ládából áttettek a másikba 8 kg-ot, mindkét ládában azonos mennyiségű cukorka lett!

1090.• Állítsatok össze kétváltozós egyenleteket a következő feltételek alapján:
1) az egyenlő szárú háromszög oldala a cm, az alapja b cm, kerülete 32 cm;
2) az egyik gépkocsi 6 ó alatt x km/ó sebességgel haladva 32 kmrel kisebb távolságot tett meg, mint a másik gépkocsi 7 ó alatt y km/ó sebességgel;
3) az egyik üzletben x q, míg a másikban y q alma volt; az egyik üzletből az alma 14%-át adták el egy nap alatt, a másikból pedig a 18%-át, ami 1,2 q-val kevesebb, mint az első üzletből eladott mennyiség!

1091.• Bizonyítsátok be, hogy az $5y - x = 6$ és $3x - 7y = 6$ egyenesek az A (9; 3) pontban metszik egymást!

1092.• Bizonyítsátok be, hogy a $4x - 3y = 12$ és $3x + 4y = -66$ egyenesek a B (–6; –12) pontban metszik egymást!

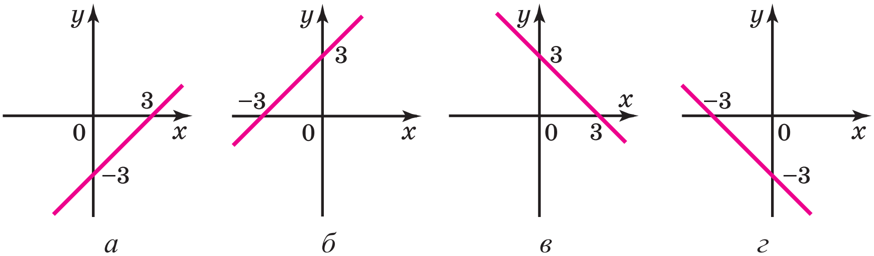
1093.• Állítsatok össze olyan kétváltozós lineáris egyenletet, melynek grafikonja átmegy az origón és a következő pontokon:
1) A(2; 8);
2) B(–6; 15).

1094.• Állítsatok össze olyan kétváltozós lineáris egyenletet, melynek grafikonja átmegy az origón és a C (8; –12) ponton!

1095.• Bizonyítsátok be, hogy nem létezik az a-nak olyan értéke, melynél az $ax - 3y = 12$ egyenes áthalad az origón!

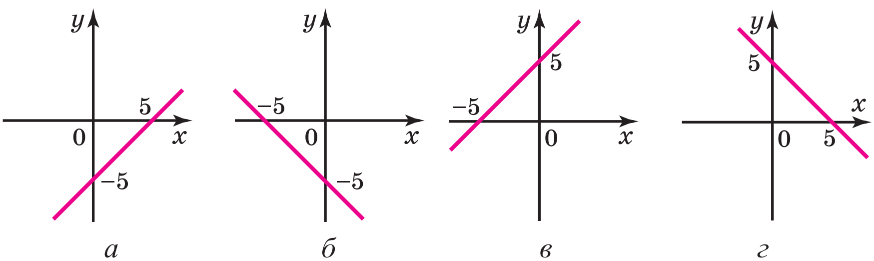
1096.• Az a és a b mely értékeiénél metszi a koordinátatengelyeket az $ax + by = 24$ egyenes az $A(–6;\ 0)$ és $B(0;\ 12)$ pontokban?

1097.• Az 62. *a, b, c, d* ábrán látható egyenesek közül melyik lesz az $x + y = 3$ egyenlet grafikonja?



62. ábra

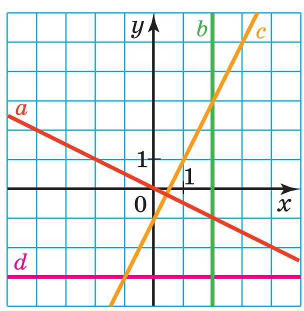
1098.• Az 60. a, b, c, d ábrán látható egyenesek közül melyik lesz az $x – y = –5$ egyenlet grafikonja?



63. ábra

1099.• A 64. ábrán látható egyenesek közül melyik lesz a következő egyenletek grafikonja:

1) $0x + y = –3$; 3) $3x + 0y = 6$;
2) $2x – y = 1$; 4) $x + 2y = 0$?



64. ábra

1100.•• Az a paraméter mely értékénél lesz a $2x – 3y = –6$ és a $4x + y = a$ egyenletű egyeneseknek a metszéspontja az abszcisszatengelyen?

1101.•• A b paraméter mely értékénél lesz a $9x + 7y = 35$ és az $x + by = –20$ egyenletű egyeneseknek a metszéspontja az ordinátatengelyen?

1102.•• A $13x + 17y = –40$ egyenlet grafikonjának van e legalább egy olyan pontja, melynek mindkét koordinátája pozitív szám lesz?

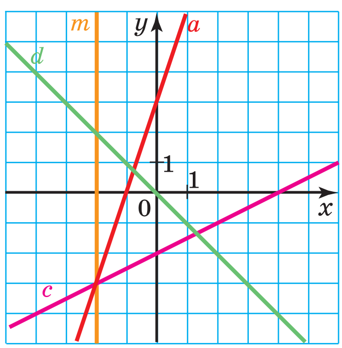
1103.•• A $4x – 8y = 7$ egyenlet grafikonjának van e legalább egy olyan pontja, melynek mindkét koordinátája egész szám lesz?

1104.•• Állítsatok fel olyan kétváltozós lineáris egyenletet, melynek grafikonja áthalad a következő pontokon:

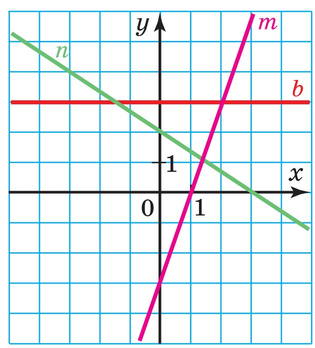
1) $A(–4; 0)$ i $B(0; 2)$;
2) $C(0; –3)$ i $D(5; 0)$.

1105.•• Állítsatok fel olyan kétváltozós lineáris egyenletet, melynek grafikonja áthalad az $M(6; 0)$ és $K(0; 6)$ pontokon.

1106.•• Állítsátok fel azokat az egyenleteket, amelyeknek grafikonjai az 65. ábrán láthatók!



65. ábra



66. ábra

1107.•• Állítsátok fel azokat az egyenleteket, amelyeknek grafikonjai az 66. ábrán láthatók!

1108.* Hány olyan $(x; y)$ prím számpár létezik, amelyek megoldásai az $5x – 6y = 3$ egyenletnek?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1109. Peti bácsinak 2 vekni kenyeret, 800 g felvágottat és 0,5 kg sonkát kell vásárolnia. A táblázat ezen termékek árait mutatja a Péter bácsi házához legközelebb eső három üzletben.

Üzlet	Ár, hr.		
	Kenyér (vekni)	Felvágott (1 kg)	Sonka (1 kg)
Ízletesen	26	280	400
Jó étvágyat!	24	270	360
Friss termékek	28	310	480

Az Ízletesen üzletben Péter bácsinak kedvezménykártyája van, amely 5%-os kedvezményt biztosít minden termékre. A Friss termékek üzletben ezen a napon 10%-kedvezmény van minden felvágottra és húskészítményre. Melyik üzletben lesz Peti bácsinak a legjövedelmezőbb a vásárlás?

1110. Két brigád 840 alkatrészt készített, miközben az egyik 80%-kal többet gyártott a másiknál. Hány alkatrészt készített mindegyik brigád?

1111. Ismeretes, hogy 4 azonos markológép 12 ó alatt ás ki egy munkagödröt. Hány óra alatt ás ki 3 gödröt 6 ilyen markológép?

1112. Bizonyítsátok be, hogy a $2^{36} + 4^{100} - 2^{32} - 4^{98}$ többszöröse a:

1) 15; 2) 240 számnak!

1113. Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(x - 8)^2 - (x - 4)(x + 4) = 0$;

2) $(4x - 5)(4x + 5) - (4x - 1)^2 = 9 - 2x$.

1114. Bontsátok tényezőkre:

1) $6x^3 - 8x^2 + 3xy - 4y$;

2) $x^4 - 6x^2y + 9y^2 - 16$;

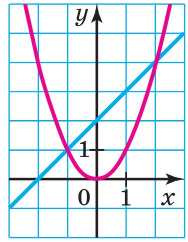
3) $\frac{125x^3}{27} - \frac{m^6n^9}{64}$;

4) $c^2 - 2c - b^2 - 4b - 3$.

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

1115. A (3; 3), (–3; 3), (–3;–3) számpárok közül melyik megoldása az $x^2 + y^2 = 18$ és $x + y = 0$ egyenletek mindegyikének?

1116. A 67. ábrán az $y = x^2$ és $x - y + 2 = 0$ egyenletek grafikonjai láthatók. A grafikonok alapján határozzátok meg azokat a számpárokat, amelyek mindkét egyenlet megoldásai!



67. ábra

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

1117. 100 különböző természetes szám összege 5051. Határozzátok meg ezeket a számokat!

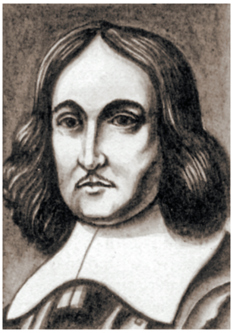
Hogyan épült a híd az algebra és a mértan között?

A koordináták ötlete már nagyon rég megszületett. Az emberek az őskorban tanulmányozták a Földet, megfigyelték a csillagokat és a kapott adatok alapján rajzokat és térképeket készítettek.

Az i. e. II. században Hipparkhosz görög csillagász elsőként használta a koordinátákat helymegállapításhoz a Föld felszínén.

Nicole Oresme (ejtsd: Nikol Orem) (1323–1392) francia tudós a XIV. században alkalmazta először a matematikában Hipparkhosz ötletét: a síkot négyzetrácsokra osztotta (hasonlóan a négyzetácsos füzetlaphoz), majd a pontok helyzetét szélesség és hosszúság alapján adta meg.

A koordinátákban rejlő nagy lehetőségeket viszont csak a XVII. században fedezte fel Pierre Fermat (ejtsd: Pier Fermá) és René Descartes (ejtsd: Röné Dékárt) francia matematikusok. A tudósok munkáikban bemutatták, hogy a koordináta-rendszer segítségével hogyan juthatunk el a pontoktól a számokig, a vonalaktól az egyenletekig, az algebrától a mértanig.



Pierre Fermat
(1601–1665)

René Descartes
(1596–1650)

Noha Fermat a tanulmányát Descartesnél egy évvel korábban publikálta, a matematikában ma is használt koordináta-rendszert mégis Descartes-féle koordináta-rendszernek nevezik. Ez annak köszönhető, hogy Descartes az Értekezés a módszerről című munkájában bemutatott egy új, kisebb változtatásokkal ma is használatos betűs jelölési módszert. Ennek alapján jelöljük az ismeretleneket a latin ábécé utolsó betűivel: x, y, z, az együtthatókat pedig az elsőkkel: a, b, c, … . A már ismert x^2, x^3, y^5 stb. hatványjelöléseket szintén Descartesnak köszönhetjük.

A matematika is a nők dolga

Miután elolvastátok a matematikatörténeti történeteket, különösen a Hogyan épült a híd az algebra és a mértan között történetet, az a benyomásotok támadhat, hogy a matematika tisztán férfiügy. Sajnos ez évszázadok óta így van. A nők azonban – különösen a 19. század közepétől – küzdöttek a természettudományok, különösen a matematika tanulmányozásának lehetőségéért. És manapság a női matematikusok előkelő helyet foglalnak el a világ vezető tudósai között. Köztük sok honfitársunk is van. Különösen Nyina Virchenko ukrán tudós nevét ismeri az egész világ, akinek a nevével

М. С. В'язовська
(нар. 1984)

a 271. feladat megoldása közben találkozhattatok, és Marina Vjazovszka nevét, akit Fields-éremmel, a matematika területén a legrangosabb kitüntetéssel tüntettek ki.

A lányok matematika-tanulmányozásának ösztönzését, képességeik bemutatását, olyan kedvező környezet megteremtését, ahol önbizalmat nyerhetnek, és elismerhetik matematikai tehetségüket, támogatja a lányok közötti európai matematikai olimpia. (angolul: European Girls′ Mathematical Olympiad, rövidítve – EGMO) évenkénti matematikai verseny, melyen csak olyan lányok vehetnek részt, akik felsőoktatásban vesznek részt és a korhatár 20 év.

Különböző kontinensek képviselői vesznek részt rajta. Minden ország csapata négy résztvevőből áll, akik egyéni versenyben indulnak.

Az olimpiát 2012-ben rendezték meg először Cambridge városában (Nagy-Britannia). Azóta jelentős népszerűségre tett szert. 2019-ben Ukrajnában rendezték meg az olimpiát: április 7. és 13. között 50 ország 196 résztvevője versenyzett Kijevben.

Емблема EGMO

Ukrajna válogatottja a kezdetektől részt vesz ezen az olimpián is jelentős sikereket ért el: 2014-ben, 2015-ben, 2017-ben, 2019-ben és 2023-ban csapatunk vezette a hivatalos (európai) ranglistát. Lányaink 2012-2023 során 15 arany-, 22 ezüst- és 8 bronzérmet szereztek. Hiszünk abban, hogy a jövőben ezen és más matematikai versenyeken is méltón képviselik hazánkat fiatal ukrán nők.

Ukrajna válogatottja – az EGMO-2023 győztescsapata
(balról jobbra): Evgeniya Frankevics (Lviv), Polina Genik,
Irina Romanyuk (mindkettő – Kijev), Marina Spektrova (Harkiv)

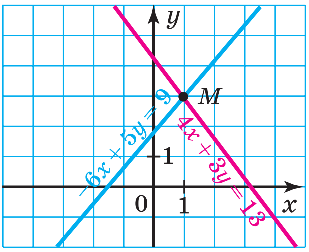
26. Kétváltozós egyenletrendszerek. A kétváltozós egyenletrendszerek megoldásának grafikus módszere

Könnyen belátható, hogy a (–2; 0) számpár megoldása mind az $x^2 + y^2 = 4$, mind pedig az $y = x^2 - 4$ egyenletnek. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a (–2; 0) számpár az említett egyenletek **közös megoldása**.

A 68. ábrán a $-6x + 5y = 9$ és a $4x + 3y = 13$ egyenletek grafikonjai láthatók. Az $M(1; 3)$ pontban metszik egymást. A pont mindkét grafikonhoz hozzátartozik. Tehát az (1; 3) számpár a két egyenlet közös megoldása.

Hogy meghatározhassuk a 12 cm² területű és 14 cm kerületű téglalap oldalait, meg kell találnunk az $xy = 12$ és $2x + 2y = 14$ egyenletek közös megoldásait, ahol x cm és y cm a téglalap szomszédos oldalainak hossza lesz.

Ahhoz, hogy megtaláljuk néhány egyenlet közös megoldását, meg kell oldani az egyenletrendszert. Az egyenletrendszert kapcsos zárójel segítségével írják fel.



68. ábra

$$\begin{cases} xy = 12, \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$$

kifejezés például a 12 cm² területű és 14 cm kerületű téglalap oldalainak a meghatározásáról szóló feladat matematikai modellje.

A $\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$ egyenletrendszer lesz a feladat matematikai modellje, amely a két egyenes közös pontjának meghatározására szolgál (68. ábra).

A rendszer mindkét egyenlete lineáris. Ezért ezt a rendszert *két egyenletből álló kétváltozós lineáris egyenletrendszernek* nevezzük.

Meghatározás. A kétváltozós lineáris egyenletrendszer megoldásának azt a számpárt nevezzük, amely mindegyik egyenletet igaz egyenlőséggé alakítja.

A fentebb vizsgált példában tehát a (–2; 0) számpár a következő egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$$

Viszont ez egyáltalán nem jelenti azt, hogy a rendszert megoldottuk.

Meghatározás. Az egyenletrendszert megoldani annyit jelent, mint meghatározni az összes megoldását, vagy bebizonyítani, hogy nincs megoldása.

$A(-2; 0)$ számpáron kívül az utolsó egyenletrendszernek több megoldása is létezik, például a (2; 0) számpár. Ezt az egyenletrendszert, a téglalapról szóló feladathoz hasonlóan, a 9. osztályban tanuljátok majd megoldani.

Viszont az

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = -4, \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

egyenletrendszert már most megoldhatjuk. Nyilvánvaló, hogy az első egyenletnek nincs megoldása, tehát nem létezik közös megoldás sem. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Hasonlóképpen oldhatjuk meg a

$$\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13. \end{cases}$$

egyenletrendszert.

Az egyenletek grafikonjai az $M(1; 3)$ pontban metszik egymást (68. ábra). A pont koordinátái mindkét egyenletnek megoldása, tehát megoldása az egyenletrendszernek is. Mivel a grafikonoknak nincs több közös pontjuk, ezért az egyenletrendszernek sincs több megoldása. Tehát az (1; 3) számpár az adott rendszer egyetlen megoldása.

Az egyenletrendszerek megoldásának fentebb leírt módszerét **grafikus módszernek** nevezzük.

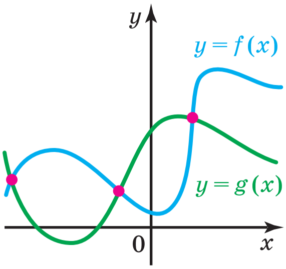
A módszer lényege a következő:

- *ábrázolni közös koordináta-rendszerben az összes egyenlet grafikonját;*
- *meghatározni a grafikonok összes metszéspontjának koordinátáját;*
- *a kapott számpárok lesznek az egyenletrendszer megoldásai.*

Nem minden egyenletrendszert célszerű grafikusan megoldani.

Például, ha az $\left(\frac{1}{17}; -\frac{36}{85}\right)$ számpár valamilyen egyenletrendszer megoldása, akkor érthető, hogy ezt grafikusan nehéz megállapítani. Ezért a grafikus módszert abban az esetben használják, ha a megoldást elég hozzávetőlegesen meghatározni. Hogy az (1; 3) számpár a $\begin{cases} -6x+5y=9, \\ 4x+3y=13, \end{cases}$ rendszer megoldása, egyszerű behelyettesítéssel leellenőrizhető.

A grafikus módszer használata abban az esetben is célszerű, ha meg kell tudni a megoldások számát.



69. ábra

Például a 69. ábrán az $y = f(x)$ és $y = g(x)$ függvények grafikonjai láthatók. A grafikonoknak három közös pontja van, ami alapján az állapítható meg, hogy az $\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x) \end{cases}$ egyenletrendszernek három megoldása van.

Tisztázzuk, hány megoldása lehet a két egyenletből álló kétváltozós lineáris egyenletrendszernek.

Ha a rendszer egyik egyenletének nincs megoldása, akkor nyilvánvaló, hogy a rendszer sem rendelkezik megoldással.

Például a $\begin{cases} 0x+0y=7, \\ 2x-3y=15 \end{cases}$ egyenletrendszernek nincs megoldása.

Megvizsgáljuk azt az esetet, amikor az egyenletrendszer mindkét egyenletének van megoldása.

Ha a rendszer egyik egyenletének a grafikonja egy sík, akkor az egyenletrendszer számtalan megoldással rendelkezik. Valóban, a síknak és a rajta fekvő egyenesnek számtalan közös pontja van.

Például a $\begin{cases} 0x+0y=0, \\ 2x-3y=15 \end{cases}$ rendszernek végtelen sok megoldása van.

Ha az egyenletrendszer grafikonjai egyenesek, akkor a megoldások száma a két egyenes kölcsönös elhelyezkedésétől függ:

1) *ha az egyenesek metszik egymást, a rendszernek egy megoldása van*;
2) *ha az egyenesek egybeesnek, a rendszer számtalan megoldással rendelkezik*;
3) *ha az egyenesek párhuzamosak, a rendszernek nincs megoldása*.

Fentebb már megvizsgáltuk azt a példát, amikor a rendszernek egy megoldása van. Ez a $\begin{cases} -6x+5y=9, \\ 4x+3y=13. \end{cases}$ egyenletrendszer.

A következő példák segítségével bemutatjuk a 2. és 3. esetet.

Tehát, ha az $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\mathrm{y}=1, \\ x-2y=2 \end{cases}$ rendszerben az első egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk 2-vel, attól az egyenlet és így a teljes rendszer megoldása nem változik.

A következőt kaptuk:

$$\begin{cases} x-2y=2, \\ x-2y=2. \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy a rendszer megoldása azonos a $x - 2y = 2$ egyenlet megoldásával. Mivel az egyenletnek végtelen számú megoldása van, ezért a rendszerről is elmondhatjuk, hogy végtelen számú megoldással rendelkezik.

Megvizsgálunk egy olyan egyenletrendszert, amelynek nincs megoldása:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}x+y=2, \\ 2x+3y=7. \end{cases}$$

Valóban, az első egyenlet mindkét oldalát megszorozva 3-mal, a következőt kapjuk:

$$\begin{cases}2x+3y=6,\\2x+3y=7.\end{cases}$$

Érthető, hogy nem találunk olyan $(x;\ y)$ számpárt, amelyekkel a $2x + 3y$ kifejezés értéke 6 és 7 is lehet egyszerre.

Végül megjegyezzük, hogy a grafikus módszer alapján állapítható meg, hogy nem létezik olyan lineáris egyenletrendszer, amelyik pontosan két vagy három, illetve pontosan 100 megoldással rendelkezik.

?

1. Milyen esetben mondják, hogy meg kell oldani az egyenletrendszert?
2. Mit nevezünk a kétváltozós egyenletrendszer megoldásának?
3. Mit jelent megoldani az egyenletrendszert?
4. Mi a lényege a kétváltozós egyenletrendszer grafikus megoldásának?
5. Hány megoldása lehet a két egyenletből álló kétváltozós egyenletrendszernek?
6. Milyen a kétváltozós egyenletrendszer két egyenletét ábrázoló egyeneseknek a kölcsönös helyzete, ha: 1) a rendszernek egyetlen megoldása van; 2) a rendszernek nincs megoldása; 3) a rendszer végtelen számú megoldással rendelkezik?

GYAKORLATOK

1118.° A (–2; 1), (2; –1), (6; 4), (8; –4) számpárok közül melyik megoldása az egyenletrendszernek: $\begin{cases}3x-8y=-14,\\4x+y=28?\end{cases}$

1119.° Igaz e a következő állítás:

1) a (0; 0) számpár nem lesz megoldása a következő egyenletrendszernek: $\begin{cases}y-x=5,\\3x+2y=4;\end{cases}$

2) a (–1; 2) számpár megoldása lesz a következő egyenletrendszernek: $\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x + 2y = -1; \end{cases}$

3) a 2; –1) számpár megoldása lesz a következő egyenletrendszernek: $\begin{cases} 2y - x = -4, \\ 2x + 3y = 1; \end{cases}$;

4) a (9; –1) számpár nem lesz megoldása a következő egyenletrendszernek: $\begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 10; \end{cases}$;

5) nincs megoldása a $\begin{cases} 4x + 5y = 6, \\ 5y + 4x = 7 \end{cases}$ egyenletrendszernek?

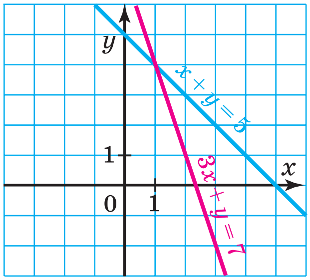
1120.° Melyik egyenletrendszernek lesz a megoldása a (–5; 2) számpár:

1) $\begin{cases} 7x + 2y = 31, \\ 4x - 5y = -30; \end{cases}$

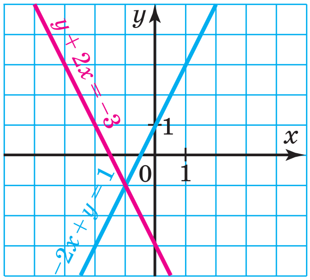
2) $\begin{cases} 3y - 2x = 16, \\ 6x + 7y = -16; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 2y = -9, \\ 10y - x = 15? \end{cases}$

1121.° Határozzátok meg a 70. ábrán látható egyenesek metszéspontjának koordinátáit. Írjátok le a megfelelő egyenletrendszert, majd behelyettesítve a metszéspont koordinátáit, ellenőrizzétek le a megoldást!



a



б

70. ábra

1122. Oldjátok meg grafikusan az egyenletrendszer:

1) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 2y = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = -5, \\ 4x - y = -5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x - y = 9; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x - 3y = -26, \\ y - 2x = 8. \end{cases}$

1123. Oldjátok meg grafikusan az egyenletrendszer:

1) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 5x + y = -18; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ y - x = -2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 5y = 10, \\ 4x - y = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x - y = -1. \end{cases}$

1124. Állítsatok fel két olyan lineáris kétváltozós egyenletből álló rendszert, melynek megoldása a következő számpár:

1) $x = 3$, $y = 2$; 2) $x = -4$, $y = 1$; 3) $x = 5$, $y = 0$.

1125. Állítsatok fel két olyan lineáris kétváltozós egyenletből álló rendszert, melynek megoldása a (2; –2) számpár!

1126. A (6; 4) számpár az egyenletrendszer megoldása:

1) $\begin{cases} ax + 2y = 26, \\ 4x + by = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + by = 6, \\ ax + by = 0. \end{cases}$

Határozzátok meg az *a* és *b* értékét!

1127.• Az a és b milyen értékeinél lesz a (–2; 3) számpár megoldása az $\begin{cases} ax-3y=-13, \\ 7x+by=1? \end{cases}$ egyenletrendszernek?

1128.• Van e megoldása az egyenletrendszernek:

1) $\begin{cases} 2x-7y=6, \\ 8x-28y=24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=-2, \\ 6x+3y=9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y=0,5, \\ 2x+4y=2? \end{cases}$

1129.• Van e megoldása az egyenletrendszernek:

1) $\begin{cases} x-y=4, \\ 3x-3y=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-1,5y=-4, \\ 3y-2x=8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 9x+9y=18, \\ x+y=2? \end{cases}$

1130.•• Az $2x - 3y = 6$ egyenlethez válasszatok egy olyan egyenletet, hogy a vele alkotott egyenletrendszernek:

1) egy megoldása legyen;
2) számtalan megoldása legyen;
3) ne legyen megoldása!

1131.•• Az $x - y = 2$ egyenlethez válasszatok egy olyan egyenletet, hogy a vele alkotott egyenletrendszernek:

1) egy megoldása legyen;
2) számtalan megoldása legyen;
3) ne legyen megoldása!

1132.•• Az a mely értékeinél nincs megoldása az egyenletrendszernek: $\begin{cases} 8x+9y=7, \\ 8x+9y=a? \end{cases}$

1133.•• Az a mely értékeinél lesz számtalan megoldása az egyenletrendszernek:

1) $\begin{cases} x+5y=4, \\ 4x+20y=a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+ay=12, \\ 9x-15y=36? \end{cases}$

1134.•• Az a mely értékeinél:

1) $\begin{cases} 7x - 12y = 14, \\ 7x - 12y = a \end{cases}$ nem lesz az egyenletrendszernek megoldása;

2) $\begin{cases} 6x + ay = 4, \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ lesz az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása?

1135.•• Keressetek az a és b értékeinek olyan értékeket, melyeknél az $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ ax + 4y = b \end{cases}$ egyenletrendszernek:

1) számtalan megoldása legyen;
2) egy megoldása legyen;
3) ne legyen megoldása!

1136.•• Keressetek az m és n értékeinek olyan értékeket, melyeknél az $\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - my = n \end{cases}$ egyenletrendszernek:

1) számtalan megoldása legyen;
2) egy megoldása legyen;
3) ne legyen megoldása!

1137.* Oldjátok meg grafikusan a következő egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} |x| - y = 0, \\ x - y = -4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} |x| - y = 0, \\ x + 3y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y + |x| = 0, \\ x + y = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - |y| = 0, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$

1138.* Oldjátok meg grafikusan a következő egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x + 2y = 3; \end{cases}$

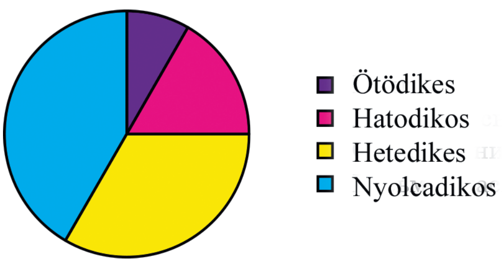
2) $\begin{cases} |y - 2x| = 3, \\ x - 2y = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4, \\ |x + y| = 2. \end{cases}$

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1139. Igaz -e a következő állítás:

1) több hatodikos tanuló van, mint hetedikes;
2) nyolcadikosból több van, mint az ötödikes és hatodikos tanulóból összesen;
3) nyolcadikosok kevesebben vannak, mint hetedikesekből;
4) hetedikesek a szakkör összes tanulójának több mint 25%-a;
5) nyolcadikosok a szakkör összes tanulójának több mint 50%-a;
6) összesen hatodikos és hetedikes tanulóból 15 szakkörtag van;
7) hetedikesekből és nyolcadikosokból összesen kevesebb mint 20 tanuló van?



71. ábra

1140. Az 5,5 kg tömegű réz-ólom ötvözetben 20%-kal több a réz, mint az ólom. Határozzátok meg a réz tömegét az ötvözetben!

1141. Kijevből a tőle 200 km-re fekvő Lubenbe egy autóbusz indult el. Elindulása után 32 perccel Lubenből egy gépkocsi indult el vele szemben az autóbusz sebességénél 20 km/h-val nagyobb sebességgel. Mennyi volt a busz sebessége, ha a gépkocsi indulása után 1,2 h múlva találkoztak?

1142. Határozzátok meg azt a négy egymást követő természetes számot, melyek négyzeteik összege 164!

1143. Bizonyítsátok be, hogy ha $x + y = a - 1$, akkor az $ax + x + ay + y + 1 = a^2$!

1144. Az a szám 5-tel való osztásakor a maradék 4, és a b szám 5-tel való osztásának maradéka 3. Bizonyítsátok be, hogy az a2 +b2 kifejezés az 5 többszöröse lesz!

KÉSZÜLÜNK AZ ÚJ TÉMA ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ

1145. Fejezzétek ki az egyenletből az y-t az x-en keresztül és az x-et az y-on keresztül:

1) $x + y = 10$;
2) $2x + y = 7$;
3) $y - x = -4$;
4) $x - 6y = 1$;
5) $5y - 4x = 0$;
6) $4x + 3y = -12$.

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

1146. Egy ötjegyű szám 2-es és 3-as, a másik ötjegyű szám pedig 3-as és 4-es számjegyekből áll. Állhat-e a két szám szorzata kizárólag 2-es és 4-es számjegyekből?

27. Lineáris egyenletrendszerek megoldása behelyettesítő módszerrel

Ha a matematikusok új feladattal találkoznak, akkor igyekeznek annak megoldását a már ismert feladatok megoldására visszavezetni.

Megmutatjuk, hogyan lehet a kétváltozós lineáris egyenletrendszer megoldását visszavezetni az egyváltozós lineáris egyenlet megoldására. Ez utóbbi számotokra már jól ismert.

Megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$$

Az első egyenletből kifejezzük az y változót az x-en keresztül:

$$y = 2x - 8.$$

Behelyettesítjük a második egyenletbe az y helyére a kapott $2x - 8$ kifejezést:

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2(2x - 8) = 5. \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek ugyanazok a megoldásai, mint az eredeti rendszernek. Ezt a tényt indoklás nélkül fogadjuk el. Bizonyítását a matematikai szakkörön elvégezhetitek.

Az utóbbi rendszer második egyenlete már egyváltozós. Megoldjuk azt:

$$3x + 2\,(2x - 8) = 5;$$

$$3x + 4x - 16 = 5;$$

$$7x = 21;$$

$$x = 3.$$

Az x változó megkapott értékét behelyettesítjük az $y = 2x - 8$ kifejezésbe:

$$y = 2 \cdot 3 - 8;$$

$$y = -2.$$

A (3; –2) számpár a keresett megoldás.

Az egyenletrendszer megoldásának imént leírt módszerét **behelyettesítő módszernek** nevezzük.

Tehát, hogy *behelyettesítő módszerrel oldhassuk meg a lineáris egyenletrendszert, a következő lépéseket kell megtenni:*

1) *az egyik egyenletből kifejezzük az egyik változót a másikon keresztül*;
2) *a kifejezett változó helyett kapott kifejezést behelyettesítjük a másik egyenletbe;*
3) *megoldjuk a második lépésben kapott egyváltozós egyenletet;*
4) *a változó megkapott értékét behelyettesítjük az első lépésben kapott kifejezésbe*;
5) *kiszámítjuk a másik változó értékét*;
6) *felírjuk a feleletet.*

A felsorolt lépések sorát a két lineáris egyenletet tartalmazó kétváltozós egyenletrendszer behelyettesítő módszerrel való megoldása **algoritmusának** nevezzük.

GYAKORLATOK

1147.° Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2x + y = 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2y - 8, \\ x - 4y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 6y, \\ x + 5y = 88; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 4x - 7y = 2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5y - x = 8, \\ 5x - 4y = 23; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x - 5y = 46; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 15 - x = 2y, \\ 4x - 3y = 27; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x - y = 6,2, \\ 0,8x + 3y = 13. \end{cases}$

1148.° Határozzátok meg az egyenletrendszer megoldását:

1) $\begin{cases} 4x + y = 12, \\ 7x + 2y = 20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 8y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4y - x = 11, \\ 5x - 2y = 17; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x - y = -1, \\ 2x - 3y = -11; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 9y - 2x = -25; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x - 3y = 0, \\ 15x + 2y = 55. \end{cases}$

1149.• Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} 4x - 3y = 15, \\ 3x - 4y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 5x + 2y = 24; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5y - 6x = 4, \\ 7x - 4y = -1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x + 5y = 1, \\ 8x - 2y = 38; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5a - 4b = 3, \\ 2a - 3b = 11; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 8m - 2n = 11, \\ 9m + 4n = 8. \end{cases}$

1150.• Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} 5x+2y=15, \\ 8x+3y=20; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 8p-5q=-11, \\ 5p-4q=-6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x+4y=5, \\ 3x+2y=3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6u-5v=-38, \\ 2u+7v=22. \end{cases}$

1151.•• Határozzátok meg az egyenletrendszer megoldását:

1) $\begin{cases} 6-5(x-y)=7x+4y, \\ 3(x+1)-(6x+8y)=69+3y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=2, \\ 5x-y=34; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6y-5x=1, \\ \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{3y-x}{4}=-4\dfrac{3}{4}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1,5x-3}{3}+\dfrac{7-3y}{8}=3, \\ \dfrac{2,5x-2}{3}-\dfrac{2y+1}{6}=x-0,5. \end{cases}$

1152.•• Oldjátok meg az egyenletrendszert:

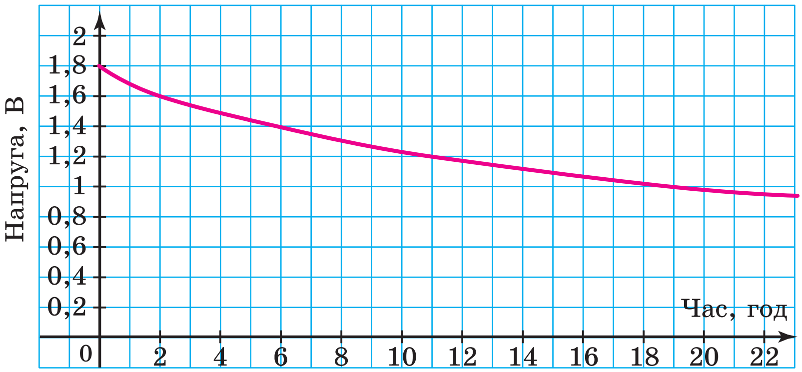
1) $\begin{cases} 6x+3=5x-4(5y+4), \\ 3(2x-3y)-6x=8-y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2}-\dfrac{y-4}{7}=1, \\ 6y-x=5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{8}+\dfrac{x-y}{6}=4, \\ \dfrac{3x+y}{4}-\dfrac{2x-5y}{3}=5. \end{cases}$

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1153. A zseblámpa működése közben az akkumulátor lemerül, és a lámpa elektromos áramkörében csökken a feszültség. A 72. ábra az áramkör feszültségváltozásának grafikonját mutatja a zseblámpa működése közben. A grafikon segítségével határozzátok meg:



72. ábra

1) mekkora volt a feszültség az áramkörben: a) a zseblámpa bekapcsolásakor; b) 6 órával azután, hogy a zseblámpa működésbe lépett;

2) hány órával a zseblámpa bekapcsolása után lett a feszültség 1 V volt;

3) hány üzemóra alatt csökkent a feszültség 1,6 V-ról 1,2 V-ra?

1154. Határozátok meg a kifejezés értékét:

1) $m(m-3)(m+3)-(m-2)(m^2+2m+4)$ ha $m=-\frac{2}{3}$;

2) $(6m-n)(6m+n)-(12m-5n)(3m+n)$ ha $m=-\frac{8}{9}$, $n=\frac{3}{4}$.

1155. Az iskolában a tanulók 50%-a jár sportszakkörre, közülük 6% énekel a kórusban. Az iskola diákjainak hány százaléka jár egyidejűleg a sportszakköre és a kórusba is?

1156. (*Bolgár folklórból származó feladat.*) Három férfi bement a borbélyhoz. Az miután megnyírta az elsőt, azt mondta: „Nézd meg, mennyi pénz van az asztalfiókban, tegyél oda ugyanannyit és vegyél el 8 leva[2] visszajárót”. Ugyanezt mondta a borbély a másodiknak és a harmadiknak is. Miután mindhárman elmentek, kiderült, hogy a fiókban nincs pénz. Mennyi pénz volt a fiókban azelőtt, mielőtt az első férfi fizetett volna?

1157. A függvény az $y = 6 - kx$ képlettel van megadva. A k mely értékénél fog az $A(4; -2)$ pont illeszkedni az grafikonjához?

1158. Bizonyítsátok be, hogy a $2^{4n} - 1$ kifejezés értéke bármilyen n természetes értékre osztható 5-tel!

1159. Határozzátok meg a $2376^3 + 1624^3$ kifejezés értékének három utolsó számjegyét!

1160. Az a és b számok 6-tal való maradékos osztásánál a maradék megfelelően 2 és 3. Bizonyítsátok be, hogy az ab szorzat a 6 többszöröse lesz!

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

1161. Határozzátok meg az x és y összes egész értékeit, melynél teljesül az $x + y = xy$!

28. Lineáris egyenletrendszerek megoldása egyenlő együtthatók módszerével

Megvizsgálunk még egy módszert, amely lehetőséget ad a két lineáris egyenletből álló kétváltozós egyenletrendszer megoldását visszavezetni az egyváltozós lineáris egyenlet megoldására.

Megoldjuk az egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ 4x + 5y = 5. \end{cases}$$

[2] Leva – bolgár pénz

Mivel a rendszerben az y együtthatói ellenkező előjelű számok, ezért ahhoz, hogy egyváltozós egyenletet kapjunk, elegendő tagonként összeadni az egyenletek jobb és bal oldalát.

A következőt kapjuk:

$$2x - 5y + 4x + 5y = 7 + 5;$$
$$6x = 12;$$
$$x = 2.$$

Az x értékét a rendszer bármelyik egyenletébe behelyettesíthetjük. Helyettesítjük be az elsőbe. Ekkor:

$$2x - 5y + 4x + 5y = 7 + 5;$$
$$6x = 12;$$
$$x = 2.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása a (2; –0,6) számpár.

A leírt megoldási módot az **egyenlő együtthatók módszerének** nevezzük.

Ez a módszer a következő kijelentésen alapszik: *ha a rendszer egyik egyenletét felcseréljük az egyenletek jobb és bal oldalának összeadása után kapott egyenlettel, akkor az így létrejött egyenletrendszernek ugyanazok lesznek a megoldásai, mint az eredeti rendszernek* (bizonyítás nélkül fogadjuk el).

A megoldás során a $\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ 4x + 5y = 5, \end{cases}$ rendszert a $\begin{cases} 2x - 5y + 4x + 5y = 7 + 5, \\ 2x - 5y = 7. \end{cases}$ rendszerre cseréltük.

Megoldunk még egy egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11, \\ 6x + 5y = 19. \end{cases}$$

Ha tagonként összeadjuk az egyenletek jobb és bal oldalát, akkor újból kétváltozós egyenletet kapunk. A kapott rendszernél még nem alkalmazhatjuk az egyenlő együtthatók módszerét.

Az első egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk – 3-mal. A következő rendszert kapjuk: $\begin{cases} -6x + 9y = -33, \\ 6x + 5y = 19, \end{cases}$ melynek megoldásai azonosak az első rendszer megoldásaival.

Erre a rendszerre már alkalmas az egyenlő együtthatók módszere:

$$-6x + 9y + 6x + 5y = -33 + 19;$$
$$14y = -14;$$
$$y = -1.$$

Az y értékét behelyettesítjük az eredeti egyenletrendszer első egyenletébe:

$$2x - 3 \cdot (-1) = 11;$$
$$2x = 8;$$
$$x = 4.$$

A (4; –1) számpár lesz a keresett megoldás.

Megoldunk egy olyan egyenletrendszert, amelyben mindkét egyenletet elő kell készíteni a módszer alkalmazására:

$$\begin{cases} 7x + 8y = 9, \\ 3x + 5y = 7. \end{cases}$$

Hogy megszabaduljunk az y változótól, az első egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk 5-tel, a második egyenlet mindkét oldalát pedig – 8-cal, majd összeadjuk az egyenleteket:

$$\begin{cases} 35x + 40y = 45, \\ -24x - 40y = -56; \end{cases}$$

$$35x + 40y - 24x - 40y = 45 - 56;$$
$$11x = -11;$$
$$x = -1.$$

Behelyettesítve az x értékét az első egyenletbe:

$$-7 + 8y = 9;$$
$$y = 2.$$

Tehát a (–1; 2) számpár az adott egyenletrendszer megoldása.

Hogy az egyenlő együtthatók módszerével oldhassuk meg a lineáris egyenletrendszert, a következő lépéseket kell megtennünk:

1) *kiválasztva a megfelelő együtthatókat, átalakítjuk az egyik, esetleg mindkét egyenletet úgy, hogy az azonos változók melletti együtthatók ellenkező előjelűek legyenek;*
2) *tagonként összeadjuk az első lépésben kapott egyenletek jobb és bal oldalát;*
3) *megoldjuk a második lépésben kapott egyváltozós egyenletet;*
4) *a harmadik lépésben kapott értéket behelyettesítjük az eredeti rendszer valamelyik egyenletébe;*
5) *kiszámítjuk a másik változó értékét.*
6) *felírjuk a feleletet.*

GYAKORLATOK

1162.° Írjátok fel azt az egyenletet, melyet az egyenletrendszer egyenleteinek tagonkénti összeadásával kapunk:

1) $\begin{cases} 2x - y = 6, \\ 3x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 7y = 8, \\ 6y - 4x = 1. \end{cases}$

1163.° Milyen számmal kell megszorozni az egyenletrendszer első egyenletének tagjait, hogy az y változó együtthatói ellenkező ellentétes előjelűek legyenek:

1) $\begin{cases} 4x + y = 7, \\ 5x - 6y = 30; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 4y = 9, \\ 3x + 20y = 40? \end{cases}$

1164.° Milyen számmal kell megszorozni az egyenletrendszer első egyenletének tagjait, hogy az x változó együtthatói ellentétes előjelűek legyenek:

1) $\begin{cases} 3x + 7y = 21, \\ 3x - 9y = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + 3y = 8, \\ 28x - 5y = 12? \end{cases}$

1165.° Milyen számmal kell megszorozni az egyenletrendszer első egyenletének tagjait és milyen számmal a második egyenletet, hogy az x változó együtthatói ellentétes előjelűek legyenek:

1) $\begin{cases} 2x-6y=7, \\ 5x+4y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x+6y=22, \\ 35x+9y=34? \end{cases}$

1166.° Oldjátok meg az egyenlő együtthatók módszerével az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} x+y=6, \\ x-y=8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-9y=11, \\ 7x+9y=25; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x+y=14, \\ 5x-y=10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -6x+y=16, \\ 6x+4y=34. \end{cases}$

1167.° Oldjátok meg az egyenlő együtthatók módszerével az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} 4x-y=20, \\ 4x+y=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 9x+17y=52, \\ 26x-17y=18. \end{cases}$

1168.• Oldjátok meg az egyenlő együtthatók módszerével az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} 8x+y=8, \\ 12x+y=4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x+8y=13, \\ 2x-3y=17; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x-5y=29, \\ 7x+8y=-10; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 3x-4y=16, \\ 5x+6y=14; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-3y=5, \\ 4x+9y=41; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x+3y=6, \\ 3x+5y=8; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 10x+2y=12, \\ -5x+4y=-6; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 5u-7v=24, \\ 7u+6v=2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ 12x+7y=-26; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 0{,}2x+1{,}5y=10, \\ 0{,}4x-0{,}3y=0{,}2. \end{cases}$

1169.• Oldjátok meg az egyenlő együtthatók módszerével az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} -5x+7y=2, \\ 8x+7y=15; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x-2y=16, \\ 8x+3y=38; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9x-6y=24, \\ 9x+8y=10; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x-4y=10, \\ 2x-3y=-3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x+y=7, \\ 7x-4y=-1; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 4a+6b=9, \\ 3a-5b=2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x-5y=23, \\ 2x-7y=13; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 9m-13n=22, \\ 2m+3n=-1. \end{cases}$

1170.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg az egyenesek metszéspontjának koordinátáit: 1) $y = 2 - 3x$ és $2x + 3y = 7$; 2) $5x + 6y = -20$ i $2x + 9y = 25$.

1171.• Szerkesztés nélkül határozzátok meg az egyenesek metszéspontjának koordinátáit:

1) $2x - 3y = 8$ és $7x - 5y = -5$; 2) $9x + y = 3$ és $8x + 3y = -10$.

1172.• Az a és b mely értékeinél illeszkednek az $A(1; 3)$ és $B(2; -4)$ pontok az $ax + by = 8$ egyenlet grafikonjára?

1173.• Az m és n mely értékeinél illeszkednek a $C(2; -1)$ és $D(-6; 5)$ pontok az $mx - ny = 6$ egyenlet grafikonjára?

1174.• Írjátok le az $y = kx + b$ egyenes egyenletét, melyre illeszkednek a következő pontok

1) $M(2; 1)$ i $K(-3; 2)$; 2) $P(-4; 5)$ i $Q(4; -3)$.

1175.• Írjátok le az $y = kx + b$ egyenes egyenletét, melyre illeszkednek a következő pontok:

1) $A(3; 2)$ i $B(-1; 4)$; 2) $C(-2; -3)$ i $D(1; 6)$.

1176.•• Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} 2(4x-5)-3(3+4y)=5, \\ 7(6y-1)-(4+3x)=21y-86; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -2(2x+1)+2{,}5=3(y+2)-8x, \\ 8-5(4-x)=6y-(5-x); \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=3, \\ \dfrac{3x}{4}+\dfrac{5y}{6}=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{6}-\dfrac{y-3}{15}=1, \\ \dfrac{x+2,5}{9}-\dfrac{y+3}{6}=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

1177.$^{\bullet\bullet}$ Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} 0,2x-0,3(2y+1)=1,5, \\ 3(x+1)+3y=2y-2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{15x-3y}{4}+\dfrac{3x+2y}{6}=3, \\ \dfrac{3x+y}{3}-\dfrac{x-3y}{2}=6. \end{cases}$

1178.$^{\bullet\bullet}$ Határozzátok meg az egyenletrendszer megoldását:

1) $\begin{cases} (x-3)^2-4y=(x+2)(x+1)-6, \\ (x-4)(y+6)=(x+3)(y-7)+3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x-y)(x+y)-x(x+10)=y(5-y)+15, \\ (x+1)^2+(y-1)^2=(x+4)^2+(y+2)^2-18. \end{cases}$

1179.$^{\bullet\bullet}$ Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} (2x+1)^2-(2x-y)(2x+y)=(y+8)(y-10), \\ 4x(x-5)-(2x-3)(2x-9)=6y-104; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x-2)(x^2+2x+4)-x(x-4)(x+4)=20-20y, \\ (3x-2)(4y+5)=2y(6x-1)-58. \end{cases}$

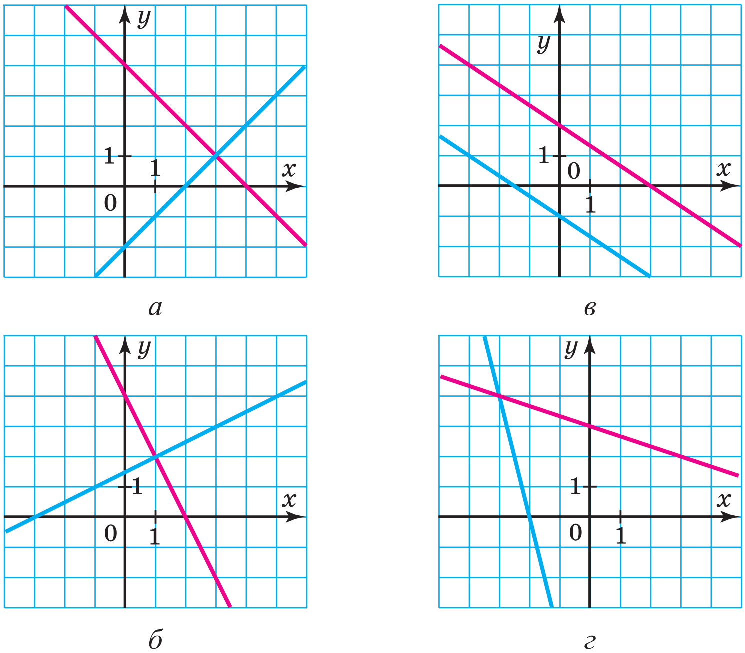
1180.$^{\bullet\bullet}$ Létezik-e megoldása az egyenletrendszernek:

1) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ 3x-4y=24, \\ x-2y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y=-1, \\ 3x+5y=1, \\ 5x+9y=5? \end{cases}$

1181.$^{\bullet\bullet}$ Oldjátok meg az egyenletrendszert:

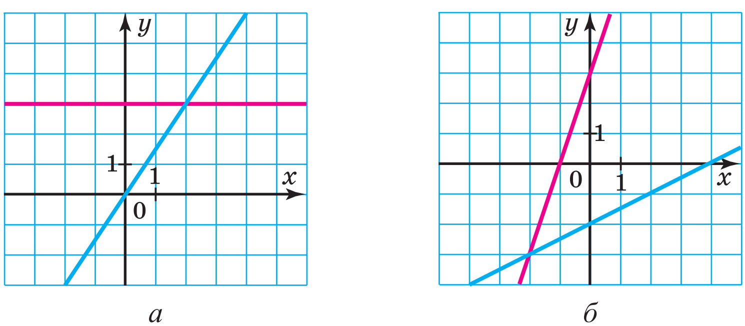
1) $\begin{cases} 6x+5y=10, \\ 8x-5y=32, \\ 3x+10y=-7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=1, \\ 2x+y=7, \\ 4x+y=14. \end{cases}$

1182.•• Írjátok le a 73. ábrán látható grafikonokhoz tartozó kétváltozós lineáris egyenletrendszert



73. ábra

1183.•• Írjátok le a 74. ábrán látható grafikonokhoz tartozó kétváltozós lineáris egyenletrendszert.



74. ábra

1184.•• A k együttható milyen értékénél halad át az $y = kx + 2$ egyenes a $3x + 5y = 5$ és $7x - 4y = 43$ egyenesek metszéspontján?

1185.•• Az a milyen értékénél van megoldása az egyenletrendszer-nek: $\begin{cases} 8x - 7y = 21, \\ 5x - 3y = 20, \\ ax + 2y = 24? \end{cases}$

1186.•• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(x + y)^2 + (x - 3)^2 = 0$;
2) $(x + 2y - 3)^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;
3) $|x - 3y - 6| + (9x + 6y - 32)^2 = 0$;
4) $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 61 = 0$;
5) $25x^2 + 10y^2 - 30xy + 8y + 16 = 0$.

1187.•• Oldjátok meg az egyenletet:

1) $(x - 2y)^2 + (y - 5)^2 = 0$;
2) $(4x + 2y - 5)^2 + |4x - 6y + 7| = 0$;
3) $50x^2 + 4y^2 - 28xy + 16x + 64 = 0$.

1188.* Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{y} = 15, \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{8}{y} = 23; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{5}{2x - 3y} + \dfrac{10}{3x - 2y} = 3, \\ \dfrac{20}{3x - 2y} - \dfrac{15}{2x - 3y} = 1. \end{cases}$

1189.* Oldjátok meg az egyenletrendszert:

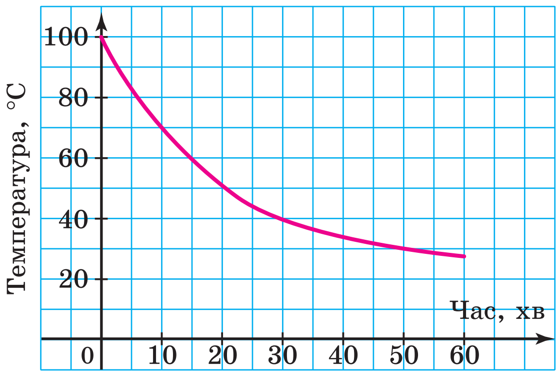
1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{7}{y} = 6, \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 46; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{9}{x + 4y} - \dfrac{6}{5x - y} = -2, \\ \dfrac{3}{x + 4y} + \dfrac{18}{5x - y} = 1. \end{cases}$

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1190. Miután a víz felforrt a vízforralóban, kikapcsolták. A 75. ábra a vízforralóban lévő víz hőmérsékletének változásának grafikonját mutatja. A grafikon segítségével határozza meg:

1) milyen hőmérsékletű volt a víz 10 perccel a vízforraló kikapcsolása után;
2) hány perccel a kikapcsolást követően lett a víz hőmérséklete 30 °C;
3) hány perc alatt csökkent a víz hőmérséklete 60 °C-ról 40 °C-ra?



75. ábra

1191. Egy doboz édesség nagykereskedelmi ára 130 hrivnya. A bolti kiskereskedelmi ár 30 %-kal magasabb, mint a nagykereskedelmi ár. Legfeljebb hány ilyen dobozt lehet vásárolni a boltban 2500 hrivnyáért?

1192. Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $(a^2 + 1)^2 + (a - 1)(a^2 + 1) - a^2$, ha $a = -2$;
2) $(a - 1)(a^2 + 1)(a + 1) - (a^2 + 1)^2$, ha $a = \frac{1}{2}$.

1193. A matematikai olimpián 12 feladat megoldására kérték a résztvevőket. Minden helyesen megoldott feladatért 5 pontot, a megoldatlan feladatért 3 pontot levontak. Hány feladatot oldott meg helyesen a diák, aki végül 36 pontot kapott?

1194. (*Német folklórból származó feladat.*) Mennyi idő alatt eszik meg együtt az oroszlán, a farkas és a kutya három bárányt, ha az oroszlán egyedül egy bárányt 1 óra alatt fogyaszt el, a farkas 3 óra alatt, a kutya pedig 6 óra alatt?

1195. Bizonyítsátok be, hogy a két bármilyen 3-mal nem osztható természetes szám négyzetének különbsége 3 többszöröse lesz!

1196. A gyümölcsösben 90-nél több, de 100-nál kevesebb fa nő. Az összes fa egyharmada almafa, negyede pedig szilva. Hány fa nő ebben a kertben?

1197. Melyik kifejezés vesz fel csak negatív értékeket, az x bármilyen értékénél:

1) $-x^2 - 4x + 6$; 2) $-x^2 + 16x - 64$; 3) $-x^2 + 8x - 18$?

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

1198. A 101×101 méretű táblázat celláiba úgy írták a számokat, hogy az egy oszlopban lévő számok szorzata negatív. Lehetséges-e, hogy 51, azoknak a soroknak a száma, amelyekben a számok szorzata pozitív?

29. Feladatok megoldása lineáris egyenletrendszerek segítségével

Megvizsgálunk néhány olyan feladatot, amelyekben a két egyenletből álló kétváltozós lineáris egyenletrendszert használnak fel valós problémák matematikai modelljeként.

PÉLDA 1 Egy ruha és négy szoknya megvarrásához 9 m, míg három ugyanilyen ruha és nyolc ugyanilyen szoknya megvarrásához 21 m anyagot használtak el. Hány méter anyagra van szükség külön-külön egy ruha és egy szoknya megvarrásához?

Megoldás. Tételezzük fel, hogy egy ruhához x m anyagra van szükség, egy szoknyához pedig y m-re. Akkor egy ruhára és 4 szoknyára $(x + 4y)$ m anyag szükséges, ami a feltétel szerint 9 m.

Tehát $x + 4y = 9$. 3 ruhához és 8 szoknyához $(3x + 8y)$ m vagy 21 m anyagra van szükség. Tehát $3x + 8y = 21$.

Felállítjuk az egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x+4y=9, \\ 3x+8y=21. \end{cases}$$

Miután megoldottuk, a következő eredményt kapjuk: $x = 3$, $y = 1{,}5$. Ez azt jelenti, hogy egy ruha megvarrásához 3 m, míg egy szoknya megvarrásához 1,5 m anyagra van szükség.

Felelet: 3 м, 1,5 м. ◀

PÉLDA 2 *A* városból a tőle 264 km-re lévő *B* városba egy motorkerékpáros indult el. 2 h múlva a *B* városból szembe vele egy kerékpáros indult el, aki 1 h-val az elindulása után találkozott a motorkerékpárossal. Határozzátok meg mindkettőjük sebességét, ha a motorkerékpáros 2 h alatt 40 km-rel többet tesz meg, mint a kerékpáros 5 h alatt!

Megoldás: Legyen a motoros sebessége x km/h, a kerékpárosé pedig y km/h. A találkozásig a motoros 3 h-t volt úton és $3x$ km-t tett meg, a kerékpáros pedig 1 h-t és y km-t. Összesen 264 km-t tettek meg. Akkor $3x + y = 264$.

A kerékpáros 5 h alatt $5y$ km-t tesz meg, a motoros pedig 2 h alatt $2x$ km-t, ami 40 km-rel több, mint 5y km. Ezek alapján $2x – 5y = 40$.

A következő egyenletrendszert kaptuk:

$$\begin{cases} 3x+y=264, \\ 2x-5y=40, \end{cases}$$

melynek a megoldása az $x = 80$, $y = 24$ számpár.

Tehát a motorkerékpáros sebessége 80 km/h, a kerékpárosé pedig 24 km/h.

Felelet: 80 km/h, 24 km/h. ◀

PÉLDA: 3 A szék és az asztal együtt 1360 hrivnyába került. Miután az asztal 20%-kal olcsóbb, a szék pedig 10% drágább lett, együtt 1160 hrivnyába kerültek. Határozzátok meg az asztal és a szék eredeti árát!

Megoldás: Legyen az asztal eredeti ára x hrn, a széké pedig y hrn. A feladat feltétele szerint $x + y = 1360$.

Az asztal új ára a régi ár 80%-a, ami $0{,}8x$ hrn. A szék új ára a régi ár 110%-a, ami $1{,}1y$ hrn. Akkor $0{,}8x + 1{,}1y = 1160$.

A következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} x + y = 1360, \\ 0{,}8x + 1{,}1y = 1160. \end{cases}$$

A megoldás az $x = 1120$, $y = 240$ számpár.

Tehát az asztal eredeti ára 1120 hrn, a széké pedig 240 hrn.

Felelet: 1120 hrn, 240 hrn. ◀

PÉLDA 4 Hány gramm 3%-os és hány gramm 8%-os sóoldatra van szükség 500 g 4%-os sóoldat előállításához?

Megoldás: Legyen az első oldatból szükséges mennyiség x g, a másodikból szükséges mennyiség pedig y g. A feltétel szerint $x + y = 500$.

A 3%-os sóoldat $0{,}03x$ g, a 8%-os pedig $0{,}08y$ g sót tartalmaz. Az 500 g 4%-os oldatban $500 \cdot 0{,}04 = 20$ (g) só van. Tehát $0{,}03x + 0{,}08y = 20$.

Összeállítjuk az egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x + y = 500, \\ 0{,}03x + 0{,}08y = 20, \end{cases}$$

A rendszer megoldása: $\begin{cases} x = 400, \\ y = 100. \end{cases}$

Vagyis 400 g 3%-os és 100 g 8%-os oldatra van szükség.

Felelet: 400 g, 100 g. ◀

PÉLDA 5 Péternek 5 hrivnyás és 20 hrivnyás címletű pénze volt. Azt mondta, hogy 20 db bankjeggyel fizetve vásárolt 255 hrivnyáért egy futball-labdát. Laci viszont azt állítja, hogy ez lehetetlen. Melyiküknek van igaza?

Megoldás: Tételezzük fel, hogy volt x darab 5 hrivnyás és y darab 20 hrivnyás bankjegye. Akkor:

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ 5x + 20y = 255. \end{cases}$$

A rendszer megoldása $\left(9\frac{2}{3}; 10\frac{1}{3}\right)$ a számpár. Ez nem felel meg a feladat feltételének, mivel a bankjegyek száma csak természetes szám lehet.

Felelet: Lacinak van igaza. ◀

GYAKORLATOK

1199.° Találjatok két olyan számot, melyek összege 63, különbsége pedig 19!

1200.° Egy 46 fős turistacsoport 10 csónakkal indult vízi túrázni, amelyek egy része négy, a többi hatüléses volt. Hány hajó volt az egyes típusokból?

1201.° Találjatok két olyan számot, melyek különbsége 23, a nagyobbik szám kétszeresének és a másik számnak az összege pedig 22!

1202.• 4 ló és 12 tehén ellátásához naponta 120 kg szénára van szükség, 3 ló és 20 tehén ellátásához pedig 167 kg-ra. Határozzátok meg egy ló és egy tehén napi szénaadagját.

1203.• Az első napon 2 lánctalpas és egy kerekes traktor 22 ha-t szántott fel, a második napon pedig 3 lánctalpas és 8 kerekes traktor 72 ha-t. Hány hektár földet tud felszántani naponta egy lánctalpas és mennyit egy kerekes traktor?

1204.• Két munkás 135 alkatrészt készített. Az egyik munkás 7 napot dolgozott, a másik pedig 12-t. Hány alkatrészt gyártott le egy-egy munkás naponta, ha az első 3 nap alatt 3 alkatrésszel többet készített el, mint a másik 4 nap alatt?

1205.• A gyümölcsösben két brigád szedte az almát. Az egyik brigád első nap 5 ó-t dolgozott, a másik pedig 4-et. Összesen 40 q almát szedtek. Másnap azonos teljesítmény mellett az első brigád 3 ó alatt 2 q-val többet szedett, mint a második 2 ó alatt. Hány mázsa almát szedett mindegyik brigád egy óra alatt?

1206.• 510 hrivnyát fizettek 6 egyforma ceruzakészletért és 5 egyforma körzőért. Mennyibe kerül egy ceruzakészlet és mennyi egy körző, ha 3 ceruzakészlet 150 hrivnyával drágább, mint 1 körző?

1207.• 11 füzetért és 8 tollért 245 hrivnyát fizettek. Mennyibe kerül egy füzet és mennyibe egy toll, ha 5 füzet 35 hrivnyával drágább 4 tollnál?

1208.• Kijevből és a tőle 256 km-re lévő Vinnyicából egyszerre indult el egymással szemben egy gépkocsi és egy autóbusz, amelyek 2 h múlva találkoztak. Határozzátok meg mindkét jármű sebességét, ha ismeretes, hogy az autóbusz 2 h alatt 46 km-rel többet tett meg, mint a gépkocsi 1 h alatt!

1209.• Két, egymástól 300 km-re lévő állomásról egyszerre indult el egymással szemben egy személy- és egy tehervonat, majd 3 h múlva találkoztak. Ha a személyvonat 1 h-val hamarabb indult volna el, mint a tehervonat, akkor a tehervonat indulásától számított 2,4 h múlva találkoztak volna. Határozzátok meg a vonatok sebességét!

1210.• A faluból a gyalogos az állomás felé indult. 30 perc múlva ugyanebből a faluból egy kerékpáros is elindult, majd 10 perc múlva utolérte a gyalogost. Határozzátok meg a gyalogos és a kerékpáros sebességét, ha ismeretes, hogy a gyalogos 3 h alatt 4 km-rel nagyobb utat tesz meg, mint a kerékpáros fél óra alatt!

1211.$^{\bullet}$ Zsitomirból a tőle 536 km-re lévő Odesszába egy gépkocsi indult el. Az indulás után 2,5 h-val vele szemben Odesszából is elindult egy gépkocsi, majd 2 h múlva találkozott a másik gépkocsival. Határozzátok meg a gépkocsik sebességét, ha az első 2 h alatt 69 km-rel kisebb távolságot tesz meg, mint a második 3 h alatt!

1212.$^{\bullet}$ Két kannában tej volt. Ha az első kannából átöntenek 10 l-t a másodikba, akkor mindkét kannában egyforma mennyiségű tej lesz. Ha a másodikból az első töltenek át 20 l-t, akkor az elsőben 2,5-szer több tej lesz, mint a másodikban. Mennyi tej volt eredetileg e két kannában?

1213.$^{\bullet}$ Amikor a vonat első vagonjába 4-en szálltak fel, a második vagont pedig 4-en hagyták el, akkor mindkét vagonban egyenlő számban ültek. Ha az első vagonba 2-en, a másodikba 24-en szállnának fel, akkor az első vagonban 2-szer kevesebben ülnének, mint a másodikban. Hányan ültek kezdetben mindkét vagonban?

1214.$^{\bullet}$ Egy motorcsónak 98 km-t 3 óra alatt teszi meg a folyón felfelé és 2,5 óra alatt a folyón lefelé. Határozza meg a csónak saját sebességét és a vízfolyás sebességét, ha 36 km-rel többet tesz meg 5 óra alatt a folyás irányában, mint 4 óra alatt a folyással szemben!

1215.$^{\bullet}$ Egy hajó 70 km-rel többet tesz meg 5 óra alatt folyón lefelé, mint 3 óra alatt vízfolyással szemben. Határozzátok meg a hajó sebességét álló vízben és az vízfolyás sebességét, ha 9 óra alatt annyi kilométert tesz meg a tavon, mint 10 óra alatt a folyó áramlásával szemben.

1216.$^{\bullet}$ Két műhelyben 75 öltönyt kellett varrni. Amikor az első műhely a megrendelés 60%-át teljesítette, a második pedig 50%-át, kiderült, hogy az első műhely 12 öltönnyel többet varrt, mint a második. Hány öltönyt kellett minden műhelynek elkészíteni?

1217.• Misinek és Annának 300 hrivnyája volt összesen. Amikor Misi pénzének $\frac{1}{3}$-át matematikai útmutató vásárlására, Anna pedig $\frac{1}{6}$-át ukrán nyelvű könyv vásárlására költötte, kiderült, hogy Misi 5 hrivnyával kevesebbet költött, mint Anna. Mennyi pénzük volt eredetileg mindegyiküknek?

1218.• Ismeretes, hogy 4 kg uborka és 3 kg paradicsom 340 hrivnyába kerül. Miután az uborka 50%-kal drágult és a paradicsom 20%-kal olcsóbb lett, 2 kg uborka és 5 kg paradicsom 360 hrivnyába került. Határozzátok meg 1 kg uborka és 1 kg paradicsom eredeti árát!

1219.• Ismeretes, hogy 2 egyforma doboz festék és 3 egyforma oldószer 290 hrivnyába kerül. Miután a festék 10%-kal olcsóbb lett, az oldószer pedig 40%-kal drágult, 728 hrivnyát fizettek 6 doboz festékért és 5 doboz oldószerért. Határozzátok meg egy doboz festék és egy oldószer eredeti árát!

1220.• A befektető 14 000 hrivnyát helyezett el két különböző számlán. Az első évi 4%-os, a második pedig évi 6%-os kamatot fizet a bank. Egy évvel később a befektető 680 hrivnya kamatot kapott. Hány hrivnyát helyezett el az egyes számlákon?

1221.• A befektető 12 000 hrivnyát helyezett el két különböző számlán. Az elsőnek kamatja évi 5%, a másodiknak pedig évi 7%. Egy évvel később a befektető 240 hrivnyával több kamatot kapott az 5%-os betétért, mint a 7%-ért. Hány hrivnyát helyezett el az egyes számlákon?

1222.• Két ötvözetünk van: melyek rezet és cinket tartalmaznak. Az első ötvözet 9%, a második pedig 30% cinket tartalmaz. Hány kilogrammot kell venni az egyes ötvözetekből összeolvasztani, hogy 300 kg 23% cinket tartalmazó ötvözetet kapjunk?

1223.• Két víz-só oldatunk van. Az első oldat 25%, a második pedig 40% sót tartalmaz. Hány kilogrammot kell venni mindegyik oldatból, hogy összeöntve 50 kg 34% sót tartalmazó oldatot kapjunk?

1224.• Egy kétjegyű sszám számjegyeinek összege 15. Ha a szám számjegyeit felcseréljük, akkor az eredetinél 9-cel kisebb számot kapunk. Határozzátok meg az adott kétjegyű számot!

1225.• A téglalap kerülete 28 cm. Ha a két szemközti oldalát 6 cm-rel növeljük, a másik két oldalát pedig 2 cm-rel csökkentjük, akkor a területe 24 cm^2-rel növekszik. Határozzátok meg az eredeti téglalap oldalait!

1226.• Ha a téglalap minden oldalát 3 cm-rel növeljük, akkor a területe 45 cm^2-rel növekedik. Ha két szemközti oldalát 4 cm-rel növeljük, és a másik két oldalát pedig 5 cm-rel csökkentjük, akkor a területe 17 cm^2-rel csökken. Határozzátok meg az az eredeti téglalap oldalait!

1227.•• (*Görög folklórból származó feladat*.) Ballag egymás mellett áruval megpakolva a szamár és az öszvér. A szamár panaszkodik a nehéz teherre, mire az öszvér azt feleli: „Mit panaszkodsz? Ha átveszem az egyik zsákot a hátadról, akkor az én terhem kétszer nehezebb lesz a tiédnél. Ha viszont te veszel el tőlem egy zsákot, akkor mindketten ugyanannyit cipelünk majd.” Mondjátok meg bölcs matematikusok, hány zsákot cipelt a szamár és hányat az öszvér?

1228.•• (*Indiai folklórból származó feladat*.) Az egyik azt mondja a másiknak: „Adjál 100 rúpiát és én kétszer gazdagabb leszek nálad.” A másik erre ezt felelte: „Ha te adsz nekem 10 rúpiát, akkor én hatszor leszek gazdagabb nálad.” Mennyi pénze volt mindegyiknek?

1229.•• A fiú 6 évvel ezelőtt 4-szer volt fiatalabb az apjánál, 12 év múlva pedig 2-szer lesz fiatalabb az apjánál. Hány éves az apa és hány éves a fia?

1230.•• A nagymama 6 évvel ezelőtt 9-szer volt idősebb unokájánál, 4 éve pedig 7-szer. Hány éves a nagymama és hány éves az unokája?

1231.•• Az egymástól 45 km-re lévő faluból egymással szemben egyszerre egy kerékpáros és egy gyalogos indult el. 3 ó múlva találkoztak. Ha a kerékpáros a gyalogostól 1 ó 15 perccel hamarabb indult volna el, akkor 2 ó-val a gyalogos elindulása után találkozhattak volna. Milyen sebességgel haladt a kerékpáros és a gyalogos?

1232.•• Az egymástól 24 km-re lévő *A* és *B* táborból egymással szemben egyszerre két turista indult el. Elindulásuk után 2 h-val még nem találkoztak, és a közöttük lévő távolság 6 km volt. Még 2 h elteltével egyikőjüknek 4 km-rel kevesebbet kellett megtennie a *B* táborig, mint a másiknak az *A*-ig. Határozzátok meg a turisták sebességét!

1233.•• A kerékpáros meghatározott sebességgel az előre eltervezett idő alatt ért az *A* pontból a *B* pontba. Ha 3 km/h-val növeli a sebességét, akkor 1 h-val hamarább ér a *B* pontba, ha viszont óránként 2 km-rel kevesebbet tett volna meg, akkor 1 h-val később ér oda. Határozzátok meg a kerékpáros sebességét!

1234.•• A rakományt meghatározott számú, azonos teherbírású gépkocsi szállította. Ha mindegyiken 1 tonnával több rakomány lenne, akkor 3 kamionnal kevesebb, ha pedig 2 tonnával több, akkor 5 kamionnal kevesebb gépkocsira lenne szükség. Határozzátok meg a szállított rakomány tömegét!

1235.•• Egy busz és egy iránytaxi minden nap menetrend szerint reggel 8 órakor indulnak Meggyes és Almás városából, és 8:10-kor találkoznak egymással. A városok közötti távolság 18 km. Egy napon a busz menetrend szerint indult, a taxi pedig késett – 8 óra 9 perckor. Ezért aznap 8 : 15-kor találkoztak. Határozzátok meg a busz és az iránytaxi sebességét!

1236.•• Két autóbusz azonos sebességgel indult Napfényes városából Vidám faluba 9 óra 5 perckor és 9 óra 45 perckor. Egy kerékpáros 9 : 30-kor indult el Vidám faluból Napfényes városa felé, és 9:45-kor találkozott az első busszal, a másodikkal pedig 10:15-kor. Határozza meg a buszok és a kerékpáros sebességét, ha Napfényes és Vidám közötti távolság 36 km!

1237.* A kétjegyű szám számjegyeinek összege 9, a 10-es helyiértékű számjegye nagyobb, mint az egyesek helyiértéke. Ha elosztjuk ezt a számot a számjegyeik különbségével, akkor az osztás eredménye 14 és a maradék pedig 2. Határozzátok meg az adott számot!

1238.* A kétjegyű szám számjegyeinek különbsége 6, a 10-es helyiértékű számjegye kisebb, mint az egyesek helyiértéke. Ha elosztjuk ezt a számot a számjegyeik összegével, akkor az osztás eredménye 3 és a maradék pedig szintén 3. Határozzátok meg az adott számot!

1239.* Az egyik tartályban 12 liter víz volt, a másikban 32 liter. Ha az első tartályt tele töltik vízzel a második tartályból, akkor a második tartály félig lesz. Ha a második tartályt teletöltik vízzel az elsőből, akkor az első tartály térfogatának egy hatodáig lesz töltve. Határozza meg az egyes tartályok térfogatát!

1240.* Két 40 literes és 60 literes tartályban volt némi víz. Ha a nagyobb edényből vizet öntünk a kisebb edénybe, akkor az elsőben lévő vízmennyiség $\frac{5}{7}$-e maradt. Ha a nagyobb edényt teletöltünk vízzel a kisebből, akkor a kisebben lévő vízmennyiség $\frac{5}{14}$-e maradt benne. Hány liter víz volt eredetileg a két tartályban?

1241.* Létezik-e olyan kétjegyű szám, amely kielégíti a következő feltételeket: a 10-es helyiértékű számjegye 2-vel nagyobb, mint az egyeseké valamint az adott szám és a számjegyei fordított sorrendjébe írt szám különbsége: 1) 20; 2) 18? Ha létezik ilyen szám, akkor határozzátok meg azt!

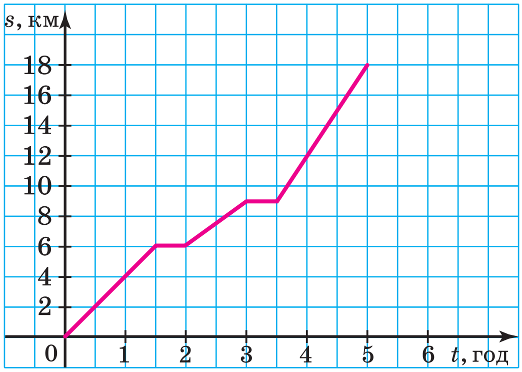
ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1242. A $4(0{,}5x - 3) = 3x + *$ egyenlőségben a csillagot olyan kifejezéssel helyettesítsétek, hogy egyenletet kapjunk, melynek:

1) ne legyenek gyökei;
2) számtalan gyöke legyen;
3) egy gyöke legyen!

1243. A 76. ábra a turista mozgásának grafikonját mutatja vasútállomástól a turistatáborba. A grafikon segítségével határozza meg:

1) hány kilométer a távolság az állomástól a táborig, és hány óra alatt tette meg a turista ezt a távolságot;
2) milyen távolságra volt az állomástól a turista 4 órával a mozgás megkezdése után;
3) az állomás elhagyása után hány órával kezdte meg a turista az első pihenőt, és mennyi ideig tartott;
4) milyen sebességgel haladt a turista az állomástól az első pihenőig;
5) milyen sebességgel haladt a turista az első pihenőtől a másodikig?



76. ábra

1244. Szerkesszétek meg a függvény grafikonját:

1) $y = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 8x^3$;

2) $y = (x + 1)(x + 4) - (x + 3)^2$;

3) $y = (0{,}5x + 2)^2 - (0{,}5x - 1)(0{,}5x + 1)$.

1245. Szerkesszétek meg a függvény grafikonját:

$$y = \begin{cases} 2x + 7, & \text{ha } x < -2, \\ -1{,}5x, & \text{ha } -2 \le x \le 2, \\ x - 5, & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

Felhasználva a megszerkesztett grafikont határozzátok meg az a milyen értéke mellett az $y = a$ egyenesnek pontosan két közös pontja legyen!

1246. Adjátok meg a 12ab kifejezést két polinom négyezetei különbségeként! Hány megoldása van ennek a feladatnak?

1247. Bizonyítsátok be, hogy az a bármilyen egész értéke mellett az

$$(a - 3)(a^2 - a + 2) - a(a - 2)^2 + 2a$$

kifejezés osztható 3-mal!

1248. Bizonyítsátok be az azonosságot:

$$(a - bc)^2 - 2(b^2c^2 - a^2) + (bc + a)^2 = 4a^2.$$

1249. Írjátok fel szorzat alakjában:

1) $4kn + 6ak + 6an + 9a^2$;

2) $b^6 - 4b^4 + 12b^2 - 9$;

3) $y^4(x^2 + 8x + 16) - a^8$;

4) $9x^2 - 6x - 35$.

1250. Adott, hogy $x + y = a$, $xy = b$, $x^2 + y^2 = c$. Határozzátok meg az a, b és c értékek közötti összefüggést!

1251. Az $A(2; 3)$ és $B(5; a)$ pontok az $y = kx$ egyenesen fekszenek. Határozzátok meg az a értékét!

1252. Határozzátok meg a x értékeit, melynél az

$$(a - 1)^2 + 4(a - 1) - x$$

kifejezést fel lehessen írni az összeg négyzetének képletével!

1253. Az $y = ax + 12$ és az $y = (3 - a)x + a$ függvények grafikonjaik a 2 abszcisszájú pontban metszik egymást. Határozzátok meg a metszéspontjuk ordinátáját!

GYAKOROLJUK A NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREKET

1254. Bizonyítsátok be, hogy a természetes szám négyzete páratlan számú osztóval rendelkezik!

7. SZÁMÚ FELADATSOR. ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN

1. A következő számpárok közül melyik az $5x + 3y = 4$ egyenlet megoldása?

A) (2; 1); B) (1; 0); C) (2; –2); D) (–1; 2).

2. Melyik számpár a 2x – 5y = 10 egyenlet grafikonja és az abszcisszatengely metszőpontjának koordinátája?

A) (0; –2); B) (–2; 0); C) (0; 5); D) (5; 0).

3. Розв'яжіть систему рівнянь

A) (3; 1); B) (1; 3); C) (1; 2); D) (2; 1).

4. Oldjátok meg az $\begin{cases} 5x - 4y = 11, \\ 2x + 4y = 10. \end{cases}$ egyenletrendszert!

A) (3; –19); B) (1; –4); C) (–5; 41); D) (–1; 11).

5. Legyen az (a; b) számpár az $\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása. Határozzátok meg az $a^2 - b^2$ kifejezés értékét!

A) 5; B) –5; C) 3; D) –3.

6. Az a milyen értékénél nincs megoldása a $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ x - ay = -6 \end{cases}$ egyenletrendszernek?

A) 3; B) –3; C) $\frac{1}{3}$; D) $-\frac{1}{3}$.

7. A b milyen értékénél rendelkezik a $\begin{cases} 4x + by = 10, \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ egyenletrendszer végtelen sok megoldással?

A) –6; C) 3;

B) 6; D) nem létezik olyan érték.

8. A lineáris függvény grafikonja áthalad az A(1; 4) és B(–2; 13) pontokon. Adjátok meg a függvény képletét!

A) $y = 3x + 1$; C) $y = -3x + 1$;

B) $y = -3x + 7$; D) $y = 3x + 7$.

9. Az anya és kislánya együtt 104 derelyét készített, miközben a kislány 2 ó-t, az anyja 3 ó-t dolgozott. 1 ó alatt az anya 8 derelyével többet készít el, mint a lánya.

Tételezzük fel, hogy a kislány 1 ó alatt x derelyét készít, az anyja pedig y-t. Az alábbi egyenletrendszerek közül melyik a feladat matematikai modellje?

A) $\begin{cases} 2x+3y=104, \\ x-y=8; \end{cases}$ C) $\begin{cases} 2x+3y=104, \\ y-x=8; \end{cases}$

B) $\begin{cases} 3x+2y=104, \\ x-y=8; \end{cases}$ D) $\begin{cases} 3x+2y=104, \\ y-x=8. \end{cases}$

10. Két, egymástól 60 km-re lévő városból elindult egy teherautó és egy személygépkocsi. Ha egymással szemben haladnak, akkor 30 perc múlva találkoznak. Ha egy irányban haladnak, a személygépkocsi 3 ó múlva éri utol az teherautót.

Legyen x km/h a teherautó és y km/h a személygépkocsi sebessége. Melyik egyenletrendszer felel meg a feladat feltételeinek?

A) $\begin{cases} 0{,}5x+0{,}5y=60, \\ 3y-3x=60; \end{cases}$ C) $\begin{cases} 30x+30y=60, \\ 3x-3y=60; \end{cases}$

B) $\begin{cases} 30x+30y=60, \\ 3y-3x=60; \end{cases}$ D) $\begin{cases} 0{,}5x+0{,}5y=60, \\ 3x-3y=60. \end{cases}$

11. A csillár és az asztali lámpa összesen 2000 hrivnyába kerül. Miután a csillár 10 %-kal megdrágult, az asztali lámpát pedig 10 %-kal leértékelték, együtt 2020 hrivnyába kerültek. Legyen a csillár eredeti ára x hrn, az asztali lámpáé pedig y hrn. Az alábbi egyenletrendszerek közül melyik a feladat matematikai modellje?

A) $\begin{cases} x+y=2000, \\ 110x+90y=2020; \end{cases}$ C) $\begin{cases} x+y=2000, \\ 0{,}1x+0{,}1y=2020; \end{cases}$

B) $\begin{cases} x+y=2000, \\ 1{,}1x+0{,}9y=2020; \end{cases}$ D) $\begin{cases} x+y=2000, \\ 0{,}9x+1{,}1y=2020. \end{cases}$

12. Oldjátok meg az $x^2 + y^2 + 12x - 2y + 37 = 0$ egyenletet!

A) (6; 1); C) (–6; –1);

B) (–6; 1); D) nincs megoldása.

A 3. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

A kétváltozós egyenlet megoldása

Az egyenletet igaz egyenlőséggé alakító változók értékpárját, a kétváltozós egyenlet megoldásának nevezzük.

Megoldani a kétváltozós egyenletet

A kétváltozós egyenletet megoldani annyit jelent, mint megtalálni a megoldásait, vagy bebizonyítani, hogy azok nem léteznek.

A kétváltozós egyenletek tulajdonságai

- Ha az egyenlet jobb és bal oldalához hozzáadjuk (vagy mindkét oldalából kivonjuk) ugyanazt a számot, akkor a kapott egyenletnek is ugyanazok lesznek a megoldásai, mint az eredeti egyenleté.
- Ha valamelyik összeadandót az egyenlet egyik oldaláról átvisszük ellenkező előjellel a másik oldalra, az egyenlet megoldásai nem változnak.
- Ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk (elosztjuk) ugyanazon számmal, az egyenlet megoldásai nem változnak.

A kétváltozós egyenlet grafikonja

A kétváltozós egyenlet grafikonjának azt a mértani alakzatot nevezzük, amelyik a koordinátasík azon, és csakis azon pontjaiból áll, melyek koordinátái (számpárok) az egyenlet megoldásai.

Kétváltozós lineáris egyenlet

Kétváltozós lineáris egyenletnek nevezzük az $ax + by = c$ alakban felírható egyenletet, ahol x és y változók, a, b és c pedig tetszőleges számok.

A kétváltozós lineáris egyenlet grafikonja

Amennyiben: 1) $b \neq 0$; 2) $b = 0$ és $a \neq 0$ – az $ax + by = c$ egyenlet grafikonja egyenes. A $0x + 0y = 0$ egyenlet grafikonja a teljes koordinátasík.

A kétváltozós egyenletrendszer megoldása

A kétváltozós egyenletrendszer megoldásának azt a számpárt nevezzük, amelyik mindegyik egyenletet igaz egyenlőséggé alakítja.

Egyenletrendszerek megoldása behelyettesítő módszerrel

1) Az egyik egyenletből kifejezzük az egyik változót a másikon keresztül;
2) a kifejezett változó helyett kapott kifejezést behelyettesítjük a másik egyenletbe;
3) megoldjuk a második lépésben kapott egyváltozós egyenletet;
4) a változó megkapott értékét behelyettesítjük az első lépésben kapott kifejezésbe;
5) kiszámítjuk a másik változó értékét;
6) Felírjuk a feleletet.

Egyenletrendszerek megoldása egyenlő együtthatók módszerével

1) Kiválasztva a megfelelő együtthatókat, átalakítjuk az egyik, esetleg mindkét egyenletet úgy, hogy az azonos változók melletti együtthatók ellenkező előjelűek legyenek;
2) tagonként összeadjuk az első lépésben kapott egyenletek jobb és bal oldalát;
3) megoldjuk a második lépésben kapott egyváltozós egyenletet;
4) a harmadik lépésben kapott értéket behelyettesítjük az eredeti rendszer bármelyik egyenletébe;
5) kiszámítjuk a másik változó értékét.
6) Felírjuk a feleletet.

A 7. OSZTÁLYOS ALGEBRA ISMÉTLŐ GYAKORLATAI

1255. Töltsétek ki a táblázatot:

a	–2	–1	–0,5	0	0,5	1	2
$a^3 - a^2$							
$a^4 + a^2$							

1256. Adjátok meg a kifejezést hatvány alakjában:

1) $(a^8)^4$;
2) a^8a^4;
3) a^5a^5;
4) $(a^5)^5$;
5) $a^2a^3a^4$;
6) $(a^2)^3a^4$;
7) $a^6a^6a^6$;
8) $(a^6a^6)^6$;
9) $(a^6)^6a^6$;
10) $(a^4)^5 : a^7$;
11) $(a^2)^9 : (a^6)^3$;
12) $(a^8a^7) : a^{14}$.

1257. Az x mely értékére lesz igaz az egyenlőség:

1) $5^x \cdot 5^6 = 5^{24}$;
2) $(3m)^x = 3^{5m}$;
3) $2^x \cdot 2^m = 2^{6m}$;
4) $(4^x)^{3m} = 46^{6m2}$,

ahol m – természetes szám?

1258. Чи є тотожно рівними вирази:

1) $-a^2$ és $(-a)^2$;
2) $-a^3$ és $(-a)^3$;
3) $(a^3)^2$ és a^5;
4) $9a \cdot a^2$ és $(3\text{a})^2 \cdot a$;
5) $(a^4)^3$ és $(a^2)^6$;
6) $(2a)^3 \cdot (0{,}5a)^2$ és $2a^4a$?

1259. Adjátok meg hatvány alakjában és számítsátok ki az értékét:

1) $81 \cdot 3^2$;
2) $4^3 \cdot 8^2$;
3) $100^2 \cdot 1000^3$;

1260. Hasonlítsátok össze a kifejezések értékeit:

1) $15^5 \cdot 2^6$ és $2^5 \cdot 15^6$
2) $2^5 \cdot 3^3 \cdot 3^4$ és $2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^3$;

1261. Hasonlítsátok össze a kifejezések értékeit:

1) 10^{20} és 101^{10};
2) 10^{15} és 9990^5.

1262. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

1) $4a \cdot (-3ab)$;
2) $-2m^2 \cdot 0{,}1m^4n \cdot (-5n^3)$;
3) $0{,}3a^2b^4 \cdot 12a^4b$;
4) $-6x^3y^6 \cdot 1{,}5xy$;

5) $-14b^2c^8d^9 \cdot 1\frac{2}{7}b^6d^3$; 7) $3x^6 \cdot (-4x^2y)^2$;

6) $\frac{4}{9}a^4c \cdot (-12a^2c^3) \cdot 1{,}8a^4b^5$; 8) $(-xy)^3 \cdot (-2x^2y^2)^4$.

1263. Az A egytagú algebrai kifejezést adjátok meg B^n alakban, ha B – valamilyen egytagú algebrai kifejezés, ha:

1) $A = a^6b^9$, $n = 3$; 3) $A = 81a^2b^4c^8$, $n = 2$;

2) $A = 32a^{10}$, $n = 5$; 4) $A = -8a^{12}b^{18}$, $n = 3$.

1264. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

1) $4a^3ab - 6a^2b^3b^3 - 5ab \cdot 3a + 7a^3b \cdot 0{,}2b^4$;

2) $11m^2 \cdot 2mn - 9mn \cdot 6mn^3 + 10mnm$;

3) $8xx^4x \cdot \left(-\frac{1}{4}xy\right) + 18xy \cdot \frac{7}{9}yx^5$;

4) $9x^3xy^2 - 8xy^2y^8 + 12x^2y \cdot 4y - 0{,}4xy^3 \cdot 6x^3y^2$.

1265. Határozzátok meg a polinomok összegét és különbségét:

1) $2{,}8b - 0{,}75b^2$ és $\frac{1}{4}b^2 - 1\frac{4}{5}b$;

2) $1\frac{2}{7}x^2 + 2\frac{4}{9}y$ és $2\frac{3}{14}x^2 - 1\frac{1}{6}y$.

1266. Bizonyítsátok be, hogy a:

$$3x^2 - 9x - (8 - 5x^2 - (9x - 8x^2))$$

független a változó értékétől!

1267. Milyen polinomot kell hozzáadni az $a^4 - b^4 + a^3 - b^3 - 3ab$ polinomhoz, hogy az összegük azonosan egyenlő legyen az $b^3 + c^2 + 2ab$ polinommal?

1268. Milyen polinomot kell kivonni a $3c^5 - 2c^4 + 14c^3 - 4c^2 + c$ polinomból, hogy a különbség azonosan egyenlő legyen az $5c^3 + c^2 - 7c$ polinommal?

1269. Milyen polinomot kell hozzáadni az $m^3 - m^2n + mn^2 - n^4$, polinomhoz, hogy az összeg azonosan egyenlő legyen az 5-tel?

1270. Létezik-e olyan x és y értékek, melyeknél $-4x^2 - 12xy + 7y^2$ i $6x^2 + 12xy - 5y^2$ polinomok? Egyidejűleg negatív értékeket vegyen fel.

1271. Határozzátok meg a kifejezések értékeit:

1) $2a(3a - 5) - 4a(4a - 5)$, ha $a = -0,2$;
2) $7ab(2a - 3b) + 2a(3ab + 10b^2)$, ha $a = -3$, $b = 5$;
3) $2a^4(3a^2 + a - 8) - 6a^6$, ha $a = -1$.

1272. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\frac{3x-1}{6} - \frac{x}{3} = \frac{5-2x}{9}$;
2) $\frac{3x+1}{2} - \frac{5x}{4} = \frac{3-2x}{3}$;
3) $\frac{x+5}{8} - \frac{1+x}{2} = \frac{2x+1}{3}$;
4) $\frac{2x}{3} - \frac{2x+1}{6} = \frac{3x-9}{4}$;
5) $\frac{9x-7}{4} - \frac{9x+13}{8} = \frac{3-x}{2}$;
6) $\frac{6x+7}{6} + \frac{5x-8}{9} = 3$.

1273. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $3x(4x - 1) - 6x(1,5 + 2x) = 4,8$;
2) $0,2x(5x - 8) + 3,6 = x(x - 0,7)$;
3) $x(9x - 4) - 3x(3x - 1) = 8 - x$;
4) $18x^2 - 6x(3x + 2) = -12x$.

1274. Bizonyítsátok be az azonosságot:

1) $-0,2x^3(2,5x - 4)(6 - x^2) = 0,5x^6 - 0,8x^5 - 3x^4 + 4,8x^3$;
2) $(a - 2)(a^2 + 3a - 18) = (a - 3)(a^2 + 4a - 12)$.

1275. Milyen számmal kell helyettesíteni az a-t, hogy az $(5x + a)(x - 2) = 5x^2 - 7x - 2a$ egyenlőség azonosság legyen?

1276. Milyen számmal kell helyettesíteni a b-t, hogy az $(3x + b)(x + 3) = 3x^2 + 5x + 3b$ egyenlőség azonosság legyen?

1277. Bontsátok tényezőkre:

1) $\frac{1}{2}a^6 - \frac{1}{4}a^2b$;
2) $5m^2n^3k^4 + 35m^4n^3k^2$;
3) $x^3y^2z^5 - 2xy^5z^3 + 3x^2y^3z$;
4) $a^{2n}b^{3n} - a^nb^{4n}$, ahol n — természetes szám!

1278. A tényező kiemelése után, számítsátok ki a kifejezés értékét:

1) $a^2 + 4{,}72a - 32{,}8$, ha $a = 5{,}28$;
2) $12{,}3x - 12{,}3y + 4{,}7$, ha $x = 8{,}14$, $y = 8{,}04$.

1279. A tényező kiemelése alaklmazásával, számítsátok ki a kifejezés értékét:

1) $2{,}49 \cdot 1{,}35 - 1{,}35 \cdot 1{,}84 + 1{,}352$;
2) $0{,}252 \cdot 1{,}6 + 0{,}25 \cdot 1{,}62 - 0{,}25 \cdot 1{,}6 \cdot 0{,}85$;
3) $3{,}24 \cdot 18{,}7 - 3{,}24 \cdot 16{,}4 + 2{,}3 \cdot 6{,}76$;
4) $5{,}12 \cdot 9{,}76 + 5{,}12 \cdot 5{,}36 - 5{,}122$.

1280. Bizonyítsátok be, hogy:

1) $25^4 - 125^2$ a 40 többszöröse;
2) $6^5 - 18^3$ a 42 többszöröse;
3) $17^3 + 17^2 - 17$ a 61 többszöröse;
4) $5 \cdot 2^{962} - 3 \cdot 2^{961} + 2^{960}$ a 60 többszöröse!

1281. Bizonyítsátok be, hogy:

1) $\overline{abba}$ osztható 11-gyel;
2) $\overline{aaa\ bbb}$ osztható 37-tel;
3) ababab osztható 7-tel;
4) $\overline{abab - baba}$ osztható 9-cel és 101-gyel!

1282. Az a mely értékeinél az $(x + 2)\,(x + 2)\,(x - 4) - (x - 2)\,(x + 4) = ax$ egyenletnek számtalan sok gyöke lesz?

1283. Az a mely értékeinél az $(3x - 1)\,(3x - 1)\,(x + a) = (3x - 2)\,(x + 1)$ egyenletnek nem lesz gyöke?

1284. Bontsátok tényezőkre:

1) $xm - xn + ym - yn$;
2) $3a - 3b + ac - bc$;
3) $9a - ab - 9 + b$;
4) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$;
5) $6ab^2 - 3b^2 + 2a^2b - ab$;
6) $2c^3 - 5c^2d - 4c + 10d$;
7) $x^3y^2 - x + x^2y^3 - y$.

1285. Számítsátok ki a kifejezés értékét:

1) $1{,}662 + 1{,}66 \cdot 4{,}68 + 2{,}342$;
2) $1{,}042 - 1{,}04 \cdot 1{,}28 + 0{,}642$.

1286.* Az a, b, c és d mely értékeinél teljesül a következő egyenlőség: $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{ad} \cdot \overline{cb}$?

1287. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:
1) $6x^2 + (2y - 3x)(2y + 3x)$;
2) $(a + 2)(a - 3) - (4 - a)(a + 4)$;
3) $(5 - 2x)(5 + 2x) - (3 - 2x)(4 - 2x)$;
4) $(2ab + 1)(2ab - 1)(16a^4b^4 + 1)(4a^2b^2 + 1)$.

1288. Számítsátok ki a szorzat értékét, felhasználva az $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ képletet:

1) $19 \cdot 21$; 2) $98 \cdot 102$; 3) $2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{3}$; 4) $7{,}9 \cdot 8{,}1$;

1289. Oldjátok meg az egyenleket:
1) $4x(7 + 9x) - (6x + 5)(6x - 5) = 39$;
2) $(x - 8)(x + 10) - (x + 7)(x - 7) = 5x - 31$.

1290. Bizonyítsátok be, hogy a:

$$(a + b - c)(a - b) + (b + c - a)(b - c) + (c + a - b)(c - a)$$

kifejezés azonosan egynlő nullával!

1291. Határozzátok meg a kifejezések értékét:

1) $43^2 - 23^2$; 2) $256^2 - 244^2$; 3) $7{,}2^2 - 2{,}8^2$;

1292. Számjtsátok ki:

1) $\dfrac{39^2 - 33^2}{24^2 - 12^2}$; 2) $\dfrac{5{,}3^2 - 1{,}7^2}{2{,}65^2 - 0{,}85^2}$.

1293. Oldjátok meg az egyenleket:

1) $36x^2 - (3x - 27)^2 = 0$; 2) $(4x - 7)^2 - (2x + 17)^2 = 0$.

1294. Bizonyítsátok be, hogy bármilyen természetes n értékre a következő kifejezés:
1) $(4n + 19)^2 - (3n - 5)^2$ osztható 7-tel;
2) $(2n + 5)^2 - (2n - 3)^2$ osztható 16-tal!

1295. Bizonyítsátok be, hogy bármilyen természetes n szám esetére az $(n^2 - 3n + 1)^2 - n^4 - 8n^2 + 3n + 5$ a 6 többszöröse lesz!

1296. Bizonyítsátok be, hogy bármilyen természetes n szám esetére az $16n^4 - (4n^2 - 2n + 1)^2 + 8n + 1$ a 4 többszöröse lesz!

1297. Az a mely értékeinél igaz, hogy az

$(a - 3)(a + 5)x = a^2 - 9$ egyenletnek:

1) végtelen sok megoldása van;
2) nem lesz megoldása;
3) egy gyöke van?

1298. Az összeg négyzetének vagy a különbség négyzetének képlete segítségével számítsátok ki a kifejezés értékét:

1) 69^2; 2) 91^2; 3) 52^2; 4) 97^2; 5) 299^2; 6) $10{,}2^2$.

1299. Az $(3a^2 - 2)^2 - (3a^2 - 1) \cdot (3a^2 + 1) + 12a^2$ kifejezés értéke mennyivel nagyobb, mint 2?

1300. Bizonyítsátok be, hogy nem létezik olyan n természetes szám, melynél a $(8n + 5)(2n + 1) - (4n + 1)^2$ kifejezés értéke osztható legyen 5-tel!

1301. Létezik-e olyan n természetes szám, melynél a $(2n - 3)(2n + 3) - (n + 3)^2$ kifejezés értéke nem osztható 3-mal?

1302. Oldjátok meg az egyenleket:

1) $3(x - 7)^2 - 2(x + 7)(x - 2) = (x + 11)(x - 4) + 101$;
2) $2x(x + 3)^2 - 3x(x - 1)(x + 8) = x^2(-x - 9) + 21$;
3) $y(2y - 5)(2y + 5) - 4y(y + 6)^2 = 13 - 48y^2$.

1303. Adjátok meg a kéttagú algebrai kifejezés négyzeteként:

1) $(a + 4)^2 - 2(a + 4) + 1$;
2) $(3b + 2)^2 + 4(3b + 2) + 4$;
3) $(3y + 8)^2 + (4y + 6)^2 + 4y$;
4) $(x - 5y)^2 + (x + 12y)^2 - x(x - 12y)$.

1304. Melyik egytagú algebrai kifejezést kell hozzáadni a $4a^2 - 6ab + 9b^2$ háromtagú algebrai kifejezéshez, hogy az összeget fel lehessen írni kéttagú algebrai kifejezés négyzeteként? Határozzatok meg még három ilyen egytagú kifejezést!

1305. Bizonyítsátok be, hogy az egyenletnek nem lesznek gyökei:

1) $x^2 - 8x + 18 = 0$; 2) $x^2 + x + 1 = 0$.

1306. Bontsátok tényezőkre:

1) $\frac{1}{64}a^3 - b^6$;
2) $a^3b^6c^9 + 8$;
3) $x^{21}y^{24} - m^{12}n^{15}$;
4) $a^6b^6 + 1$.

1307. A $27a^3 + 4 - (9a^2 - 3a + 1)(3a + 1)$ kifejezés értéke mennyivel lesz kisebb, mint a 10?

1308. Oldjátok meg az egyenleket:

1) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 24x$;
2) $(3 - 2x)(9 + 6x + 4x^2) - 2x(5 - 2x)(5 + 2x) = 7$.

1309. A $37^3 + 23^3$ kifejezés osztható-e 60-nal?

1310. A $654^3 - 554^3$ kifejezés osztható-e 200-zal?

1311. Bontsátok tényezőkre:

1) $(a - b)(a + b) - c(c - 2b)$;
2) $(b - c)(b + c) - a(a + 2c)$.

1312. A következő négy kifejezés közül, csak hármat lehet tényezőkre bontani. Határozzátok meg ezeket a kifejezéseket és bontsátok őket tényezőkre:

1) $9mx - 6nx + 6my - 4ny$;
2) $36x^2 - 24x + 4 - y^2$;
3) $x^2 - 4x + y^2 + 2y + 5$;
4) $4a + 3 + a^2 + 2b - b^2$.

1313. Adjátok meg négy kifejezés szorzataként:

1) $a^5 - a^4 - 16a + 16$;
2) $a^{2n}b^{2n} - b^{2n} - a^{2n} + 1$, ahol n – természetes szám!

1314. Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $1{,}87^2 - 1{,}13^2 + 6 \cdot 1{,}13$;
2) $1{,}628^3 - 1{,}2 \cdot 1{,}628 \cdot 1{,}228 - 1{,}228^3$;
3) $0{,}79^3 + 3 \cdot 0{,}79 \cdot 0{,}21 + 0{,}21^3$.

1315. Bizonyítsátok be, hogy a $17^{10} - 3 \cdot 7^{24} + 3 \cdot 7^{25} + 17^9$ kifejezés osztható: 1) 18-cal; 2) 36-tal!

1316. Bizonyítsátok be, hogy a természetes szám köbe és az eredeti szám különbsége osztható 6-tal!

1317. Bizonyítsátok be, hogy három egymást követő természetes szám szorzata és közülük a középső összege egyenlő lesz a középső szám köbével!

1318. Legyen $x + y = a$, $xy = b$. Bizonyítsátok be, hogy:

1) $x^2 + y^2 = a^2 - 2b$;
2) $x^3 + y^3 = a^3 - 3ab$;
3) $x^4 + y^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$.

1319.* Bizonyítsátok be, hogy az $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ kifejezés értéke bármilyen n természetes szám esetén, valamely természetes szám négyzete lesz!

1320.* Bizonyítsátok be, hogy az $n(n+2)(n+4)(n+6)+16$ kifejezés értéke bármilyen n természetes szám esetén, valamely természetes szám négyzete lesz!

1321.* Bizonyítsátok be, hogy az olyan természetes szám négyzetének, amely nem többszöröse a 3-nak, és az 1 különbsége többszöröse lesz a 3-nak!

1322.* Bizonyítsátok be, bármilyen természetes n esetében, amely nem többszöröse az 5-nek, az $n^4 - 1$ osztható 5-tel!

1323.* Ki lehet-e jelenteni, hogy az $n^3 + 2n$ kifejezés értéke osztható 3-mal, az n bármilyen természetes értékére!

1324.* Bizonyítsátok be, hogy bármilyen természetes n esetében, a $n^7 - n$ osztható 42-vel!

1325. Adottak a következő függvények: és $g(x)=\dfrac{x-2}{x}$. Hasonlítsátok össze:

1) $f(2)$ és $g(-1)$; 2) $f(0)$ és $g(2)$; 3) $f(1)$ és $g(1)$.

1326. A függvény a következő táblázattal van megadva:

x	5	3	1	–1	–3
y	3	1	–1	–3	–5

Adjátok meg a leírással és képlettel ezt a függvényt!

1327. Az argumentum minden pozitív értékére az f függvény értéke –1, minden negatív értékre pedig 1, és az $f(0) = 0$. Szerkesszétek meg az f függvényt!

1328. Határozzátok meg az $y = 6x - 5$ függvény olyan pontjainak koordinátáit, melyek:

1) abszcisszája és ordinátája egyenlő;
2) koordinátáinak összege 30!

1329. Az a mely értékénél az $M(3; -2)$ pont illeszkedik a következő függvény grafikonjához:

1) $y = ax - 8$; 2) $y = \frac{1}{3}x - a$?

1330. Lineáris lesz-e a következő függvény:

1) $f(x) = (x - 1)(x + 1) - x(x - 3)$;
2) $f(x) = (2x - 3)^2 - (x + 4)(x - 2)$;
3) $f(x) = (x + 3)^2 - x(x + 6)$?

Igenlő válasz esetén szerkesszétek meg a grafikonját!

1331. Az $y = (5 - a)x + a$ és az $y = ax + 2$ függvények metszik egymást a –3 abszcisszájú pontban. Határozzátok meg ennek a pontnak az ordinátáját!

1332. Szerkesszétek meg az $y = 2x + 3$ függvény grafikonját! A grafikon segítségével határozzátok meg az argumentum értékeit, amelynél a függvény értéke:

1) 5-tel egyenlő;
2) nagyobb, mint 5;
3) kisebb, mint 5;
4) nagyobb, mint –3, de kisebb, mint 7!

1333. Az $y = 12x - 6$ függvény grafikus ábrázolása nélkül, határozzátok meg:

1) a grafikon és a koordinátatengelyek metszéspontjainak koordinátáit;
2) az adott függvény és az $y = 6x + 24$ függvény grafikonjainak, metszéspontjának koordinátáit!

1334. Szerkesszétek meg a következő függvény grafikonját:

1) $y = |x| - 3$; 2) $y = |x - 3|$.

1335. Az a mely érétkénél az (a; $-a$) számpár lesz megoldása az egyenletnek:

1) $6x + 5y = 7$;
2) $8x - 2y = 4$;
3) $x^2 - 3y = 0$;
4) $x + |y| = -2$?

1336. Szerkesszétek meg az $y + 1{,}5x = c$ függvény grafikonját, ha az $A(-2; 1)$ pont illeszkedik rá!

1337. Állítsatok össze egy lineáris kétváltozós egyenletrendszert, melynek megoldása a következő számpár: 1) (1; 1); 2) (–3; 5)!

1338. Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases} 3x + 7y = 1, \\ 6y - 5x = 16; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 5y = 19, \\ 2x + 3y = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3(2a - 1) + 6(7 - b) = 51, \\ 2(a + 6) - 7(1 + 6b) = 49; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{3x - 2y}{4} - \dfrac{4x + 5}{3} = -5, \\ \dfrac{6x - 5y}{2} + \dfrac{2x + y}{5} = 9. \end{cases}$

1339.* Az a mely értékénél veszi fel az $x + y$ kifejezés a legkisebb értékét, ha:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2a^2 - 12a + 8, \\ 3x - 2y = 3a^2 + 8a + 12? \end{cases}$$

1340.* Az a mely értékénél veszi fel az $x - y$ kifejezés a legkisebb értékét, ha:

$$\begin{cases} x - 5y = a^2 + 10a + 1, \\ 4x + y = 4a^2 - 2a + 4? \end{cases}$$

1341. A 7.-dik osztályos tanulók kirándulást szerveznek. Ha mindegyikük 12 hr 50 kopijkát ad be a kirándulásra, akkor 100 hrivnya fog hiányozni, ha viszont mindenki 16 hrivnyát ad be, akkor 12 hrivnyával több lesz. Hány tanuló van ebben az osztályban?

1342. A 100 m hosszú körvonalon két tárgy mozog. Ha egyirányban haladnak, akkor 20 másodpercenként találkoznak. Amikor ellentétes irányba mozognak, 4 másodpercenként találkoznak. Milyen sebességgel mozognak ezek a tárgyak?

1343. Összeolvasztottak két ötvözetet. Az egyik tömege 105 g, és 40% rezet tartalmazott. A másik ötvözet tömege 75 g. Határozzátok meg a réz százalékos arányát a második ötvözetben, ha az keletkezett ötvözet 50% rezet tartalmaz!

1344. Hány gramm 4%-os és hány 10%-os sóoldatot kell venni, hogy ezekből 180 g 6%-os oldatot kapjunk?

1345. Az első kannában 3% zsírtartalmú tej volt, a másodikban pedig 18% zsírtartalmú tejszín. Hány liter tejet és hány liter tejszínt kell összekeverni, hogy 10 liter 6%-os zsírtartalmú tejet kapjunk?

1346. Az egyik tábláról hektáronként 40 mázsa, a másodikról 35 mázsa árpát takarítottak be. Összesen 2600 mázsát. A következő évben az első mező termése 10%-kal, a másodiké 20%-kal nőtt. Ennek köszönhetően a két tábláról 400 mázsával több árpát takarítottak be, mint az előző évben. Határozzátok meg az egyes táblák területét!

1347. Az egyik tábláról hektáronként 45, a másodikról 40 mázsa búzát takarítottak be. Összesen 1900 mázsát. A következő évben az aszály miatt az első tábla termése 20%-kal, a másodiké 15%-kal csökkent. Ennek köszönhetően a két tábláról 330 mázsával kevesebb búzát takarítottak be, mint az előző évben. Határozzátok meg az egyes táblák területét!

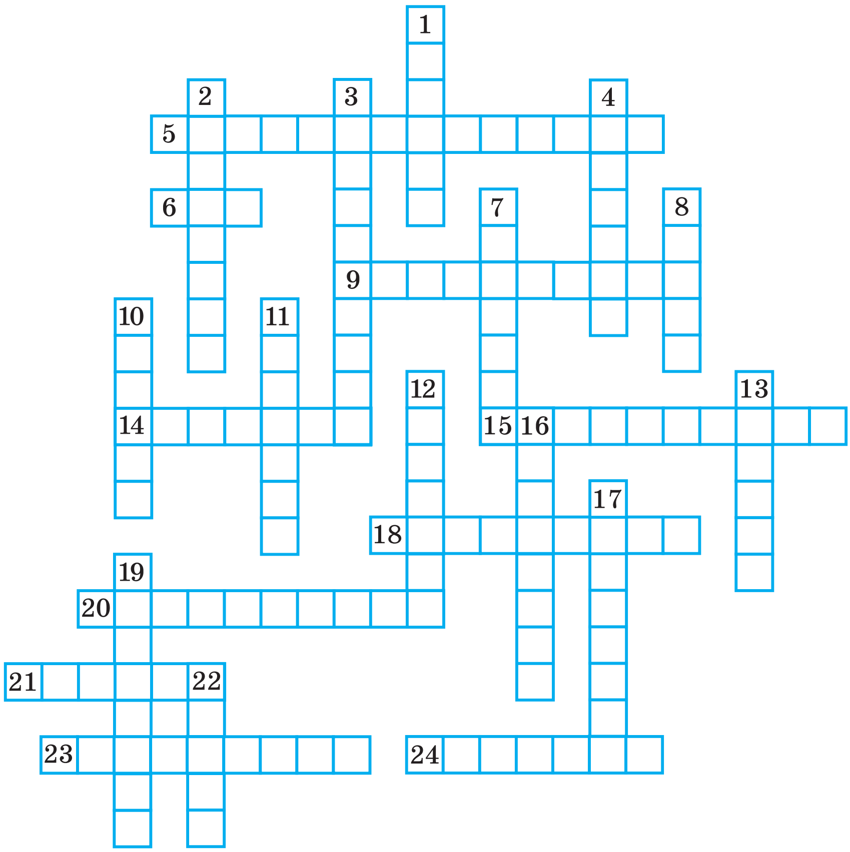
1348. A cukorkák felét 500 g-os tasakokba csomagolták, a másik felét pedig ennél kisebb, 300 g-os tasakokba. Összesen 32 tasakot használtak fel erre. Mekkora az összes cukorka tömege?

1349. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 11. Ha ehhez a számhoz hozzáadunk 63-at, akkor ugyanazokkal a számjegyekkel fordított sorrendben felírt számot kapunk. Határozzátok meg az adott számot!

1350. Valamelyik kétjegyű szám bal és jobb oldalára hozzáírták az 1 számjegyet. Ennek eredményeként a megadott számnál 21-szer nagyobb számot kaptunk. Határozzátok meg a megadott kétjegyű számot!

1351. Két szám összege 28, négyzeteinek különbsége 112. Határozzátok meg ezeket a számokat!

1352. Fejtsétek meg a keresztrejtvényt!



По горизонталі: **5.** Функція пряма ... . **6.** Третій степінь числа. **9.** Усі значення, яких набуває аргумент функції, утворюють область ... . **14.** Правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної. **15.** Рівність, правильна при будь-яких значеннях змінних. **18.** Вираз, який є сумою кількох одночленів. **20.** Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді. **21.** Французький математик, на честь якого названо сучасну систему координат. **23.** Речення, яке розкриває сутність нового терміна. **24.** Мухаммед ібн Муса аль-... .

По вертикалі: **1.** Розв'язок рівняння. **2.** Незалежна змінна. **3.** Розкладання многочлена на множники методом ... . **4.** Добуток рівних множників. **7.** Другий степінь числа. **8.** Графік лінійної функції. **10.** Геометрична фігура, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу функції, а ординати — відповідним значенням функції. **11.** Одна з координат точки на площині. **12.** Вісь ... . **13.** У виразі 7^4 число 7 — ... степеня. **16.** Вираз, який є добутком чисел, змінних та їхніх степенів. **17.** Термін, яким позначають процес, що дозволяє за скінченну кількість кроків отримати розв'язок задачі. **19.** У виразі a^n змінна n — ... степеня. **22.** Геометрична фігура, яка є графіком рівняння $x^2 + (y - 1)^2 = 0$.

BARÁTKOZUNK A SZÁMÍTÓGÉPPEL

Olyan informatikai elemeket tartalmazó feladatokat ajánlunk a figyelmetekbe, amelyeket a témák elsajátítása közben számítógéppel is meg tudtok oldani. Egyes feladatok a könyvben található gyakorlatok folytatásai (azokat a tankönyvben «» ikonnal jelöltük).

Az informatikaórákon megismerkedtetek a programozás alapjaival. A programozásban a fő mozzanat – összeállítani a feladatok megoldásának algoritmusát, vagyis a műveletek sorrendjét, aminek a segítségével a bemenő adatokból kimenő adatok lesznek, vagyis megszületik a Megoldás. Több feladatot fogalmaztunk meg az algoritmusok összeállítására. Ezeket nem kötelező mindenkinek megoldani, elsősorban azoknak szól, akik érdeklődnek az informatika iránt. Ha elsajátítottok egy programozási nyelvet, akkor nemcsak algoritmust tudtok majd összeállítani, hanem a megoldás meghatározására szolgáló programot is meg tudjátok írni. Ha érdeklődtök a programozás iránt, igyekezzetek megoldani a felkínált feladatokat, noha vannak közöttük eléggé nehezek is, amelyeket csillaggal jelöltünk. Ezeket elvégezhetitek a szünidőben is.

1.p. Bevezetés az algebrába

Hogyan használják a változókat a programozás során? Miért lehetséges a változók használatával nemcsak egyetlen feladat, hanem hasonló feladatok teljes sorának a megoldása?

Tudjátok meg, melyik programozási nyelvet fogtok tanulni az informatika órákon! Hogyan használják a változókat ezen a nyelven? Hogyan készítsünk számkifejezéseket?

Ha egy kifejezés változóval való osztást tartalmaz, mindig van jelentése? Hogyan kell ezt figyelembe venni a programok írásakor?

2.p. Egyváltozós lineáris egyenlet

Írjatok olyan algoritmust, amelyben az a és b értéke a bemeneti adat, a kimeneti pedig az ax = b lineáris egyenlet megoldása!

Milyen lehetőségeket kell szem előtt tartani, hogy az algoritmus helyes választ eredményezzen tetszőleges *a* és *b* esetén?

3.p. Feladatok megoldása egyenletek segítségével

Az itt szereplő feladatok némelyike hasonló. Ez azt jelenti, hogy a matematikai modelljük azonos.

Keressetek ilyen feladatokat! Állítsátok fel a matematikai modelljüket, és írjátok le a megoldás algoritmusát! Milyen mennyiségek lesznek a bemeneti és milyenek a kimeneti adatok?

4.p. Azonos kifejezések. Azonosság

Bebizonyítható-e számítógéppel az azonosság, végig próbálva a változó összes lehetséges értékét, és kiszámítva külön a bal és jobb oldali kifejezés értékét?

5.p. Természetes kitevőjű hatvány

Írjatok olyan algoritmust, melyben a bemeneti adat a hatvány *a* alapja és *n* kitevője, a kimeneti pedig az *a* alap n kitevőjű hatványa! A kitevő milyen értékére kell különös figyelmet fordítani?

6.p. A természetes kitevőjű hatvány tulajdonságai

Írjatok a természetes kitevőjű hatvány valamely tulajdonságát bemutató programot.

7.p. Egytagú algebrai kifejezések

Az általatok tanult programozási nyelvben hogyan írják le az egytagú kifejezéseket? Számokon és változókon kívül mire van még szükség? Mi az alapvető különbség az egytagú algebrai kifejezések felírásában a matematikában és a programozásban?

Gondoljatok ki valamilyen egytagú kifejezést! Írjatok programot az értékének kiszámítására! Melyek lesznek a bemeneti, és melyek a kimeneti adatok?

8.p. Polinomok

Az általatok tanult programozási nyelvben hogyan írják fel a polinomokat?

Gondoljatok ki valamilyen polinomot. Írjatok programot az értékének kiszámítására!

A polinom az egy kifejezés. A matematikában milyen sorrendben végezzük a műveleteket a polinom értékének meghatározásakor? És az általatok kiválasztott programozási nyelvben?

9.p. Polinomok összeadása és kivonása

Az általatok választott programozási nyelvben hogyan használják a zárójeleket? Hogyan hatnak az értékek meghatározásának sorrendjére?

377. Ebben a feladatban a számot $\overline{abc}$ alakban adtuk meg. Írjatok olyan programot, ahol a bemeneti adatok az a, b és c változók értékei lesznek, a kimenetiek pedig az $\overline{abc}$ értéke. Tudtok-e írni olyan programot, amelyben az adott kifejezésben lévő számjegyek száma változó?

10.p. Egytagú kifejezés szorzása polinommal

Az általatok választott programozási nyelvben hogyan történik az egytagú kifejezés polinommal való szorzása?

11.p. Polinomok szorzása

Az általatok választott programozási nyelvben hogyan történik a polinomok szorzása?

468. Fogalmazzátok meg a feladatot általános alakban! Melyek a bemeneti, és melyek a kimeneti adatok? Állítsátok fel a feladat matematikai modelljét! Írjátok le a megoldás algoritmusát általános alakban!

12.p.Polinomok tényezőkre bontása

Közös szorzótényező kiemelése

508. Egyszerűsítsétek le a feladatban lévő kifejezést. Válasszatok a változóknak értékeket! Zsebszámológéppel számítsátok ki a kezdeti, majd a leegyszerűsített kifejezés értékét is! Mennyiben könnyítette meg a számítást az egyszerűsített kifejezés használata?

515. Készítsétek el a megoldás algoritmusát az összes kétjegyű szám leellenőrzésével! Mennyi ideig tartott volna számítógép vagy számológép nélkül megoldani a feladatot?

520. Készítsétek el a megoldás algoritmusát az összes kétjegyű szám leellenőrzésével!

13.p. Polinomok tényezőkre bontása. Csoportosítási módszer

546. Fogalmazzátok meg a feladatot általános alakban! Melyek a bemeneti, és melyek a kimeneti adatok? Állítsátok fel a feladat matematikai modelljét! Írjátok le a megoldás algoritmusát az általános alakra!

549. Az általatok tanult programozási nyelv segítségével írjátok le a feladatban található kifejezéseket!

14.p. Két kifejezés különbségének és összegének szorzata

573. Írjatok programot a feladatban található kifejezés értékének a kiszámítására! Bebizonyítható-e a program segítségével a feladat állítása?

15.p. Két kifejezés négyzetének különbsége

591. Meg tudjátok-e fogalmazni a feladat megoldásakor használt algoritmust?

602. Állítsatok fel algoritmust a feladat megoldására!

603. Állítsatok fel algoritmust a feladat megoldására! Hogyan adjátok meg a π számot?

16.p. Két kifejezés összegének és különbségének négyzete

654., **655**. Összeállítható-e az 654. és 655. feladatok megoldásához közös matematikai modell? Írjátok le a feladatok megoldásának közös algoritmusát!

A Pascal háromszöge című történet

Írjatok programot a Pascal-háromszög létrehozására a háromszögben lévő sorok számával! Ügyeljetek arra, hogy az eredmények elhelyezkedésére az egyenlő szárú háromszög formájában történjen!

17.p. Polinom átalakítása két kifejezés összegének vagy különbségének négyzetévé

694.° Meg tudjátok-e fogalmazni a feladat megoldásakor használt algoritmust?

734. Keressetek információt az interneten arról, hogy (átlagosan) hány kilogramm papírhulladék helyettesít egy fát a papírgyártás során. Válasszatok ki bármilyen fafajtát, és állapítsátok meg, hogy egy ilyen fa évente mennyi oxigént termel. A 734-es feladat feltétele szerint határozzátok meg, hogy ebből a fafajból hány fát mentettek meg ennek az iskolának a tanulói, és mennyi oxigént termelnek ezek a fák egy év alatt!

742. Az általatok tanult programozási nyelv segítségével írjátok le a feladatban lévő kifejezéseket!

18.p. Két kifejezés köbének összege és különbsége

749.° Írjátok le azt az algoritmust, amelynek segítségével az összeg, illetve a különbség köbe képletének a felhasználásával tényezőkre bontható két egytag összege vagy különbsége. Milyen bemeneti adatokra van szükség, hogy az algoritmus bármilyen egytagú kifejezés esetén működjön?

20.p. A mennyiségek közötti összefüggések. Függvények

Írjatok programot a 2. példa megoldására! Milyen bemeneti adatokra van szükség ahhoz, hogy a programotok minél rugalmasabb legyen (több lehetséges változat megoldására alkalmas)?

Ebben a pontban sokféle olyan feladat található, amelyek mennyiségek közötti függvényszerű kapcsolatot írnak le. Válasszatok ki néhányat, és állítsatok össze algoritmusokat, melynek a bemeneti adatai a független változó értékei, a kimeneti adatai pedig a függvény értéke!

Hogyan ábrázolható a számítógép képernyőjén a koordinátasík? Találjátok meg a grafikus szerkesztőben az ehhez szükséges eszközöket! Az általatok tanult programozási nyelvben milyen eszközökre van szükség, valamilyen ábra elhelyezéséhez a képernyő meghatározott részén?

841.° Írjátok le a V térfogat és a t idő közötti összefüggés kiszámítására szolgáló algoritmust! Figyeljetek arra is, hogy a víz a tartályból előbb-utóbb elfogy! Milyen választ kell adnia az algoritmusnak, ha az összes víz kifolyik a tartályból? Hogyan kell figyelembe venni a függvény értelmezési tartományát?

21.p. A függvény megadásának módjai

Hozzatok létre egy táblázatot egy szöveg- és/vagy táblázatszerkesztőben, amely meghatároz valamilyen függvényt.

Fedezzétek fel a szerkesztő eszközeit, amelyek lehetővé teszik, hogy egy függvényt megadó képlettel fel lehet tölteni egy táblázatot. Ezekkel az eszközökkel lehet végrehajtani az ebben a pontban található feladatokat.

Ismerjétek meg a szöveg- és/vagy táblázatszerkesztő eszközöket egy táblázatban megadott függvény ábrázolásához! Milyen tervezési elemek teszik lehetővé az ütemterv látványossá tételét?

22.p. A függvény grafikonja

Sajátítsátok el a szöveg- és/vagy táblázatszerkesztő eszközöket egy táblázatban megadott függvény ábrázolásához. Milyen tervezési elemek teszik lehetővé az ütemterv látványossá tételét?

Ismertek-e olyan számítógépes programot, amely lehetővé teszi egy tetszőleges függvény ábrázolását?

* Írhattok saját programot, amely egy tetszőleges függvény grafikonját ábrázolja a számítógép képernyőjén! Milyen programozási eszközöket kell ehhez elsajátítani? Mit kell tudni erről a függvényről, hogy a grafikon megfelelően ábrázolja és szépen elhelyezkedjen a képernyőn?

23.p. Lineáris függvény. A lineáris függvény grafikonja és tulajdonságai

Írjatok olyan algoritmust, amellyel a k és b bemeneti adatok alapján megállapítható, hogy az $y = kx + b$ függvény grafikonjául szolgáló egyenes: függőleges vagy nem függőleges; áthalad az origón vagy nem.

Szövegszerkesztő és/vagy táblázatkezelő segítségével állítsatok össze tetszőleges lineáris függvényt megadó táblázatot! A szerkesztőprogram eszközeivel ábrázoljátok a grafikont!

24.p. Kétváltozós egyenletek

Tételezzük fel, hogy rendelkeztek olyan segédprogrammal, amelynek a bemeneti adata számpár, a kimeneti adata pedig válasz arra a kérdésre, hogy az adott számpár megoldása-e valamilyen kétváltozós egyenletnek. A segédprogram felhasználásával, hogyan állítható össze a grafikon ábrázolását biztosító program? Mit kell még tudni ahhoz, hogy a kapott grafikon minél több információt tartalmazzon?

* Írjatok egy ilyen programot.

25.p. A kétváltozós lineáris egyenlet és grafikonja

Állítsatok össze olyan algoritmust, amely az a, b és c bemeneti adatok alapján megállapítja, milyen alakzat lesz az $ax + by + c = 0$ függvény grafikonja!

* Írjatok olyan programot, amely az a, b és c bemeneti adatok alapján ábrázolja a képernyőn az $ax + by + c = 0$ függvény grafikonját!

1109. Automatizáljátok a számításokat egy táblázatszerkesztővel. A termékek árával és a kedvezmények elérhetőségével kapcsolatos információkat tegyétek változóvá (bemeneti adat input).

26.p. Kétváltozós egyenletrendszerek. A kétváltozós egyenletrendszerek megoldásának grafikus módszere

Ismerjétek meg a grafikus szerkesztő programban azokat az eszközöket, amelyek segítségével adott koordináták alapján feltüntethetitek a pontot a képernyőn! Tanuljatok meg egyenest rajzolni két adott ponton keresztül! Válasszatok ki egy egyenletrendszert, és mutassátok be a megoldását grafikus módszer segítségével.

27.p. Lineáris egyenletrendszerek megoldása behelyettesítő módszerrel

* Ebben a pontban leírt algoritmus alapján állítsatok össze programot a két lineáris kétváltozós egyenletetrendszer megoldására behelyettesítő módszerrel!. Hogyan kell felkészíteni a programot arra az esetre, amikor a rendszernek nincs megoldása? Ha végtelen számú megoldása van?

28.p. Lineáris egyenletrendszerek megoldása egyenlő együtthatók módszerével

* Ebben a pontban leírt algoritmus alapján állítsatok össze programot a két lineáris kétváltozós egyenletetrendszer megoldá-

sára egyenlő együtthatók módszerével! Hogyan kell felkészíteni a programot arra az esetre, amikor a rendszernek nincs megoldása? Ha végtelen számú megoldása van?

29.p. Feladatok megoldása lineáris egyenletrendszerek segítségével

* Feltételezzük, hogy ismert az *A* és *B* pontok koordinátája, és rájuk egy egyenes illeszkedik. Adott az egyeneshez tartozó C pont abszcisszája. Állítsátok össze az ordináta meghatározására szolgáló algoritmust! Az algoritmus minden esetben működik? Milyen lehetőséget kell külön megvizsgálni, és milyen ellenőrzést kell ehhez elvégezni? Milyen kimeneti adatokat ad meg az algoritmus?

Információk és táblázatok

1087. Automatizálja a számításokat egy táblázatszerkesztővel. A termékek árával és a kedvezmények elérhetőségével kapcsolatos információkat tegyétek változóvá (input – bemeneti adattá)!

PROJEKTMUNKA

Ez a rész elsősorban azoknak szól, akik szeretnék megtanulni az önálló tudásszerzést, kreatív gondolkodást, álláspontjuk formálását, kifejezését és védelmét, hipotézisek felállítását, valamint a legracionálisabb és legszokatlanabb megoldások megtalálását.

Az első lépés, amely segíthet e célok elérésében, a projektmunkában való részvétel.

A projekt – a kiválasztott téma önálló tanulmányozása, melyet egyénileg és csoportosan is el lehet végezni.

Néhány tanácsot adunk a projekttel kapcsolatos munka megszervezéséhez és a kutatási eredmények tervezéséhez.

1. A téma kiválasztásakor figyelembe kell venni annak relevanciáját, a szakirodalomban és az internetes forrásokban található információforrások elérhetőségét. Ugyanakkor nagyon fontos az a vágy, hogy a választott témával kapcsolatos munkát kutatóként szeretnétek elvégezni.

2. A munka egy előzetes terv elkészítésével kezdődik, melyben körvonalazódik az elképzelés és a terv megvalósításának szakaszai. A főbb információforrások megismerése után a projekt vezetője segítségével elkészítjük a végleges tervet.

3. Fontos a kutatási célok világos megfogalmazása. Felírhatók például a következő módon: tanulmányozd, írd le, elemezd, bizonyítsd, hasonlítsd össze stb.

4. A munka a kutatás eredményeinek összegzésével, következtetések levonásával, a téma további tanulmányozására vonatkozó kilátások megrajzolásával zárul.

5. A munka hozzávetőleges terjedelme 10-15 oldal. Ezenkívül szemléltető anyag is biztosítható.

6. A munka bemutatható referátum, beszámoló vagy számítógépes prezentáció formájában is.

Az alábbiakban a projektmunkához választható témák ajánlott témái találhatók.

1. Számtan és algebra az ókori világban

2. Játékok és stratégiák

3. Matematikai csalafintaságok
4. Matek trükkök
5. Alikvot törtek
6. Számrendszerek
7. Maradékosztályok
8. Az oszthatóság ismertetőjelei
9. A prímszámok titkai
10. Mit vizsgál ma az algebra? Az algebra új ágai
11. A 20. századi ukrán tudósok eredményei az algebra legújabb ágaiban
12. A számítástechnika matematikai alapjai
13. Mi a numerikus matematika
14. A matematika szerepe a repülés és az űrhajózás fejlődésében
15. Ukrán tudósok – a hazai kibernetika megalapítói

FELADATOK ÉS GYAKORLATOK MEGOLDÁSA

4. 1) $17\frac{4}{27}$; 2) $1\frac{1}{4}$; 3) –0,3; 4) $-1\frac{1}{3}$; 5) 1. **5.** 1) $11\frac{3}{5}$; 2) $1\frac{1}{4}$; 3) 4,4; 4) $-\frac{7}{10}$. **23.** 110 pud. **41.** 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$; 3) nincs gyöke; 4) bármilyen szám gyöke az egyenletnek. **42.** 1) 5; 2) 0,8; 3) bármilyen szám gyöke az egyenletnek; 4) nincs gyöke. **43.** 1) 0,6; 2) $\frac{3}{14}$; 3) –10; 4) –0,9. **44.** 1) 44; 2) $\frac{1}{3}$; 3) –5,2. **45.** 1) $-\frac{9}{25}$; 2) bármilyen szám gyöke az egyenletnek. **46.** 1) $-\frac{4}{11}$; 2) nincs gyöke. **47.** 1) 0,4; –8; 2) 0; 25; 3) $\frac{2}{3}$; –12; 4) –0,6; –1; –0,3. **48.** 1) 6; –4,5; 2) –0,8; 3. **49.** 1) 10; 2) –3. **50.** 1) 1; 2) –1,4. **51.** 1) 12; 2) $4\frac{2}{3}$; 3) 2. **52.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2; 3) 4,8. **53.** 1) –10; 2) 3; 3) 1; 4) 0,5. **54.** 1) –12; 2) –0,2. **55.** 7) $-\frac{2}{3}$; –2. **56.** 4) –20; 100; 5) 2,3; –0,9; 6) 0; 4; –4. **57.** 2) 55. **58.** 2) $\frac{1}{3}$. **61.** 2) –53; –11; –5; –3; 3; 45. **62.** 2) 7; 11; 31. **63.** 1) 14; 2) $-\frac{31}{45}$. **64.** 1) –17; 2) 3,5. **65.** 2) 3; 3) 2. **66.** 2) 2; 3) –5. **67.** 1) $a \neq 5$; 2) $a \neq -7$. **68.** 1) Ha $b \neq -1$, то $x = \frac{9}{b+1}$; akkor $b = -1$, akkor nincs gyöke az egyenletnek; 2) $x = -\frac{4}{b^2+1}$. **69.** Ha $m \neq -8$, то $x = 1$; ha $m = -8$, akkor x tetszőleges szám. **72.** 1) 3; 2) –1,8; 3) –1; 2. **73.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) nincs gyöke. **74.** 1) a – páros szám; 2) a – páratlan szám; 3) az a a 4 többszöröse; 4) nincs ilyen érték. **75.** 1) b a 3 többszöröse; 2) 3-mal való osztáskor a maradék 1; 3) nincs ilyen érték. **76.** 1) ha $b > 0$; ha $b < 0$; **77.** 1) ha $d < 0$; 2) ha $d > 0$. **78.** 56 mérkőzés. **79.** 1) 18 ó; az első a feladat $\frac{2}{5}$-ét végzi el, a második a $\frac{3}{5}$-ét.

80. 240 oldal. **81.** 1) Páros; 2) páratlan; 3) páros. **82.** 1) Nem, $2a < a$ ha $a < 0$ i $2a = a$ nem $a = 0$; 2) нi, $2 \mid a \mid = \mid a \mid$ ha $a = 0$. **88**. 2061 m, 2032 m, 2020 m. **89.** 515 m, 400 m, 370 m. **92.** 20 munkás. **93.** 90 km. **94.** 20 kg, 14 kg. **95.** 264 hely, 270 hely. **96.** 12 km/h, 60 km/h. **97.** 168 hrn, 144 hrn. **98.** 72 hrn. **101**. 4 év. **102.** 7 év. **103.** 30 szótár, 10 szótár. **104.** 18 000 hrn, 12 000 hrn. **105.** 11 bankjegy, 8 bankjegy. **106.** 800 t. **107.** 360 hrn. **108.** 40 kg, 8 kg. **109.** 600 kg, 200 kg. **110.** 5 nap. **111.** 40 l, 80 l. **112.** 4,5 ó, 0,5 ó. **112.** 4,5 ó, 0,5 ó **113.** 24 perc. **114.** 50 km/h, 20 km/h. **115.** 30,5 km/h. **116.** 2 km/h. **117.** 71 személy. **118**. 109 narancs. **119.** 45 kg, 10 kg. **120**. 14 kg, 10 kg. **121.** 60 könyv. **122.** 160 l. **123.** 8 nap. **124**. 100 feladat. **125**.93. **126**. 24. **127**. 55 km/h, 65 km/h vagy 70 km/h, 80 km/h. **128.** 1) Igen; 2) nem**. 129.** 100 kg, 200 kg. **130.** 20 kg, 30 kg. **131.** 1) Nem. Útmutatás: Rajzoljatok két négyszöget, átlóival együtt. 2) Igen. Útmutatás: Tegyük fel, hogy lehetetlen eljutni *A* városból *B* városba. Mindegyik kapcsolódik négy másik városhoz. A két négyes között nincs közös város. Tehát nem kevesebb, mint tíz város van a régióban. **132**. 1) 4,04; 2) –35,16; 3) $1\frac{8}{9}$; 4) $-6\frac{1}{3}$. **136**. 3) *x*— bármilyen nem negatív szám; 4) *x* – bármilyen nem pozitív szám. **153.** 24 ó. **154.** 1) $b < 0$; 2) $\mid a \mid < \mid b \mid$. **155.** 25%-kal csökkent. **171**. 2) 4,8; 3) 0,0625. **172**. 3) 75. **198.** 2; 3; 4. **199**. 1; 2.**204.** 2) $x = 1$ és $y = –2$. **206.** 1) $x = 0$; 2) $x = 1$. **207.** 1) $x = 0$; 2) $x = –3$. **208.** 2) Útmutatás. Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés utolsó számjegye 0; 3) Útmutatás. A kifejezés értéke olyan szám, melynek az utolsó számjegye 3, a többi pedig 9. **209**. 1) Útmutatás. Bizonyítsátok be, hogy a számjegyek összege 9; **210**. Útmutatás. Bizonyítsátok be, hogy a kifejezés értékének utolsó számjegye 5**. 211.** 3.**213.** 20%. **214**. 60 kg, 20 kg. **215**. 1) 3,8; 2) Nincs gyöke. **216.** *a* – negatív szám, *b* – pozitív szám, $c = 0$. **242.** 2) 2^5; 3) 2^{2n}; 4) 2^{n+1}. **259.** 1) 36; 2) 125; –125; **262**. 5^{97}. **263.** 1) 6; 2) 1; 3) 4 vagy 6; 4) 1, vagy 3, vagy 7, vagy 9. **264.** 1) 1; 2) 1; 3) 1 vagy 9. **265**. 1) Útmutatás. A 17^8 hatvány utolsó számjegye 1; 2) Útmutatás.

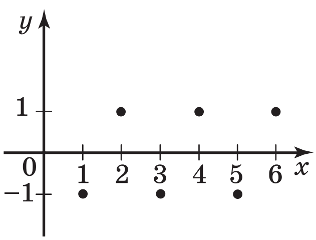
A 64^{64} hatvány utolsó számjegye 6; 3) Útmutatás. A $3^{4n} = 81^n$ hatvány utolsó számjegye 1. **266.** 1) Útmutatás. A 4^{40} hatvány utolsó számjegye 6; 2) Útmutatás. A 2004^{171} hatvány utolsó számjegye 4, a 171^{2004} hatványnak pedig 1. **267.** $48^{25} < 49^{25} = 7^{50} < 7^{51} = (73)^{17} = 343^{17} < 344^{17}$. **269.** 12 kacsa. **270.** 3,6 ó. **271**. 9,6 km. **272**. 1) 2; 2) bármilyen szám lesz a gyöke; 273. Útmutatás. Az adott számot felírjuk, mint $1000a + a = 1001a$ alakban. **304**. 3) –43,2. **305.** 3) $-\frac{32}{27}$. **306.** 2) 24,5; 3) 30. **307**. 2) 1350; 3) –486. **309**. 600 hr. **329.** 600 g. 400 g. **345**. 6) 5; 7) nincs gyöke. **346.** 4) 6; 5) bármilyen szám az egyenlet gyöke lesz. **349**. 1) –45; 2) 24. **350**. 1) 11; 2) $\frac{2}{3}$. **363**. 5. **373**. –9 ha $x = 0$. **374**. 4 ha $y = 0$. **378.** 1) $abc + bca + cab = 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b + = 111a + 111b + 111c$. **379.** Útmutatás. Vizsgáljátok meg a polinomok összegét. **381.** Novemberben. **383**. 3990 hr. **384**. 4 óra. **385**. 144 fa. 386 10km. **400.** 1) –2; 2) –5; 3) –0,5; 4) bármilyen szám; 5) nincs gyöke; 6) 4. **401**. 1) 2; 2) 0; 3) 6. **407.** 1) $7b^2$; 2) 0. **408.** 1) 45; 2) 0; 3) $\frac{7}{4}$; 4) 2,1. **409**. 1) –1; 2) $-\frac{83}{4}$. **410**. $-\frac{3}{7}$. **422.** 22 alkatrész, 34 alkatrész24 alkatrész.**411**. 8 cm. **412**. 64 cm**.** **419.** 1) 3; 2) $\frac{3}{20}$; 3) $\frac{19}{34}$; 4) $\frac{44}{9}$. **420.** 1) –4; 2) 10. **421.** 36 km, 42 km, 30 km. **422.** 22 alkatrész, 34 alkatrész, 24 alkatrész. **423**. Útmutatás. A feladat feltételéből következik, hogy $a = 3n + 1$, $b = 9m + 7$, ahol az m és n természetes számok. **427.** 800 km^2, 360 km^2, 204,8 km^2. **428.** 210 oldal. **429.** 90 km. **430**. 8 nap. **438**. 1) –7; 2) –2; 3) 1; 4) –1; 5) nincs gyöke. **439.** 1) 2; 2) $-\frac{2}{27}$; 3) 6; 4) az egyenletnek bármilyen szám megoldása lesz. **445**. 6; 7; 12; 14. **446**. 8; 12; 18. **447.** 7; 8; 9; 10. **448.** 16; 17; 18. **449.** 15 cm. **450.** 18 cm, 12 cm. **451.** 14 cm, 12 cm. **465**. 24339000 hr. **466**. 2300 hr. **467**. 15 alkatrész, 11 alkatrész. **468**. 9%. **469**. 1) 3; 2) 9. **471.** 60 év. **495**. 5) $-a(a + b)(2a + 3b)$; 6) $3m$

$(m-8)(3m-16)$; 7) $(a+5)(3a+2)$; 4) $(4y-1)(x-3)$. **496**. 4) $(x-6)(x+4)$; 5) $(x^2-2)(2y-7)$; 6) $(4a-3b)(3a+7b)$; 7) $(p-9)^3(2p+1)^3(3p-8)$. **497**. 1) -7; 2) 2; $2\frac{2}{3}$; 3) 5; -40; 4) 7; 14. **498**. 1) -6; 9; 2) 10; -6; 3) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; 4) $1\frac{1}{3}$; 1. **499.** 7) $49a^2(1+2b)^2$; 8) $81c^{12}(c-2)^4$. **500.** 5) $64x^2y^2(2x+5y)^2$; 6) $32x^{10}(11x^2-14y^3)^5$. **505**. 1) 0; $\frac{3}{8}$; 2) 0; 0,4; 3) 0; $-0{,}2$; 4) 0; 3,6. **506**. 1) 0; 6; 2) 0; $\frac{1}{3}$. **507.** 1) $2a+4$; 2) $6ab-4b$; 3) $8ab^2-14b^3$. **508.** 1) $2a^2b^2$; 2) $2ab+2b^2$. **511.** 2) 24; 3) 20. **512.** 2) -4; 3) -12. **513.** 1) 1; 2) 0,8; 3) 5. **514.** 1) $a=3$; 2) $a=-\frac{2}{3}$. **515.** 18. *Útmutatás*. Legyen adva az $\overline{ab}$. Ekkor $ab = 10a + b = (a+1)(b+1)$ Innen $9a = = ab + 1$, $a(9-b) = 1$. Ebből $a = 1$, $b = 8$. **518.** 20 kg. **519**. 28 üveg; **520**. Nem. **533.** 1) 15; 2) 72; 3) 25. **534.** 1) 250; 2) -1. **537.** 1) $(x+6)(x+2)$; 2) $(x-4)(x-1)$; 3) $(x-1)(x+8)$; 4) $(x+1)(x-5)$. **538.** 1) $(x+1)(x+3)$; 2) $(x-2)(x-8)$; 3) $(x+6)(x-3)$; 4) $(x-8)(x+4)$. **539.** *Útmutatás*. $n^3+3n^2+2n = n(n^2+3n+2) = n(n^2+n+2n+2) = n(n(n+1)+2(n+1)) = n(n+1)(n+2)$. **540.** $(a+b+c)^2$. *Útmutatás*. Adjátok meg polinom minden $2ab$, $2bc$ és $2ac$ kifejezéseket $ab+ab$, $bc+bc$, $ac+ac$ összegként és alkalmazzátok a csoportosítási módszert. **541.** *Útmutatás*. $3n+2-2n+2+3n-2n = 3n(32+1)-2n(22+1) = 3n\cdot 10-2n\cdot 5 = 3n\cdot 10-2n-1\cdot 2\cdot 5 = 3n\cdot 10-2n-1\cdot 10 = 10(3n-2n-1)$. **542.** 2. *Útmutatás*. $2x^4+3x^2y^2+y^4+y^2 = 2x^4+2x^2y^2+x2y^2+y^4+y^2 = 2x^2(x^2+y^2) + y^2(x^2+y^2)+y^2$. **543.** 4%-kal csökkent. **544.** 23%-kal csökkent. **545.** 4 bárány. **546.** 6 óra. **547**. 40 l, 10 l. **565.** 5) $16a^4-1$; 6) $c^{12}-625$. **566.** 4) a^8-1. **567**. 3) $y^{2n+4}-x^{8n}$; 4) $a^{2n+2}-b^{2n-2}$. **568**. 5) $4x^2+3x+93$; 6) b^2c^5. **569**. 2) $x^2-4x+19$; 3) b^{12}. **570.** 1) -1; 2) nincsenek gyökei; 3) az egyenletnek számtalan megoldása van; 4) $-25{,}6$. **571.** 1) -40; 2) -3. **576**. 1) 4; 2) 25; 3) 9; 4) -1; 5) -1. **577.** 1) 1; 2) 256. **579.** 1) *Útmutatás*. $253\cdot 259 = (256-3)(256+3)$. **581.** 14

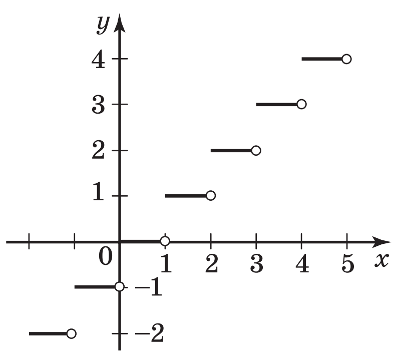
km/h, 42 km. **582.** 20 kg, 80 kg. **583.** 4 óra. **584.** 7^5 = 16 807 marok, 1,34 t. **585.** 1) $-1\frac{4}{25}$; 2) $6\frac{1}{6}$. **600.** 1) –150; 2) 12,8. 601. –40. **605.** 1) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$; 2) $(a^2-2)(a^2+2)(a^4+4)(a^8+16)$. **606.** 1) 4; $-\frac{2}{3}$; 2) –1; –7; 3) –10; $-2\frac{2}{3}$; 4) $-1\frac{2}{7}$; $-\frac{1}{23}$. **607.** 1) 2/11; 10/11; 2) –16; − 3/8. **611.** 1) $(2n+2)^2-(2n)^2=(2n+2-2n)(2n+2+2n)=2(4n+2)$. **613.** 43 és 34. **615.** 1) $b=2$; 2) $b=-2$; 3) $b\neq 2$ és $b\neq -2$. **618**. 8 km/h. **619.** 45 kg. **620**. $a=-3$. **621.** 1) $-\frac{5}{8}$; 2) az egyenlet gyöke bármilyen szám lehet. **622**. $a>0$; 2) $a\neq 0$; 3) a – bármilyen szám. **651.** 5. **652**. 1) 9; 2) –0,6; 3) –5. **653**. 1) $-\frac{1}{11}$; 2) 7. **654.** 7 cm. **655.** 26 cm. **656.** 12; 13; 14. **657.** 19; 20; 21; 22. **668.** 1. **671**. 7. **672**. 3. **675.** $a=1$. **676**. $a=-\frac{1}{6}$. **677.** 0 vagy 1. **680.** Legyen n – a harmadik az adott számok közül, akkor az adott számok megfelelően az $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ lesznek, ahol $n>2$. Bizonyítsátok be, hogy ezen számok négyzeteinek az összege $5(n^2+2)$ lesz. Ahhoz, hogy az eredményt valamilyen természetes szám négyzete legyen az n^2+2 kifejezésnek az 5 többszörösének kell lennie. Mivel az n^2 utolsó számjegye a 0, 1, 4, 5, 6 9 lehet csak, ezért az n^2+2 0-ra vagy 5-re kell végződnie. **681.** 5000 t. **683**. 500 kg. **684.** 190 óra. **687.** 2) Nincs ilyen értéke; 3) $x=-1$. **702.** 1) $(4a-b)^2$ 2). $(6x+5y)^2$. **703.** 1) $(2m+2n)^2$; 2) $(7x+4y)^2$. **704.** 1) 0,0016; 2) 10 000. **705.** 1) 10 000; 2) 9. **708.** 2) $-\frac{7}{9}$.. **709.** 2) $\frac{3}{5}$. **713.** 1) *Útmutatás*. $x^2-14x+52=x^2-14x+49+3=(x-7)^2+3$. **714.** 1) 1 ha $x=3$; 2) 16, ha $x=-\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{4}$ ha $x=-\frac{1}{2}$. **716**. 1) –8, ha $x=-8$; 2) –1 ha $x=\frac{1}{11}$; 3) –7 ha $x=-\frac{7}{6}$. **718.** 1)

100 ha $x = -8$; 2) 11 $x = \frac{3}{4}$. **719.** 1) 4 ha $x = 14$; 2) –50 ha $x = -\frac{5}{3}$. **721.** $(a - 3b)(a - 3b - 4) + 4 = = (a - 3b)^2 - 4(a - 3b) + 4 = (a - 3b + 2)^2$. **722.** 6) *Útmutatás*. $2a^2 + 2b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 + 2ab + b^2)$. **723.** 1) $(a^2 + 1 - a)(a^2 + 1 + a)$; 2) $(x - y)(x + y + 4)$; 3) $(ab - c - 3)(ab + c + 5)$; 4) $(2a + b - 2)(4a - b - 2)$. **724.** 1) $(a^2 + 4)^2 + (3a)^2$; 2) $(x - 5)^2 + (y + 7)^2$; 3) $(x - 3y)^2 + (x - 3)^2$; 4) $(x - 2)^2 - (y + 1)^2$. **725.** 1) $x = -4$, $y = 5$; 2) $x = -6$, $y = 1$. **726.** 1) $x = -1$, $y = 0{,}5$; 2) nem léteznek ilyen értékek. **727.** 45. **728.** 8. **729.** –10. **730.** 24 = 12 + 12. *Útmutatás*. Legyen az egyik összeadandó x, akkor a másik $24 - x$, a szorzatuk $x(24 - x) = 24x - x^2 = 12^2 - 12^2 + 2 \cdot 12x - x^2 = 144 - (12 - x)^2$. **731.** 5 cm, 5 cm. **732.** *Útmutatás*. $b^2 + \frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4} + ab - ab = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 - ab$. **733**. 0. *Útmutatás*. Az egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk 2-vel, aztán a következőalakban írjuk fel: $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 = 0$. **736.** 6 csónak. **737**. 100 km. **738**. 60 ha, 40 ha. **740**. 13. **741.** 420 nap. *Útmutatás*. Ahhoz, hogy megtudja, hány nap múlva gyülekeznek újra együtt a horgászok a tavon, meg kell találnia a legkisebb közös többszörösét az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számoknak. **762.** 1) 9; 2) $25x - 64$; 3) $-6a^2 + 9a - 27$; 4) $a^{24} - 1$. **763.** 1) –124; 2) $-y^2 + 3y - 36$; 3) $a^6 - b^6$. **765**. 1) 0,5; 2) –1; 3) 8. **766**. 1) 6; 2) –5. **772**. *Útmutatás.* Legyenek az adott számok $2n - 1$, $2n + 1$. **773**. *Útmutatás.* Ezeket a számokat meg lehet adni, mint $3n$ + *1 és* $3n$ + 2, ahol *n bármilyen természetes szám.* **774.** 1. *Útmutatás*. $x^6 + 3x^2y^2 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) + 3x^2y^2$. **775.** 8. **778**. Divatruha. **779**. 18 kg, 6 kg. **780**. 2. **783**. 4) $\frac{1}{3}$; 6) 0; $\frac{1}{6}$. **805.** 6) –2; –3; 3; 7) 5; 8) –1; 1. **806.** 5) –1; 1; 6) –5; 5; 4. **816**. $(x - y + 4)(x + y - 2)$; 2) $(2a - 3b - 3)(2a + 3b + 1)$. 817. $(5x - y^2 + 4)(5x + y^2 - 10)$; 2) $4(3m - 2n + 3)(3m + 2n - 2)$; **818.** 4) $(2a - 5)(2a - 1)$; 5) $(3x - 7y)(3x - y)$; 6) $3(2m - n) \times (6m - 7n)$. **819.** 4) $(x + 3)(x - 2)$; 5) $(c + 3d)(c + 5d)$; 6) $(3x - 8y)(3x - 2y)$. **820.** 1) –40; 2) 74; 3) 84; 4) 632. **821**. 1) 54; 2) 48; 3) 1746. **823.** 1) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$; 2) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$; 3) $(2x^2$

$- 4x + 1)$ $(2x^2 + 4x + 1)$. *Útmutatás*. $4x^4 - 12x^2 + 1 = (4x^4 + 4x^2 + 1) - 16x^2$; 4) $(x^2 + x + 1) \cdot (x^3 + x^2 + 1)$ *Útmutatás.* $x^5 + x + 1 = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$; 5) $(x^2 - 2x + 2)$ $(x^2 + 2x + 2)$; 6) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 2)$. **824.** 1) $(x^2 - x + 3)$ $(x^2 + x + 3)$; 2) $(x^2 - 2x - 2) \times (x^2 + 2x - 2)$. **826.** 210 hr. **827**. 14, 18, 22. **828**. 13 km. **829**. 2) –2; 2; –18; 18; 3) –18; 2; 4) 4. **873.** $a = 3$. **874.** 1) 60 %; 2) 119 hely. **907.** 0,8 %-kal növekedett. **909.** 12, 22, 32. **911.** Adjátok össze az egyenlőségek bal és jobb oldalát. **917.** a) Értelmezési tartománya az összes x melyeknél: $-1 \le x < 4$, értékkészlete minden y, melyeknél $1 \le y < 4$; b) értelmezési tartománya az összes x melyeknél: $-2 \le x \le 3$, értékkészlete minden y, melyeknél $1 \le y \le 4$; c) értelmezési tartománya az összes x melyeknél: $-2 \le x < 3$, értékkészlete minden y, melyeknél $1 < y \le 4$; d) értelmezési tartománya az összes x melyeknél: $-2 < x < 4$, értékkészlete: $y = 2$; e) értelmezési tartománya: $x = 1$ vagy $x = 3$, értékkészlete: $y = -2$ vagy $y = 1$. **918.** a) Értelmezési tartománya az összes x melyeknél : $-2 \le x < 2$, értékkészlete minden y, melyeknél $-1 < y \le 4$; b) értelmezési tartománya az összes x melyeknél: $-2 \le x \le 2$, értékkészlete minden y, melyeknél $1 \le y \le 4$; c) értelmezési tartománya az összes x melyeknél: $-2 \le x < 3$, értékkészlete minden y, melyeknél $1 \le y < 4$; d) értelmezési tartománya az összes x melyeknél: $-3 < x < 2$, értékkészlete minden y, melyeknél $y = 2$; e) értelmezési tartománya: $x = -3$ vagy $x = 4$, értékkészlete: $y = -1$ vagy $y = 3$. **940. 77**. ábra **941.** 78. ábra.

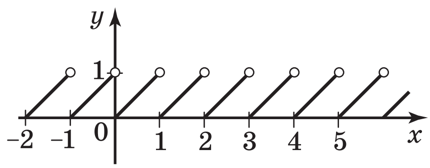


77. ábra



78. ábra

942. 15 óra. **947.** 15 méh. **979.** $A\left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.; **980.** 1) (–10; –27); 2) (–14; 8). **981.** (3; 5). **985.** 1. **986.** 3. **987.** $k = 0{,}5$, $b = 4$. **869.** $k = \frac{1}{3}$, $b = -1$. **993.** 1) n; 2) k; 3) m; 4) p. 995. k = –1. 996. b = 11. **1003.** 1) $y = x + 3$; 2) $y = -0{,}5x - 1$. **1004.** 1) $y = -\frac{2}{3}x$; 2) $y = 2x - 4$. **884.** 79. ábra.



79. ábra

1006. Az első – 360 000 hr, második – 600 000 hr, harmadik – 840 000 hr. 1007. 1) –39; 2) –12. **1008**. 1) $\frac{5}{8}$; 2) 1,4. **1009**. *Útmutatás***:** Legyen ezek közül a második szám n, akkor az előtte lévő szám $n - 1$ lesz, a harmadik pedig $n + 1$. Bontsátok fel az első és a harmadik összeadandót, a köbök összegének képletével! **1011.** $a^2 - b^2$. *Útmutatás*. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$. **1012.** A szám abszolút értékének meghatározásából következik, hogy $|x| \geq x$, ezért $|x| - x \geq 0$. Ezzel együtt $2x - x^2 - 2 = -x^2 + 2x - 1 - 1 = -(x - 1)^2 - 1 < 0$.

1024. 2. **1025.** 6. **1026.** 3) (–3; 0); (3; 0); (0; –3); (0; 3); 4) (5; 0); (–5; 0); (0; –5). **1041.** 1) (1; 1); 2) (1; 3); (6; 2); (11; 1). **1044.** 3 módon. **1045.** 9 algebra feladat és 2 mértan, vagy 6 feladat algebrából és 4 mértanból, vagy 3 algebra feladat és 6 mértanból. **1046.** 1) (0; 2); 2) (–1; 3); 3) (–0,5; –0,5); 4) nincs megoldása. **1047.** 1) (5; –5); 2) nincs megoldása. **1048.** (0; 0); (–1; 0); (1; 0); (0; –2). **1049.** (0; 4); (0; –4); (5; 0); (–5; 0). **1050.** 5%. **1051.** 1) 6; 2) –5. **1052.** 269,5 km. 1054. 1) 12; 2) $-\frac{16}{3}$. **1096.** $a = -4$, $b = 2$. **1099.**

1) d; 2) c; 3) b; 4) a. **1110.** –12. **1101.** –4. **1104.** 1) $y = 0{,}5x + 2$; 2) $y = 0{,}6x - 3$. **1105.** $x + y = 6$. **1108.** 1 pár (3; 2). **1109**. Jó étvágyat. **1111.** 24 óra. **1113**. 1) 5; 2) 3,5. **1114**. 2) $(x^2 - 3y - 4)(x^2 - 3y + 4)$; 4) $(c - b - 3)(c - b + 1)$. **1126.** 1) $a = 3$, $b = -2{,}5$; 2) $a = 4$, $b = -6$. **1127.** $a = 2$, $b = 5$. **1132.** Ha $a \neq 7$. **1133.** 1) 16; 2) –5. **1134.** 1) Ha $a \neq 14$; 2) ha $a = -10$. **1137.** 1) (–2; 2); 2) (–2; 2); (1; 1); 3) nincs megoldása; 4) (1; –1); (3; 3). **1138.** 1) (1; 1); (–3; 3); 2) (2; 1); (–2; –1); 3) (2; 0); (–2; 0); (0; 2); (0; –2). **1140.** 3 kg. **1141.** 60 km/h. **1142**. 3; 5; 7; 9. *Útmutatás*. Jelöljétek a legkisebb számot $2k - 3$-mal, ahol k – 1-nél nagyobb bármilyen természetes szám. **1149.** 1) (6; 3); 2) (4; 2); 3) (1; 2); 4) (4; –3); 5) (–5; –7); 6) (1,2; –0,7). 1**150.** 1) (–5; 20); 2) (–1; 3); 3) (–2; –1); 4) (–3; 4). **1151.** 1) (0; –6); 2) (8; 6); 3) (–5; –4); 4) 4; –3). **1152**. (1; –1); 2) (–2; 0,5); 3) (14; 2). **1154**. 1) 14; 2) 0,25. **1156.** 7 oroszlán. **1158**. $2^{4n} - 1 = (2^4)^n - 1 = 16^n - 1$. A 16^n utolsó számjegye 6. Ezért az adott kifejezés utolsó számjegye 5. **1168**. 3) (8; 1); 4); 4) (1,2; 0); 5) (–1; –2); 6) (7; –1); 7) (4; –1); 8) (6; –2); 9) (2; –2); 10) (5; 6). **1169.** 3) (1; 2); 4) (3; –1); 5) (4; 2); 6) (6; 5); 7) (1,5; 0,5); 8) (1; –1). **1170.** 1) $\left(-\frac{1}{7}; 2\frac{3}{7}\right)$; 2) (–10; 5). **1171.** 1) (–5; –6); 2) (1; –6). **1172.** $a = 5{,}6$, $b = 0{,}8$. **1173.** $m = 9$, $n = -12$. **1174.** 1) $y = = -0{,}2x + 1{,}4$; 2) $y = -x + 1$. **1175.** 1) $y = -0{,}5x + 3{,}5$; 2) $y = 3x + 3$. **1176.** 1) (–3; –4); 2) (1; –0,5); 3) $\left(5\frac{3}{4}; -\frac{3}{8}\right)$; 4) (2; –2). **1177**. 1) (–0,6; –3,2); 2) (1; 3). **1178**. 1) (1; 1); 2) (–3; 3). **1179**. 1) (–20; –0,5); 2) (–2; 3). **1181.** 1) (3; –1,6); 2) nincs megoldása. **1184.** –0,8. **1185.** 2. **1186.** 1) (3; –3); 2) (1,5; 0,75); 3) $\left(4; -\frac{2}{3}\right)$; 4) (–5; 6); 5) (–2,4; –4). **1187.** 1) (10; 5); 2) (0,5; 1,5); 3) (–8; –28). **1188.** 1) (0,2; 1); 2) (1; –1). **1189.** 1) $\left(\frac{1}{20}; \frac{1}{2}\right)$; 2) (2; –2). **1192**. 1) 6; 2) –2,5. **1193**. 9 feladat. **1194.** 2 óra. **1196.** 96 fa. **1200.** 7 négyszemélyes csónak 3 hatszemélyes. **1202.** 9 kg, 7 kg. **1203.** 8 ha, 6 ha. **1204.** 9 alkatrész, 6 alkatrész.

1205. 4 q, 5 q. **1206.** 60 hr, 30 hr. **1207.** 15 hr, 10 hr. **1208.** 58 km/h, 70 km/h. **1209.** 60 km/h, 40 km/h. **1210.** 4 km/h, 16 km/h. **1211.** 84 km/h, 79 km/h. **1212.** 80 l, 60 l. **1213.** 28 utas, 36 utas. **1214.** 18 km/h, 2 km/h. **1215.** 25 km/h, 2,5 km/h. **1216.** 45 öltöny, 30 öltöny. **1217.** 90 hr, 210 hr. **1218.** 40 hr, 60 hr. **1219.** 70 hr, 50 hr. **1220.** 8000 hr, 6000 hr. **1221.** 9000 hr, 3000 hr. **1222.** 100 kg, 200 kg. **1223.** 20 kg, 30 kg. **1224** 87. **1225**. 6 cm, 8 cm. **1226**. 5 cm, 7 cm. **1227.** 5 zsák, 7 zsák. **1228.** 40 rupia, 170 rupia. **1229.** 42 év, 15 év. **1230.** 60 év, 12 év. **1231.** 3 km/h, 12 km/h. **1232.** 5 km/h, 4 km/h. **1233.** 48 km/h, 16 km/h. **1234**. 60 t. **1235**. 48 km/h, 60 km/h. **1236**. 48 km/h, 16 km/h. **1237**. 72. **1238** 39. **1239.** 24 l, 40 l. **1240.** 28 l, 42 l. **1241**. 1) Ilyen szám nem létezik; 2) Bármilyen kétjegyű szám, melyben amelyben a 10-sek helyiértéke 2-vel nagyobb, mint az egyesek helyiértéke, az 18 – cal nagyobb az ugyanolyan számjegyekből álló számnál, melynek a számjegyei fordított sorrendben van felírva. **1249.** 2) $(b^3 - 2b^2 + 3) \times (b^3 + 2b^2 - 3)$; 4) $(3x - 7)(3x + 5)$. **1250**. $a^2 = c + 2b$. **1251.** 7,5. **1253**. –2. **1270**. Nem létezik. *Útmutatás*: Határozzátok meg ezeknek a polinomoknak az összegét. **1272.** 1) $11\frac{6}{7}$; 2) $\frac{6}{11}$; 3) –0,2; 4) 5; 5) 3; 6) $\frac{7}{4}$. **1273**. 1) –0,4; 2) 4; 3) nincs megoldása; 4) az egyenlet gyöke bármilyen szám lehet. **1275**. 3. **1276.** –4. **1278**. 1) 20; 2) 5,93. **1279**. 1) 2,7; 2) 0,4; 3) 23; 4) 51,2. **1282**. –4. **1283**. $\frac{2}{3}$. **1285.** 1) 16. *Вказівка*. $1{,}66 \cdot 4{,}68 = 1{,}66 \cdot 2{,}34 \cdot 2$; 2) 0,16. **1286**. Ha $a = c$ vagy $b = d$. **1289**. 1) 0,5; 2) 0. **1292**. 1) 1; 2) 4. **1302**. 1) 2; 2) 0,5; 3) $-\frac{1}{13}$. **1308**. 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{5}$. **1314**. 1) 9; 2) 0,064; 3) 1. **1320**. *Útmutatás.* $n(n + 2)(n + 4)(n + 6) + 16 = (n^2 + 6n)(n^2 + 6n + 8) + 16 = (n^2 + 6n + 4 - 4)(n^2 + 6n + 4 + 4) + 16 = (n^2 + 6n + 4)^2 - 42 + 16 = (n^2 + 6n + 4)^2$. **1321.** *Útmutatás.* Legyen n az adott természetes szám. Meg kell vizsgálni a következő eseteket: $n = 3k + 1$ vagy $n = 3k +2$, ahol a k – nem negatív, egész szám. **1322.** *Útmutatás.* Vizsgáljatok megnégy lehetséges esetet: 1) $n = 5k + 1$; 2) $n = 5k + 2$; $n = 5k + 3$; $n = 5k + 4$, ahol a k – nem negatív, egész szám. **1323**. Lehet. *Útmutatás:* Meg kell vizsgálni a következő eseteket: $n = 3k + 1$ vagy $n = 3k + 2$, ahol a k – nem negatív, egész szám. **1331**. $-\frac{37}{7}$. **1338**. 1) (–2; 1); 2) (3; 2); 3) (1; –1); 4) (4; 2). **1339**. 2. **1340**. –1. **1341**. 32 tanuló. **1342**. 15 m/sec, 10 m /sec. **1343**. 64%. **1344**. 120 g, 60 g. **1345**. 8 l, 2 l. **1346**. 30 ha, 40 ha. **1347**. 20 ha, 25 ha. **1348**. 12 kg. **1349**. 29. **1350**. 91. *Útmutatás.* Ha az adott szám x-szel egyenlő, akkor a kapott szám $10x + 1000 + 1 = 10x + 1001$ vagy $21x$. **1351**. 16; 12.

ÖNELLENŐRZÉS TESZT FORMÁJÁBAN FELADATAINAK EREDMÉNYEI

A feladat-sorok sorszáma	A feladat sorszáma											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	C	A	B	C	C	A	B	C	B	C	B	D
2	D	C	D	D	C	C	B	C	B	A	D	A
3	D	D	A	B	B	C	A	B	C	A	A	C
4	C	B	C	C	C	B	B	D	C	B	A	D
5	C	D	D	B	B	B	A	C	A	C	D	B
6	A	D	C	B	C	B	A	A	C	C	B	A
7	C	D	A	B	C	D	A	B	C	A	B	B

TÁRGYMUTATÓ

Algebrai kifejezés 6
Argumentum 192
Azonosan egyenlő kifejezések 37
Azonosság 37
Behelyettesítési módszer 283
Csoportosítási módszer 110
Egész kifejezés 7
Egyenes arányosság függvénye 230
Egyenes arányosság grafikonja 231
Egyenlet gyöke 15, 248
Egyenlet megoldása 15
Egyenletek tulajdonságai 249
Egyenletrendszer megoldása 272
Egyenlő együtthatók módszere 288
Egynemű tagok összevonása 76
Egytagú algebrai kifejezés normálalakja 66
Egytagú algebrai kifejezés együtthatója 67
Egytagú algebrai kifejezés hatványa 68
Egytagú algebrai kifejezés normálalakja 66
Egytagú algebrai kifejezés 66
Egyváltozós egyenlet 14
Független változók 190
Függő változók 190
Függvény értéke 193
Függvény értékkészlete 193
Függvény értelmezési tartománya 192
Függvény grafikonja 214
Függvény 192
Háromtagú algebrai kifejezés 76
Hasonló tagok 76
Hatvány alapja 43
Hatvány alaptulajdonsága 56
Hatvány hatványra emelése 57
Hatvány kitevője 43
Hatvány szorzata 55
Hatvány tulajdonságai 55 – 57
Hatvány 43
Hatvanyra emelés 44
Két kifejezés különbségének és összegének szorzata 126
Két kifejezés különbségének négyzete 140
Két kifejezés különbségének nem teljes négyzete 163
Két kifejezés összegének négyzete 140
Két kifejezés összegének nem teljes négyzete 164
Kéttagú algebrai kifejezés 76
Kétváltozós egyenlet megoldása 248
Kétváltozós egyenlet 247
Kétváltozós egyenletek grafikonja 250

Kétváltozós lineáris egyenlet grafikonja 258
Kétváltozós lineáris egyenlet 257
Kifejezés értéke 5
Köbök különbsége 164
Köbök különbségének képlete 164
Köbök különbségének tényezőkre bontása 164
Köbök összegének képlete 163
Köbök összegének tényezőkre bontása 163
Közös tényező kiemelése 109
Különbség négyzetének képlete 140
Lineáris függvény grafikonja 229
Lineáris függvény 288
Meghatározás 15
Négyzetek különbsége 133
Négyzetek különbségének képlete 133
Négyzetek különbségének tényezőkre bontása 133
Összeg négyzetének képlete 140
Polinom hatványa 77
Polinom szorzása egytagú algebrai kifejezéssel 92
Polinom szorzása polinommal 101
Polinom tagja 76
Polinom 76
Polinomok kivonása 82
Polinomok különbsége 82
Polinomok összeadása 82
Rövidített szorzás képlete 126
Szám hatványa 44
Szám köbe 44
Szám négyzete 44
Számkifejezés 5
Szorzat hatványra emelése 57
Polinom tényezőkre bontása 108
Változók 6
Változót tartalmazó kifejezés értéke 6
Változót tartalmazó kifejezés 6

TARTALOM

A szerzőktől 3
Egyezményes jelek 4

1§ Algebrai kifejezések. Egyváltozós egyenletek 5
1. Bevezetés az algebrába 5
   - Rövid könyv a helyrerakásról és az összevonásról 13
2. Egyváltozós lineáris egyenletek 14
3. Feladatok megoldása lineáris egyváltozós egyenletek segítségével 23

1. Számú feladatsor. Önellenőrzés teszt formájában 35
4. Azonosan egyenlő kifejezések. Azonosságok 36
5. Természetes kitevőjű hatvány 43
6. Természetes kitevőjű hatvány tulajdonságai 55
7. Egytagú algebrai kifejezések 66
8. Polinomok 75
9. Polinomok összeadása és kivonása 82

2. Számú feladatsor. Önellenőrzés teszt formájában 91
10. Egytagú kifejezés és polinom szorzása 92
11. Polinom szorzása polinommal 101
12. Polinomok tényezőkre bontása. A közös tényező kiemelése a zárójel elé 108
13. Polinomok tényezőkre bontása. A csoportosítási módszer 119

3. Számú feladatsor. Önellenőrzés teszt formájában 124
14. Két kifejezés különbségének és összegének a szorzata 126
15. Két kifejezés négyzetének a különbsége 133
16. Két kifejezés összegének és különbségének a négyzete 140
   - Pascal-háromszög 151
17. Polinom átalakítása két kifejezés Összegének és különbségének négyzetévé 153

4. Számú feladatsor. Önellenőrzés teszt formájában 162
18. Két kifejezés köbének összege és különbsége 163
19. Polinomok tényezőkre bontásának különböző módszerei 171

5. Számú feladatsor. Önellenőrzés teszt formájában 180
   - A mindenki számára érthető nyelv 182

Az 1. Paragrafus összefoglalása 185

2. § Függvények **189**
20. A mennyiségek közötti összefüggések. Függvények 189
21. A függvény megadásának módjai 203
22. Függvény grafikonja 213
23. Lineáris függvény. A lineáris függvény grafikonja és tulajdonságai 227
6. Számú feladatsor. Önellenőrzés teszt formájában 243
Az 2. Paragrafus összefoglalása 245

3. § Étváltozós lineáris egyenletrendszerek **246**
24. Kétváltozós egyenlet 246
25. Kétváltozós lineáris egyenlet és a grafikonja 257
- Hogyan épült a hid az algebra és a mértan között? 268
- A matematika is a nők dolga 269

26. A kétváltozós lineáris egyenletrendszer grafikus megoldása 271
27. Lineáris egyenletrendszerek megoldása behelyettesítő módszerrel 282
28. Lineáris egyenletrendszerek megoldása egyenlő együtthatók módszerével 287
29. Feladatok megoldása lineáris egyenletrendszerek segítségével 297
7. Számú feladatsor. Önellenőrzés teszt formájában 310
Az 3. Paragrafus összefoglalása 312

A 7. Ostályos algebra ismétlő gyakorlatai 314
Barátkozzunk a számítógéppel 327
Projektmunka 335

Feladatok és gyakorlatok megoldása 337
Önellenőrzés teszt formájában feladatainak eredményei 347
Tárgymutató 348

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА

підручник для 7 класу з навчанням угорською мовою закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Переклад з української мови
Перекладач Дезидер Федорович Поллої
Угорською мовою

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам «Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

У підручнику з навчальною метою використано фотоматеріали, розміщені у вільному доступі в мережі «Інтернет».

Редактор *О. Литвин*
Обкладинка *Н. Мінєєва*
Комп'ютерна верстка *О. Парфенюк*
Художнє оформлення *С. Северин*
Коректорка *К. Кучінка*

[illegible] 60×90/16. Ум. друк. арк. 22,00. Обл.-вид. арк. 20,10.
Тираж 1 568 прим.
[illegible] 24-11-1108

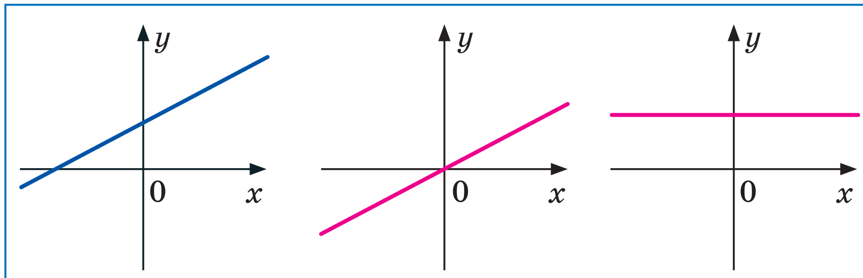
ТОВ «ВИДАВИЦТВО АТЛАНТ»,
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 7928 ВІД 08.09.2023.
Адреса редакції: 02095, м. Київ, вул. Княжий затон, 9а, офіс 369.
E-mail: *atlant_publishing@ukr.net*

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ», вул. Максиміліанівська, 17,
м. Харків, 61024
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 6847 від 19.07.2019 р.

Таблиця квадратів натуральних чисел від 10 до 99

Десятки \ Одиниці	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Графік лінійної функції $y = kx + b$

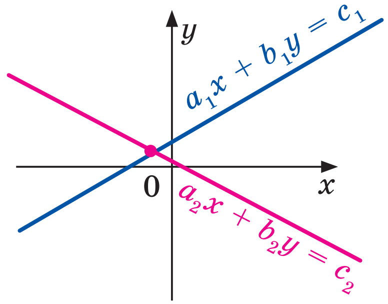


$k \neq 0,\ b \neq 0$ $\quad$ $k \neq 0,\ b = 0$ $\quad$ $k = 0,\ b \neq 0$

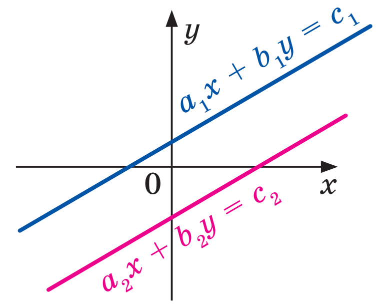
Кількість розв'язків системи двох лінійних рівнянь із двома змінними

Система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

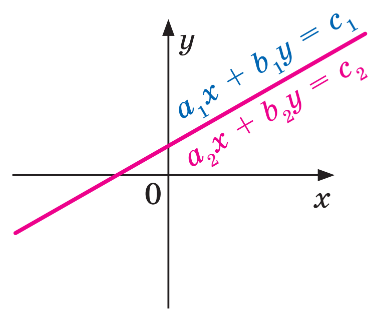
1) має один розв'язок

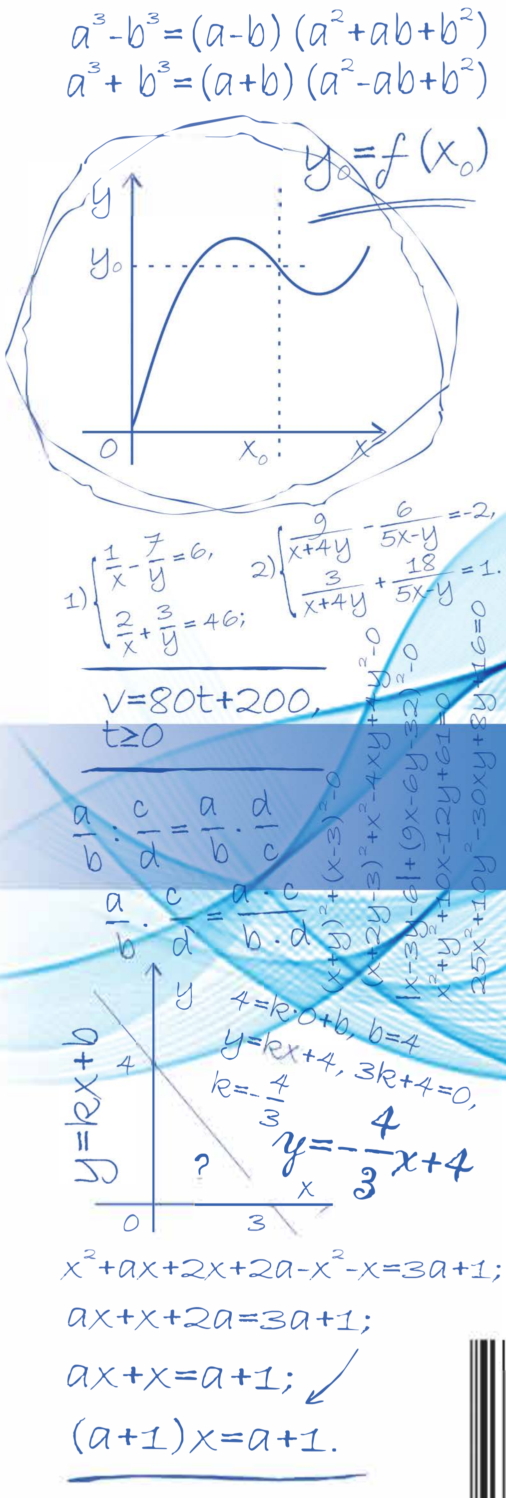


2) не має розв'язків



3) має безліч розв'язків





Mihajlo Jakir

Arkagyij Merzljak

ALGEBRA

7

9 789664 743775

видавництво
АТЛАНТ