Генеза

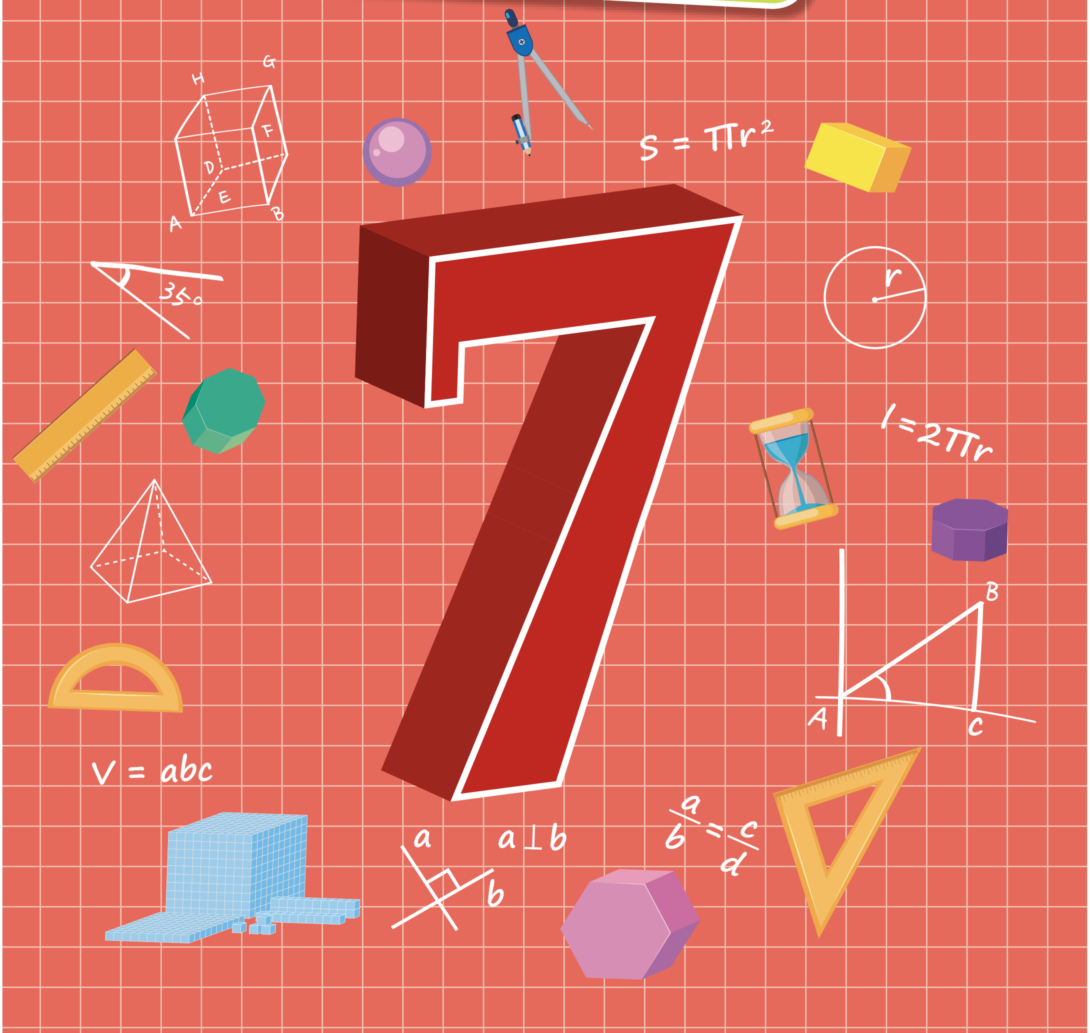
НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА

ОЛЕКСАНДР ІСТЕР

МАТЕМАТИКА

ІНТЕГРОВАНИЙ КУРС

ЧАСТИНА 1



ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

$$ax = b$$

якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$	якщо $a = 0$ і $b = 0$, то x – будь-яке число	якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то рівняння не має коренів

КВАДРАТИ І КУБИ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 1 ДО 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

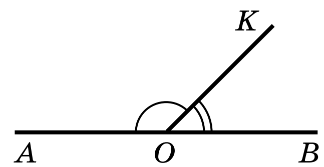
СТЕПЕНІ ЧИСЕЛ 2 ТА 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049

СУМІЖНІ КУТИ

$\angle AOK$ і $\angle KOB$ – суміжні

$\angle AOK + \angle KOB = 180°$



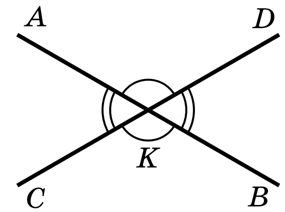
ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

$\angle AKC$ і $\angle DKB$ – вертикальні

$\angle AKD$ і $\angle CKB$ – вертикальні

$\angle AKC = \angle DKB$

$\angle AKD = \angle CKB$



ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

$a \parallel b$, якщо

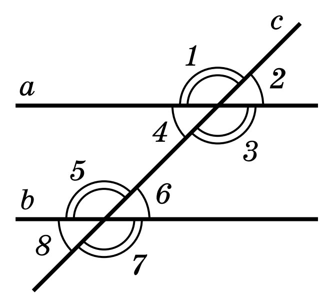
$\angle 1 = \angle 5$ ($\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$),

або

$\angle 3 = \angle 5$ ($\angle 4 = \angle 6$),

або

$\angle 3 + \angle 6 = 180°$ ($\angle 4 + \angle 5 = 180°$)



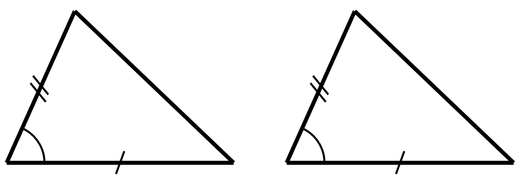
ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

$$a^m a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$

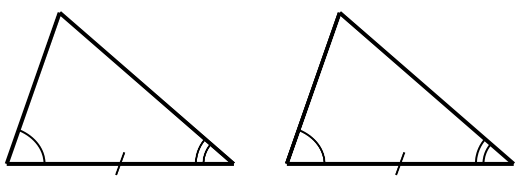
$$a^{m+n} = a^m a^n$$
$$a^{m-n} = a^m : a^n$$
$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$$
$$a^n b^n = (ab)^n$$

$$a^1 = a$$

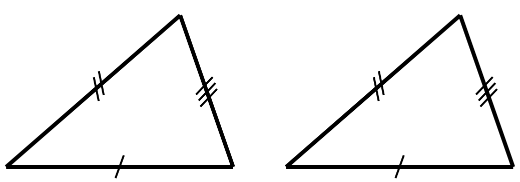
ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



1. За двома сторонами і кутом між ними



2. За стороною і прилеглими до неї кутами



3. За трьома сторонами

ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

Друковані букви	Рукописні букви	Назва букв	Друковані букви	Рукописні букви	Назва букв
Aa	*Aa*	а	Nn	*Nn*	ен
Bb	*Bb*	бе	Oo	*Oo*	о
Cc	*Cc*	це	Pp	*Pp*	пе
Dd	*Dd*	де	Qq	*Qq*	ку
Ee	*Ee*	е	Rr	*Rr*	ер
Ff	*Ff*	еф	Ss	*Ss*	ес
Gg	*Gg*	же	Tt	*Tt*	те
Hh	*Hh*	аш	Uu	*Uu*	у
Ii	*Ii*	і	Vv	*Vv*	ве
Jj	*Jj*	йот (жі)	Ww	*Ww*	дубль-ве
Kk	*Kk*	ка	Xx	*Xx*	ікс
Ll	*Ll*	ель	Yy	*Yy*	ігрек
Mm	*Mm*	ем	Zz	*Zz*	зет

ОЛЕКСАНДР ІСТЕР

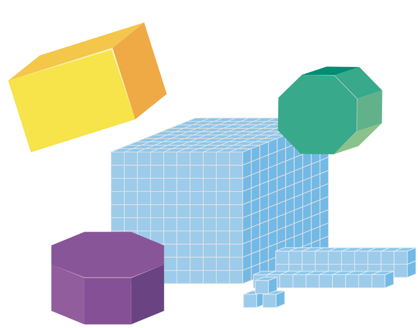
МАТЕМАТИКА

(інтегрований курс)

Підручник для 7 класу
закладів загальної середньої освіти
у 2-х частинах

Частина 1

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України



Київ
«Генеза»
2024

УДК 51(075.3)
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 05.02.2024 № 124)

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Відповідає модельній навчальній програмі
«Математика (інтегрований курс). 7–9 класи»
для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.)

Істер О.С.
І-89 Математика (інтегрований курс) : підруч. для 7-го кл. закл. заг. серед. освіти. У 2 ч. Ч. 1 / Олександр Істер. — Київ : Генеза, 2024. — 256 с. : іл.

ISBN 978-617-8353-39-1
ISBN 978-617-8353-41-4 (Ч.1).

УДК 51(075.3)

ISBN 978-617-8353-39-1
ISBN 978-617-8353-41-4 (Ч.1)

© Істер О.С., 2024
© Генеза, оригінал-макет, 2024

Шановні семикласниці та семикласники!

Продовжуємо вивчати курс математики, який міститиме дві складові частини – *алгебру* і *геометрію*. Допоможе вам у цьому підручник, який ви тримаєте в руках.

У підручнику використано такі умовні позначення:

– пригадай (раніше вивчене);

– зверни особливу увагу;

– запитання і завдання до теоретичного матеріалу;

1.13 – завдання для класної та 1.15 – домашньої роботи;

– «ключова» задача (задача, висновки якої використовують для розв’язування інших задач);

– рубрика «Україна – це ми»;

– рубрика «Цікаві задачі – поміркуй одначе»;

– рубрика «Життєва математика»;

– вправи для підготовки до вивчення нової теми;

– вправи для повторення;

– рубрика «Головне в темі».

Текст, надрукований **жирним** шрифтом, звертає вашу увагу на нове поняття або таке, яке треба пригадати.

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки 1 починаються вправи початкового рівня;

з позначки 2 починаються вправи середнього рівня;

з позначки 3 починаються вправи достатнього рівня;

з позначки 4 починаються вправи високого рівня;

з позначки * починаються вправи підвищеної складності.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Після кожної теми наведено вправи для її повторення, основний теоретичний матеріал (рубрика *«Головне в темі»*), а в кінці підручника – *«Завдання для перевірки знань за курс математики 7 класу»*. *«Задачі підвищеної складності»* допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики.

Автор намагався подати теоретичний матеріал простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість з них ви розглянете на уроках і під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

У рубриці *«Життєва математика»* зібрано задачі, які часто доводиться розв'язувати в повсякденному житті.

Цікаві факти з історії виникнення математичних понять і символів та розвитку математики як науки ви знайдете в рубриці *«А ще раніше...»*.

Бажаємо успіхів в опануванні математики!

Шановні вчительки та вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках, факультативних, індивідуальних, додаткових заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів/учениць, диференціації навчання тощо.

Додаткові вправи в *«Завданнях для перевірки знань»* призначено для учнів/учениць, які впоралися з основними завданнями раніше за інших. Чи правильно їх розв'язано, учитель/учителька може оцінити окремо.

Вправи для повторення тем можна запропонувати учням/ученицям, наприклад, під час узагальнювальних уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

У рубриці *«Життєва математика»* зібрано задачі, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, економічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, а в рубриці *«Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»* – задачі, що допоможуть актуалізувати відповідні знання.

«Задачі підвищеної складності», які розміщено в кінці підручника, допоможуть підготувати учнів/учениць до різноманіт-

них математичних змагань і підвищити їхню цікавість до математики.

«Завдання для перевірки знань за курс математики 7 класу», які також розміщено в кінці підручника, можна запропонувати учням/ученицям для підготовки до річної контрольної роботи.

Шановні дорослі!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати матеріал цих уроків за підручником удома. Спочатку дитина має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою, проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього потрібно розв'язати вправи, що посильні, з розглянутого параграфа.

Упродовж курсу математики 7 класу, який опрацьовує дитина, ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Якщо ваша дитина виявляє підвищену цікавість до математики та бажає поглибити свої знання, зверніть увагу на *«Задачі підвищеної складності»*, які розміщено в кінці підручника.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЗНАНЬ ЗА КУРС МАТЕМАТИКИ 5–6 КЛАСІВ

Натуральні числа та дії над ними. Подільність натуральних чисел

1 **1.** Обчисліть значення виразів і дізнайтеся кількість мешканців у деяких містах України на момент останнього перепису населення. Дослідіть, до яких областей належать ці міста:

1) 13 145 + 7435 (Красилів); 2) 203 912 + 825 137 (Одеса);
3) 78 117 − 13 256 (Прилуки); 4) 974 002 − 725 189 (Рівне);
5) 313 · 42 (Баштанка); 6) 833 · 281 (Кременчук);
7) 64 246 : 13 (Рудки); 8) 1 536 470 : 106 (Судак).

2. Обчисліть:
1) 137 125 + 321 117; 2) 429 113 − 253 087;
3) 429 · 17; 4) 91 575 : 45;
5) 79 335 : 215; 6) 137 · 273.

2 **3.** Обчисліть значення виразу зручним способом:
1) 297 + (495 + 703); 2) 329 + 1075 + 1925 + 671;
3) 250 · 49 · 4; 4) 125 · 37 · 8 · 2.

4. Обчисліть значення виразу зручним способом:
1) (724 + 913) + 276; 2) 2715 + 256 + 1285 + 744;
3) 500 · 73 · 20; 4) 25 · 13 · 400 · 7.

5. Запишіть усі дільники числа: 1) 16; 2) 38; 3) 60.

6. Запишіть усі дільники числа: 1) 25; 2) 36; 3) 78.

7. Розкладіть на прості множники число: 1) 48; 2) 80.

8. Розкладіть на прості множники число:
1) 60; 2) 96.

9. Знайдіть найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел:
1) 19 і 3; 2) 36 і 48;
3) 17 і 51; 4) 10, 15 і 25.

10. Знайдіть найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел:
1) 7 і 12; 2) 39 і 52;
3) 54 і 18; 4) 12, 16 і 20.

3 **11.** Обчисліть значення виразу та дізнайтеся рік заснування Київського національного університету імені Тараса Шевченка:

(166 788 : 452 − 125) · 409 − 97 962.

12. Знайдіть значення виразу та дізнайтеся рік заснування Національного університету «Львівська політехніка»:

$$95\,472 - (423 - 35\,133 : 147) \cdot 509.$$

13. Якою цифрою закінчується число:
1) 5347^2; 2) $2003^3 - 195^2$; 3) $146^3 + 127^2 - 39^3$?

14. Якою цифрою закінчується число:
1) 7293^2; 2) $4007^3 - 129^2$; 3) $125^3 + 138^3 - 45^2$?

15. Знайдіть найменше та найбільше п'ятицифрові числа, кратні числу 123.

16. Знайдіть найменше та найбільше чотирицифрові числа, кратні числу 39.

Десяткові дроби та дії над ними

17. (*Усно.*) Обчисліть:
1) $4 + 2{,}7$; 2) $1{,}8 + 3{,}2$; 3) $4{,}5 - 1{,}2$; 4) $7{,}2 - 4{,}5$;
5) $10 \cdot 5{,}2$; 6) $4{,}3 \cdot 0{,}01$; 7) $3{,}6 : 3$; 8) $2{,}8 : 0{,}1$.

18. Виконайте дію:
1) $4{,}92 + 5{,}713$; 2) $12{,}38 - 4{,}113$;
3) $3{,}5 \cdot 2{,}14$; 4) $2{,}6^2$;
5) $5{,}9 \cdot 4{,}03$; 6) $41{,}04 : 12$;
7) $8{,}55 : 2{,}5$; 8) $0{,}7^3$.

19. Виконайте дію:
1) $5{,}731 + 9{,}28$; 2) $17{,}52 - 9{,}293$;
3) $7{,}6 \cdot 4{,}15$; 4) $3{,}2^2$;
5) $2{,}05 \cdot 4{,}7$; 6) $31{,}2 : 15$;
7) $8{,}82 : 2{,}8$; 8) $0{,}6^3$.

20. Запишіть у порядку зростання числа: 2,9(П); 2,81(Л); 3,41(К); 2,8(С); 3,4(А); 2,89(І) та прочитайте прізвище відомого у світі українського оперного співака, Героя України. Дізнайтеся з інтернету більше про нього.

21. Запишіть у порядку спадання числа: 7,7(П); 7,6(Н); 7,8(І); 6,8(Ь); 7,73(Р); 7,65(І) та прочитайте назву міста-героя України. Дізнайтеся з інтернету, за що місту було присвоєно це звання.

22. Округліть числа:
1) 7,25; 3,739; 8,03; 9,05 до десятих;
2) 5,713; 9,8999; 4,115; 8,718 до сотих;
3) 7,389; 4,5; 9,93; 7,38 до одиниць;
4) 135,72; 431,431 до десятків.

23. Округліть числа:
1) 17,38; 49,55; 4,06; 7,02 до десятих;
2) 13,548; 29,341; 9,999; 4,444 до сотих;
3) 3,713; 14,52; 7,111 до одиниць.

3 **24.** Знайдіть значення виразу:
1) $2{,}9 \cdot (7{,}32 + 0{,}08 : 0{,}125) - 4{,}2 \cdot 0{,}25 + 7{,}35$;
2) $(7{,}85 + 4{,}2^2) : 5 - 0{,}9^3 : 3$.

25. Знайдіть значення виразу:
1) $45{,}2 \cdot 0{,}75 - (9{,}34 + 0{,}06 : 0{,}25) \cdot 2{,}8 - 4{,}05$;
2) $(8{,}93 - 2{,}6^2) : 4 + 0{,}6^3 : 2$.

4 **26.** Запишіть три десяткових дроби, кожний з яких:
1) більший за 4,8 і менший від 4,9;
2) менший від 0,43 і більший за 0,41.

27. Запишіть три десяткових дроби, кожний з яких:
1) менший від 9,6 і більший за 9,4;
2) більший за 4,83 і менший від 4,84.

Звичайні дроби та дії над ними. Відсотки

1 **28.** (*Усно.*) Обчисліть:

1) $\frac{4}{9} + \frac{2}{9}$; 2) $\frac{7}{8} - \frac{1}{8}$; 3) $\frac{4}{5} \cdot 10$; 4) $\left(\frac{2}{9}\right)^2$;

5) $4\frac{1}{7} + 2\frac{5}{7}$; 6) $5\frac{7}{9} - 4\frac{6}{9}$; 7) $\frac{3}{5} : 15$; 8) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$.

29. Обчисліть:

1) $\frac{4}{9} + \frac{11}{15}$; 2) $\frac{9}{16} - \frac{5}{12}$; 3) $2\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$; 4) $7\frac{4}{9} - \frac{1}{3}$;

5) $\frac{4}{9} \cdot \frac{7}{16}$; 6) $\frac{12}{13} \cdot \frac{39}{40}$; 7) $\frac{7}{10} : \frac{2}{5}$; 8) $\frac{5}{8} : \frac{15}{16}$.

30. Виконайте дію:

1) $\frac{4}{9} + \frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{12} - \frac{3}{8}$; 3) $3\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$; 4) $4\frac{9}{10} - \frac{1}{2}$;

5) $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{15}$; 6) $\frac{8}{17} \cdot \frac{51}{80}$; 7) $\frac{2}{9} : \frac{7}{18}$; 8) $\frac{7}{9} : \frac{14}{45}$.

2 **31.** Обчисліть значення виразу:

1) $\left(15\frac{3}{10} - 13\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{9}$; 2) $\frac{7}{36} : \left(3\frac{11}{12} - 3\frac{5}{9}\right)$.

32. Обчисліть значення виразу:

1) $5 : \left(\frac{2}{3} + 1\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{18}\right)$; 2) $\left(2\frac{13}{50} - 2\frac{1}{20}\right) \cdot 3\frac{4}{7}$.

33. Дзвінок для велосипеда коштує 150 грн. Скільки коштуватиме велосипедний дзвінок після:
1) зниження ціни на: 10 %; 16 %;
2) підвищення ціни на: 8 %; 20 %?

34. Чохол для телефона коштує 200 грн. Скільки коштуватиме чохол після:
1) підвищення ціни на: 15 %; 9 %;
2) зниження ціни на: 4 %; 30 %?

35. Розв’яжіть рівняння:

1) $x + 0,4 = \frac{7}{15}$; 2) $x - \frac{2}{7} = \frac{11}{14}$; 3) $\frac{17}{25} - x = 0,6$;

4) $\frac{2}{7}x = \frac{4}{21}$; 5) $x : \frac{2}{5} = 1,6$; 6) $2,4 : x = \frac{8}{13}$.

36. Розв’яжіть рівняння:

1) $\frac{19}{50} - x = \frac{3}{20}$; 2) $0,8 + x = \frac{13}{15}$; 3) $x - 0,05 = \frac{7}{30}$;

4) $3,2 : x = \frac{4}{5}$; 5) $1,5x = \frac{15}{16}$; 6) $x : \frac{4}{5} = 2,8$.

37. Автомобіль за перший день подорожі з Києва до Бухареста подолав 364 км, що становить 40 % від відстані між цими містами. Скільки кілометрів йому залишилося подолати?

38. Придбавши книжку за 90 грн, Оля витратила 30 % грошей, які мала. Скільки грошей залишилося у дівчинки?

39. Обчисліть двома способами (перетворивши десятковий дріб у мішане число або перетворивши мішане число в десятковий дріб):

1) $13,75 + 4\frac{1}{20}$; 2) $5\frac{8}{25} - 3,9$;

3) $1,125 \cdot 1\frac{3}{5}$; 4) $8\frac{2}{5} : 1,4$.

40. Обчисліть двома способами (перетворивши десятковий дріб у мішане число або перетворивши мішане число в десятковий дріб):

1) $3\frac{1}{4} + 6,05$; 2) $3,48 - 1\frac{9}{20}$; 3) $1,15 \cdot 1\frac{2}{5}$; 4) $5,2 : 1\frac{3}{10}$.

41. Після зниження ціни на 10 % навушники стали коштувати 225 грн. Якою була початкова вартість навушників?

42. Під час сушіння яблука втрачають 82 % своєї маси. Скільки потрібно свіжих яблук, щоб отримати 9 кг сушених?

43. Ціну товару спочатку збільшили на 20 %, а потім нову ціну зменшили на 15 %. Як і на скільки відсотків змінилася ціна порівняно з початковою?

44. Ціну товару спочатку зменшили на 20 %, а потім нову ціну збільшили на 15 %. Як і на скільки відсотків змінилася ціна товару порівняно з початковою?

Відношення і пропорції

45. (*Усно*.) Чому рівність $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ є пропорцією? Назвіть її крайні та середні члени.

46. (*Усно*.) Скільком кілометрам на місцевості відповідає 1 см на карті з масштабом:

1) 1 : 100 000; 2) 1 : 700 000; 3) 1 : 5 000 000?

47. Знайдіть невідомий член пропорції:

1) $x : 6 = 5 : 3$; 2) $\frac{5}{x} = \frac{20}{7}$; 3) $x : 12 = \frac{13}{24}$.

48. Знайдіть невідомий член пропорції:

1) $6 : x = 2 : 7$; 2) $\frac{x}{3} = \frac{7}{6}$; 3) $\frac{7}{10} = x : 5$.

49. Скільки відсотків становить:

1) 2 від 5; 2) 18 від 12; 3) 3,5 від 17,5; 4) $\frac{1}{7}$ від $\frac{1}{14}$?

50. Скільки відсотків становить:

1) 4 від 8; 2) 20 від 16; 3) 2,6 від 10,4; 4) $\frac{1}{10}$ від $\frac{1}{2}$?

51. Поділіть число:
1) 28 на дві частини у відношенні 5 : 2;
2) 36 на три частини у відношенні 1 : 3 : 5.

52. Поділіть число:
1) 48 на дві частини у відношенні 1 : 3;
2) 50 на три частини у відношенні 2 : 5 : 3.

3 **53.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-7}{4}=\frac{5}{8}$; 2) $\frac{3x+1}{7}=\frac{3-4x}{14}$.

54. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x+3}{5}=\frac{7}{10}$; 2) $\frac{2x-1}{4}=\frac{5-4x}{12}$.

55. 1) Майстриня за перший тиждень відремонтувала 24 девайси, а за другий — 30 девайсів. На скільки відсотків зросла продуктивність праці майстрині?
2) Майстер за перший тиждень відремонтував 30 девайсів, а за другий — 24 девайси. На скільки відсотків знизилася продуктивність праці майстра?

56. Товар коштував 80 грн. На скільки відсотків збільшилася або зменшилася ціна товару, якщо в результаті переоцінки він став коштувати: 1) 72 грн; 2) 84 грн?

4 **57.** До 180 г 10-відсоткового розчину солі долили 70 г води. Яким став відсотковий уміст солі в новому розчині?

58. До сплаву масою 250 г, що містить 40 % олова, додали 150 г олова. Яким став відсотковий уміст олова в новому сплаві?

Раціональні числа та дії над ними

1 **59.** Обчисліть:

1) $-8+(-9)$; 2) $-13{,}6+(-7{,}9)$; 3) $29+(-11)$;
4) $-37+4{,}5$; 5) $-8-5$; 6) $-9-(-4)$;
7) $7-(-3)$; 8) $4-9{,}1$; 9) $2{,}9\cdot(-10)$;
10) $-4\cdot(-4{,}5)$; 11) $-4{,}2:(-4)$; 12) $8:(-0{,}01)$.

60. Виконайте дії:

1) $-6+(-10)$; 2) $-4{,}9+(-5{,}7)$; 3) $-38+12$;
4) $7{,}2+(-5)$; 5) $-4-(-3)$; 6) $-9-11$;
7) $0-(-9)$; 8) $5-10{,}2$; 9) $-5{,}1\cdot(-0{,}1)$;
10) $-6\cdot2{,}5$; 11) $-7{,}2:10$; 12) $-7{,}5:(-5)$.

2 **61.** Виконайте дії:

1) $-\frac{6}{7}+\left(-\frac{4}{21}\right)$; 2) $-4\frac{7}{12}+5\frac{1}{6}$; 3) $\frac{12}{41}-1$;

4) $-3\frac{1}{8}-\left(-4\frac{3}{4}\right)$; 5) $-\frac{8}{9}\cdot\frac{27}{48}$; 6) $-1\frac{2}{7}\cdot\left(-2\frac{1}{3}\right)$;

7) $\frac{8}{15}:\left(-1\frac{1}{5}\right)$; 8) $-\frac{30}{41}:(-5)$; 9) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$.

62. Обчисліть:

1) $-\frac{5}{9}+\left(-\frac{7}{12}\right)$; 2) $5\frac{1}{4}+\left(-7\frac{1}{8}\right)$; 3) $-\frac{8}{17}-1$;

4) $2\frac{1}{3}-\left(-5\frac{2}{9}\right)$; 5) $-\frac{7}{9}\cdot\left(-\frac{18}{49}\right)$; 6) $4\frac{1}{2}\cdot\left(-1\frac{7}{9}\right)$;

7) $-3\frac{3}{5}:\left(-\frac{9}{10}\right)$; 8) $-8:\frac{16}{17}$; 9) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$.

63. Запишіть усі цілі числа, що містяться на координатній прямій між числами:

1) $-2{,}7$ і $4{,}1$; 2) $-102{,}5$ і $-97{,}9$; 3) $-5\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{11}$.

64. Запишіть усі цілі числа, що містяться на координатній прямій між числами:

1) $-1\frac{2}{3}$ і $4{,}7$; 2) $-85{,}3$ і $-78{,}4$; 3) $-\frac{4}{11}$ і $3\frac{2}{5}$.

65. Позначте на координатній площині точки:
$A(-2;\ 4)$, $M(0;\ -3)$, $K(5;\ 1)$, $D(4;\ 0)$, $L(-6;\ -2)$, $N(2;\ -3)$.

66. Позначте на координатній площині точки:
$B(2;\ -5)$, $C(-2;\ 0)$, $T(4;\ 2)$, $E(0;\ 3)$, $Q(-4;\ -1)$, $P(-5;\ 2)$.

67. Зведіть подібні доданки:
1) $4x + 2y - 5x - 2y$; 2) $-5{,}9 + 11{,}2a + 7{,}8 - 18a$;
3) $-9a + 7b - 8 + 3a - b$; 4) $2{,}7x + 3x + 12y - 9{,}8y - 5{,}7x$.

68. Зведіть подібні доданки:
1) $7p - 2m + 6p + 2m$; 2) $-14b + 3{,}9 - 7{,}2 + 18{,}5b$;
3) $5x - 8y + 5 - 4x + y$; 4) $2{,}5a - 2{,}9b + 3a + 3{,}7b - 5{,}5a$.

69. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:
1) $-5(2a - 3) + 3(4a - 5)$; 2) $2(a - 3m) - 7(2a + m)$;
3) $(2y - 3)\cdot(-3) + 2(4y - 1)$; 4) $2{,}4(2x - 3) - 4{,}8(x - 5)$.

70. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:
1) $-4(3a - 2) + 6(2a - 1)$; 2) $5(b - 3c) - 3(4b + c)$;
3) $(7x - 2)\cdot(-4) + 2(4 - 3y)$; 4) $2{,}6(3a - 5) - 7{,}8(a - 10)$.

3 **71.** Розв’яжіть рівняння:
1) $0{,}5(2x - 3) + 2{,}6 = 0{,}2(4 + 2x)$;

2) $\frac{1}{2}\left(6-3\frac{1}{2}x\right)=1\frac{1}{4}x+7$.

72. Розв’яжіть рівняння:

1) $0,5(3 - x) + 1,4 = -0,3(2x - 2)$;

2) $2\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3}x = \frac{2}{9}\left(1\frac{1}{2}x - \frac{9}{10}\right)$.

73. Знайдіть значення виразу та дізнайтеся, у якому столітті була перша письмова згадка про селище Гурзуф у Криму:

$$3\frac{1}{4} \cdot \left(-12\frac{2}{5} - (-4,2) : \frac{7}{15}\right) + 17,05.$$

74. Обчисліть значення виразу та дізнайтеся рік закладання Михайлівського Золотоверхого собору в Києві:

$$1124,2 + 1\frac{1}{2} \cdot \left(-18\frac{3}{5} - (-5,4) : \frac{9}{13}\right).$$

75. Спростіть вираз $5(2,6a + 3,4b) - 2(6a - 2,5b)$ і знайдіть його значення, якщо $a = -11$, $b = -1\frac{3}{22}$.

76. Спростіть вираз $6(1,5x + 2,5y) - 5(2x - 3y)$ і знайдіть його значення, якщо $x = -2$, $y = -1\frac{7}{30}$.

77. Знайдіть суму, доданками якої є числа: обернене та протилежне до числа 2,6.

78. Знайдіть значення виразу a^2, якщо $a = 14,75 - 2\frac{13}{20} + 3\frac{2}{9} \cdot (-5,4)$.

79. Знайдіть значення виразу b^3, якщо $b = 24,25 - 1\frac{17}{20} + 4\frac{5}{6} \cdot (-4,8)$.

80. Знайдіть значення виразу $10b - (2b + 4x)$, якщо $x - 2b = -5$.

81. Знайдіть значення виразу $15a - (3a + 4m)$, якщо $m - 3a = -3$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

82. Чи є число –2 коренем рівняння:

1) $x + 5 = 7$;
2) $x \cdot 4 = -8$;
3) $x - 3 = -5$;
4) $-10 : x = -5$?

83. Знайдіть корінь рівняння:

1) $x - 3 = 8$;
2) $7 + x = 3$;
3) $-4x = -20$;
4) $x : 3 = -7$.

ТЕМА 1

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **пригадаєте** основні властивості рівнянь з однією змінною;
- **ознайомитеся** з лінійним рівнянням з однією змінною;
- **навчитеся** розв'язувати лінійні рівняння з однією змінною та рівняння, які до них зводяться; текстові задачі за допомогою рівнянь.

§ 1. Загальні відомості про рівняння

Рівняння та його розв'язки

Однією з найважливіших математичних дисциплін є *алгебра*. Упродовж багатьох століть вона розвивалася як наука про рівняння.

Рівнянням **називають рівність, яка містить змінну.**

Основні відомості про рівняння ви вже знаєте з попередніх класів. Вираз, записаний у рівнянні ліворуч від знака рівності, називають *лівою частиною рівняння*, а вираз, записаний праворуч, – *правою частиною рівняння*.

Якщо в рівняння $4x - 6 = x$ замість змінної x підставити число 2, то одержимо правильну числову рівність: $4 \cdot 2 - 6 = 2$, адже числові значення обох частин рівняння будуть між собою рівні. У такому разі про число 2 кажуть, що воно є *коренем рівняння*.

Значення змінної, яке перетворює рівняння у правильну числову рівність, називають *коренем* (або *розв'язком*) *рівняння*.

Про число, яке є коренем рівняння, ще кажуть, що воно *задовольняє рівняння*.

Різні рівняння можуть мати різну кількість коренів.

Наприклад, рівняння $4x - 6 = x$ має лише один корінь – число 2. Рівняння $x(x - 6) = 0$ має два корені – числа 0 і 6. Рівняння

$x + 0{,}1 = 0{,}1 + x$ задовольнятиме будь-яке значення змінної x, тобто будь-яке число є його коренем, отже, це рівняння має безліч коренів. Але не існує жодного значення змінної x, яке б перетворювало рівняння $x + 1 = x$ у правильну числову рівність, адже для кожного значення змінної x значення лівої частини рівняння буде на 1 перевищувати значення правої його частини. Тому рівняння $x + 1 = x$ коренів не має.

Розв'язати рівняння **– означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.**

Рівносильні рівняння

Розглянемо рівняння $x + 1 = 5$ і $3x = 12$. Кожне з них має єдиний корінь – число 4. Ці рівняння є ***рівносильними***.

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і такі рівняння, які коренів не мають.

Приклад 1. Чи рівносильні рівняння: 1) $x + 3 = 4$ і $5x = 10$; 2) $x + 2 = x$ і $2 - x = 5 - x$; 3) $18 - x = 11$ і $21 : x = 3$?

Розв'язання. 1) Коренем рівняння $x + 3 = 4$ є число 1, а коренем рівняння $5x = 10$ – число 2. Тому рівняння $x + 3 = 4$ і $5x = 10$ не є рівносильними.

2) Кожне з рівнянь $x + 2 = x$ і $2 - x = 5 - x$ не має коренів, тому ці рівняння є рівносильними.

3) Коренем рівняння $18 - x = 11$ є число 7. Коренем рівняння $21 : x = 3$ також є число 7. Тому рівняння $18 - x = 11$ і $21 : x = 3$ – рівносильні.

Відповідь: 1) ні; 2), 3) так.

Властивості рівнянь

Для розв'язування рівнянь використовують *властивості*, які перетворюють рівняння на рівносильні їм рівняння:

1) якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини у другу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;
3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

Приклад 2. З'ясувати, чи є рівносильними рівняння:
1) $2(x-1)=5x$ і $2x-2=5x$;
2) $3a+2=5a-a-7$ і $3a+2=4a-7$;
3) $5x=2x+9$ і $5x-2x=9$;
4) $0{,}5b=1{,}5b-3{,}5$ і $b=3b-7$.

Розв'язання. 1) Рівняння $2(x-1)=5x$ і $2x-2=5x$ є рівносильними, оскільки друге рівняння одержуємо з першого розкриттям дужок у його лівій частині.
2) Рівняння $3a+2=5a-a-7$ і $3a+2=4a-7$ – рівносильні, оскільки друге рівняння одержуємо з першого зведенням подібних доданків у його правій частині.
3) Рівняння $5x=2x+9$ і $5x-2x=9$ – рівносильні, оскільки друге рівняння одержуємо з першого перенесенням доданка з правої частини рівняння в ліву зі зміною знака цього доданка на протилежний.
4) Рівняння $0{,}5b=1{,}5b-3{,}5$ і $b=3b-7$ – рівносильні, оскільки друге рівняння одержуємо шляхом множення на 2 обох частин першого рівняння.

Відповідь: 1) – 4) так, рівняння рівносильні.

А ще раніше...

У IX ст. видатний арабський математик Мухаммед бен Муса Аль-Хорезмі у своєму трактаті «Кітаб аль-джебр аль-мукабала» зібрав і систематизував наявні на той час методи розв'язування рівнянь. Узятий з назви цієї книжки термін «аль-джебр» (у перекладі з арабської означає «відновлення») надалі став уживатися як «алгебра» і дав назву цілій науці.

У ті часи, коли Аль-Хорезмі писав свій трактат, від'ємні числа вважалися хибними, несправжніми. Тому, коли від'ємне число переносили з однієї частини рівняння в іншу, змінюючи його знак, вважали, що воно «відновлюється» (стає додатним), тобто з несправжнього перетворюється на справжнє. Саме таке перетворення рівнянь Аль-Хорезмі й назвав «відновленням».

Властивість взаємного знищення однакових доданків рівняння, що містилися в обох його частинах, Аль-Хорезмі назвав «протиставленням» (арабською мовою – «аль-мукабал»).

Аль-Хорезмі першим відокремив алгебру від арифметики й розглянув її як окрему математичну науку. Алгебру Аль-Хорезмі в латинському перекладі вивчали європейці протягом XII–XVI ст. Подальший розвиток алгебри пов'язаний саме з європейськими вченими, зокрема з італійськими математиками епохи Відродження.

До XIX ст. алгебра розвивалася як наука, що вивчає методи розв'язування рівнянь. Згодом вона значно збагатилася новими змістовими лініями: спрощення виразів, функції, розв'язування нерівностей тощо. І тепер рівняння – це лише одна зі складових частин алгебри.

Мухаммед бен Муса Аль-Хорезмі
(783 – бл. 850)

Що називають рівнянням? ○ Що називають коренем (або розв'язком) рівняння? ○ Що означає розв'язати рівняння? ○ Які рівняння називають рівносильними? ○ Які властивості використовують під час розв'язування рівнянь?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

1.1. (*Усно.*) Який із записів є рівнянням (відповідь обґрунтуйте):
1) $4x - 12 > 0$; 2) $3x + 7$;
3) $4x - 2 = 10$; 4) $(14 - 10) \cdot 2 = 8$?

1.2. (*Усно.*) Чи є число 4 коренем рівняння:
1) $2x = 8$; 2) $x - 2 = 3$; 3) $2x - 3 = 6$; 4) $32 : x = 8$?

1.3. Чи є число 3 розв'язком рівняння:
1) $x + 5 = 8$; 2) $2x = 9$; 3) $x - 4 = -1$; 4) $x : 3 = 0$?

2

1.4. Яке із чисел є коренем рівняння $x^2 = 2x + 3$:
1) 0; 2) –1; 3) 1; 4) 3?

1.5. Чи є коренем рівняння $x^2 = 4 - 3x$ число:
1) 0; 2) 1; 3) –2; 4) –4?

1.6. Доведіть, що кожне із чисел 1,2 та –1,2 є коренем рівняння $x^2 = 1{,}44$.

1.7. Чи є рівносильними рівняння:
1) $x + 2 = 5$ і $x : 3 = 1$; 2) $x - 3 = 7$ і $2x = 18$?

1.8. Чи є рівносильними рівняння:
1) $x - 2 = 3$ і $2x = 10$; 2) $x + 3 = 7$ і $x : 2 = 3$?

3 **1.9.** Доведіть, що:

1) коренем рівняння $2(x - 3) = 2x - 6$ є будь-яке число;
2) рівняння $y - 7 = y$ не має коренів.

1.10. Доведіть, що:

1) коренем рівняння $3(2 - c) = 6 - 3c$ є будь-яке число;
2) рівняння $x = x + 8$ не має коренів.

1.11. Складіть рівняння, що має:

1) єдиний корінь – число –2;
2) два корені – числа 5 і –5.

1.12. З'ясуйте, не розв'язуючи рівнянь, чи є вони рівносильними:

1) $4(x - 2) = 19$ і $4x - 8 = 19$;
2) $2x - 3 = 3x + 5$ і $2x - 3x = 5 + 3$;
3) $8(x - 3) = 40$ і $x - 3 = 5$;
4) $\frac{2x}{3} = 11$ і $2x = 33$.

1.13. Установіть, не розв'язуючи, чи є рівняння рівносильними:

1) $8(x - 1) = 5$ і $8x - 8 = 5$;
2) $3x + 7 = 4x - 8$ і $3x - 4x = -8 - 7$;
3) $9(x + 2) = 18$ і $x + 2 = 2$;
4) $-\frac{3x}{4} = 7$ і $-3x = 28$.

4 **1.14.** Чи має розв'язки рівняння:

1) $x + 2 = 2 - x$;
2) $x + 3 = 3 + x$;
3) $x + 1 = -1 + x$;
4) $0x = 0$;
5) $0 \cdot (x - 1) = 3$;
6) $5(x - 1) = 5x - 5$;
7) $0 : x = 0$;
8) $2(x - 3) = 2x - 7$?

Вправи для повторення

1.15. Обчисліть:

1) $\frac{2}{3} + \frac{7}{12}$;
2) $\frac{8}{21} - \frac{3}{14}$;
3) $2\frac{3}{5} + 3\frac{7}{10}$;
4) $\frac{5}{11} - \frac{2}{33}$;
5) $\frac{9}{20} + 1\frac{1}{15}$;
6) $5\frac{4}{15} - 1\frac{2}{7}$.

1.16. Знайдіть:

1) 25 % від числа 200;
2) 13 % від числа 82;
3) 20,5 % від числа 64;
4) 21 % від числа $3\frac{2}{7}$.

Життєва математика

1.17. Щоб заощадити на електроспоживанні, у родині вирішили встановити двозонний лічильник електроенергії. Оплата за електроенергію вночі складає 50 % від оплати в інший час. Лічильник було придбано за 1500 грн, і ще 500 грн було сплачено за встановлення та взяття лічильника на облік. З червня 2023 року тариф для населення становить 2,64 грн за 1 кВт · год. Родина щомісяця використовує 500 кВт · год електроенергії, з них 100 кВт · год – у нічний час. За двозонним лічильником вартість електроенергії, використаної в нічний час, обчислюється за тарифом 1,32 грн за 1 кВт · год. Через скільки місяців родина окупить установлення двозонного лічильника?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1.18. Перенесіть у ліву частину рівняння всі доданки, що містять змінну, а у праву – усі доданки, які її не містять:

1) $5y + 11 = 8 - 3y$;
2) $6x - 13 = 2x + 7$;
3) $-2m - 13 = -3m + 5$;
4) $-1 - 4x = 17x - 8$.

1.19. Розв’яжіть рівняння:

1) $-3x = -21$;
2) $-2x = 40$;
3) $0,2x = -5$;
4) $50x = -5$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

1.20. Яку остачу при діленні на 1001 дає число

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 + 2000?$$

§ 2. Лінійне рівняння з однією змінною

Лінійне рівняння з однією змінною та його розв’язування

Ми знаємо, як розв’язувати рівняння $2x = -8$; $-0,01x = 17$; $\frac{1}{3}x = 5$. Кожне із цих рівнянь має вигляд $ax = b$, де x – змінна, a і b – деякі числа.

Рівняння вигляду $ax = b$, де x – змінна, a і b – числа, називають *лінійним рівнянням з однією змінною*.
Числа a і b називають *коефіцієнтами* цього рівняння.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ є ***рівнянням першого степеня з однією змінною***. Поділивши обидві частини такого рівняння на a, матимемо, що $x = \frac{b}{a}$, тобто єдиним коренем цього рівняння є число $\frac{b}{a}$.

Якщо $a = b = 0$, то лінійне рівняння набуває вигляду $0x = 0$. Його коренем є будь-яке число, оскільки при будь-якому значенні x значення лівої і правої частин рівняння будуть між собою рівними і дорівнюватимуть нулю. Тому рівняння $0x = 0$ має безліч коренів.

Якщо $a = 0$, а $b \neq 0$, лінійне рівняння набуває вигляду $0x = b$. При цьому не існує жодного значення змінної x, яке б перетворювало ліву та праву частини рівняння на одне й те саме число. Адже значення лівої частини рівняння при будь-якому значенні x дорівнюватиме нулю, а значення правої частини – числу b, відмінному від нуля. Тому рівняння $0x = b$ при $b \neq 0$ коренів не має.

Систематизуємо дані про розв'язки лінійного рівняння $ax = b$, де a і b – числа, у вигляді схеми:

$ax = b$, де x – змінна

якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$	**якщо $a = b = 0$, то x – будь-яке число**	**якщо $a = 0$, $b \neq 0$, то рівняння коренів не має**

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

1) $0{,}2x = 7$; 2) $-\frac{2}{3}x = 2\frac{2}{3}$; 3) $0x = 7$.

Розв'язання.

1) $0{,}2x = 7$;
$x = 7 : 0{,}2$;
$x = 35$.
Відповідь: 35.

2) $-\frac{2}{3}x = 2\frac{2}{3}$;
$x = 2\frac{2}{3} : \left(-\frac{2}{3}\right)$;
$x = -4$.
Відповідь: -4.

3) $0x = 7$;
рівняння коренів не має.
Відповідь: коренів немає.

Приклад 2. Для якого значення b рівносильні рівняння $-2x = 8$ і $3x + b = 11$?

Розв'язання. 1) Розв'яжемо рівняння $-2x = 8$. Маємо $x = 8 : (-2)$; $x = -4$.

2) Щоб рівняння $-2x = 8$ і $3x + b = 11$ були рівносильними, необхідно, щоб друге рівняння мало єдиний корінь, що дорівнює числу -4. Оскільки $x = -4$, то маємо $-12 + b = 11$; $b = 23$. Легко пересвідчитися в тому, що рівняння $3x + 23 = 11$ має єдиний корінь, що дорівнює -4.

Відповідь: 23.

Розв'язування рівнянь, що зводяться до лінійних

Процес розв'язування багатьох рівнянь є зведенням цих рівнянь до лінійних шляхом рівносильних перетворень за властивостями рівнянь.

Приклад 3. Розв'язати рівняння:

1) $3(x + 3) - 2x = 6 - 4x$; 2) $\frac{x+1}{2} + \frac{5-x}{3} = \frac{x+13}{6}$.

Розв'язання.

1. Позбудемося знаменників (якщо вони є):

1)	2)
$3(x + 3) - 2x = 6 - 4x$.	$\frac{x+1}{2} + \frac{5-x}{3} = \frac{x+13}{6}$. Помножимо обидві частини рівняння на 6 (на найменший спільний знаменник дробів). Маємо: $\frac{6(x+1)}{2} + \frac{6(5-x)}{3} = \frac{6(x+13)}{6}$; $3(x + 1) + 2(5 - x) = x + 13$.

2. Розкриємо дужки (якщо вони є):

1)	2)
$3x + 9 - 2x = 6 - 4x$.	$3x + 3 + 10 - 2x = x + 13$.

3. Перенесемо доданки, що містять змінну, у ліву частину рівняння, а інші – у праву, змінивши знаки цих доданків на протилежні:

1)	2)
$3x - 2x + 4x = 6 - 9$.	$3x - 2x - x = 13 - 3 - 10$.

4. Зведемо подібні доданки:

1)	2)
$5x = -3$.	$0x = 0$.

5. Розв'яжемо отримане лінійне рівняння:

1)	2)
$x = -3 : 5$; $x = -0{,}6$.	x – будь-яке число.
Відповідь: $-0{,}6$.	*Відповідь*: будь-яке число.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $5(x + p) = 3x - 7p$, x – змінна.

Розв'язання. Розкриємо дужки в лівій частині рівняння:

$$5x + 5p = 3x - 7p.$$

Перенесемо доданок $3x$ у ліву частину, а $5p$ – у праву.

Матимемо: $5x - 3x = -7p - 5p$, тобто $2x = -12p$.

Тоді $x = (-12p) : 2$, тобто $x = (-12 : 2)p$, отже, $x = -6p$.

Відповідь: $-6p$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $|2x - 7| = 3$.

Розв'язання. Щоб модуль деякого виразу дорівнював числу 3, значення цього виразу має дорівнювати 3 або –3.

Маємо $|2x - 7| = 3$

$2x - 7 = 3;$	або	$2x - 7 = -3;$
$2x = 10;$		$2x = 4;$
$x = 5.$		$x = 2.$

Відповідь: 5; 2.

- Яке рівняння називають лінійним рівнянням з однією змінною? Наведіть приклади лінійних рівнянь.
- Коли рівняння $ax = b$ має єдиний корінь?
- Коли рівняння $ax = b$ має безліч коренів?
- Коли рівняння $ax = b$ не має коренів?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

2.1. (*Усно.*) Які з рівнянь є лінійними:

1) $15x = 0$; 2) $-7x = -\frac{1}{2}$;

3) $x^2 = 2x$; 4) $0x = 19$;

5) $x + 3 = x^2$; 6) $0x = 0$?

2.2. (*Усно.*) Скільки коренів має рівняння:

1) $2x = -3$;

2) $0x = 7$;

3) $0x = 0$?

2.3. З'ясуйте, які з даних рівнянь мають лише один корінь, не мають коренів, мають безліч коренів:

1) $-2x = -9$; 2) $0x = 0$;

3) $0,42x = 0$; 4) $17 = 0x$;

5) $\frac{2}{3}x = -9$; 6) $0x = -12$.

2.4. (*Усно.*) Розв'яжіть рівняння:

1) $-2x = -12$; 2) $0{,}5x = -2{,}5$; 3) $-2{,}5x = 7{,}5$;

4) $\frac{1}{5}x = \frac{3}{10}$; 5) $\frac{4}{7}x = 1$; 6) $-5x = -12$.

2.5. Розв'яжіть рівняння:

1) $-3x = -21$; 2) $-2x = \frac{2}{9}$; 3) $-\frac{1}{5}x = -5$;

4) $50x = 5$; 5) $-x = 1\frac{2}{7}$; 6) $-0{,}01x = 0{,}17$;

7) $\frac{2}{9}x = -\frac{4}{27}$; 8) $-1{,}2x = -4{,}2$; 9) $\frac{7}{8}x = 0$.

2.6. Знайдіть корінь рівняння:

1) $2x = -8$; 2) $\frac{1}{5}x = 9$; 3) $-3x = \frac{1}{4}$;

4) $-10x = -5$; 5) $\frac{2}{15}x = 0$; 6) $0{,}1x = -0{,}18$.

2.7. Визначте, що має бути записано у правій частині рівняння замість пропусків, якщо відомо його корінь:

1) $8x = \ldots$; $x = -9$; 2) $-9x = \ldots$; $x = 0$; 3) $\frac{3}{4}x = \ldots$; $x = 12$.

2.8. Знайдіть корінь рівняння:

1) $7x + 14 = 0$; 2) $0{,}3x - 21 = 0{,}5x - 23$;

3) $4x + 3 = 6x - 13$; 4) $5x + (3x - 7) = 9$;

5) $47 = 10 - (9x + 2)$; 6) $(3x + 2) - (8x + 6) = 14$.

2.9. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x - 10 = 0$; 2) $1{,}4x - 12 = 0{,}9x + 4$;

3) $3x + 14 = 5x + 16$; 4) $12 - (5x + 10) = -3$;

5) $6 - (8x + 11) = -1$; 6) $(3x - 4) - (6 - 4x) = 4$.

2.10. Яке з рівнянь рівносильне рівнянню $5x = 10$:

1) $x + 3 = 5$; 2) $5 - x = 7$;

3) $x + 2 = x + 1$; 4) $x - 7 = -5$;

5) $x = 8 - 3x$; 6) $4x - 7 = 4x$?

2.11. Чи є рівняння рівносильними:

1) $4x - x = 17$ і $3x = 17$;

2) $5x - 9 = 3x$ і $6x = 21$;

3) $2x = -12$ і $x + 6 = 0$;

4) $12x = 0$ і $15x = 15$?

2.12. Для якого значення x значення виразу:
1) $3x + 7$ дорівнює -2;
2) $4(x + 1)$ дорівнює значенню виразу $5x - 9$?

2.13. Для якого значення y:
1) значення виразу $5y - 13$ дорівнює -3;
2) значення виразів $3(y - 2)$ і $13y - 8$ між собою рівні?

2.14. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+1}{3} = 5$; 2) $\frac{2x-7}{5} = 1$; 3) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 8$; 4) $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 1$.

2.15. Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{x-2}{4} = 1$; 2) $\frac{3x+2}{5} = 4$; 3) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$; 4) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$.

2.16. Складіть лінійне рівняння, коренем якого є число:
1) -2; 2) $-0{,}2$.

2.17. Складіть лінійне рівняння:
1) яке не має коренів;
2) коренем якого є будь-яке число.

2.18. Складіть лінійне рівняння, коренем якого є:
1) число -8;
2) будь-яке число.

3

2.19. Знайдіть корінь рівняння:
1) $(4x - 2) + (5x - 4) = 9 - (5 - 11x)$;
2) $(7 - 8x) - (9 - 12x) + (5x + 4) = -16$;
3) $3(4x - 5) - 10(2x - 1) = 33$;
4) $9(3(x + 1) - 2x) = 7(x + 1)$.

2.20. Розв'яжіть рівняння:
1) $(9x - 4) + (15x - 5) = 18 - (25 - 22x)$;
2) $(10x + 6) - (9 - 9x) + (8 - 11x) = -19$;
3) $7(x - 1) - 3(2x + 1) = -x - 15$;
4) $5(4(x - 1) - 3x) = 9x$.

2.21. Розв'яжіть рівняння $\frac{3x-11}{4} = \frac{2x-2}{3}$ і $\frac{4y-16}{2} = \frac{6y-10}{5}$. Знайдіть добуток $10xy$ і дізнайтеся рік заснування Чернівецького національного університету.

2.22. Розв'яжіть рівняння $\frac{2x+13}{3} = \frac{6x-1}{4}$ і $\frac{3y-9}{5} = \frac{2y+6}{6}$. Знайдіть значення виразу $x + y + 1788$ і дізнайтеся рік заснування Харківського національного університету.

2.23. Розв’яжіть рівняння, де x – змінна:

1) $2x + a = x + a$; 2) $b + x = c - x$;
3) $6x + 2m = x - 8m$; 4) $9a + x = 3b - 2x$.

2.24. Розв’яжіть рівняння, де x – змінна:

1) $7x + m = 2x + m$; 2) $a + x = 2m - x$;
3) $3x + b = 9b - x$; 4) $5p + 2x = 10a - 3x$.

2.25. Чи є рівносильними рівняння:

1) $2x - 4 = 2$ і $5(x - 3) + 1 = 3x - 8$;
2) $5x + 3 = 8$ і $7(x - 2) + 20 = 4x + 3$;
3) $5x = 0$ і $0x = 5$;
4) $7x + 1 = 7x + 2$ і $5(x + 1) = 5x + 5$;
5) $0 : x = 7$ і $0x = 7$;
6) $3(x - 2) = 3x - 6$ і $2(x + 7) = 2(x + 1) + 12$?

2.26. Для якого значення y значення виразу:

1) $5y + 7$ утричі більше за значення виразу $y + 5$;
2) $2y - 4$ на 7,4 більше за значення виразу $3 - 7y$?

2.27. Для якого значення x значення виразу:

1) $7x + 8$ удвічі більше за значення виразу $x + 7$;
2) $5x - 8$ на 17,2 менше від значення виразу $x + 2$?

2.28. Складіть рівняння, яке було б рівносильним рівнянню

$$7(2x - 8) = 5(7x - 8) - 15x.$$

2.29. Розв’яжіть рівняння:

1) $|x| + 3 = 7$; 2) $|x| - 2 = -9$; 3) $2|x| - 6 = 0$;
4) $|x + 5| = 0$; 5) $|7 - x| = 1$; 6) $|x + 12| = -3$;
7) $|2x + 1| = 7$; 8) $2(|x| - 3) = |x|$; 9) $\frac{1}{2}|x - 1| + 3 = 5$.

2.30. Розв’яжіть рівняння:

1) $|x| - 5 = 4$; 2) $|x| + 1 = -2$; 3) $\frac{1}{2}|x| - 4 = 0$;
4) $|2x - 1| = 0$; 5) $|2x - 7| = 3$; 6) $4(|x| - 3) = |x|$.

2.31. Для якого значення a рівняння:

1) $2ax = 16$ має корінь, що дорівнює 4;
2) $3x = a$ має корінь, що дорівнює $\frac{4}{7}$;
3) $5(a + 1)x = 40$ має корінь, що дорівнює -1?

2.32. Для якого значення b коренем рівняння:

1) $3bx = -24$ є число -4; 2) $(2b - 5)x = 45$ є число 3?

2.33. Розв'яжіть рівняння:
1) $4x + 7 = 3(x - 2) + x$;
2) $2x + 5 = 2(x - 4) + 13$.

2.34. Знайдіть корінь рівняння:
1) $3(x - 2) + 4x = 7(x - 1) + 1$;
2) $2(x + 1) + 4x = 6(x + 3)$.

2.35. Розв'яжіть рівняння:
1) $\frac{3x-1}{2} + \frac{6x+3}{11} = 10$;
2) $\frac{8x-3}{7} - \frac{3x+1}{10} = 2$;
3) $\frac{x}{10} + \frac{2x}{5} = \frac{7x}{15} - \frac{1}{6}$;
4) $\frac{1+2x}{2} - \frac{3x+2}{3} = \frac{5x+4}{6}$;
5) $\frac{2x-3}{5} - \frac{1-x}{4} + \frac{5x+1}{20} = \frac{9x+3}{10}$;
6) $\frac{3x-5}{4} - \frac{2-x}{3} + \frac{2x+5}{12} = \frac{5x-6}{4}$.

2.36. Знайдіть корінь рівняння:
1) $\frac{2x+1}{3} + \frac{x+7}{2} = 5$;
2) $\frac{5x-6}{12} - \frac{x-5}{8} = 1$;
3) $\frac{x}{3} + \frac{2x}{9} = \frac{5x}{6} - \frac{1}{18}$;
4) $\frac{3x+1}{5} - \frac{2+x}{2} = \frac{x-8}{10}$.

4

2.37. За якого значення b рівняння мають однакові корені:
1) $4x - 3 = 5$ і $3x + b = 17$;
2) $x + b = 9$ і $2x - b = x$?

2.38. Для якого значення a рівняння мають однакові корені:
1) $2x - 3 = 7$ і $a - 3x = 9$;
2) $x + a = 7$ і $3x - a = 2x$?

2.39. Знайдіть усі цілі значення m, для яких корінь рівняння $mx = 4$ є цілим числом.

2.40. Знайдіть усі цілі значення b, для яких корінь рівняння $bx = -6$ є натуральним числом.

2.41. Для якого значення a не має коренів рівняння:
1) $(a - 1)x = 5$;
2) $(a + 3)x = a - 2$;
3) $(a - 4)x = a - 4$?

2.42. Для якого значення b не має розв'язків рівняння:
1) $(b+1)x=6$; 2) $(b-3)x=b$; 3) $(b+1)x=b+1$?

2.43. Для якого значення m будь-яке число є коренем рівняння:
1) $(m-1)x=1-m$;
2) $m(m+2)x=(m+2)$;
3) $(m-3)x=5$?

2.44. Для якого значення a має безліч коренів рівняння:
1) $(a+2)x=2+a$; 2) $(a-3)x=9$; 3) $a(a-4)x=4-a$?

2.45. Розв'яжіть рівняння, де x – змінна:
1) $(b+1)x=7$; 2) $(5-b)x=b-5$; 3) $(|b|-2)x=b+2$.

2.46. Розв'яжіть рівняння:
1) $|x|+4x=15$; 2) $|7x|-x=24$.

Вправи для повторення

2.47. Знайдіть значення виразу:
1) $4a+12b+8a$, якщо $a=-13$, $b=13$;
2) $(3x-2x)(5m+4m)$, якщо $x=1\frac{8}{9}$, $m=-1\frac{1}{2}$.

2.48. Знайдіть число, якщо:
1) 15 % його дорівнюють 300;
2) 11 % його дорівнюють 28,16.

2.49. Зведіть подібні доданки:
1) $7x-2y+3x+17y$; 2) $-5{,}2+17a+4{,}9-12a$;
3) $-5x+7-2y+5x-12y$; 4) $5\frac{1}{2}p-2\frac{5}{6}a+7\frac{1}{2}p+4\frac{1}{3}a$.

2.50. Розкрийте дужки і спростіть вираз:
1) $a-(a-(2a-8))$; 2) $5m-((n-m)+3n)$;
3) $15a-(2a-(3a-(a+1)))$; 4) $b-(b-((b-a)-2a))$.

Життєва математика

2.51. Добова доза вітаміну С для дорослої людини становить 0,05 г. У 100 г ягід малини міститься майже 25 мг вітаміну С (1 мг = 0,001 г).
1) Визначте, скільки грамів вітаміну С міститься в 1 кг ягід малини.
2) Скільки добових доз вітаміну С може замінити дорослій людині 1 кг ягід малини?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

2.52. Одне число на 6 менше від іншого. Менше із чисел позначено через x. Виразіть через x інше число.

2.53. Одне число в 4 рази більше за інше. Менше із чисел позначено через x. Виразіть через x інше число.

2.54. На двох клумбах разом росте 62 тюльпани, до того ж на одній клумбі на 6 тюльпанів менше, ніж на іншій. Скільки тюльпанів росте на кожній клумбі?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

2.55. Відомо, що $x + y = 13$. Для яких натуральних значень x і y вираз xy набуває найбільшого значення?

§ 3. Розв'язування задач за допомогою лінійних рівнянь. Рівняння як математична модель задачі

Математична модель задачі

Щоб розв'язати задачу практичного змісту, доцільно спочатку створити її *математичну модель*, тобто записати залежність між відомими та невідомими величинами за допомогою математичних понять, відношень, формул, рівнянь тощо.

Розв'язування текстових задач за допомогою рівнянь

Розглянемо текстові задачі, математичними моделями яких є лінійні рівняння та рівняння, що зводяться до них.

Розв'язувати задачу за допомогою рівняння слід у такій послідовності:

1) **позначити змінною одну з невідомих величин;**
2) **інші невідомі величини (якщо вони є) виразити через уведену змінну;**
3) **за умовою задачі встановити співвідношення між невідомими та відомими значеннями величин і скласти рівняння;**
4) **розв'язати одержане рівняння;**
5) **проаналізувати розв'язки рівняння і знайти невідому величину, а за потреби і значення інших невідомих величин;**
6) **записати відповідь до задачі.**

Розглянемо кілька задач і розв'яжемо їх за допомогою лінійного рівняння.

Приклад 1. На свій день народження сестрички-близнючки Наталя та Олена отримали разом 127 вітальних *SMS*-повідомлень, причому Наталя отримала на 13 повідомлень більше, ніж Олена. Скільки *SMS*-повідомлень на свій день народження отримала кожна сестричка?

Розв'язання. Нехай Олена отримала x повідомлень, тоді Наталя – $(x+13)$. А обидві разом – $(x+x+13)$ повідомлень, що за умовою дорівнює 127.

Маємо рівняння: $x + x + 13 = 127$. Звідки $x = 57$.

Отже, Олена отримала 57 повідомлень,

$57 + 13 = 70$ (повід.) – отримала Наталя.

Відповідь: 70 повідомлень; 57 повідомлень.

Приклад 2. Максимально допустимий розмір кредиту банк обчислює за формулою:

$$S = \frac{C}{3} \cdot n,$$

де S – сума кредиту, C – середньомісячна зарплата позичальника. Для кредиту терміном в один рік вважають, що $n = 9$, терміном у два роки – $n = 21$, терміном у три роки – $n = 33$. Який найменший розмір середньомісячної зарплати має бути в позичальника, щоб банк надав йому кредит у сумі 30 000 грн на: 1) 1 рік; 2) 2 роки; 3) 3 роки?

Розв'язання. За умовою $S = 30\,000$ грн. Нехай найменший розмір середньомісячної зарплати позичальника – x грн.

1) Маємо рівняння: $30\,000 = \frac{x}{3} \cdot 9$; звідки $x = 10\,000$.

Отже, середньомісячна зарплата позичальника має бути не менше ніж 10 000 грн.

2) Маємо рівняння: $30\,000 = \frac{x}{3} \cdot 21$; звідки $x \approx 4285{,}7$.

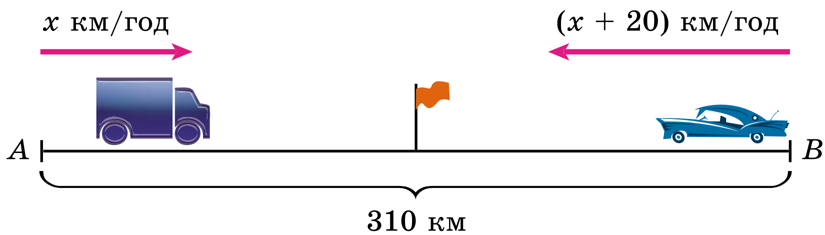
Отже, середньомісячна зарплата має бути не менше ніж 4286 грн.

3) Маємо рівняння: $30\,000 = \frac{x}{3} \cdot 33$; звідки $x \approx 2727{,}3$.

Отже, середньомісячна зарплата має бути не менше ніж 2728 грн.

Відповідь: 1) 10 000 грн; 2) 4286 грн;
3) 2728 грн.

Приклад 3. З міста A до міста B, відстань між якими 310 км, виїхала вантажівка. Через 30 хв після цього з міста B до міста A виїхав легковик. Вантажівка і легковик зустрілися через 2 год після виїзду легковика. Знайти швидкість кожної із цих автівок, якщо швидкість легковика на 20 км/год більша за швидкість вантажівки.



Розв'язання. Нехай швидкість вантажівки – x км/год. Умову задачі зручно подати у вигляді таблиці:

Учасники руху	v, км/год	t, год	s, км	
Вантажівка	x	2,5	$2,5x$	310 км
Легковик	$x + 20$	2	$2(x + 20)$	

Оскільки автівки виїхали назустріч одна одній і зустрілися, то разом вони подолали 310 км.

Маємо рівняння: $2,5x + 2(x + 20) = 310.$

Розв'яжемо його: $2,5x + 2x + 40 = 310;$

$4,5x = 270;$

$x = 60$ (км/год) – швидкість вантажівки;

$60 + 20 = 80$ (км/год) – швидкість легковика.

Відповідь: 60 км/год; 80 км/год.

Якої послідовності дій слід дотримуватися, розв'язуючи задачу за допомогою рівняння?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

3.1. (*Усно.*) Одне число на 30 більше за інше. Менше з них позначено через x. Виразіть через x більше із цих чисел.

3.2. (*Усно.*) Одне додатне число в 4 рази більше за інше. Менше з них позначено через x. Виразіть через x більше із цих чисел.

3.3. На першій клумбі росте x кущів троянд, а на другій – утричі більше. Виразіть через x кількість кущів троянд, що ростуть на другій клумбі.

3.4. (*Усно.*) Відстань, що дорівнює x км, велосипедистка долає за 3 год. Виразіть через x швидкість її руху.

3.5. (*Усно.*) Перше число позначили через x, а друге число становить чверть від першого. Виразіть друге число через x.

3.6. Перше число дорівнює x, а друге число становить 60 % від першого. Виразіть через x друге число.

3.7. (*Усно.*) Сума довжин двох відрізків дорівнює 16 см. Довжина одного з них x см. Виразіть через x довжину іншого відрізка.

3.8. (*Усно.*) Власна швидкість човна дорівнює 24 км/год, а швидкість течії – x км/год. Виразіть через x швидкість човна за течією і проти течії.

2

3.9. Загадали число. Якщо від нього відняти 7 і одержаний результат поділити на 9, то матимемо 12. Яке число загадали?

3.10. Знайдіть число, половина якого разом з його третиною дорівнює 40.

3.11. У двох цистернах разом 64 т пального, причому в першій на 4 т менше, ніж у другій. Скільки тонн пального в кожній цистерні?

3.12. В автопарку вантажівок у 6 разів більше, ніж легковиків. Скільки легковиків у автопарку, якщо їх разом з вантажівками налічується 91?

3.13. Одне з двох додатних чисел утричі більше за інше. Знайдіть ці числа, якщо їхня різниця дорівнює 32.

3.14. Бабусі разом з мамою 99 років. Скільки років кожній з них, якщо бабуся старша за маму на 25 років?

3.15. Сума двох чисел 240, а їх відношення дорівнює 5 : 7. Знайдіть ці числа.

3.16. Різниця двох чисел 36, а їх відношення дорівнює 7 : 4. Знайдіть ці числа.

3.17. Периметр трикутника дорівнює 20 дм. Дві його сторони між собою рівні, і кожна з них на 1 дм більша за третю. Знайдіть сторони трикутника.

3.18. За два дні було продано 384 кг бананів, причому другого дня продали $\frac{3}{5}$ від того, що продали першого. Скільки кілограмів бананів продали першого дня і скільки – другого?

3.19. Туристична група за другий день подолала $\frac{7}{8}$ від тієї відстані, яку подолала першого дня. Скільки кілометрів подолала туристична група першого дня і скільки – другого, якщо за перший день було подолано на 3 км більше, ніж за другий?

3.20. Бабуся ліпила вареники протягом двох годин. За другу годину вона виліпила на 5 % більше вареників, ніж за першу. Скільки вареників виліпила бабуся за першу годину і скільки – за другу, якщо за другу годину вона виліпила на 3 вареники більше, ніж за першу?

3.21. За пральну машину та її підключення заплатили 11 760 грн. Вартість підключення становить 5 % від вартості машини. Скільки коштує пральна машина?

3.22. За 2 год мотоцикліст долає таку саму відстань, що й велосипедистка за 5 год. Швидкість мотоцикліста на 27 км/год більша за швидкість велосипедистки. Знайдіть швидкість кожного з них.

3.23. Ящик з апельсинами на 3 кг важчий за ящик з лимонами. Яка маса кожного з них, якщо маса чотирьох ящиків з апельсинами така сама, як маса п'яти ящиків з лимонами?

3.24. З міста до села турист ішов зі швидкістю 4 км/год, а повертався назад зі швидкістю 3 км/год. На весь шлях він витратив 7 год. Знайдіть відстань від міста до села.

3.25. Периметр прямокутника дорівнює 36 см, причому одна з його сторін на 4 см більша за іншу. Знайдіть сторони прямокутника та його площу.

3.26. Під час літніх канікул Сергій прочитав удвічі більше оповідань, ніж Костя. Проте протягом вересня Костя встиг прочитати ще 24 оповідання, після чого виявилося, що хлопці прочитали однакову кількість оповідань. Скільки оповідань прочитав кожен з хлопців до початку навчального року?

3.27. У Марійки було втричі більше грошей, ніж у Олі. Після того як Марійка витратила 18 грн, грошей у дівчат стало порівну. Скільки грошей мала кожна з дівчат спочатку?

3 **3.28.** Мережа кондитерських до річниці свого відкриття дарувала відвідувачам набори солодощів торгових марок «Добре», «Солодко» та «Смачно». Наприкінці святкування з'ясувалося, що наборів «Солодко» було подаровано на 12 більше, ніж наборів «Добре», а наборів «Смачно» – на 31 біль-

ше, ніж «Солодко». По скільки наборів кожної марки було подаровано, якщо відвідувачів було 430 і кожен з них отримав по одному набору?

3.29. Одна сторона трикутника на 9 см менша від другої і вдвічі менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 105 см.

3.30. Чи можна розкласти 68 банок консервів у три ящики так, щоб у другому ящику було вдвічі більше банок, ніж у першому, а в третьому – на 3 банки менше, ніж у першому?

3.31. Чи можна 90 книжок розмістити на трьох полицях так, щоб на третій було на 3 книжки більше, ніж на другій, і на 5 книжок менше, ніж на першій?

3.32. Батькові зараз – 38 років, а його синові – 10. Через скільки років батько буде втричі старший за сина?

3.33. На першій ділянці кущів аґрусу втричі більше, ніж на другій. Якщо з першої ділянки пересадити 12 кущів на другу, то кущів аґрусу на обох ділянках стане порівну. Скільки кущів аґрусу росте на кожній ділянці?

3.34. У двох корпусах пансіонату проживала однакова кількість відпочивальників. У зв'язку з проведенням ремонту було вирішено переселити 24 відпочивальники з першого корпусу до другого, після чого кількість відпочивальників у першому корпусі стала в 4 рази меншою, ніж у другому. По скільки відпочивальників проживало в кожному корпусі до початку ремонтних робіт?

3.35. У двох мішках цукру було порівну. Після того як з першого мішка пересипали 8 кг до другого, у ньому стало вдвічі менше цукру, ніж у другому. По скільки кілограмів цукру було в кожному мішку спочатку?

3.36. На 440 гривень було придбано 25 зошитів у клітинку і лінійку. Вартість зошита в лінійку – 17 грн, а у клітинку – 18 грн. По скільки зошитів кожного виду придбали?

3.37. Для свята придбали 12 коробок цукерок по 55 грн і по 62,5 грн за одиницю, усього на суму 697,5 грн. По скільки коробок кожного виду придбали?

3.38. *Старовинна грецька задача*. У Піфагора запитали: «Скільки учнів навчається у твоїй школі?» На що він відповів: «Половина всіх моїх учнів вивчає математику, чверть – музику, сьома частина мовчить, і, окрім того, є ще три жінки». Скільки учнів навчалося у школі Піфагора?

3.39. Маса бідона з молоком становить 25 кг і ще половину його маси. Яка маса бідона з молоком?

4 **3.40.** $\frac{1}{4}$ від першого числа дорівнює $\frac{2}{3}$ від другого. Знайдіть ці числа, якщо їхня сума дорівнює 66.

3.41. 60 % від першого числа дорівнюють 45 % від другого. Знайдіть ці числа, якщо їхня сума дорівнює 210.

3.42. Човен витратив на шлях за течією 2,5 год, а проти течії – 3,6 год. Відстань, яку проплив човен за течією, виявилася на 7,6 км меншою, ніж відстань, яку він проплив проти течії. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

3.43. Катер за течією річки плив 1,6 год, а проти течії – 2,5 год. Відстань, яку подолав катер проти течії, виявилася на 6,2 км більшою, ніж відстань, яку подолав катер за течією. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість катера дорівнює 16 км/год.

3.44. З пункту A до пункту B зі швидкістю 12 км/год виїхав велосипедист. Через 3 год з пункту B до пункту A виїхала мотоциклістка зі швидкістю 45 км/год. Скільки годин до зустрічі з мотоциклісткою їхав велосипедист, якщо відстань від A до B становить 235,5 км? На якій відстані від пункту A відбулася їхня зустріч?

3.45. З котеджного містечка в напрямку залізничної станції зі швидкістю 14 км/год виїхала велосипедистка, а через 2 год після неї звідти само, але у протилежному напрямку, зі швидкістю 4 км/год вийшов пішохід. Через скільки годин після свого виходу пішохід буде на відстані 73 км від велосипедистки? На якій відстані від котеджного містечка в цей час він перебуватиме?

3.46. Перший кавун на 5 кг легший за другий і втричі легший за третій. Перший і третій кавуни разом удвічі важчі за другий. Знайдіть масу кожного кавуна.

3.47. Під час підготовки до олімпіади з математики Іван розв'язав на 3 задачі менше, ніж Оксана, і у 2 рази менше, ніж Сергій. При цьому Іван і Сергій разом розв'язали у 2,1 раза більше задач, ніж Оксана. Яку кількість задач розв'язав кожен з учнів, готуючись до олімпіади?

Вправи для повторення

3.48. Обчисліть:

1) $-3\frac{1}{4}\cdot 3\frac{9}{13}$; 2) $-3\frac{1}{7}\cdot\left(-1\frac{3}{11}\right)$; 3) $5\frac{1}{3}\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)$;

4) $-2\frac{4}{5}:1\frac{1}{15}$; 5) $-2\frac{1}{31}:\left(-31\frac{1}{2}\right)$; 6) $\frac{7}{9}:(-14)$.

3.49. Скільки відсотків складає:

1) число 7 від числа 28; 2) число 2,7 від числа $3\frac{3}{5}$?

3.50. Поясніть, чому не мають розв'язків рівняння:

1) $0x = 15$; 2) $x + 8 = x$; 3) $y - 2 = y + 3$;
4) $7 - m = 2 - m$; 5) $0 : x = 13$; 6) $3(x + 1) = 3x$.

3.51. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $ax = -8$ має:
1) додатний корінь; 2) від'ємний корінь.

Життєва математика

3.52. На автомагістралі встановлено дорожній знак, який указує, що швидкість на найближчій ділянці шляху 10 км завдовжки не має перевищувати 50 км/год. Водій подолав цю ділянку за 10 хв. Чи порушив він правила дорожнього руху на цій ділянці шляху?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

3.53. Мама, тато та двоє їхніх дітей мають переправитися човном на протилежний берег річки. Маса тата – 75 кг, мами – 60 кг, дітей – по 38 кг. Як їм скористатися човном, якщо він витримує масу до 80 кг і кожен у цій сім'ї вміє веслувати?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1 (§§ 1–3)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** Коренем якого рівняння є число 8?

А. $x : 4 = 3$ **Б.** $x - 9 = 1$ **В.** $x + 7 = 15$ **Г.** $2x = 10$

2. Яке з рівнянь є лінійним?

А. $4x^2 = 5$ **Б.** $x + 7 = x^2$
В. $3x + x^2 = 0$ **Г.** $2x = 0$

3. Яке з рівнянь не має коренів?

А. $7x = 0$ **Б.** $0x = 7$ **В.** $0x = 0$ **Г.** $7x = 7$

2 **4.** Знайдіть корінь рівняння $0{,}3x - 1{,}5 = 0$.

А. 5 **Б.** -5 **В.** $\frac{1}{5}$ **Г.** $-\frac{1}{5}$

5. Яке з рівнянь рівносильне рівнянню $3x - 8 = 10$?

А. $2x = -12$ **Б.** $x + 7 = 1$
В. $5x = 30$ **Г.** $x - 9 = 3$

6. На одній з полиць книжок утричі більше, ніж на іншій. Скільки книжок на цій полиці, якщо разом на двох полицях 48 книжок?

А. 12 **Б.** 16 **В.** 30 **Г.** 36

3 **7.** Укажіть рівняння, коренем якого є будь-яке число.

А. $12x = -8$ **Б.** $2(x - 1) = 2x$
В. $2(x - 1) = 2x - 2$ **Г.** $2x = 2x - 2$

8. Знайдіть корінь рівняння $\frac{x+2}{5} + \frac{x-2}{10} = \frac{1}{2}$.

А. 0 **Б.** 1 **В.** 2 **Г.** 5

9. Розв'яжіть рівняння $|2x - 5| = 7$. Якщо рівняння має один корінь, укажіть його у відповіді; якщо рівняння має більше ніж один корінь, у відповіді вкажіть їхню суму.

А. 7 **Б.** 6 **В.** -1 **Г.** 5

4 **10.** Знайдіть найменше ціле значення a, при якому коренем рівняння $ax = 8$ є ціле число.

А. 4 **Б.** 1 **В.** -8 **Г.** -16

11. Для якого значення a рівняння $(a + 3)x = a(a - 3)$ не має розв'язків?

А. Немає такого значення a **Б.** -3 **В.** 0 **Г.** 3

12. 80 % від першого числа дорівнюють $\frac{2}{7}$ від другого. Знайдіть менше із цих чисел, якщо їх сума дорівнює 76.

А. 30 **Б.** 24 **В.** 22 **Г.** 20

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

13. У першому кошику яблук на 6 менше, ніж у другому, й удвічі менше, ніж у третьому. Всього у трьох кошиках разом 62 яблука. Встановіть відповідність між питаннями до задачі (1–3) та відповідями до них (А–Г).

Питання	*Відповіді*
1. Скільки яблук у першому кошику?	**А.** 28 ябл.
2. Скільки яблук у другому кошику?	**Б.** 20 ябл.
3. Скільки яблук у третьому кошику?	**В.** 16 ябл.
	Г. 14 ябл.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 1–3

1. Чи є число 4 коренем рівняння:

1) $x + 7 = 10$; 2) $3x = 12$?

2. Які з рівнянь є лінійними:

1) $5x = -2$; 2) $x^2 = 7$; 3) $7 : x = 7$; 4) $0x = 0$?

3. Скільки коренів має рівняння:

1) $-3x = 5$; 2) $0x = 7$?

4. Розв'яжіть рівняння: 1) $-4x = 12$; 2) $0,2x - 1,2 = 0$.

5. Чи рівносильні рівняння $3x - 2 = x + 8$ і $2(x - 3) = x - 1$?

6. У першому кошику вдвічі більше грибів, ніж у другому. Скільки грибів у кожному кошику, якщо у двох кошиках разом 78 грибів?

7. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x+1}{5} + \frac{3x-2}{4} = 2$; 2) $5x - (x + 5) = 4(x - 2)$.

8. Човен за течією плив 3,5 год, а проти течії 4,2 год. Відстань, яку проплив човен за течією, виявилася на 9,8 км більшою за відстань, яку проплив човен проти течії. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

Додаткові завдання

9. Розв'яжіть рівняння $|4x - 3| = 5$.

10. Знайдіть усі цілі значення a, для яких корінь рівняння $ax = -6$ є цілим числом.

11. З міста до села вийшов пішохід зі швидкістю 4 км/год. Через 2 год із села до міста вирушила велосипедистка зі швидкістю 16 км/год. Скільки годин до зустрічі з пішоходом їхала велосипедистка, якщо відстань від села до міста дорівнює 38 км?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 1

До § 1

1 **1.** Чи є число –5 коренем рівняння:
1) $x + 3 = 2$; 2) $2 - x = 7$;
3) $x : 5 = 1$; 4) $4x = -20$?

2 **2.** Доведіть, що кожне із чисел 2, –3 і 0 є коренем рівняння $x(x - 2)(x + 3) = 0$.

3 **3.** З'ясуйте, чи є рівносильними рівняння:
1) $|x| = 2$ і $x(x + 2) = 0$; 2) $|x| = 4$ і $x^2 = 16$.

4 **4.** Чи є правильним твердження: «Якщо кожен корінь одного рівняння є коренем іншого, то ці рівняння рівносильні»?

До § 2

1 **5.** Укажіть кількість коренів рівняння:
1) $7x = -12$; 2) $0x = 0$;
3) $-3x = -17$; 4) $0x = -8$.

2 **6.** Розв'яжіть рівняння:
1) $-\frac{2}{3}x = 6$; 2) $\frac{4}{7}x = -\frac{16}{21}$; 3) $\frac{x-1}{7} = 3$; 4) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 15$;
5) $4{,}7x - 2 = 4{,}5x + 3$; 6) $2x - 3 - (3x - 2) = -8$.

3 **7.** Знайдіть корінь рівняння:
1) $10(2x - 7) - 5(4x - 2) = -60$; 2) $3(5x - 4) - (15x - 2) = 9$;
3) $\frac{3x+1}{7} + \frac{2x+1}{5} = 2$; 4) $\frac{2x+1}{3} - \frac{7-x}{6} = \frac{5x-3}{2}$.

4 **8.** Для якого значення a:
1) рівняння $ax = 8$ не має коренів;
2) коренем рівняння $(a + 3)x = a + 3$ є будь-яке число?

* **9.** Розв'яжіть рівняння $(a - 1)x = 8$ відносно змінної x.

До § 3

1 **10.** На станції техобслуговування за 3 дні відремонтували x автівок. Виразіть через x кількість відремонтованих автівок на день, якщо щодня ремонтували однакову кількість автівок.

2 **11.** Периметр прямокутника дорівнює 36 см, причому його довжина вдвічі більша за ширину. Знайдіть сторони прямокутника та його площу.

3 **12.** За 7 олівців і 3 ручки заплатили 50 грн 85 коп. Скільки коштує один олівець, якщо він дешевший за ручку на 4 грн 95 коп.?

13. У кошику було в 4 рази менше винограду, ніж у ящику. Після того як з ящика до кошика переклали 1,5 кг винограду, у кошику стало втричі менше винограду, ніж у ящику. Скільки кілограмів винограду було в кошику і скільки – у ящику спочатку?

14. За 4,5 год човен за течією річки долає таку саму відстань, як за 6 год проти течії. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість човна дорівнює 14 км/год.

15. На проміжній станції поїзд було затримано на 0,5 год. Збільшивши швидкість на 15 км/год, він через 2 год прибув на кінцеву станцію чітко за розкладом. Якою була швидкість поїзда до затримки?

4 **16.** На двох тарілках було по 60 вареників. Після того як з першої тарілки з'їли утричі більше вареників, ніж з другої, на ній залишилося вдвічі менше вареників, ніж на другій. По скільки вареників залишилося на кожній тарілці?

17. Для преміювання працівників офісу нараховано певну суму коштів. Якщо кожен отримає по 11 000 грн, то 2000 грн ще залишаться, а щоб кожен отримав по 12 000 грн, не вистачить 6000 грн. Скільки працівників у офісі та яку суму коштів нараховано для преміювання?

* **18.** У першій овочевій ятці запланували продати 95 кг лимонів, а у другій – 60 кг. У першій щодня продавали по 7 кг, а у другій – по 6 кг. Через скільки днів лимонів у першій ятці залишиться вдвічі більше, ніж у другій?

19. Змішали 15-відсотковий розчин добрива з 5-відсотковим і одержали 180 г 7,5-відсоткового розчину. По скільки грамів кожного розчину взяли?

Головне в темі 1

РІВНЯННЯ

Рівнянням називають рівність, що містить змінну.

КОРІНЬ РІВНЯННЯ

Значення змінної, яке перетворює рівняння у правильну числову рівність, називають ***коренем***, або ***розв'язком***, ***рівняння***.

Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

РІВНОСИЛЬНІ РІВНЯННЯ

Два рівняння називають ***рівносильними***, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і такі рівняння, які коренів не мають.

ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Рівняння вигляду $ax = b$, де x – змінна, a і b – деякі числа, називають ***лінійним рівнянням з однією змінною***.

РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ

$ax = b$, x – змінна, a і b – числа

якщо $a \neq 0$, то $x = \dfrac{b}{a}$	якщо $a = 0$ і $b = 0$, то x – будь-яке число	якщо $a = 0$, а $b \neq 0$, то рівняння не має коренів

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розв'язувати задачу за допомогою рівняння слід у такій послідовності:

1) позначити змінною одну з невідомих величин;
2) інші невідомі величини (якщо вони є) виразити через уведену змінну;
3) за умовою задачі встановити співвідношення між невідомими та відомими значеннями величин і скласти рівняння;
4) розв'язати одержане рівняння;
5) проаналізувати розв'язки рівняння і знайти невідому величину, а за потреби і значення інших невідомих величин;
6) записати відповідь до задачі.

ТЕМА 2

ЕЛЕМЕНТАРНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ. СУМІЖНІ ТА ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **пригадаєте** елементарні геометричні фігури: точку, пряму, промінь, кут, відрізок;
- **дізнаєтеся** про основні властивості елементарних геометричних фігур; що таке аксіома, теорема, означення, ознака, наслідок; суміжні та вертикальні кути; кут між двома прямими;
- **навчитеся** розв'язувати задачі, пов'язані з відрізками та кутами; застосовувати властивості суміжних і вертикальних кутів до розв'язування задач.

§ 4. Геометричні фігури. Точка, пряма, промінь

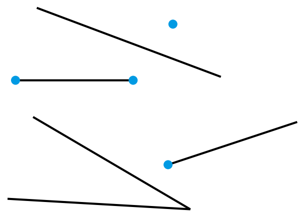
Геометрія

Ви починаєте вивчати один з найцікавіших предметів – **геометрію** (у перекладі з грецької *гео* – земля, *метрео* – міряти). Виникнення геометрії пов'язане з практичною діяльністю людини. Ще давні єгиптяни та греки близько трьох тисяч років тому вміли виконувати різні вимірювання, потрібні для розмічування ділянок, спорудження будівель, прокладання доріг тощо. У процесі практичної діяльності землемірів, будівельників, астрономів, мореплавців, художників поступово складалися правила геометричних вимірювань, побудов та обчислень.

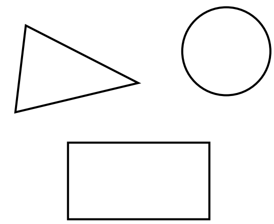
Пізніше, завдяки давньогрецьким ученим Фалесу, Піфагору, Евкліду та іншим, дедалі більшу роль у геометрії стали відігравати системи міркувань, які давали змогу доводити нові формули та факти на основі раніше відомих. На початок нашої ери геометрія вже сформувалася як наука, у якій властивості геометричних фігур вивчають шляхом міркувань.

Отже, геометрія виникла на основі діяльності людини. Спочатку вона використовувалася суто практично, але згодом сформувалася як самостійна математична наука.

З уроків математики ви вже знаєте деякі геометричні фігури: точка, пряма, відрізок, промінь, кут, трикутник, прямокутник, коло (мал. 4.1 і 4.2). На уроках геометрії ви розширите й поглибите знання про ці фігури, ознайомитеся з іншими важливими фігурами та їхніми властивостями.



Мал. 4.1



Мал. 4.2

Геометрія – це наука про властивості геометричних фігур.

Точка

Найпростіша геометрична фігура – ***точка***. Уявлення про точку можна отримати, якщо на аркуш паперу натиснути добре загостреним олівцем або на шкільну дошку – добре загостреним шматком крейди.

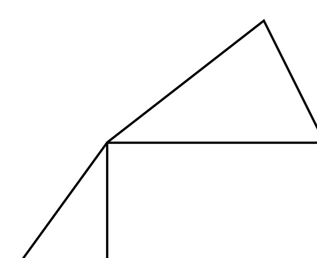
З точок складаються всі інші геометричні фігури.

↓

Будь-яка множина точок є геометричною фігурою.

Частина геометричної фігури теж є геометричною фігурою. Геометричною фігурою є й об'єднання кількох геометричних фігур. На малюнку 4.3 фігура складається з прямокутника і двох трикутників.

Одна з основних геометричних фігур – ***площина***. Уявлення про частину площини дає поверхня стола, шибки, стелі тощо. Площину в геометрії вважають рівною та необмеженою; вона не має ані краю, ані товщини. У 7–9-му класах ви вивчатимете частину шкільного курсу геометрії – ***планіметрію***.

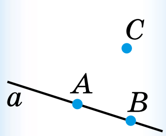


Мал. 4.3

Планіметрія вивчає властивості фігур на площині.

Пряма

Основними геометричними фігурами на площині є ***точка*** і ***пряма***. Прямі можна проводити за допомогою лінійки. При цьому ми зображуємо лише частину прямої, а всю пряму уявляємо нескінченною в обидва боки. Прямі найчастіше позначають маленькими латинськими буквами a, b, c, d, ..., а точки – великими латинськими буквами A, B, C, D, ...



Точки A і B *лежать* на прямій a, або пряма a *проходить через точки* A і B.

Кажуть: «точки A і B *належать прямій* a».

Точка C *не лежить* на прямій a.

Кажуть: «точка C *не належить прямій* a», або «пряма a *не проходить через точку* C».

Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

Кажуть: «точка A *належить прямій* a». → **Записують: $A \in a$.**

Кажуть: «точка C *не лежить* на прямій a». → **Записують: $C \notin a$.**

Зауважимо, що через точки A і B не можна провести іншої прямої, яка б не збігалася з прямою a.

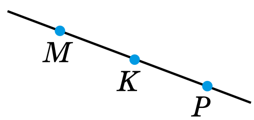
Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.

Тут і далі, говорячи про «дві точки», «дві прямі», вважатимемо, що ці точки, прямі – різні.

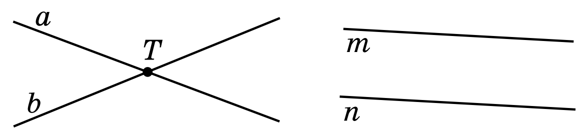
Пряму, на якій позначено дві точки, наприклад A і B, записують двома буквами: AB або BA. Якщо точка C, наприклад, не належить прямій AB, це записують так: $C \notin AB$, і кажуть, що *точки A, B і C не лежать на одній прямій*.

Точки M, K і P лежать на одній прямій (мал. 4.4), причому точка K лежить між точками M і P.

> **!** З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.



Мал. 4.4



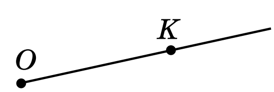
Мал. 4.5

Якщо дві прямі мають спільну точку, то кажуть, що вони *перетинаються* в цій точці. На малюнку 4.5 прямі a і b перетинаються в точці T, а прямі m і n не перетинаються.

Промінь

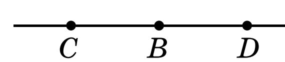
Проведемо пряму та позначимо на ній точку A (мал. 4.6). Ця точка ділить пряму на дві частини, кожну з яких разом з точкою A називають ***променем***, що виходить з точки A. Точку A називають ***початком*** кожного з променів. Промені позначають двома великими латинськими буквами, перша з яких означає початок променя, а друга – деяку точку на промені (наприклад, промінь OK на малюнку 4.7).

Мал. 4.6



Мал. 4.7

Доповняльні промені



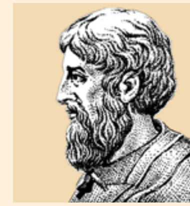
Мал. 4.8

Два промені, що мають спільний початок і доповнюють один одного до прямої, називають ***доповняльними***. На малюнку 4.8 промінь BC є доповняльним для променя BD, і навпаки, промінь BD є доповняльним для променя BC.

А ще раніше...

Перші відомості про властивості геометричних фігур люди отримували з практичної діяльності та спостережень за довколишнім світом. Перший твір, що містить найпростіші геометричні відомості про знаходження площ деяких фігур та об'ємів тіл, дійшов до нас із Давнього Єгипту. Він датується XVII ст. до н. е. Описані в цьому творі правила обчислення площ та об'ємів отримали з практики. Жодних логічних доведень їх істинності не наводилося. Самі ж значення площ та об'ємів, обчислені за такими правилами, були приблизними.

Про зародження геометрії у Давньому Єгипті давньогрецький історик Геродот (V ст. до н. е.) писав: «Сезострис, єгипетський фараон, розділив землю, давши кожному єгиптянину ділянку за жеребкуванням, та стягував відповідно податок з кожної ділянки. Бувало, що Ніл заливав ту чи ту ділянку, тоді потерпілий звертався до фараона, а той посилав землемірів, щоб установити, на скільки зменшилася ділянка, і відповідно зменшував податок. Так виникла геометрія в Єгипті, а звідти перейшла у Грецію».



Фалес
(бл. 640–548 рр. до н. е.)

Саме в Давній Греції й відбулося становлення геометрії як науки. Завдяки грецьким геометрам Фалесу, Піфагору, Демокріту (бл. 460–370 рр. до н. е.) відбувся поступовий перехід від практичної до теоретичної геометрії. Ці та інші вчені зробили кроки до строгого обґрунтування геометричних фактів і теорем, збагатили науку численними теоремами, які ми використовуємо й донині.

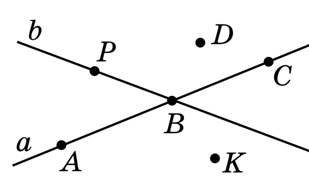
Піфагор
(бл. 580–500 рр. до н. е.)

Так було створено науку, що вивчає форми, розміри, властивості, взаємне розміщення геометричних фігур. Цю науку, як і раніше, називають *геометрією*, хоча її зміст вийшов далеко за межі вчення про вимірювання землі.

Що вивчає геометрія? ○ Наведіть приклади геометричних фігур. ○ Назвіть основні геометричні фігури на площині. ○ Як позначають прямі та точки? ○ Скільки прямих можна провести через дві точки? ○ Що таке промінь? ○ Як позначають промені? ○ Які промені називають доповняльними?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

4.1. Назвіть за малюнком 4.9:
1) точки, що належать прямій a;
2) точки, що належать прямій b;
3) точку, що належить і прямій a, і прямій b;
4) точки, що належать прямій a, але не належать прямій b;
5) точки, що не належать ані прямій a, ані прямій b.



Мал. 4.9

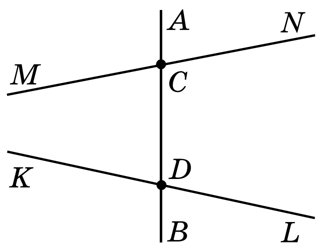
4.2. Позначте в зошиті точки M і N та проведіть через них пряму. Назвіть цю пряму. Позначте точку K, що належить побудованій прямій, і точку L, яка їй не належить. Зробіть відповідні записи.

4.3. Проведіть пряму *a*. Позначте дві точки, що належать цій прямій, і дві точки, які їй не належать. Назвіть точки та запишіть взаємне розміщення прямої і точок, використовуючи символи $\in$ і $\notin$.

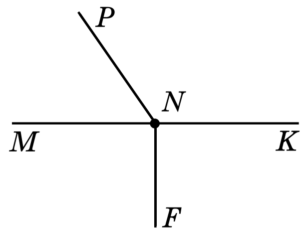
4.4. На малюнку 4.10 пряма *AB* перетинає прямі *MN* і *KL* у точках *C* і *D*. Запишіть:

1) усі промені з початком у точці *C*;

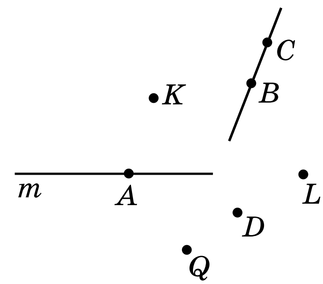
2) пари доповняльних променів, початок яких – точка *D*.



Мал. 4.10



Мал. 4.11



Мал. 4.12

4.5. 1) Запишіть усі промені, зображені на малюнку 4.11.

2) Чи є серед цих променів пари доповняльних променів?

4.6. Позначте в зошиті точки *M*, *N*, *F* так, щоб через них можна було провести пряму. Запишіть усі можливі назви цієї прямої.

4.7. Позначте в зошиті точки *B*, *C* і *D* так, щоб записи *CD* і *CB* позначали одну й ту саму пряму. Як ще можна назвати цю пряму?

4.8. Використовуючи малюнок 4.12:

1) з'ясуйте, чи перетинаються прямі *m* і *CB*;

2) запишіть усі точки, які належать прямій *m*;

3) запишіть усі точки, які належать прямій *BC*;

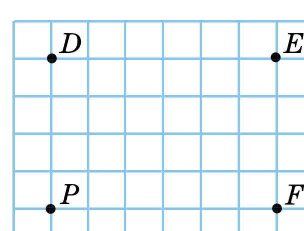
4) запишіть точки, які не належать ані прямій *m*, ані прямій *BC*.

4.9. Позначте в зошиті точки *D*, *E*, *F*, *P*, як на малюнку 4.13.

1) Через кожні дві точки проведіть пряму. Запишіть назви всіх цих прямих.

2) Скільки всього прямих утворилося?

3) На скільки частин ці прямі розбивають площину?



Мал. 4.13

4.10. Позначте в зошиті три точки A, B і C, що не лежать на одній прямій.

1) Через кожні дві точки проведіть пряму. Запишіть усі утворені прямі.

2) Скільки всього прямих утворилося?

3) На скільки частин ці прямі розбивають площину?

4.11. Точка A ділить пряму m на два промені. За якої умови точки B і C цієї прямої належать одному променю; різним променям?

Життєва математика

4.12. Парк має форму прямокутника розмірами 800 м і 600 м, по периметру якого є доріжка для бігу, ходьби або велосипедних прогулянок.

1) Семикласник Вадим веде здоровий спосіб життя та щоранку пробігає по доріжці парку зі швидкістю 14 км/год. Скільки часу витрачає учень на пробіжку?

2) Батьки Вадима також ведуть здоровий спосіб життя та щовечора прогулюються доріжкою парку, це займає в них 50 хв. З якою швидкістю прогулюються батьки Вадима?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

4.13. Накресліть відрізок MN, позначте на ньому точки A і B. Запишіть усі утворені відрізки з кінцями в точках M, N, A і B.

4.14. Побудуйте відрізки AB і DC так, щоб $AB = 5$ см, $CD = 6$ см 2 мм. Порівняйте довжини відрізків.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

4.15. На площині проведено три прямі. На першій позначено 2023 точки, на другій – 2024, а на третій – 2025 точок. Яку найменшу загальну кількість точок при цьому може бути позначено?

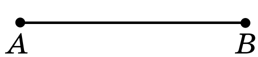
§ 5. Відрізок. Вимірювання відрізків. Відстань між двома точками

Відрізок

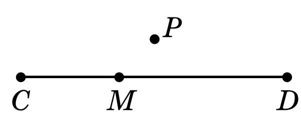
Відрізком **називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома її точками разом із цими точками. Ці точки називають *кінцями відрізка*.**

На малюнку 5.1 зображено відрізок AB або відрізок BA; точки A і B – його кінці. На малюнку 5.2 точка M належить відрізку CD (її ще називають ***внутрішньою точкою*** відрізка), а точка P йому не належить.

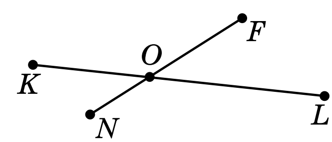
На малюнку 5.3 відрізки KL і FN мають єдину спільну точку O. Кажуть, що відрізки KL і FN *перетинаються* в точці O.



Мал. 5.1



Мал. 5.2

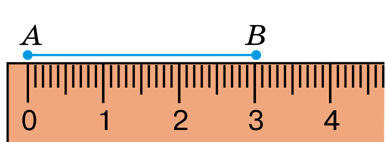


Мал. 5.3

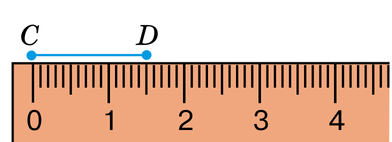
Вимірювання відрізків

На практиці часто доводиться вимірювати відрізки. Для цього потрібно мати ***одиничний відрізок*** (одиницю вимірювання). Одиницями вимірювання довжини є 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

Для вимірювання відрізків використовують різні вимірювальні інструменти. Одним з таких інструментів є лінійка з поділками. На малюнку 5.4 довжина відрізка AB дорівнює 3 см. Коротко кажуть: «Відрізок AB дорівнює 3 см». На малюнку 5.5 довжина відрізка CD дорівнює 1 см 5 мм, або 1,5 см, або 15 мм. Записують це так: $AB = 3$ см, $CD = 1{,}5$ см $= 15$ мм.



Мал. 5.4



Мал. 5.5

! Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.

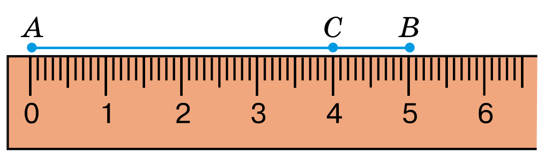
Іншими інструментами, якими можна вимірювати відрізки, є складаний метр (мал. 5.6), рулетка (мал. 5.7), клейончастий сантиметр (мал. 5.8).

Мал. 5.6

Мал. 5.7

Мал. 5.8

На малюнку 5.9 зображено відрізок AB. Точка C ділить його на два відрізки: AC і CB (кажуть також, що точка C належить відрізку AB). Бачимо, що $AC = 4$ см, $CB = 1$ см, $AB = 5$ см. Отже, $AC + CB = AB$.



Мал. 5.9

Маємо *основну властивість вимірювання відрізків.*

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.

Довжину відрізка називають також ***відстанню між його кінцями***. На малюнку 5.9 відстань між точками A і C дорівнює 4 см.

Приклад 1. Чи лежать точки A, B і K на одній прямій, якщо:
1) $AB = 10$ см, $AK = 6$ см, $KB = 4$ см;
2) $AB = 9$ см, $AK = 6$ см, $KB = 5$ см?

Розв'язання. Якщо три точки A, B і K лежать на одній прямій, то довжина більшого з трьох відрізків AB, AK і KB має дорівнювати сумі довжин двох менших.

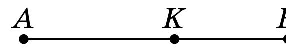
1) Оскільки $10 = 6 + 4$, то $AB = AK + KB$. Точки A, B і K лежать на одній прямій, причому точка K лежить між точками A і B.

2) Оскільки $9 \neq 6 + 5$, то $AB \neq AK + KB$. Точки A, B і K не лежать на одній прямій.

Відповідь: 1) так; 2) ні.

Приклад 2. Точка K належить відрізку AB, довжина якого 15 см. Знайти довжини відрізків AK і KB, якщо AK більший за KB на 3 см.

Розв'язання. Розглянемо малюнок 5.10, на якому точка K належить відрізку AB, $AB = 15$ см.



Мал. 5.10

1) Нехай $KB = x$ см, тоді $AK = (x + 3)$ см.

2) Оскільки $AK + KB = AB$ (за основною властивістю вимірювання відрізків), маємо рівняння:

$$(x + 3) + x = 15.$$

Розв'яжемо це рівняння: $2x + 3 = 15$; $x = 6$ (см).

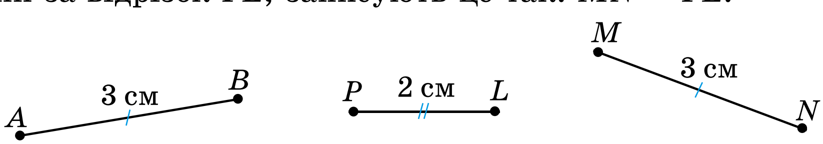
3) Отже, $KB = 6$ см, $AK = 6 + 3 = 9$ (см).

Відповідь: $KB = 6$ см, $AK = 9$ см.

Порівняння довжин відрізків

Два відрізки називають *рівними*, якщо рівні їхні довжини.

З двох відрізків більшим вважають той, довжина якого більша. На малюнку 5.11 довжина відрізка MN дорівнює довжині відрізка AB, тому ці відрізки рівні між собою. Можна записати: $MN = AB$. На цьому самому малюнку довжина відрізка MN більша за довжину відрізка PL. Кажуть, що відрізок MN більший за відрізок PL, записують це так: $MN > PL$.



Мал. 5.11

На малюнках рівні відрізки прийнято позначати однаковою кількістю рисочок, а відрізки неоднакової довжини – різною кількістю рисочок.

Середина відрізка

Точку відрізка, яка ділить його навпіл, тобто на два рівні між собою відрізки, називають ***серединою відрізка***.

$AC = 2$ **см**, $CB = 2$ **см**

тому точка C – середина відрізка AB.

Очевидно, що

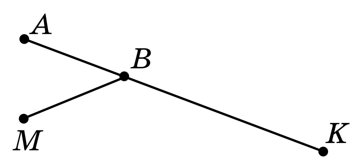
> якщо два відрізки рівні, то їхні половини рівні, і навпаки, якщо половини двох відрізків рівні, то й самі відрізки рівні.

Що називають відрізком? ○ Що таке кінці відрізка? ○ Які одиниці вимірювання довжини ви знаєте? ○ Якими інструментами вимірюють довжини відрізків? ○ Що називають відстанню між двома точками? ○ Сформулюйте основну властивість вимірювання довжин відрізків. ○ Які відрізки називають рівними? ○ Яку точку називають серединою відрізка?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

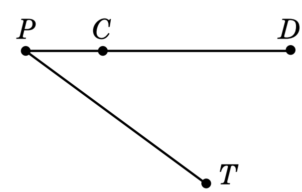
1

5.1. Назвіть усі відрізки, зображені на малюнку 5.12. Виміряйте довжини двох з них.



Мал. 5.12

5.2. Запишіть усі відрізки, зображені на малюнку 5.13, та виміряйте довжини трьох з них.



Мал. 5.13

5.3. Позначте в зошиті точки C і D та знайдіть відстань між ними.

2

5.4. Накресліть відрізки AB і MN так, щоб $AB = 7$ см 2 мм, $MN = 6$ см 3 мм. Порівняйте довжини відрізків AB і MN.

5.5. Накресліть відрізки KL і FP так, щоб $KL = 5$ см 9 мм, $FP = 6$ см 8 мм. Порівняйте довжини відрізків KL і FP.

5.6. Точка C лежить між точками A і B (мал. 5.14). Знайдіть:

1) AB, якщо $AC = 5$ см, $CB = 2$ см;

2) BC, якщо $AB = 12$ дм, $AC = 9$ дм.

Мал. 5.14

5.7. Точка K лежить між точками P і Q (мал. 5.15). Знайдіть:

1) PQ, якщо $PK = 3$ дм, $KQ = 7$ дм;

2) PK, якщо $PQ = 8$ см, $KQ = 6$ см.

Мал. 5.15

5.8. Чи лежать точки K, L і M на одній прямій, якщо:

1) $KL = 8$ см, $LM = 3$ см, $KM = 11$ см;

2) $KL = 5$ см, $LM = 9$ см, $KM = 8$ см?

У разі ствердної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

5.9. Чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо:
1) $AB = 7$ см, $BC = 3$ см, $AC = 9$ см;
2) $AB = 5$ см, $BC = 2$ см, $AC = 7$ см?
У разі ствердної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

5.10. На прямій позначено точки P, L і M, причому $PL = 42$ мм, $PM = 3$ см 2 мм, $LM = 0{,}74$ дм. Яка з точок лежить між двома іншими? Відповідь обґрунтуйте.

5.11. Чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо $AB = 12$ см, $BC = 1{,}5$ дм, $AC = 40$ мм?

5.12. На малюнку 5.16 довжини відрізків AB і CD однакові. Обґрунтуйте, чому $AC = BD$.

Мал. 5.16

5.13. На малюнку 5.16 довжини відрізків AC і BD однакові. Обґрунтуйте, чому $AB = CD$.

5.14. Точки C і D належать відрізку AB. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $AB = 40$ см, $AC = 25$ см, $BD = 32$ см.

5.15. Точки C і D належать відрізку MN. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $MN = 50$ см, $MC = 40$ см, $ND = 16$ см.

5.16. Розв’яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте назву першої столиці України.

Точка C належить відрізку AB завдовжки 14 дм. Знайдіть довжини відрізків AC і BC, якщо:	AC	BC
AC втричі менший від BC	В	Х
AC більший за BC на 1,8 дм	Р	К
$AC : BC = 3 : 2$	А	І

10,5 дм	8,4 дм	7,9 дм	6,1 дм	5,6 дм	3,5 дм

5.17. Розв’яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище українського поета та правозахисника. Дізнайтеся з інтернету про його біографію, творчий шлях і боротьбу за незалежність України.

Точка M належить відрізку $CD = 8{,}4$ см. Визначте довжину відрізків CM і DM, якщо:	CM	DM
CM більший за DM на 0,6 см	У	Т
$CM : DM = 1 : 3$	С	С

2,1 см	3,9 см	4,5 см	6,3 см

5.18. Точки C, D і M лежать на одній прямій. Знайдіть відстань між точками C і D, якщо відстань між точками C і M дорівнює 5,2 см, а відстань між точками D і M – 4,9 см. Скільки розв'язків має задача?

5.19. На прямій позначено точки A, M і N, причому $AM = 7{,}2$ см, $MN = 2{,}5$ см. Знайдіть відстань між точками A і N. Скільки розв'язків має задача?

Життєва математика

5.20. На хімічному комбінаті, де у великій кількості є отруйні й небезпечні для життя речовини, унаслідок аварії стався витік хлору. Відомо, що в безвітряну погоду хлор стелиться по землі. Поширюючись, він займає ділянку поверхні у формі круга.

1) Обчисліть площу зараженої території, якщо відстань від місця витоку хлору до межі по радіусу 200 м.

2) Обчисліть, якої довжини мотузка знадобиться для огородження зараженої зони.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

5.21. Назвіть вид кута (гострий, прямий, тупий, розгорнутий), градусна міра якого дорівнює:

1) 52°; 2) 180°; 3) 129°;
4) 90°; 5) 2°; 6) 173°.

5.22. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює:

1) 60°; 2) 25°; 3) 90°;
4) 110°; 5) 180°; 6) 145°.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

5.23. Розділіть трикутник двома прямими на:

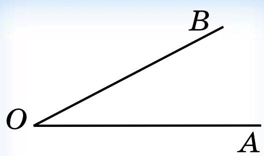
1) два трикутники й один чотирикутник;

2) два трикутники, один чотирикутник і один п'ятикутник.

§ 6. Кут. Вимірювання кутів. Бісектриса кута

Кут

Кут **— це геометрична фігура, яка складається з двох променів, що виходять з однієї точки.**
Промені називають *сторонами кута*, а їхній спільний початок — *вершиною кута*.

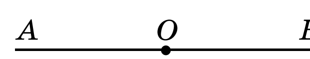


O **— вершина кута,**
OA **і** ***OB*** **— сторони кута.**

Називають:
кут *O*, або
кут *AOB*, або
кут *BOA*
(буква *O*, що позначає його вершину, ставиться посередині).

Записують:
$\angle O$,
або
$\angle AOB$,
або
$\angle BOA$.

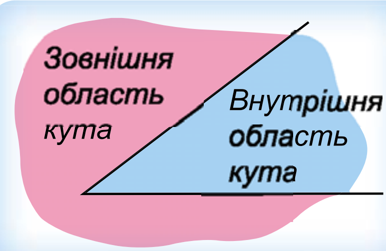
Розгорнутий кут — це кут, сторони якого є доповняльними променями (мал. 6.1).



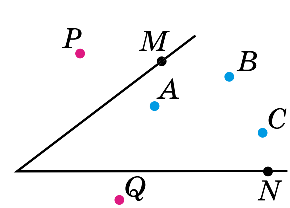
Мал. 6.1

Будь-який кут ділить площину на дві частини.

Якщо кут не розгорнутий, то одну із частин називають *внутрішньою областю* кута, а іншу — *зовнішньою*.



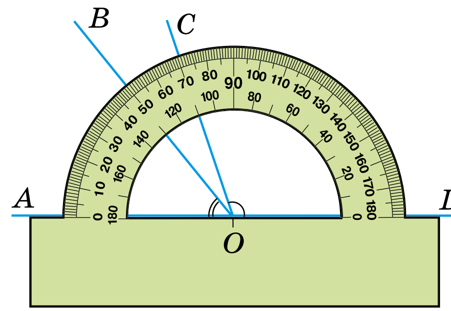
На малюнку 6.2 точки A, B і C належать внутрішній області кута (лежать усередині кута), точки M і N належать сторонам кута, а точки P і Q належать зовнішній області кута (лежать поза кутом). Якщо кут є розгорнутим, то будь-яку з двох частин, на які він ділить площину, можна вважати внутрішньою областю кута.



Мал. 6.2

Вимірювання кутів

За одиницю вимірювання кутів приймають ***градус*** – кут, який становить $\dfrac{1}{180}$ від розгорнутого кута. Позначають градус знаком °. Для вимірювання кутів використовують *транспортир* – інструмент, який ви знаєте з молодших класів.



Мал. 6.3

На малюнку 6.3 градусна міра кута AOB дорівнює 50°, а кута COD – 110°. Коротко кажуть: «кут AOB дорівнює 50°, кут COD дорівнює 110°»; записують так: $\angle AOB = 50°$, $\angle COD = 110°$.

> Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180°.

Дуже малі кути вимірюють у мінутах і секундах.

Мінута – це $\dfrac{1}{60}$ частина градуса, позначають знаком $'$.

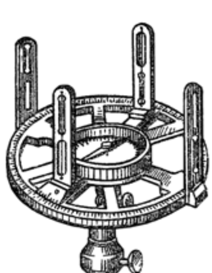
Секунда – $\dfrac{1}{60}$ частина мінути, позначають знаком $''$.

Отже, $1° = 60'$, $1' = 60''$.

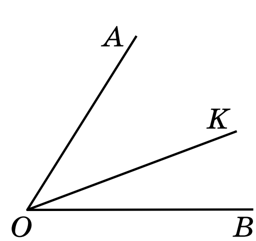
На місцевості кути вимірюють *астролябією* (мал. 6.4).

Будемо вважати, що промінь OK ***проходить між сторонами кута AOB***, якщо він виходить з його вершини й лежить у його внутрішній області (мал. 6.5).

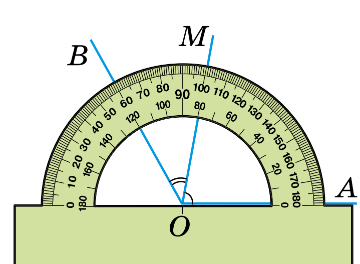
На малюнку **6.6** промінь OM проходить між сторонами кута AOB і ділить його на два кути: BOM і MOA. Бачимо, що $\angle BOM = 40°$, $\angle MOA = 80°$, $\angle AOB = 120°$. Отже, $\angle AOB = \angle BOM + \angle MOA$.



Мал. 6.4



Мал. 6.5



Мал. 6.6

Маємо *основну властивість вимірювання кутів*.

Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Приклад. Промінь OK ділить кут AOB на два кути (мал. 6.5). Знайти градусну міру кута AOK, якщо $\angle AOB = 75°$, а кут KOB складає 40 % від кута AOB.

Розв'язання. 1) $\angle KOB = 0{,}4 \cdot \angle AOB = 0{,}4 \cdot 75° = 30°$.

2) $\angle AOK = \angle AOB - \angle KOB = 75° - 30° = 45°$.

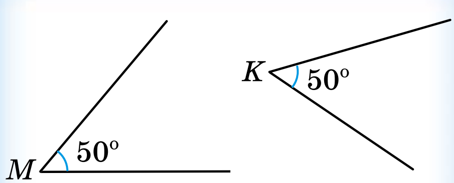
Відповідь: 45°.

Порівняння кутів

З'ясуємо, як порівнювати кути.

Два кути називають *рівними між собою*, якщо в них однакові градусні міри.

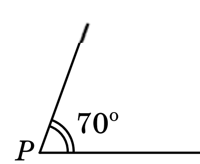
З двох кутів більшим вважають той, градусна міра якого є більшою.



$\angle \boldsymbol{M} = 50°$, $\angle \boldsymbol{K} = 50°$

Ці кути рівні між собою, тому $\angle M = \angle K$. На малюнку такі кути позначають однаковою кількістю дужок при вершині, а якщо кути не є рівними між собою, – різною кількістю дужок.

На малюнку 6.7 градусна міра кута P дорівнює 70°, тому кут P більший за кут M. Записують це так: $\angle P > \angle M$.



Мал. 6.7

Очевидно, що

якщо два кути рівні, то їхні половини рівні, і навпаки, якщо половини двох кутів рівні, то й самі кути рівні.

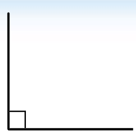
Види кутів

Крім розгорнутого кута, є й інші види кутів.

Якщо градусна міра кута дорівнює 90°, то такий кут називають *прямим*.

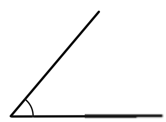
Якщо градусна міра кута менша від прямого кута (від 90°), то такий кут називають *гострим*.

Якщо градусна міра кута більша за прямий (за 90°) і менша від розгорнутого, то такий кут називають *тупим*.

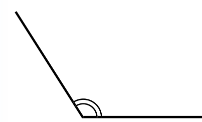


Прямий

такий кут позначають знаком ⌝



Гострий

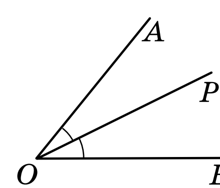


Тупий

Бісектриса кута

Бісектрисою кута **називають промінь, який виходить з його вершини і ділить кут навпіл.**

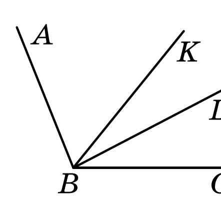
На малюнку 6.8 промінь OP – бісектриса кута AOB.



Мал. 6.8

Приклад. $\angle ABC = 100°$, BK – бісектриса кута ABC, а BL – бісектриса кута KBC. Знайти $\angle ABL$.

Розв'язання. Розглянемо малюнок 6.9.



Мал. 6.9

1) $\angle KBC = \dfrac{\angle ABC}{2} = \dfrac{100°}{2} = 50°$.

2) $\angle LBC = \dfrac{\angle KBC}{2} = \dfrac{50°}{2} = 25°$.

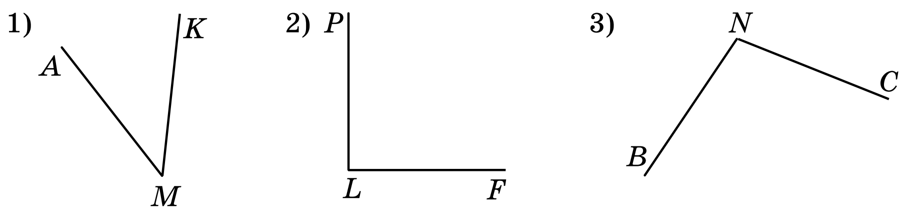
3) $\angle ABL = \angle ABC - \angle LBC = 100° - 25° = 75°$.

Відповідь: 75°.

Яку фігуру називають кутом? ○ Як позначають кут? ○ Що таке вершина кута; сторона кута? ○ Який кут називають розгорнутим? ○ Якими інструментами вимірюють кути? ○ У яких одиницях вимірюють кути? ○ Що означає вислів: «Промінь проходить між сторонами кута»? ○ Сформулюйте основну властивість вимірювання кутів. ○ Які кути називають рівними? ○ Який кут називають прямим; гострим; тупим? ○ Який промінь називають бісектрисою кута?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **6.1.** Назвіть вершини і сторони кутів, зображених на малюнку 6.10.



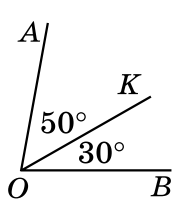
Мал. 6.10

6.2. Запишіть вершину і сторони кута:
1) MOP;
2) BLK.

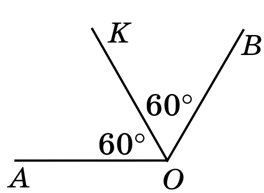
6.3. Який з даних кутів гострий, тупий, прямий, розгорнутий:
1) $\angle A = 39°$; 2) $\angle B = 90°$; 3) $\angle C = 91°$;
4) $\angle D = 170°$; 5) $\angle M = 180°$; 6) $\angle Q = 79°$;
7) $\angle P = 1°3'$; 8) $\angle F = 173°12'$; 9) $\angle K = 45°$?

6.4. Випишіть, які з наведених кутів гострі, тупі, прямі, розгорнуті:
1) $\angle K = 121°$; 2) $\angle A = 90°$; 3) $\angle L = 12°$;
4) $\angle E = 180°$; 5) $\angle M = 89°$; 6) $\angle N = 93°12'$.

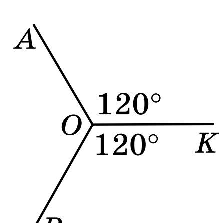
6.5. (*Усно.*) Чи є промінь OK бісектрисою кута AOB (мал. 6.11–6.13)?



Мал. 6.11



Мал. 6.12



Мал. 6.13

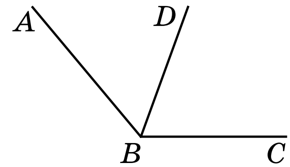
2

6.6. За малюнком 6.14:

1) запишіть усі зображені кути;

2) користуючись транспортиром, знайдіть градусні міри деяких двох з них;

3) обчисліть градусну міру третього кута.



Мал. 6.14

6.7. Користуючись транспортиром, знайдіть градусні міри кутів, зображених на малюнку 6.10. Визначте вид кожного з них.

6.8. Накресліть кут градусної міри:

1) 30°; 2) 90°; 3) 115°; 4) 75°.

6.9. Накресліть кут, градусна міра якого:

1) 65°; 2) 100°; 3) 20°; 4) 155°.

6.10. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 140°, і проведіть його бісектрису.

6.11. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 50°, і проведіть його бісектрису.

6.12. Виконайте дії:

1) $7°13' + 12°49'$; 2) $52°17' - 45°27'$.

6.13. Виразіть:

1) у мінутах: 4°; 2°15′; 2) у секундах: 5′; 2°; 1°3′.

6.14. Промінь OK проходить між сторонами кута BOC. Знайдіть градусну міру кута BOC, якщо $\angle BOK = 38°$, $\angle KOC = 42°$. Виконайте малюнок.

6.15. Промінь PC проходить між сторонами кута APB. Знайдіть градусну міру кута CPB, якщо $\angle APB = 108°$, $\angle APC = 68°$. Виконайте малюнок.

3

6.16. Чи проходить промінь BK між сторонами кута ABC, якщо $\angle ABC = 52°$, $\angle ABK = 57°$? Відповідь обґрунтуйте.

6.17. Знайдіть градусні міри кутів між годинною та хвилинною стрілками годинника:

1) о 18 год; 2) о 3 год; 3) о 1 год; 4) о 20 год.

6.18. Знайдіть градусну міру кута між годинною та хвилинною стрілками годинника:

1) о 21 год; 2) о 6 год; 3) о 19 год; 4) о 2 год.

6.19. Промінь OC ділить кут AOB на два кути. Знайдіть градусну міру кута BOC, якщо $\angle AOB = 60°$ і $\angle AOC = \frac{2}{3}\angle AOB$.

6.20. Промінь AB ділить кут MAK на два кути. Знайдіть градусну міру кута MAK, якщо $\angle MAB = 70°$, а кут BAK становить 60 % від кута MAB.

4 **6.21.** Кут між бісектрисою кута і продовженням однієї з його сторін за вершину кута дорівнює 142°. Знайдіть градусну міру цього кута.

6.22. Який кут утворює бісектриса кута 98° з продовженням однієї з його сторін за вершину кута?

6.23. 1) Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище.

$\angle MQB = 120°$. Між сторонами кута проходить промінь QP. Знайдіть кути PQB і MQP, якщо:	$\angle PQB$	$\angle MQP$
кут PQB у 4 рази менший від кута MQP	У	К
$\angle PQB : \angle MQP = 3 : 2$	Р	Ч
кут PQB на 20° більший за кут MQP	А	В

96°	72°	70°	50°	48°	24°	96°

2) Яких відомих українців із цим прізвищем ви знаєте? Інтернет допоможе дізнатися про тих, кого не пригадали.

6.24. 1) Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте назву столиці європейської держави.

Промінь AC проходить між сторонами кута MAN, який дорівнює 84°. Знайдіть кути MAC і CAN, якщо:	$\angle MAC$	$\angle CAN$
кут MAC більший за кут CAN на 14°	Р	А
кут MAC менший від кута CAN утричі	В	Ш

21°	35°	49°	63°	35°	21°	35°

2) Дізнайтеся про відстань від Києва до цієї столиці та складіть задачу, пов'язану із цією відстанню.

6.25. Розгорнутий $\angle AOB$ променями OK і OL поділено на три кути так, що $\angle AOK = 140°$, $\angle BOL = 100°$. Знайдіть градусну міру кута LOK.

6.26. Прямий $\angle COD$ променями OM і ON поділено на три кути так, що $\angle CON = 70°$, $\angle MOD = 80°$. Знайдіть градусну міру кута MON.

Життєва математика

6.27. Фермерська родина Нечипоруків посіяла огірки в теплиці 28 м 50 см завдовжки і 16 м завширшки.

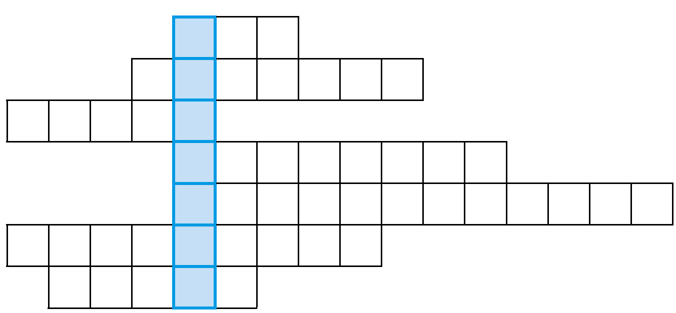
1) Скільки кілограмів огірків збере родина з теплиці, якщо з 1 м^2 збирають 30 кг огірків?

2) Яку виручку отримають фермери, якщо продадуть огірки під час весняного сезонного підвищення цін на овочі за ціною 18 грн за кілограм?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

6.28. 1) Пригадайте назви геометричних фігур, які ви розглянули в цій темі, і фігур, які ви знаєте з попередніх класів. Запишіть їхні назви в рядках кросворда. Якщо назви фігур записано правильно, то у виділеному стовпчику можна прочитати прізвище видатного українського математика.

2) Знайдіть у літературі чи інтернеті відомості про життєвий і творчий шлях цього математика. Інформацію про цього вченого можна знайти також і на сторінках підручника.



§ 7. Аксіоми, теореми, означення

Аксіоми

Аксіоми геометрії – це твердження про основні властивості найпростіших геометричних фігур, прийняті як початкові положення.

У перекладі з грецької слово *аксіома* означає *прийняте положення*.

Нагадаємо деякі аксіоми, які ви знаєте.

I. Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.
II. Через будь-які дві точки можна провести пряму і **до того ж тільки одну.**
III. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.
IV. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.
V. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.
VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180°.
VII. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Теореми

Математичне твердження, справедливість якого встановлюється за допомогою міркувань, називають ***теоремою***, а саме міркування називають ***доведенням теореми***.

Кожна теорема має ***умову*** (те, що дано) і ***висновок*** (те, що потрібно довести). Умову теореми прийнято записувати після слова «дано», а висновок – після слова «довести». Доводячи теорему, можна користуватися аксіомами, а також раніше доведеними теоремами. Жодні інші властивості геометричних фігур (навіть якщо вони здаються нам очевидними) використовувати не можна.

Означення

Твердження, у якому пояснюється зміст певного поняття (термін), називають ***означенням***. Ви вже знаєте деякі означення, наприклад означення відрізка, кута, бісектриси кута.

А ще раніше...

Давньогрецький учений Евклід у своїй видатній праці «Начала» зібрав та узагальнив багаторічний науковий досвід. Головним здобутком Евкліда було те, що він запропонував і розвинув аксіоматичний підхід до побудови курсу геометрії. Цей підхід полягає в тому, що спочатку формулюються основні положення (аксіоми), а потім на їх основі за допомогою логічних міркувань доводять інші твердження (теореми). Такий підхід до побудови курсу геометрії використовують і досі, формулюючи деякі з аксіом Евкліда в більш сучасному вигляді.

«Начала» згодом було перекладено на більшість європейських мов. У 1880 р. видатний український математик Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко опублікував переклад «Начал», додавши пояснення інших питань геометрії.

Евклід
(III ст. до н. е.)

М. Є. Ващенко-Захарченко
(1825–1912)

Саму науку, викладену в «Началах», називають *евклідовою геометрією*.

Значний внесок у розвиток геометрії зробили й інші давньогрецькі вчені, зокрема *Архімед* (бл. 287–212 рр. до н. е.) та *Аполлоній* (III ст. до н. е.).

Аналіз системи аксіом, які запропонував Евклід, тривав не одне століття. Його на межі XIX і XX ст. завершив видатний німецький математик Давид Гільберт (1862–1943). Він створив повну й несуперечливу систему аксіом геометрії Евкліда.

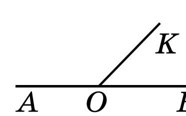
Що таке аксіома? ○ Наведіть приклади аксіом. ○ Що таке теорема; доведення теореми? ○ Що таке означення?

§ 8. Суміжні кути

Суміжні кути

Два кути називають *суміжними*, якщо одна сторона в них є спільною, а дві інші сторони цих кутів є доповняльними променями.

На малюнку 8.1 кути AOK і KOB – суміжні, сторона OK у них – спільна, а OA і OB є доповняльними променями.



Мал. 8.1

Властивості суміжних кутів

Теорема (властивість суміжних кутів).
Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Доведення. Нехай $\angle AOK$ і $\angle KOB$ – суміжні (мал. 8.1). Оскільки промені OA і OB утворюють розгорнутий кут, то $\angle AOK + \angle KOB = \angle AOB = 180°$. Отже, сума суміжних кутів дорівнює 180°. Теорему доведено. ■

Твердження, які випливають безпосередньо з аксіом чи теорем, називають ***наслідками***. Розглянемо наслідки з доведеної теореми.

Наслідок 1. Кут, суміжний з прямим кутом, – прямий.
Наслідок 2. Кут, суміжний з гострим кутом, – тупий; кут, суміжний з тупим кутом, – гострий.
Наслідок 3. Кути, суміжні до рівних кутів, є рівними.

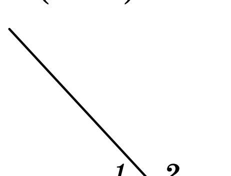
Приклад. Знайти градусну міру кожного із суміжних кутів, якщо один з них на 56° більший за інший.

Розв'язання. Для зручності записів позначимо менший з даних кутів – $\angle 1$, а більший – $\angle 2$.
1) Нехай $\angle 1 = x°$, тоді $\angle 2 = x° + 56°$.
2) Оскільки $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (за властивістю суміжних кутів), маємо рівняння: $x + x + 56 = 180$, звідки $x = 62°$.
3) Отже, один із шуканих кутів дорівнює 62°, а інший – $62° + 56° = 118°$.
Відповідь: 62°; 118°.

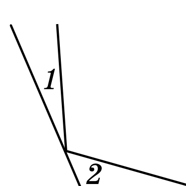
Які кути називають суміжними? ○ Сформулюйте та доведіть теорему про властивість суміжних кутів.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

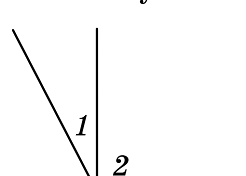
1 **8.1.** (*Усно.*) На яких з малюнків 8.2–8.5 кути *1* і *2* є суміжними?



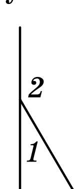
Мал. 8.2



Мал. 8.3



Мал. 8.4



Мал. 8.5

8.2. Чи можуть два суміжних кути дорівнювати:
1) $42°$ і $148°$; 2) $90°$ і $90°$;
3) $166°$ і $14°$; 4) $23°$ і $156°$?

8.3. Чи можуть два суміжних кути дорівнювати:
1) $13°$ і $167°$; 2) $5°$ і $165°$;
3) $11°$ і $179°$; 4) $91°$ і $89°$?

8.4. Знайдіть кут, суміжний з кутом: 1) $15°$; 2) $113°$.

8.5. Знайдіть кут, суміжний з кутом: 1) $127°$; 2) $39°$.

8.6. Накресліть за допомогою транспортира $\angle MON = 50°$. Побудуйте суміжний з ним кут за умови, що ON – їхня спільна сторона. Обчисліть його градусну міру.

8.7. Накресліть за допомогою транспортира $\angle APB = 115°$. Побудуйте суміжний з ним кут за умови, що PA – їхня спільна сторона. Обчисліть його градусну міру.

8.8. Промінь, що проходить між сторонами кута, ділить його на кути, що дорівнюють $15°$ і $72°$. Знайдіть градусну міру кута, суміжного з даним.

8.9. Бісектриса кута M утворює з його стороною кут, що дорівнює $36°$. Знайдіть градусну міру кута, який суміжний з кутом M.

8.10. Накресліть два суміжних кути так, щоб їхня спільна сторона була вертикальною, а градусні міри – неоднаковими.

8.11. Накресліть два суміжних кути різної градусної міри так, щоб їхня спільна сторона була горизонтальною.

8.12. Якщо суміжні кути рівні, то вони прямі. Доведіть це твердження.

8.13. Кути, суміжні до кутів A і B, рівні між собою. Доведіть, що $\angle A = \angle B$.

8.14. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них:
1) на $18°$ менший від іншого;
2) становить $\frac{3}{7}$ від іншого.

8.15. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них:
1) утричі більший за іншого;
2) становить $25\ \%$ від іншого.

8.16. Дано гострий кут M і тупий кут N, градусні міри яких відносяться як $2 : 5$. Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо кут, суміжний з одним з них, дорівнює $140°$.

8.17. Дано тупий кут A і гострий кут B, градусні міри яких відносяться як 4 : 3. Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо кут, суміжний з одним з них, дорівнює 80°.

8.18. Знайдіть кут між бісектрисами суміжних кутів.

8.19. Два кути відносяться як 1 : 2, а суміжні з ними – як 7 : 5. Знайдіть ці кути.

8.20. Один з двох даних кутів на 20° більший за інший, а суміжні з ними – відносяться як 5 : 6. Знайдіть дані кути.

8.21. Один із суміжних кутів удвічі більший за різницю цих кутів. Знайдіть ці кути.

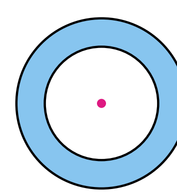
Вправи для повторення

8.22. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює:
1) 27°; 2) 119°.

8.23. Точки A, B і C лежать на одній прямій, AB = 2,7 см, BC = 3,6 см. Чи може відстань між точками A і C дорівнювати:
1) 0,8 см; 2) 0,9 см;
3) 1 см; 4) 6,1 см;
5) 6,3 см; 6) 6,5 см?

Життєва математика

8.24. Будівельникам для встановлення башти потрібно залити фундамент у формі кільця. Радіус зовнішнього кола цього фундаменту має дорівнювати 15 м, а внутрішнього – 10 м. Визначте площу земельної ділянки під фундаментом башти.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

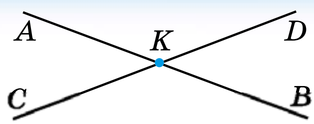
8.25. **Анаграми.** У цій задачі потрібно розшифрувати кожний запис, переставивши букви в ньому так, щоб отримати відоме слово. Такі перестановки називають *анаграмами*. Наприклад, розв’язати анаграму ВДАКТАР – означає знайти слово, складене із цих букв, – це КВАДРАТ.

Розв’яжіть анаграми:
1) ТУК; 2) АРЯМП;
3) КЛЕІВД; 4) МОРТЕІЯГЕ.

§ 9. Вертикальні кути. Кут між двома прямими, що перетинаються

Вертикальні кути

Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного з них є доповняльними променями сторін іншого.

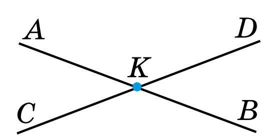


Прямі AB і CD перетинаються в точці K.

Утворилися дві пари вертикальних кутів:
$\angle AKC$ і $\angle DKB$ – вертикальні;
$\angle AKD$ і $\angle CKB$ – вертикальні.

Т Теорема (властивість вертикальних кутів).
Вертикальні кути рівні між собою.

Доведення. Нехай кути AKC і DKB – вертикальні (мал. 9.1).



Мал. 9.1

1) Оскільки кути AKC і AKD суміжні, то $\angle AKC + \angle AKD = 180°$.

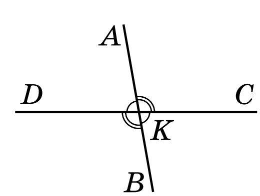
2) Також суміжні кути AKD і DKB, тому $\angle AKD + \angle DKB = 180°$.

3) Маємо: $\angle AKC = 180° - \angle AKD$ і $\angle DKB = 180° - \angle AKD$.

Праві частини цих рівностей рівні, тому рівними є і ліві їхні частини. Отже, $\angle AKC = \angle DKB$. Теорему доведено. ■

Приклад. Два із чотирьох нерозгорнутих кутів, що утворилися при перетині двох прямих, відносяться як 4 : 5. Знайти градусну міру кожного з кутів, що утворилися.

Розв'язання. Кожні два кути, які утворилися в результаті перетину двох прямих, є або суміжними, або вертикальними (мал. 9.2). Оскільки вертикальні кути рівні: $\angle AKD = \angle CKB$, $\angle AKC = \angle BKD$, то в задачі йдеться про суміжні кути. Наприклад $\angle AKD$ і $\angle AKC$.



Мал. 9.2

1) За умовою $\angle AKD : \angle AKC = 4 : 5$, тому можемо ввести позначення: $\angle AKD = 4x$, $\angle AKC = 5x$.

2) Оскільки $\angle AKD + \angle AKC = 180°$, маємо рівняння: $4x + 5x = 180°$, звідки $x = 20°$.

3) Тоді $\angle AKD = 4 \cdot 20° = 80°$, $\angle AKC = 5 \cdot 20° = 100°$. Далі: $\angle CKB = \angle AKD = 80°$, $\angle BKD = \angle AKC = 100°$.

Відповідь: 80°, 100°, 80°, 100°.

Кут між прямими

Кутом між прямими, що перетинаються, **називають менший з кутів, що утворилися при перетині цих прямих.**

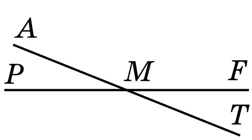
Кут між прямими AB і DC з попередньої задачі дорівнює 80°.

! Кут між прямими, що перетинаються, не може перевищувати 90°.

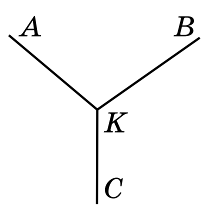
? Які кути називають вертикальними? ○ Яку властивість мають вертикальні кути? ○ Який кут називають кутом між двома прямими?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

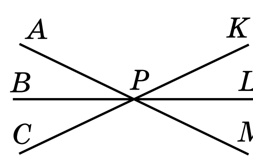
1 **9.1.** (*Усно.*) Назвіть пари вертикальних кутів на малюнку 9.3.



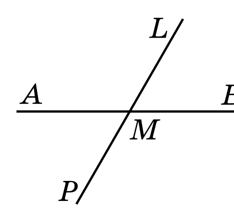
Мал. 9.3



Мал. 9.4



Мал. 9.5



Мал. 9.6

9.2. (*Усно.*) Чи є на малюнку 9.4 вертикальні кути?

9.3. Один з вертикальних кутів дорівнює: 1) 15°; 2) 129°. Знайдіть інший вертикальний кут.

9.4. Один з вертикальних кутів дорівнює: 1) 42°; 2) 139°. Знайдіть інший вертикальний кут.

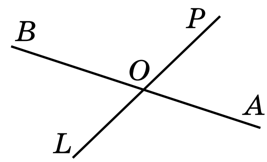
2 **9.5.** На малюнку 9.5 прямі AM, BL і CK перетинаються в точці P. Знайдіть усі пари вертикальних кутів.

9.6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 40°. Знайдіть інші кути.

9.7. На малюнку 9.6 $\angle AML = 120°$. Знайдіть $\angle AMP$, $\angle PMB$ і $\angle BML$.

9.8. (*Усно.*) Учениця накреслила дві прямі, що перетинаються, та, вимірявши транспортиром один з кутів, які при цьому утворилися, отримала 130°. Чи може вона стверджувати, що кут між прямими дорівнює 130°? Відповідь поясніть.

9.9. Прямі AB і PL перетинаються в точці O (мал. 9.7), $\angle POB = 118°$. Знайдіть кут між прямими AB і PL.



Мал. 9.7

9.10. Накресліть дві прямі, що перетинаються, і знайдіть за допомогою транспортира кут між ними.

9.11. Накресліть $\angle MON$, що дорівнює 110°. Побудуйте доповняльні промені OL і OK до його сторін OM і ON відповідно. Обчисліть градусні міри трьох нерозгорнутих кутів, що утворилися, і порівняйте з результатами вимірювання.

9.12. Накресліть $\angle AOB$, що дорівнює 30°. Побудуйте доповняльні промені OP і OD до його сторін OA і OB відповідно. Обчисліть градусні міри трьох нерозгорнутих кутів, що утворилися, і порівняйте з результатами вимірювання.

9.13. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, якщо:
1) усі кути рівні між собою;
2) сума двох з них дорівнює 178°.

9.14. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, якщо:
1) сума двох з них дорівнює 16°;
2) три із чотирьох кутів рівні між собою.

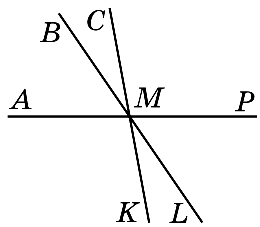
3

9.15. Знайдіть кут між прямими, що перетинаються, якщо:
1) різниця двох з утворених кутів дорівнює 18°;
2) сума трьох з утворених кутів дорівнює 293°;
3) один із кутів становить $\frac{4}{5}$ від іншого.

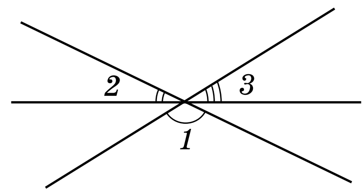
9.16. Знайдіть кут між прямими, що перетинаються, якщо:
1) один з кутів, що утворилися, удвічі менший від іншого;
2) один із кутів становить 20 % від іншого.

9.17. Прямі AP, BL і CK перетинаються в точці M (мал. 9.8), $\angle BMC = 20°$, $\angle LMP = 60°$. Знайдіть $\angle AMK$.

9.18. Прямі AP, BL і CK перетинаються в точці M (мал. 9.8), $\angle CMP = 105°$, $\angle KML = 25°$. Знайдіть $\angle AMB$.



Мал. 9.8



Мал. 9.9

9.19. На малюнку 9.9 зображено три прямі, що перетинаються в одній точці. Знайдіть суму кутів *1*, *2* і *3*.

9.20. Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів є доповняльними променями.

Вправи для повторення

9.21. На прямій послідовно позначено 10 точок так, що відстань між будь-якими двома сусідніми точками дорівнює 2 см. Знайдіть відстань між двома крайніми точками.

9.22. Відомо, що $\angle ABC = 70°$, а $\angle CBD = 20°$. Чи може градусна міра кута ABD дорівнювати:

1) 40°; 2) 50°; 3) 60°; 4) 80°; 5) 90°; 6) 100°?

Життєва математика

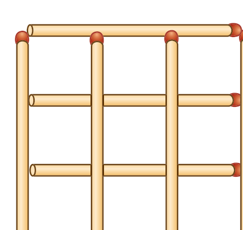
9.23. Згідно із санітарними нормами відношення площі вікон до площі підлоги у класній кімнаті має бути не менше ніж 0,2. Чи дотримано цих норм у класній кімнаті, довжина якої 14 м, а ширина становить 35 % від довжини, якщо в кімнаті три вікна розміром 2 м × 1,8 м?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

9.24. Фігуру на малюнку складено з восьми сірників.

1) Скільки квадратів при цьому утворилося?

2) Як прибрати два сірники так, щоб залишилося лише три квадрати?

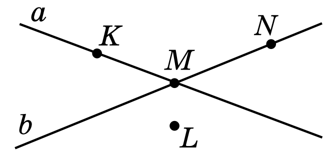


ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 2 (§§ 4–9)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Яка з точок на малюнку належить і прямій a, і прямій b?



А. K **Б.** L **В.** M **Г.** N

2. Який із запропонованих кутів є тупим?

А. $\angle M = 129°$ **Б.** $\angle T = 90°$
В. $\angle N = 180°$ **Г.** $\angle L = 78°$

3. Пара суміжних кутів може дорівнювати...

А. 18° і 172° **Б.** 27° і 153° **В.** 25° і 145° **Г.** 47° і 134°

2

4. Промінь OP проходить між сторонами кута AOB. Знайдіть градусну міру кута AOB, якщо $\angle AOP = 20°$, $\angle POB = 50°$.

А. 30° **Б.** 70°

В. 110° **Г.** Неможливо визначити

5. Точка L належить відрізку AB. Знайдіть AL, якщо $LB = 5$ см, $AB = 8$ см.

А. 13 см **Б.** 9 см **В.** 4 см **Г.** 3 см

6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 160°. Знайдіть кут між прямими.

А. 160° **Б.** 100° **В.** 80° **Г.** 20°

3

7. Відомо, що $AB = 4$ см, $BC = 7$ см, $AC = 3$ см. Укажіть взаємне розміщення точок A, B і C.

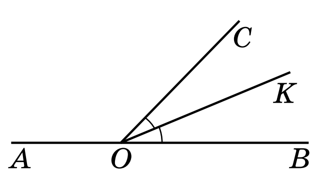
А. Точка A лежить між точками B і C

Б. Точка B лежить між точками A і C

В. Точка C лежить між точками B і A

Г. Жодна з точок не лежить між двома іншими

8. Промінь OK є бісектрисою кута COB, $\angle COB = 70°$ (див. мал.). Знайдіть $\angle AOK$.



А. 110° **Б.** 135° **В.** 145° **Г.** 155°

9. Один із суміжних кутів удвічі менший від іншого. Знайдіть більший із цих кутів.

А. 60° **Б.** 80° **В.** 100° **Г.** 120°

10. На площині позначено п'ять точок так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки різних прямих, кожна з яких проходить через деякі дві з даних точок, можна провести?

А. 5 **Б.** 8
В. 10 **Г.** 15

11. Розгорнутий $\angle MON$ поділено променями OA і OB на три кути, $\angle MOA = 120°$, $\angle NOB = 110°$. Знайдіть градусну міру кута AOB.

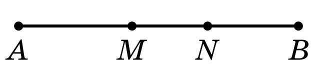
А. 50° **Б.** 60°
В. 70° **Г.** 80°

12. Дано два кути, градусні міри яких відносяться як $1 : 2$. Різниця кутів, суміжних з ними, дорівнює 70°. Знайдіть більший з даних кутів.

А. 70° **Б.** 90° **В.** 110° **Г.** 140°

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами.

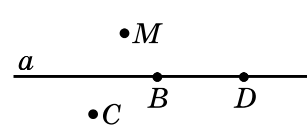
13. На відрізку AB завдовжки 74 см позначено точки M і N (див. мал.). Довжини відрізків AM і MN відносяться як 3 : 2, а відрізок NB на 4 см довший за відрізок MN. Установіть відповідність між відрізками (1–3) та їхніми довжинами (А–Г).



Відрізки		*Довжини відрізків*	
1.	AM	**А.**	20 см
2.	MN	**Б.**	24 см
3.	NB	**В.**	28 см
		Г.	30 см

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 4–9

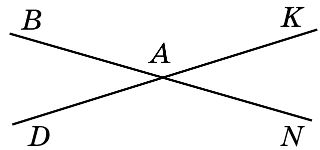
1. Назвіть точки, що належать прямій a, та точки, що їй не належать (див. мал.). Зробіть відповідні записи.



2. Який з даних кутів гострий, тупий, прямий, розгорнутий:

1) $\angle A = 92°$; 2) $\angle B = 180°$;
3) $\angle C = 90°$; 4) $\angle D = 31°$?

3. За малюнком назвіть пари вертикальних кутів.



2 **4.** Точка C належить відрізку MN. Знайдіть довжину відрізка CM, якщо $MN = 7{,}2$ см, $CN = 3{,}4$ см.

5. За допомогою транспортира накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 70°, і проведіть його бісектрису.

6. Прямі AB і CD перетинаються в точці O, $\angle AOC = 132°$. Знайдіть кут між прямими AB і CD.

3 **7.** Точки M і N належать відрізку AB, довжина якого дорівнює 30 см. Знайдіть довжину відрізка MN, якщо $AM = 20$ см, $BN = 16$ см.

8. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них на 12° менший від іншого.

4 **9.** Точки A, B і K лежать на одній прямій. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $AK = 9{,}3$ см, $KB = 3{,}7$ см. Скільки розв'язків має задача?

Додаткові вправи

4 **10.** Який кут утворює бісектриса кута 48° з променем, що є доповняльним до однієї з його сторін?

11. Два кути відносяться як 1 : 3, а суміжні з ними – як 7 : 3. Знайдіть дані кути.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 2

До § 4

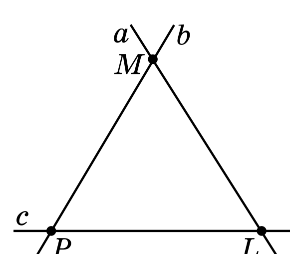
1 **1.** За малюнком укажіть:

1) точку перетину прямих a і b;

2) які точки належать прямій c;

3) чи належить точка M прямій PL;

4) як інакше можна назвати пряму b.



2 **2.** 1) Побудуйте промені OK, OM і ON так, щоб промінь OM був доповняльним для променя ON.

2) Побудуйте промені OA, OB і OC так, щоб серед побудованих променів не було жодної пари доповняльних.

3. Позначте точки A, B і C так, щоб записи AB і AC означали дві різні прямі.

4. Одна з двох прямих, що перетинаються, проходить через точку M, яка належить іншій прямій. Що можна сказати про точку M і точку перетину цих прямих?

5. Точки A і B належать прямій l. Пряма m відмінна від прямої l і проходить через точку A. Чи може точка B належати прямій m? Відповідь обґрунтуйте.

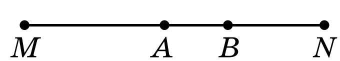
До § 5

6. 1) Позначте в зошиті точки A, B і C, які не лежать на одній прямій, і знайдіть відстані між кожною парою точок.

2) Позначте в зошиті точки D, E і F, які лежать на одній прямій, і знайдіть відстані між кожною парою точок.

7. Накресліть відрізок KL = 6 см 8 мм. Позначте на ньому точку P так, що KP = 43 мм. Знайдіть довжину відрізка LP за допомогою обчислень.

8. Сумою яких двох відрізків є відрізок MN (див. мал.)? Розгляньте всі можливі випадки.



9. 1) Три прямі перетинають відрізок AB, причому жодна з точок перетину прямих і відрізка не збігається з кінцями відрізка. На скільки частин ці точки можуть поділити відрізок?

2) На скільки частин поділиться відрізок, якщо кількість прямих дорівнює n?

10. Точка C – середина відрізка AB, точка D – середина відрізка AC. Знайдіть:

1) AC, CB, AD і DB, якщо AB = 20 см;

2) AB, AC, AD і DB, якщо BC = 12 дм.

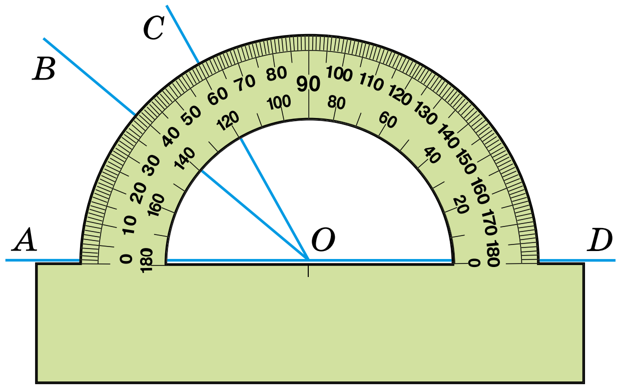
11. Точки M і N належать відрізку CD, CD = 15 см, CM = 12 см, DN = 11 см. Знайдіть довжину відрізка NM.

12. Точка P належить відрізку AB. На прямій AB позначте таку точку C, щоб $BC = \dfrac{AP}{2}$. Скільки розв'язків має задача?

13. Точка K належить відрізку CD, довжина якого a см. Знайдіть відстань між серединами відрізків CK і KD.

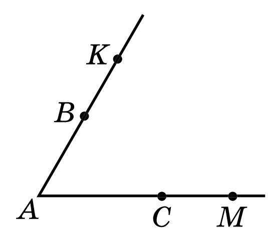
До § 6

14. Знайдіть градусні міри кутів, зображених на малюнку.



15. Два учні накреслили кути по 70°. Один з учнів сказав, що в нього кут більший, оскільки сторони його кута мають більшу довжину. Чи правий цей учень?

16. Використовуючи малюнок, укажіть усі можливі назви кута з вершиною A з даних: KAC, BAM, CAM, KMA, BAC, AKM, ABC, MAK, KAM, CAK.



17. Накресліть один гострий кут і один тупий. Побудуйте бісектриси цих кутів за допомогою транспортира.

18. 1) На який кут повертається хвилинна стрілка годинника протягом 15 хв; 7 хв; 23 хв?

2) На який кут повертається годинна стрілка годинника протягом 1 хв; 6 хв; 40 хв?

19. OK – бісектриса кута AOB, OL – бісектриса кута KOB. Знайдіть:

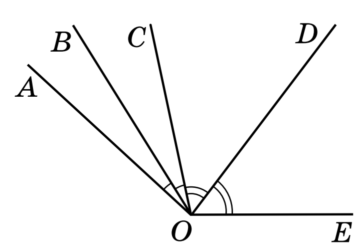
1) $\angle LOK$, якщо $\angle AOB = 120°$;

2) $\angle AOB$, якщо $\angle LOB = 37°$.

20. $\angle AOB = \angle BOC$, $\angle COD = \angle DOE$ (див. мал.). Знайдіть:

1) $\angle BOD$, якщо $\angle AOE = 140°$;

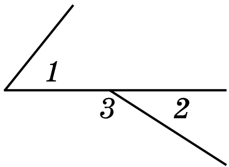
2) $\angle AOE$, якщо $\angle BOD = 73°$.

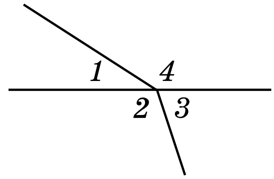


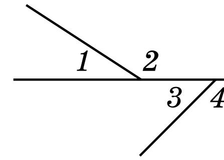
21. $\angle AOB = 168°$, промінь OM проходить між його сторонами. $\angle AOM : \angle MOB = 3 : 4$. Знайдіть ці кути.

До § 8

22. Серед кутів, які зображено на малюнках 1–3, укажіть ті, що є суміжними.

1) 

2) 

3) 

23. 1) Чи можна, використовуючи лише олівець і лінійку, побудувати кут, суміжний з даним?

2) Скільки таких кутів можна побудувати?

24. $\angle ABC$ менший, ніж $\angle MNP$. У якого з кутів суміжний кут більший? Відповідь обґрунтуйте.

25. Знайдіть суміжні кути, якщо їхні градусні міри відносяться як 3 : 7.

26. Один із суміжних кутів становить 20 % від іншого. Знайдіть ці кути.

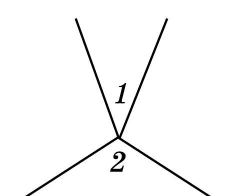
27. Один із суміжних кутів на 20 % менший від іншого. Знайдіть ці кути.

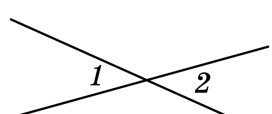
28. Бісектриса кута ABC утворює зі стороною кут, удвічі більший за кут, суміжний з кутом ABC. Знайдіть $\angle ABC$.

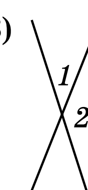
До § 9

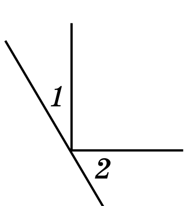
29. Який предмет домашнього вжитку дає уявлення про вертикальні кути?

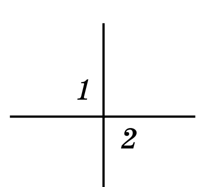
30. Чи є кути *1* і *2* вертикальними?

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

2 **31.** Чи є правильними твердження:

1) якщо два кути рівні, то вони вертикальні;

2) якщо два кути зі спільною вершиною рівні, то вони вертикальні;

3) для кожного кута, меншого від розгорнутого, можна добудувати тільки один вертикальний кут;

4) для кожного кута, меншого від розгорнутого, можна добудувати тільки один суміжний кут?

32. При перетині двох прямих утворилося чотири кути. Чи можуть деякі два з них дорівнювати:

1) $5°$ і $175°$; 2) $15°$ і $19°$; 3) $27°$ і $154°$; 4) $3°$ і $3°$?

3 **33.** Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, на $48°$ більший за інший. Знайдіть кут між прямими.

34. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює сумі двох суміжних з ним. Знайдіть цей кут.

4 **35.** Знайдіть градусну міру кожного із чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, якщо сума двох із цих кутів:

1) менша від суми двох інших у 4 рази;

2) більша за суму двох інших на $160°$.

* **36.** Знайдіть кут між прямими, які перетинаються, якщо один з кутів, що утворилися, у 8 разів менший від суми трьох інших кутів.

Головне в темі 2

ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ. ТОЧКА, ПРЯМА, ПРОМІНЬ

- ✓ Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.
- ✓ Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.
- ✓ З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.
- ✓ ***Відрізок*** – частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома її точками, разом із цими точками. Ці точки – ***кінці відрізка***.

- ✓ Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.
- ✓ Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.
- ✓ Два відрізки ***рівні між собою***, якщо рівні їхні довжини.
- ✓ ***Кут*** – це геометрична фігура, яка складається з двох променів, що виходять з однієї точки.
- ✓ Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180°.
- ✓ Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.
- ✓ Два кути ***рівні між собою***, якщо в них однакові градусні міри.
- ✓ ***Бісектриса кута*** – промінь, який виходить з його вершини і ділить кут навпіл.
- ✓ Два **кути суміжні**, якщо одна сторона в них є спільною, а дві інші сторони цих кутів є доповняльними променями.

ВЛАСТИВІСТЬ СУМІЖНИХ КУТІВ

Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

- ✓ Два **кути вертикальні**, якщо сторони одного з них є доповняльними променями сторін іншого.

ВЛАСТИВІСТЬ ВЕРТИКАЛЬНИХ КУТІВ

Вертикальні кути рівні.

- ✓ **Кут між прямими, що перетинаються**, – менший з кутів, що утворилися при перетині цих прямих.

ТЕМА 3

ВИРАЗИ ЗІ ЗМІННИМИ. СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ. ОДНОЧЛЕН

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **пригадаєте**, що таке числові та буквені вирази, їхні значення; степінь, основа та показник степеня;
- **ознайомитеся** з поняттями одночлена, тотожності, тотожно рівних виразів;
- **навчитеся** виконувати арифметичні дії з одночленами, тотожні перетворення виразів; застосовувати властивості степенів.

§ 10. Вирази зі змінними. Цілі раціональні вирази. Числове значення виразу

Числові вирази та їхні значення

Числові вирази утворюють із чисел за допомогою знаків арифметичних дій і дужок.

Наприклад, вирази $12 \cdot 3 - 9$; $1,2^3$; $5\frac{1}{7} - \left(5,7 : 3 + 1\frac{7}{9}\right)$ є числовими виразами.

Число, що є результатом виконання всіх дій у числовому виразі, називають ***значенням виразу***.

Наприклад, $12 \cdot 3 - 9 = 27$, тому 27 є значенням числового виразу $12 \cdot 3 - 9$.

Якщо числовий вираз містить дію, яку неможливо виконати, то кажуть, що вираз не має змісту (смислу). Наприклад, вираз $5 : (8 : 2 - 4)$ не має змісту, бо $8 : 2 - 4 = 0$ і наступну дію $5 : 0$ виконати неможливо.

Вирази зі змінними

Окрім числових виразів, у математиці розглядають вирази, що містять букви. Такі вирази ми раніше називали *буквеними*.

Приклад 1. Нехай потрібно знайти площу прямокутника, довжина якого дорівнює 10 см, а ширина – b см.

За формулою площі прямокутника маємо: $S = 10b$. Якщо, наприклад, $b = 3$, то $S = 10 \cdot 3 = 30$, а якщо $b = 7$, то $S = 70$. У виразі $10b$ букві b можна надавати різних значень, тобто її значення можна змінювати. Відповідно буде змінюватися і значення виразу $10b$. Тому букву b у такому виразі називають *змінною*, а сам вираз $10b$ – *виразом зі змінною*.

Вирази зі змінними утворюють із чисел і змінних за допомогою знаків арифметичних дій і дужок.

Наприклад, вирази $5 + a$; $2(b - 3x)$; $\frac{c-5p}{d}$ – вирази зі змінними.

Якщо замість змінних у вираз підставити певні числа, то одержимо числовий вираз. Його значення називають ***числовим значенням виразу*** для вибраних значень змінних.

Приклад 2. Знайти значення виразу:

1) $(5 + b) : 4$, якщо $b = 0; -2$;

2) $\frac{a-c}{12}$, якщо $a = 17$, $c = -5$.

Розв'язання. 1) Якщо $b = 0$, то $(5 + b) : 4 = (5 + 0) : 4 = 1{,}25$; якщо $b = -2$, то $(5 + b) : 4 = (5 + (-2)) : 4 = 0{,}75$.

2) Якщо $a = 17$, $c = -5$, то $\frac{a-c}{12} = \frac{17-(-5)}{12} = \frac{22}{12} = 1\frac{5}{6}$.

Відповідь: 1) 1,25; 0,75; 2) $1\frac{5}{6}$.

Раціональні вирази

Вираз, який містить лише дії додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня, називають *раціональним виразом*.

Наприклад, вирази:

$$2a - m; \quad \frac{p+2q}{9}; \quad -\frac{2}{3}(x-9+y); \quad \frac{5+x}{m}; \quad \frac{17}{x^2-3}; \quad a+b-\frac{1}{c}$$

є раціональними виразами.

Раціональний вираз, який не містить ділення на вираз зі змінною, називають ***цілим раціональним виразом***.

Якщо в раціональному виразі є ділення на вираз зі змінною, його називають ***дробовим раціональним виразом***. Три перших з вищенаведених раціональних виразів – цілі, а три останніх – дробові.

Вирази зі змінними використовують для запису формул.

Наприклад, $s = vt$ – формула відстані,

$P = 2(a + b)$ – формула периметра прямокутника,

$n = 2k$, де k – натуральне число, – формула парного натурального числа,

$n = 2k + 1$, де k – натуральне число або 0 (або $n = 2k - 1$, де k – натуральне число), – формула непарного натурального числа,

$n = 7k$, де k – натуральне число, – формула натурального числа, кратного числу 7.

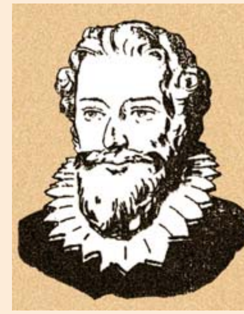
Вирази, що не є раціональними, розглядатимемо в наступних класах.

А ще раніше...

Поява букв і знаків арифметичних дій у математичних записах є результатом розвитку математичної науки. У своїх працях шукане невідоме число давні єгипетські вчені називали «хау» (у перекладі – «купа»), а знаки математичних дій взагалі не вживали, записуючи все переважно словами. І хоча потреба у використанні знаків математичних дій виникла ще у Давньому Єгипті, з'явилися вони набагато пізніше. Замість знаків додавання і віднімання давні математики використовували малюнки або слова, а це призводило до громіздких записів.

Знаки арифметичних дій стали використовувати в наукових працях математиків, починаючи з XV ст. На сьогодні відомо, хто й коли запропонував деякі математичні знаки для записів. Так, знаки «+» і «–» трапляються вперше в 1489 році у праці «Арифметика» Йоганна Відмана, професора Лейпцизького університету. Знак «×» для позначення дії множення ввів англійський математик Вільям Оутред у 1631 році. Для позначення дії ділення він використовував риску («/»). Дробову риску в математичних записах (для відокремлення чисельника дробу від його знаменника) уже в 1202 році використовував Леонардо Пізанський, відомий математик середньовічної Європи. Німецький математик, фізик і філософ Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716) запропонував використовувати як знак множення крапку («·»), а як знак ділення – двокрапку («:»). Це відбулося в 1693 році та в 1684 році відповідно. Знак рівності («=») увів у 1557 році Роберт Рекорд, математик, який народився в Уельсі й довгий час був особистим лікарем королівської сім'ї Великої Британії.

Величезний внесок у розвиток алгебраїчної символіки зробив у XVI ст. видатний французький математик Франсуа Вієт, якого називають «батьком» алгебри. Саме він став позначати буквами не тільки змінні, а й будь-які числа, зокрема коефіцієнти при змінних. Проте його символіка відрізнялася від сучасної. Замість x, x^2 і x^3 Вієт писав відповідно букви N (*Numerus* – число), Q (*Quadratus* – квадрат) і C (*Cubus* – куб). Наприклад, рівняння $x^3 + 7x^2 - 8x = 20$ він записував так:
$1C + 7Q - 8N$ *aequ* 20 (*aequali* – дорівнює).



Франсуа Вієт
(1540–1603)

Із чого утворюють числові вирази? Що називають значенням числового виразу? Що таке вираз зі змінними? Що називають числовим значенням виразу для вибраних значень змінних? Наведіть приклад числового виразу і виразу зі змінними. Який вираз називають цілим раціональним виразом?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

10.1. (*Усно.*) Які з даних виразів є числовими, а які – виразами зі змінними:

1) $5 + m^2 - a$; 2) $(12 - 3) : 4$;

3) $\dfrac{5+x}{a+b}$; 4) $(0 - 8) \cdot 5 - 13$?

10.2. (*Усно.*) Які з раціональних виразів є цілими, а які – дробовими:

1) $\dfrac{a^3+c}{5}$; 2) $\dfrac{5}{a^3+c}$; 3) $m + \dfrac{x}{7}$; 4) $m + \dfrac{7}{x}$?

10.3. Випишіть окремо: числові вирази; вирази зі змінними; цілі раціональні вирази; дробові раціональні вирази:

1) $5 + c$; 2) $(2 - 15) \cdot 4$; 3) $\dfrac{a+m}{p}$; 4) $q^2 - 19$;

5) $7 + \dfrac{a}{5}$; 6) $\dfrac{1}{4}ab$; 7) $\dfrac{9-5}{11}$; 8) $\dfrac{a^2-b^2}{c^2}$.

10.4. Прочитайте словами вирази зі змінними:

1) $x + 7$; 2) $m - a$; 3) $5ab$; 4) $5 : (c + 9)$.

10.5. Складіть і запишіть по два вирази:

1) зі змінною a; 2) зі змінними x і y.

10.6. Складіть і запишіть по три вирази:

1) зі змінною x; 2) зі змінними a і b.

10.7. (*Усно*.) Які з даних числових виразів не мають змісту:
1) $(5 - 6) : 7$; 2) $(10 - 2 \cdot 5) : 7$;
3) $4 : (12 - 2 \cdot 6)$; 4) $\dfrac{17}{15 + 5 \cdot (-3)}$?

2 **10.8.** Знайдіть значення виразу:
1) $5x - 3$, якщо $x = 1{,}8$; $x = 2\frac{1}{5}$;
2) $a^2 + 3a$, якщо $a = -1$; $a = 0{,}8$.

10.9. Знайдіть значення виразу:
1) $5m + 2n$, якщо $m = -1{,}3$, $n = 2\frac{1}{2}$;
2) $a(2b - c)$, якщо $a = 1{,}5$, $b = 3{,}2$, $c = -1{,}4$.

10.10. Знайдіть значення виразу:
1) $b^2 - 4b$, якщо $b = -2$; $b = 0{,}5$;
2) $x^2 - y^2$, якщо $x = 5$, $y = -3$; $x = 0{,}1$, $y = 0{,}2$.

10.11. Запишіть у вигляді виразу:
1) суму чисел b і c;
2) добуток чисел $5m$ і n^3;
3) квадрат суми чисел a і $9p$;
4) різницю квадратів чисел $3d$ і $7t$.

10.12. Запишіть у вигляді виразу:
1) різницю чисел p і 7;
2) частку чисел $a + c$ і d;
3) суму числа a і добутку чисел m і n.

10.13. Заповніть у зошиті такі таблиці:

m	2	3	–1	0	–2
n	1	2	0	–5	–3
$2m - 3n$					

x	–1	0	1	2
$x^2 + 2$				
$x^2 + 2x$				

10.14. Дізнайтеся прізвище видатного українського кардіохірурга. Для цього знайдіть значення виразу в першій таблиці й перенесіть букви, що відповідають знайденим значенням, у другу таблицю.

x	–2	–1	0	1	2
$x^2 - 4x$					
Букви	*О*	*А*	*В*	*М*	*С*

5	–3	12	–4	12	0

10.15. Порівняйте суму $a + b$ з добутком ab, якщо:
1) $a = 0$, $b = -2$; 2) $a = -3$, $b = 2$.

10.16. Майстриня за одну годину виготовляє x деталей, а її учень – y деталей. Скільки деталей вони виготовили разом, якщо майстриня працювала 8 год, а учень – 4 год?

10.17. (*Усно.*) Нехай a дм – довжина прямокутника, b дм – його ширина ($a > b$). Що можуть означати вирази:

1) ab; 2) $2(a + b)$; 3) $2a$; 4) $\frac{a}{b}$?

10.18. Ручка коштує x грн, олівець – y грн ($x > y$). Що можуть означати вирази:

1) $x + y$; 2) $3x + 4y$; 3) $x - y$; 4) $\frac{x}{y}$?

3 **10.19.** Запишіть у вигляді виразу час, який учень щоденно проводить у школі, якщо в нього на день a уроків по 45 хв, b перерв по 15 хв і c перерв по 10 хв. Обчисліть значення цього виразу, якщо $a = 6$, $b = 2$, $c = 3$.

10.20. Коли Марійка витягла зі своєї скарбнички всі монети, то виявилося, що там було x монет номіналом 50 коп., y монет номіналом 1 грн і z монет номіналом 2 грн. Обчисліть, яку суму коштів назбирала Марійка, якщо $x = 8$, $y = 5$, $z = 20$.

3 **10.21.** Спростіть вираз $-2\frac{1}{6}x + 3{,}5y - 3\frac{5}{6}x - 2{,}5y$ і знайдіть його значення, якщо $x = -330$, $y = 6$. Сприймаючи значення виразу як рік, пригадайте, яка визначна подія для України відбулася цього року.

10.22. Спростіть вираз $5\frac{1}{7}a - 2{,}6b + 1\frac{6}{7}a + 1{,}6b$, знайдіть його значення, якщо $a = 225$, $b = -40$, та дізнайтеся рік заснування Національного університету «Києво-Могилянська академія».

10.23. Складіть формулу натурального числа, яке:
1) кратне числу 9;
2) при діленні на 5 дає в остачі 1.

4 **10.24.** Для деяких значень a і b значення виразу $a - b$ дорівнює 2,25. Якого значення для тих самих значень a і b набуває вираз:

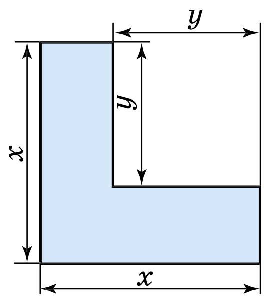
1) $4(a - b)$; 2) $b - a$; 3) $\frac{1}{b - a}$; 4) $\frac{3(a - b)}{4(b - a)}$?

10.25. Для деяких значень c і d значення виразу $c - d$ дорівнює $\frac{4}{7}$. Якого значення для тих самих значень c і d набуває вираз:

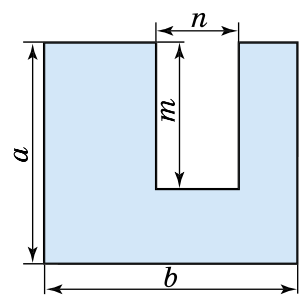
1) $7(c - d)$; 2) $d - c$;

3) $\frac{1}{d-c}$; 4) $\frac{5(d-c)}{4(c-d)}$?

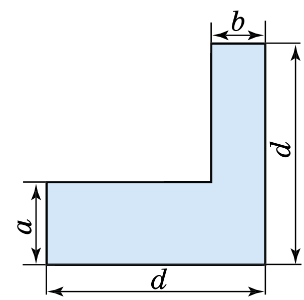
10.26. Складіть вирази для обчислення площ фігур (мал. 10.1–10.3).



Мал. 10.1



Мал. 10.2



Мал. 10.3

Вправи для повторення

10.27. Обчисліть:

1) 13^2; 2) 7^3; 3) $(-2{,}1)^2$; 4) $(-1{,}1)^3$;

5) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$; 6) $\left(-1\frac{1}{5}\right)^2$; 7) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$; 8) $0{,}2^3$.

10.28. Якою цифрою закінчується значення виразу:

1) 132^2; 2) 271^3;

3) 2017^2; 4) $1315^2 - 115^3$?

10.29. Власна швидкість катера – 26 км/год, а швидкість течії річки – 2 км/год. Знайдіть відстань між двома пристанями, якщо в одному напрямку катер долає її на 30 хв швидше, ніж у зворотному.

Життєва математика

10.30. Військовий збір у 2022 році складав 1,5 % від доходів громадян. Протягом року заробітна плата директора магазину мобільних аксесуарів становила 14 000 грн, кожної з двох його продавчинь – по 8000 грн, а продавця-консультанта – 10 000 грн на місяць. Щомісяця, крім військового збору, директор перераховував 700 грн, кожна з продавчинь – по 300 грн і консультант-продавець – 400 грн у благодійний фонд на підтримку української армії. Скільки всього коштів сплатили робітники цього магазину на потреби української армії в 2022 році?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

10.31. Спростіть вираз:
1) $3a \cdot 7$;
2) $2b \cdot (-0{,}1)$;
3) $-6{,}2a \cdot 5b$;
4) $-0{,}2c \cdot (-0{,}5d)$.

10.32. Розкрийте дужки:
1) $4(b + 1)$;
2) $3(m - 2)$;
3) $-7(c - 5)$;
4) $-10(7 + a)$;
5) $5(-1{,}4 + k)$;
6) $(t - 2{,}5) \cdot (-8)$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

10.33. Чи існує таке значення x, для якого:
1) $-x \geqslant |x|$;
2) $x > |x|$?

§ 11. Тотожні вирази. Тотожність. Тотожне перетворення виразу. Доведення тотожностей

Тотожні вирази

Знайдемо значення виразів $2(x - 1)$ і $2x - 2$ для деяких значень змінної x і результат запишемо в таблицю:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$2(x - 1)$	–10	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6
$2x - 2$	–10	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6

З таблиці можна дійти висновку, що значення виразів $2(x - 1)$ і $2x - 2$ для кожного з даних значень змінної x між собою рівні. Як відомо, за розподільною властивістю множення: $2(x - 1) = 2x - 2$. Тому для будь-якого іншого значення змінної x значення виразів $2(x - 1)$ і $2x - 2$ теж будуть між собою рівними. Такі вирази називають *тотожно рівними*.

Два вирази, відповідні значення яких між собою рівні для будь-яких значень змінних, називають *тотожними*, або *тотожно рівними*.

Наприклад, тотожними є вирази $2x + 3x$ і $5x$, бо для кожного значення змінної x ці вирази набувають однакових значень (це зрозуміло, адже $2x + 3x = 5x$).

Розглянемо тепер вирази $3x + 2y$ і $5xy$. Якщо $x = 1$ і $y = 1$, то відповідні значення цих виразів рівні між собою:

$$3x + 2y = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5; \qquad 5xy = 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5.$$

Проте можна вказати такі значення x і y, для яких значення цих виразів рівними між собою не будуть. Наприклад, якщо $x = 2$, $y = 0$, то

$$3x + 2y = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6, \qquad 5xy = 5 \cdot 2 \cdot 0 = 0.$$

Отже, існують такі значення змінних, для яких відповідні значення виразів $3x + 2y$ і $5xy$ не дорівнюють одне одному. Тому вирази $3x + 2y$ і $5xy$ не є тотожно рівними.

Тотожність

Рівність, яка є правильною для будь-яких значень змінних, називають *тотожністю*.

Виходячи з вищевикладеного, тотожностями, зокрема, є рівності: $2(x - 1) = 2x - 2$ та $2x + 3x = 5x$.

Тотожністю є кожна рівність, якою записано відомі властивості дій над числами. Наприклад,

$a + b = b + a$; $\quad (a + b) + c = a + (b + c)$; $\quad a(b + c) = ab + ac$;
$ab = ba$; $\quad (ab)c = a(bc)$; $\quad a(b - c) = ab - ac$.

Тотожностями є і такі рівності:

$a + 0 = a$; $\quad a \cdot 0 = 0$; $\quad a \cdot (-b) = -ab$;
$a + (-a) = 0$; $\quad a \cdot 1 = a$; $\quad -a \cdot (-b) = ab$.

Тотожностями також вважають правильні числові рівності, наприклад:

$1 + 2 + 3 = 6$; $\quad 5^2 + 12^2 = 13^2$; $\quad 12 \cdot (7 - 6) = 3 \cdot 4$.

Тотожне перетворення виразу

Якщо у виразі $5x + 2x - 9$ звести подібні доданки, одержимо, що $5x + 2x - 9 = 7x - 9$. У такому випадку кажуть, що вираз $5x + 2x - 9$ замінили тотожним йому виразом $7x - 9$.

Заміну виразу на тотожно рівний йому вираз називають *тотожним перетворенням виразу*.

Тотожні перетворення виразів виконують, застосовуючи властивості дій над числами. Зокрема, *тотожними перетвореннями є розкриття дужок, зведення подібних доданків* тощо. А ще тотожні перетворення виконують під час *спрощення виразу*, тобто заміни деякого виразу на тотожно рівний йому вираз, який має коротший запис.

Приклад 1. Спростити вираз: 1) $-0{,}3m \cdot 5n$;
2) $2(3x - 4) + 3(-4x + 7)$; 3) $2 + 5a - (a - 2b) + (3b - a)$.

Розв'язання. 1) $-0{,}3m \cdot 5n = -0{,}3 \cdot 5mn = -1{,}5mn$;

2) $2(3x - 4) + 3(-4x + 7) = \underline{6x} - 8 - \underline{12x} + 21 = -6x + 13 = 13 - 6x$;

3) $2 + 5a - (a - 2b) + (3b - a) = 2 + \underline{5a} - \underline{a} + \underline{\underline{2b}} + \underline{\underline{3b}} - \underline{a} = 3a + 5b + 2$.

Відповідь: 1) $-1{,}5mn$; 2) $13 - 6x$; 3) $3a + 5b + 2$.

Доведення тотожностей

Щоб довести, що рівність є тотожністю (інакше кажучи, щоб *довести тотожність*), використовують тотожні перетворення виразів.

Довести тотожність можна одним зі способів:

- **виконати тотожні перетворення її лівої частини, тим самим звівши її до вигляду правої частини;**
- **виконати тотожні перетворення її правої частини, тим самим звівши її до вигляду лівої частини;**
- **виконати тотожні перетворення обох її частин, тим самим звівши обидві частини до однакових виразів.**

Приклад 2. Довести тотожність: 1) $2x - (x + 5) - 11 = x - 16$;
2) $20b - 4a = 5(2a - 3b) - 7(2a - 5b)$;
3) $2(3x - 8) + 4(5x - 7) = 13(2x - 5) + 21$.

Доведення. 1) Перетворимо ліву частину даної рівності:
$2x - (x + 5) - 11 = \underline{2x} - \underline{x} - 5 - 11 = x - 16.$

Тотожними перетвореннями вираз у лівій частині рівності звели до вигляду правої частини й тим самим довели, що дана рівність є тотожністю.

2) Перетворимо праву частину даної рівності:
$5(2a - 3b) - 7(2a - 5b) = \underline{10a} - \underline{\underline{15b}} - \underline{14a} + \underline{\underline{35b}} = 20b - 4a.$

Тотожними перетвореннями праву частину рівності звели до вигляду лівої частини й тим самим довели, що дана рівність є тотожністю.

3) У цьому випадку зручно спростити і ліву, і праву частини рівності та порівняти результати:

$2(3x-8)+4(5x-7)=\underline{6x}-16+\underline{20x}-28=26x-44;$

$13(2x-5)+21=26x-65+21=\mathbf{26x-44}.$

Тотожними перетвореннями ліву і праву частини рівності звели до одного й того самого вигляду: $26x-44$. Тому дана рівність є тотожністю. ■

Які вирази називають тотожними? ○ Наведіть приклад тотожних виразів. ○ Яку рівність називають тотожністю? ○ Наведіть приклад тотожності. ○ Що називають тотожним перетворенням виразу? ○ Як довести тотожність?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

11.1. (*Усно.*) Чи є вирази тотожно рівними:

1) $3x+x$ і $4x$; 2) $2a+b$ і $b+2a$;
3) $a+a+a$ і a^3; 4) $3(a-2)$ і $3a-6$;
5) $x-y$ і $y-x$; 6) $7m\cdot p$ і $7p\cdot m$?

11.2. Чи є тотожно рівними вирази (чому?):

1) $5m-2m$ і $3m$; 2) $3a-8$ і $8-3a$;
3) $5x+y$ і $y+5x$; 4) $b+b$ і b^2;
5) $2(x-3)$ і $2x-6$; 6) $2a\cdot b$ і $2a+b$?

11.3. (*Усно.*) Чи є тотожністю рівність:

1) $2x+3y=6xy$; 2) $5a-1=-1+5a$;
3) $9(a-b)=9a-5b$?

11.4. Розкрийте дужки:

1) $2(m-1)$; 2) $9(3x+2)$; 3) $-(a-5)$; 4) $-(-7+2m)$.

11.5. Розкрийте дужки:

1) $-(m-2)$; 2) $4(a+1)$; 3) $7(1-3p)$; 4) $-(-3a+5)$.

11.6. Зведіть подібні доданки:

1) $2a-a$; 2) $-5p+7p$; 3) $-3b-2b$; 4) $c-8c$.

11.7. Назвіть кілька виразів, тотожних виразу $3x+4x$.

2

11.8. Спростіть вираз, використовуючи переставну та сполучну властивості множення:

1) $-2{,}5x\cdot 4$; 2) $4p\cdot(-1{,}5)$;
3) $0{,}2x\cdot(-0{,}3p)$; 4) $-\frac{1}{7}x\cdot(-7y)$.

11.9. Спростіть вираз:

1) $-2p \cdot 3{,}5$; 2) $7a \cdot (-1{,}2)$;

3) $0{,}2x \cdot (-3y)$; 4) $-1\frac{1}{3}m \cdot (-3n)$.

11.10. (*Усно.*) Спростіть вираз:

1) $2x - 9 + 5x$; 2) $7a - 3b + 2a + 3b$;

3) $-2x \cdot 3$; 4) $-4a \cdot (-2b)$.

11.11. Зведіть подібні доданки:

1) $5b - 8a + 4b - a$; 2) $17 - 2p + 3p + 19$;

3) $1{,}8a + 1{,}9b + 2{,}8a - 2{,}9b$; 4) $5 - 7c + 1{,}9p + 6{,}9c - 1{,}7p$.

11.12. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $4(5x - 7) + 3x + 13$; 2) $2(7 - 9a) - (4 - 18a)$;

3) $3(2p - 7) - 2(p - 3)$; 4) $-(3m - 5) + 2(3m - 7)$.

11.13. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $3(8a - 4) + 6a$; 2) $7p - 2(3p - 1)$;

3) $2(3x - 8) - 5(2x + 7)$; 4) $3(5m - 7) - (15m - 2)$.

11.14. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $0{,}6x + 0{,}4(x - 20)$, якщо $x = 2{,}4$;

2) $1{,}3(2a - 1) - 16{,}4$, якщо $a = 10$;

3) $1{,}2(m - 5) - 1{,}8(10 - m)$, якщо $m = -3{,}7$;

4) $2x - 3(x + y) + 4y$, якщо $x = -1$, $y = 1$.

11.15. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $0{,}7x + 0{,}3(x - 4)$, якщо $x = -0{,}7$;

2) $1{,}7(y - 11) - 16{,}3$, якщо $y = 20$;

3) $0{,}6(2a - 14) - 0{,}4(5a - 1)$, якщо $a = -1$;

4) $5(m - n) - 4m + 7n$, якщо $m = 1{,}8$, $n = -0{,}9$.

11.16. Доведіть тотожність:

1) $-(2x - y) = y - 2x$; 2) $2(x - 1) - 2x = -2$;

3) $2(x - 3) + 3(x + 2) = 5x$; 4) $c - 2 = 5(c + 2) - 4(c + 3)$.

11.17. Доведіть тотожність:

1) $-(m - 3n) = 3n - m$; 2) $7(2 - p) + 7p = 14$;

3) $5a = 3(a - 4) + 2(a + 6)$; 4) $4(m - 3) + 3(m + 3) = 7m - 3$.

11.18. Довжина однієї зі сторін трикутника a см, а довжина кожної з двох інших сторін на 2 см більша за неї. Запишіть у вигляді виразу периметр трикутника та спростіть цей вираз.

11.19. Ширина прямокутника дорівнює x см, а довжина на 3 см більша за ширину. Запишіть у вигляді виразу периметр прямокутника та спростіть цей вираз.

3

11.20. Розкрийте дужки та спростіть вираз:

1) $x - (x - (2x - 3))$; 2) $5m - ((n - m) + 3n)$;

3) $4p - (3p - (2p - (p + 1)))$; 4) $5x - (2x - ((y - x) - 2y))$;

5) $\frac{2}{3}\left(6a - \frac{3}{8}b\right) - \frac{2}{11}\left(4\frac{1}{8}a - 33b\right)$;

6) $-\frac{2}{9}(2{,}7m - 1{,}5n) + \frac{5}{6}(2n - 0{,}48m)$.

11.21. Розкрийте дужки та спростіть вираз:

1) $a - (a - (3a - 1))$;

2) $12m - ((a - m) + 12a)$;

3) $5y - (6y - (7y - (8y - 1)))$;

4) $\frac{4}{7}(2{,}1a - 2{,}8b) - \frac{4}{5}\left(1\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{4}b\right)$.

11.22. Доведіть тотожність:

1) $10x - (-(5x + 20)) = 5(3x + 4)$;

2) $-(-3p) - (-(8 - 5p)) = 2(4 - p)$;

3) $3(a - b - c) + 5(a - b) + 3c = 8(a - b)$.

11.23. Доведіть тотожність:

1) $12a - (-(8a - 16)) = -4(4 - 5a)$;

2) $4(x + y - t) + 5(x - t) - 4y = 9(x - t)$.

11.24. Доведіть, що значення виразу

$$1{,}8(m - 2) + 1{,}4(2 - m) + 0{,}2(1{,}7 - 2m)$$

не залежить від значення змінної.

11.25. Доведіть, що для будь-якого значення змінної значення виразу $a - (a - (5a + 2)) - 5(a - 8)$ дорівнює одному й тому самому числу.

4

11.26. Доведіть, що сума трьох послідовних парних чисел ділиться на 6.

11.27. Доведіть, що якщо n — натуральне число, то значення виразу $-2(2{,}5n - 7) + 2\frac{1}{3}(3n - 6)$ є парним числом.

Вправи для повторення

11.28. Сплав масою 1,6 кг містить 15 % міді. Скільки кілограмів міді міститься в цьому сплаві?

11.29. Скільки відсотків складає число 20 від свого:

1) квадрата; 2) куба?

11.30. Турист 2 год йшов пішки та 3 год їхав на велосипеді. Загалом він подолав 56 км. Знайдіть, з якою швидкістю турист їхав на велосипеді, якщо вона на 12 км/год більша за швидкість, з якою він ішов пішки.

Життєва математика

11.31. Друзі Наталя та Артем їздили на автобусну екскурсію в інше місто. На дорогу туди автобус витратив 2 год, а повернувся назад за 1 год 20 хв, бо поїхав іншою дорогою. Стежачи за спідометром автобуса, друзі помітили, що протягом поїздки швидкість автобуса була сталою, а пробіг збільшився на 200 км. Визначте довжину дороги туди і дороги назад.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

11.32. Обчисліть значення квадрата або куба:

1) $(3{,}1)^2$; 2) $(-5)^3$; 3) $\left(-\frac{1}{7}\right)^2$; 4) $(0{,}1)^3$;

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; 6) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2$; 7) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$; 8) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$.

11.33. Обчисліть: 1) $(-1)^2 + (-2)^3 - 8^2$; 2) $(3^3 - (-4)^2) \cdot 7$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

11.34. У чемпіонаті міста з футболу беруть участь 11 команд. Кожна команда грає з іншими по одному матчу. Доведіть, що в будь-який момент змагань знайдеться команда, яка до цього моменту провела або парну кількість матчів, або ще не провела жодного.

§ 12. Степінь з натуральним показником

Степінь

Добуток кількох однакових множників можна записати у вигляді виразу, який називають ***степенем***.

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{6\ \text{множників}} = 4^6$$

показник степеня

основа степеня

Оскільки $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$, то кажуть, що число 4096 є шостим степенем числа 4.

Степенем числа a з натуральним показником n **($n > 1$) називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a.**
Степенем числа a з показником 1 **називають саме число a.**

Степінь з основою a і показником n записують так: a^n, читають: «a в степені n» або «n-й степінь числа a».

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}, \quad n > 1$$

якщо $n = 1$, $a^1 = a$

якщо $n = 2$, a^2 **— квадрат числа**

якщо $n = 3$, a^3 **— куб числа**

Приклад 1. Подати у вигляді степеня:

1) aa; 2) $bbbb$; 3) $17 \cdot 17 \cdot 17$; 4) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.

Розв'язання. 1) $aa = a^2$; 2) $bbbb = b^4$;
3) $17 \cdot 17 \cdot 17 = 17^3$; 4) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$.

Відповідь: 1) a^2; 2) b^4; 3) 17^3; 4) 10^5.

Піднесення до степеня

Обчислення значення степеня є арифметичною дією, яку називають ***піднесенням до степеня***.

Приклад 2. Виконати піднесення до степеня:

1) 2^4; 2) 0^3; 3) $(-6)^2$; 4) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$.

Розв'язання. 1) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$;
2) $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$;
3) $(-6)^2 = -6 \cdot (-6) = 36$;
4) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125}$.

Відповідь: 1) 16; 2) 0; 3) 36; 4) $-\frac{8}{125}$.

Знак степеня з натуральним показником n

З'ясуємо, який *знак степеня з натуральним показником n*.

1) Якщо $a = 0$, то $0^1 = 0$; $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$; ... . Отже, $0^n = 0$.

2) Якщо $a > 0$, то $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}} > 0$ як добуток додатних чисел. Отже, $a^n > 0$ для будь-якого $a > 0$.

3) Якщо $a < 0$, то
для *непарного* значення n маємо:
$a^n < 0$ (як добуток непарної кількості від'ємних множників);
для *парного* значення n маємо:
$a^n > 0$ (як добуток парної кількості від'ємних множників).
Отже,

! якщо n – натуральне число, то
$0^n = 0$ для будь-якого n;
$a^n > 0$ для будь-яких $a > 0$ та n;
$a^n < 0$ для будь-якого $a < 0$ та непарного n;
$a^n > 0$ для будь-якого $a < 0$ та парного n.

Обчислення значень виразів на кілька дій

Якщо вираз містить кілька дій, то спочатку виконують піднесення до степеня, потім множення і ділення, а вже потім – додавання і віднімання.

Приклад 3. Знайти значення виразу:

1) $3 - 7 \cdot 2^3$; 2) $(2 + (-3)^4)^2$; 3) $((-1)^5 + (-1)^6)^8$; 4) $4^3 : 2^7$.

Розв'язання. 1) $3 - 7 \cdot 2^3 = 3 - 7 \cdot 8 = 3 - 56 = -53$;
2) $(2 + (-3)^4)^2 = (2 + 81)^2 = 83^2 = 6889$;
3) $((-1)^5 + (-1)^6)^8 = (-1 + 1)^8 = 0^8 = 0$;
4) $4^3 : 2^7 = 64 : 128 = 0{,}5$.

Відповідь: 1) -53; 2) 6889; 3) 0; 4) 0,5.

Зверніть увагу, що під час обчислень можна також записувати кожну дію окремо.

А ще раніше... Поняття степеня з натуральним показником сформувалося ще в давні часи. Квадрат числа використовували для обчислення площ, куб числа – для обчислення об'ємів. У Давньому Єгипті та Вавилоні степені деяких чисел використовували під час розв'язування окремих задач.

Французький математик Франсуа Вієт використовував букви *N, Q* і *C* не лише для записів відповідно x, x^2 і x^3, а й для запису степенів, вищих за третій. Наприклад, четвертий степінь у його записі виглядав так: QQ.

Сучасний запис степенів запропонував видатний французький математик, фізик, філософ Рене Декарт. У своїй праці «Геометрія», датованій 1634 роком, він став записувати степені з натуральним показником так, як ми це робимо зараз: c^3, c^4, c^5 і т. д. Проте c^2 він записував як добуток: cc.

Рене Декарт
(1596–1650)

Сформулюйте означення степеня з натуральним показником. Наведіть приклади степенів і назвіть їхні основу й показник. Як називають другий степінь числа; третій степінь числа? Яким числом (додатним чи від'ємним) є степінь додатного числа; степінь від'ємного числа з парним показником; степінь від'ємного числа з непарним показником? У якому порядку виконують арифметичні дії в числових виразах, що містять степені?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

12.1. Прочитайте вирази, назвіть основу й показник степеня:

1) $0{,}7^5$; 2) $(-4)^2$; 3) $(xy)^3$;

4) $(a-b)^5$; 5) $\left(\frac{1}{2}x^2y\right)^9$; 6) $(a^2-b^2)^7$.

12.2. Запишіть добуток у вигляді степеня:

1) $0{,}5 \cdot 0{,}5$; 2) $(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)$; 3) $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}$;

4) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$; 5) $aaaa$; 6) $(xy)\cdot(xy)$;

7) $\underbrace{p\cdot p\cdot\ldots\cdot p}_{\substack{18\\ \text{множників}}}$; 8) $(m-p)(m-p)(m-p)$.

12.3. Подайте добуток у вигляді степеня:

1) $0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8$; 2) $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$; 3) $mmmmm$;

4) $(c+3)(c+3)$; 5) $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}$; 6) $\underbrace{aaa\ldots a}_{\substack{12\\ \text{множників}}}$.

12.4. Запишіть степінь у вигляді добутку однакових множників:

1) 7^5; 2) b^3; 3) $(x-y)^2$; 4) $\left(\frac{a}{a+b}\right)^4$.

12.5. Подайте степінь у вигляді добутку однакових множників:

1) 9^7; 2) c^4; 3) $(a+b)^3$; 4) $\left(\frac{x}{x-m}\right)^2$.

12.6. (*Усно.*) Обчисліть:

1) 1^3; 2) 0^5; 3) 5^2;
4) $(-7)^2$; 5) $(-2)^3$; 6) $(-1)^8$.

12.7. Знайдіть значення виразу:

1) 3^2; 2) 2^3; 3) 0^2;
4) 1^7; 5) $(-1)^4$; 6) $(-1)^3$.

2 **12.8.** Виконайте піднесення до степеня:

1) 3^5; 2) $(0,7)^2$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^5$;

5) $(-7)^4$; 6) $(-0,3)^3$; 7) $\left(-1\frac{2}{3}\right)^2$; 8) $(-0,1)^4$.

12.9. Виконайте піднесення до степеня:

1) 5^4; 2) $(1,5)^2$; 3) $\left(\frac{2}{7}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{3}\right)^4$;

5) $(-3)^3$; 6) $(-1,7)^2$; 7) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^3$; 8) $(-0,2)^4$.

12.10. Заповніть таблицю в зошиті:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n										
3^n										

12.11. Розкладіть натуральні числа на прості множники, використавши в запису степінь:

1) 16; 2) 27; 3) 50; 4) 1000; 5) 99; 6) 656.

12.12. Знайдіть значення виразу:

1) -5^2; 2) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; 3) $-(-0,2)^4$; 4) $-(-1)^{19}$.

12.13. Обчисліть:

1) -7^3; 2) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; 3) $-\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$; 4) $-(-1)^{16}$.

12.14. Порівняйте з нулем значення виразу (відповідь запишіть у вигляді нерівності):

1) $(-5{,}7)^2$; 2) $(-12{,}49)^9$; 3) -53^7; 4) $-(-2)^5$.

12.15. Порівняйте з нулем значення виразу (відповідь запишіть у вигляді нерівності):

1) $(-4{,}7)^3$; 2) $(-2{,}31)^4$; 3) $-(-2)^8$; 4) $-(-3)^7$.

12.16. Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}2 \cdot 25^2$; 2) $\dfrac{50}{0{,}1^3}$; 3) $-4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$;

4) $0{,}01 \cdot (-5)^3$; 5) $\left(5 \cdot \dfrac{2}{15}\right)^3$; 6) $\left(6 : \dfrac{2}{3}\right)^2$;

7) $5^2 + (-5)^4$; 8) $(3{,}4 - 3{,}6)^2$; 9) $(-1{,}8 + 4{,}8)^4$.

12.17. Обчисліть:

1) $0{,}5 \cdot 40^2$; 2) $\dfrac{30}{0{,}3^3}$; 3) $-5 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^3$;

4) $\left(-\dfrac{7}{8}\right)^2 \cdot 16$; 5) $\left(12 : \dfrac{6}{7}\right)^2$; 6) $\left(-3 \cdot \dfrac{2}{9}\right)^4$;

7) $6^2 - (-6)^3$; 8) $(1{,}7 - 1{,}9)^4$; 9) $(-2{,}5 + 8{,}5)^2$.

12.18. Чи є правильними рівності:

1) $3^2 + 4^2 = 5^2$; 2) $4^2 + 5^2 = 6^2$;
3) $2^3 + 3^3 = 5^3$; 4) $2^6 + 6^2 = 10^2$;
5) $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$; 6) $(-5)^2 + (-12)^2 = (-13)^2$?

3

12.19. Подайте числа:

1) 0; 4; 0,16; $\dfrac{9}{25}$; 169; $1\dfrac{24}{25}$ у вигляді квадрата;

2) 64; –27; 0; 1; $-\dfrac{1}{8}$; $1\dfrac{91}{125}$ у вигляді куба.

12.20. Подайте числа:

1) 5; 125; 625 у вигляді степеня з основою 5;
2) 100; 10 000; 10 у вигляді степеня з основою 10.

12.21. Подайте:

1) 8; 81; –125; –64; 0,16; 0,001; $3\dfrac{3}{8}$; $1\dfrac{11}{25}$ у вигляді квадрата або куба числа;
2) 2; 4; 8; 256 у вигляді степеня з основою 2;
3) 81; –27; –3 у вигляді степеня з основою –3.

12.22. Обчисліть:
1) суму квадратів чисел 0,6 і –0,7;
2) квадрат суми чисел 5,7 і –6,3;
3) різницю кубів чисел 2,3 і 2,2;
4) куб суми чисел 8,2 і 1,8.

12.23. Знайдіть значення виразу:
1) $\frac{1}{27}x^3$, якщо $x = 0; -1; 1; -3; 3;$
2) $a + a^2 + a^3$, якщо $a = 1; -1; -2;$
3) $(15x)^4$, якщо $x = \frac{1}{3}; -\frac{1}{5};$
4) $a^2 - b^2$, якщо $a = -6$, $b = -8$.

12.24. Знайдіть значення виразу:
1) $0{,}01a^4$, якщо $a = 2; -5; 10;$
2) $5c^2 - 4$, якщо $c = 0{,}2; -0{,}1; 0;$
3) $(m + n)^3$, якщо $m = -4$, $n = -1;$
4) $4x^2 - x^3$, якщо $x = 1; -2; -3$.

12.25. Не виконуючи обчислень, порівняйте:
1) -2^4 і $(-2)^4$; 2) $(-7)^3$ і $(-6)^2$;
3) $(-12)^8$ і 12^8; 4) -5^3 і $(-5)^3$.

12.26. Порівняйте значення виразів:
1) $-x^2$ і $(-x)^2$, якщо $x = 5; -3; 0;$
2) $-x^3$ і $(-x)^3$, якщо $x = -2; 0; 3$.

4

12.27. Замініть «зірочку» одним зі знаків $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$ так, щоб одержана нерівність була правильною для будь-яких значень змінних:
1) $a^2 \ast 0$; 2) $-b^2 \ast 0$; 3) $m^2 + 3 \ast 0$;
4) $-p^2 - 1 \ast 0$; 5) $(a - 3)^2 \ast 0$; 6) $a^2 + b^2 \ast 0$;
7) $x^2 + y^2 + 5 \ast 0$; 8) $(m - n)^2 + 1 \ast 0$; 9) $-(p + 9)^2 \ast 0$.

12.28. Якого найменшого значення може набувати вираз:
1) $a^2 + 1$; 2) $3 + (m - 3)^2$; 3) $(a + 8)^4 - 5$?

12.29. Якого найбільшого значення може набувати вираз:
1) $-x^2 + 2$; 2) $-(m - 2)^4 + 1$; 3) $5 - (a + 9)^2$?

Вправи для повторення

12.30. Запишіть дріб у вигляді відсотків:
1) 0,8; 2) 1,13; 3) 8,3; 4) 0,007.

12.31. Обчисліть: 1) $\left(9\frac{8}{15}-7\frac{7}{15}\right)\cdot 4{,}5-2\frac{1}{6}:0{,}52;$

2) $\frac{8}{13}\cdot(-0{,}1625)-\left(\frac{9}{22}+1\frac{4}{11}\right)\cdot 1{,}32.$

12.32. Для деяких натуральних значень x і y значення виразу $x + 3y$ ділиться на 5. Чи ділиться на 5 значення виразу $7x + 21y$ для тих самих значень x і y?

Життєва математика

12.33. Щоб бути здоровою, людина має щоденно вживати 3 г білків на кожні 4 кг своєї маси.

1) Скільки білків має містити щоденний раціон підлітка масою 48 кг?

2) Скільки білків має містити ваш щоденний раціон?

Цікаві задачі — поміркуй одначе

12.34. Доведіть *ознаку подільності на 4*: натуральне число ділиться на 4 тоді і тільки тоді, коли число, записане його двома останніми цифрами, ділиться на 4.

§ 13. Властивості степеня з натуральним показником

Розглянемо властивості степеня з натуральним показником.

Множення степенів з однаковими основами

Вираз a^3a^2 є добутком двох степенів з однаковими основами. Застосувавши означення степеня, цей добуток можна переписати:

$$a^3a^2 = (aaa)\cdot(aa) = aaaaa = a^5.$$

Отже, $a^3a^2 = a^5$, тобто $a^5 = a^{3+2}$. У той самий спосіб неважко перевірити, що $x^5x^4x^2 = x^{5+4+2} = x^{11}$. Тому *добуток степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією самою основою і показником, який дорівнює сумі показників множників*. Ця властивість справджується для кожного добутку степенів з однаковими основами.

Для будь-якого числа a й довільних натуральних чисел m і n справджується рівність: $a^ma^n = a^{m+n}$.

Доведення. Для $m > 1$, $n > 1$ маємо

$$a^m a^n = \underbrace{aa \dots a}_{\substack{m \\ \text{множників}}} \cdot \underbrace{aa \dots a}_{\substack{n \\ \text{множників}}} = \underbrace{aaa \dots a}_{\substack{(m+n) \\ \text{множників}}} = a^{m+n}.$$

Якщо, наприклад, $m = 1$, $n > 1$, то

$$a \cdot a^n = a \cdot \underbrace{aa \dots a}_{\substack{n \\ \text{множників}}} = \underbrace{aaa \dots a}_{\substack{(n+1) \\ \text{множників}}} = a^{n+1}.$$

Випадки $m > 1$, $n = 1$ та $m = 1$, $n = 1$ розглядаються аналогічно.

Рівність $a^m a^n = a^{m+n}$ називають ***основною властивістю степеня***. Вона поширюється на добуток трьох і більше степенів. Наприклад: $a^m a^n a^k = a^{m+n+k}$.

З основної властивості степеня випливає *правило множення степенів з однаковими основами*.

Щоб помножити степені з однаковими основами, основу залишають тією самою, а показники степенів додають.

Наприклад, $3^7 \cdot 3^5 = 3^{7+5} = 3^{12}$;
$7^3 \cdot 7 = 7^3 \cdot 7^1 = 7^{3+1} = 7^4$;
$a^7 a^2 a^3 = a^{7+2+3} = a^{12}$.

Ділення степенів з однаковими основами

Оскільки $a^3 a^2 = a^5$, то за означенням частки $a^5 : a^3 = a^2$, тобто $a^2 = a^{5-3}$. У той самий спосіб неважко пересвідчитися, що $a^{15} : a^4 = a^{11}$. Тому *частка степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією самою основою і показником, який дорівнює різниці показників діленого і дільника*. Ця властивість справджується для кожної частки степенів з однаковими, відмінними від нуля, основами за умови, що показник степеня діленого більший за показник степеня дільника.

Для будь-якого числа $a \neq 0$ і довільних натуральних чисел m і n, таких, що $m > n$, справджується рівність:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Доведення. Оскільки $a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$, тобто $a^{m-n} a^n = a^m$, то за означенням частки маємо $a^m : a^n = a^{m-n}$.

З доведеної властивості випливає *правило ділення степенів.*

Щоб поділити степінь на степінь, основи яких однакові, основу залишають тією самою, а від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника.

Наприклад, $3^{18} : 3^5 = 3^{18-5} = 3^{13}$; $m^9 : m = m^9 : m^1 = m^{9-1} = m^8$.

Піднесення степеня до степеня

Вираз $(a^7)^3$ – степінь, основа якого є степенем. Цей вираз можна подати у вигляді степеня з основою a:

$$(a^7)^3 = a^7 \cdot a^7 \cdot a^7 = a^{7+7+7} = a^{7\cdot 3} = a^{21}.$$

У той самий спосіб можна пересвідчитися, що $((x^7)^3)^2 = x^{42}$. Тобто *степінь при піднесенні до степеня дорівнює степеню з тією самою основою і показником, що дорівнює добутку показників даних степенів.*

Для будь-якого числа a і довільних натуральних чисел m і n справджується рівність: $(a^m)^n = a^{mn}$.

Доведення. $(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ множників}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ доданків}}} = a^{mn}$.

З доведеної властивості випливає *правило піднесення степеня до степеня.*

Щоб піднести степінь до степеня, основу залишають тією самою, а показники степенів перемножують.

Наприклад, $(4^5)^4 = 4^{5\cdot 4} = 4^{20}$;

$(a^8)^{11} = a^{8\cdot 11} = a^{88}$;

$((p^3)^2)^5 = (p^{3\cdot 2})^5 = (p^6)^5 = p^{6\cdot 5} = p^{30}$.

Піднесення добутку до степеня

Вираз $(ab)^3$ є степенем добутку множників a і b. Цей вираз можна подати у вигляді добутку степенів a і b:

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = (aaa) \cdot (bbb) = a^3b^3.$$

Отже, $(ab)^3 = a^3b^3$.

Так само підносять до степеня будь-який добуток.

Для будь-яких чисел a і b та довільного натурального числа n справджується рівність: $(ab)^n = a^n b^n$.

Доведення.

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n \text{ множників}} = \underbrace{(aa\cdot\ldots\cdot a)}_{n \text{ множників}}\cdot\underbrace{(bb\cdot\ldots\cdot b)}_{n \text{ множників}} = a^n b^n.$$

Ця властивість степеня поширюється на степінь добутку з трьох і більше множників.

Наприклад,

$$(mpk)^n = m^n p^n k^n; \quad (abcd)^n = a^n b^n c^n d^n \text{ тощо.}$$

Маємо *правило піднесення добутку до степеня.*

Щоб піднести добуток до степеня, треба піднести до цього степеня кожний з множників і отримані результати перемножити.

Наприклад, $(7ab)^2 = 7^2a^2b^2 = 49a^2b^2$;

$(-2xy)^3 = (-2)^3x^3y^3 = -8x^3y^3$.

Застосування властивостей степеня до розв'язування вправ

Маємо:

$a^m a^n = a^{m+n}$		$a^{m+n} = a^m a^n$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	і	$a^{m-n} = a^m : a^n$
$(a^m)^n = a^{mn}$		$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$
$(ab)^n = a^n b^n$		$a^n b^n = (ab)^n$

Розглянемо, як можна спрощувати та перетворювати вирази, що містять степені, обчислювати їхні значення та порівнювати.

Приклад 1. Спростити вираз $(a^2)^3 \cdot (a^4a)^6$.

Розв'язання. $(a^2)^3 \cdot (a^4a)^6 = a^6 \cdot (a^5)^6 = a^6a^{30} = a^{36}$.

Відповідь: a^{36}.

Приклад 2. Обчислити:

1) $0{,}7^{13} : 0{,}7^{11}$; 2) $3^5 \cdot 9^2 : 27^2$; 3) $2^7 \cdot 0{,}5^8$.

Розв'язання. 1) $0{,}7^{13} : 0{,}7^{11} = 0{,}7^2 = 0{,}49$.
2) Подамо 9^2 і 27^2 у вигляді степеня з основою 3, матимемо: $9^2 = (3^2)^2$, $27^2 = (3^3)^2$. Отже,
$3^5 \cdot 9^2 : 27^2 = 3^5 \cdot (3^2)^2 : (3^3)^2 = 3^5 \cdot 3^4 : 3^6 = 3^9 : 3^6 = 3^3 = 27$.
3) Оскільки $0{,}5^8 = 0{,}5^7 \cdot 0{,}5$, маємо:
$2^7 \cdot 0{,}5^8 = 2^7 \cdot 0{,}5^7 \cdot 0{,}5 = (2 \cdot 0{,}5)^7 \cdot 0{,}5 = 1^7 \cdot 0{,}5 = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$.
Відповідь: 1) 0,49; 2) 27; 3) 0,5.

Приклад 3. Подайте у вигляді степеня вираз:
1) $25a^2b^4$; 2) $-64p^6$.
Розв'язання.
1) $25a^2b^4 = 5^2a^2(b^2)^2 = (5ab^2)^2$;
2) $-64p^6 = (-4)^3(p^2)^3 = (-4p^2)^3$.
Відповідь: 1) $(5ab^2)^2$; 2) $(-4p^2)^3$.

Приклад 4. Порівняйте значення виразів 7^{40} і 48^{20}.
Розв'язання. Оскільки $7^{40} = (7^2)^{20} = 49^{20}$ і $49^{20} > 48^{20}$, то $7^{40} > 48^{20}$.
Відповідь: $7^{40} > 48^{20}$.

Сформулюйте основну властивість степеня. ○ Сформулюйте правила множення степенів, ділення степенів, піднесення степеня до степеня та піднесення добутку до степеня і запам'ятайте відповідні формули.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

13.1. (*Усно.*) Які з рівностей правильні:
1) $a^3a^5 = a^{15}$; 2) $a^2a^8 = a^{10}$; 3) $b^{20} : b^4 = b^5$;
4) $b^6 : b^2 = b^4$; 5) $(a^5)^7 = a^{35}$; 6) $(a^3)^4 = a^7$?

13.2. (*Усно.*) Подайте добуток у вигляді степеня:
1) a^7a^3; 2) b^5b; 3) $7^8 \cdot 7^{13}$; 4) $5 \cdot 5^{11}$.

13.3. Запишіть добуток у вигляді степеня:
1) x^5x^7; 2) a^2a^8; 3) m^3m; 4) $2^9 \cdot 2^{30}$.

13.4. Подайте добуток у вигляді степеня:
1) p^2p^4; 2) c^9c^3; 3) $4 \cdot 4^{16}$; 4) c^7c^2.

13.5. (*Усно.*) Подайте частку у вигляді степеня:
1) $a^7 : a^2$; 2) $3^{14} : 3^{11}$; 3) $c^8 : c$; 4) $12^{14} : 12^{13}$.

13.6. Запишіть частку у вигляді степеня:
1) $b^5 : b^3$; 2) $m^{12} : m^5$; 3) $t^6 : t$; 4) $x^{10} : x^9$.

13.7. Подайте частку у вигляді степеня:
1) $m^9 : m^5$; 2) $a^{10} : a^5$; 3) $9^7 : 9$; 4) $m^{14} : m^{13}$.

13.8. (*Усно.*) Подайте у вигляді степеня:
1) $(x^3)^7$; 2) $(3^{10})^4$; 3) $(c^2)^5$; 4) $(9^7)^{11}$.

13.9. Подайте у вигляді степеня:
1) $(m^3)^5$; 2) $(a^5)^7$; 3) $(9^3)^8$; 4) $(10^4)^2$.

13.10. Подайте у вигляді степеня:
1) $(a^4)^5$; 2) $(c^7)^2$; 3) $(9^2)^{15}$; 4) $(18^{14})^2$.

2

13.11. Запишіть вираз x^{12} у вигляді добутку двох степенів, один з яких дорівнює:
1) x^3; 2) x^6; 3) x^9; 4) x^{11}.

13.12. Запишіть степінь у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами:
1) m^7; 2) c^{12}; 3) 5^{17}; 4) p^8.

13.13. Подайте добуток у вигляді степеня:
1) $(-7)^3 \cdot (-7)^4 \cdot (-7)$; 2) aa^5a^{11}; 3) $bbbb^9$;
4) $(x-y)^3(x-y)^{12}$; 5) $14^7 \cdot 14^5 \cdot 14^9$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^4$.

13.14. Запишіть у вигляді степеня вираз:
1) $12^3 \cdot 12^9 \cdot 12$; 2) ppp^7p;
3) $(a+b)^3(a+b)^5$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6$.

13.15. Обчисліть значення виразу, використовуючи властивості степеня і таблицю степенів з основами 2 і 3 (див. № 12.10 на с. 96):
1) $2^3 \cdot 2^4$; 2) $3^6 : 3$; 3) $3 \cdot 3^3 \cdot 3^4$; 4) $2^9 : 2^3$.

13.16. Виконайте піднесення до степеня:
1) $(xy)^9$; 2) $(abc)^7$; 3) $(0{,}1a)^3$; 4) $(2xy)^4$;
5) $(-2a)^5$; 6) $(-0{,}3a)^2$; 7) $(-4ab)^3$; 8) $\left(-\frac{2}{3}axz\right)^4$.

13.17. Запишіть степінь у вигляді добутку степенів або добутку числа і степенів:
1) $(ab)^5$; 2) $(2p)^4$; 3) $(-5ax)^3$;
4) $\left(-\frac{3}{4}ac\right)^4$; 5) $(-0{,}1m)^3$; 6) $(-0{,}07mx)^2$.

13.18. Знайдіть значення виразу:
1) $6^{18} : 6^{16}$; 2) $0{,}3^8 : 0{,}3^5$; 3) $\frac{4{,}92^{10}}{4{,}92^9}$;

4) $\frac{10^8}{10^5}$; 5) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{10} : \left(-\frac{1}{4}\right)^{7}$; 6) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{12} : \left(1\frac{1}{2}\right)^{8}$.

13.19. Обчисліть:

1) $9^{10} : 9^8$; 2) $\frac{0,4^{17}}{0,4^{14}}$; 3) $\left(-1\frac{1}{9}\right)^{15} : \left(-1\frac{1}{9}\right)^{13}$; 4) $\frac{\left(1\frac{1}{3}\right)^{12}}{\left(1\frac{1}{3}\right)^{8}}$.

13.20. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{8^{12} \cdot 8^3}{8^{13}}$; 2) $\frac{4^8}{4 \cdot 4^6}$; 3) $\frac{(-3)^5 \cdot (-3)^7}{(-3)^{10}}$; 4) $\frac{(0,2)^7 \cdot (0,2)^5}{(0,2)^3 \cdot (0,2)^6}$.

13.21. Обчисліть:

1) $5^4 \cdot 5^{12} : 5^{13}$; 2) $\frac{37^{12}}{37^5 \cdot 37^6}$;

3) $\frac{6^{17} \cdot 6^8}{6^{22}}$; 4) $\frac{(0,7)^3 \cdot (0,7)^{16}}{(0,7)^{12} \cdot (0,7)^5}$.

13.22. Спростіть вираз, використовуючи правила множення і ділення степенів:

1) $a^7 \cdot a^9 : a^3$; 2) $b^9 : b^5 : b^3$;

3) $m^{12} : m^7 \cdot m$; 4) $p^{10} : p^9 \cdot p^3$.

13.23. Запишіть вираз у вигляді степеня:

1) $(a^3)^4 \cdot a^8$; 2) $((a^7)^2)^3$; 3) $(b^3)^2 : b^4$; 4) $(a^4)^5 \cdot (a^7)^2$.

13.24. Подайте вираз у вигляді степеня:

1) $(b^3)^4 \cdot b^7$; 2) $((x^4)^5)^6$; 3) $(c^3)^8 : c^{10}$; 4) $(m^3)^5 \cdot (m^2)^7$.

13.25. Запишіть вираз у вигляді степеня з основою mn:

1) m^9n^9; 2) m^7n^7; 3) m^2n^2; 4) $m^{2015}n^{2015}$.

13.26. Подайте вираз у вигляді степеня з основою ab:

1) a^5b^5; 2) a^3b^3; 3) $a^{18}b^{18}$; 4) $a^{2016}b^{2016}$.

3

13.27. Запишіть добуток у вигляді степеня:

1) a^4b^4; 2) $49a^2x^2$; 3) $0,001a^3b^3$; 4) $-8p^3$;

5) $-32a^5b^5$; 6) $-a^7b^7c^7$; 7) $\frac{1}{27}x^3y^3$; 8) $-\frac{64}{125}p^3q^3$.

13.28. Знайдіть значення x, для якого справджується рівність:

1) $3^5 \cdot 3^2 = 3^{5+x}$; 2) $2^7 \cdot 2^8 = 2^{1+x}$;

3) $4^x \cdot 4^5 = 4^8$; 4) $9^8 : 9^x = 9^5$.

13.29. Знайдіть значення x, для якого справджується рівність:

1) $1,8^9 : 1,8 = 1,8^{9-x}$; 2) $19^x : 19^7 = 19^9$; 3) $4^{12} : 4^x = 4^7$.

13.30. Замініть «зірочку» степенем з основою p, де $p \neq 0$, таким, щоб рівність стала тотожністю:
1) $p^7 : * = p^3$; 2) $* : p^5 = p^9$;
3) $p^9 : * \cdot p^3 = p^7$; 4) $* : p^9 \cdot p^4 = p^{10}$.

13.31. Замініть «зірочку» степенем з основою a таким, щоб рівність стала тотожністю:
1) $a^2 \cdot * = a^7$; 2) $a^8 \cdot * = a^9$; 3) $a^4 \cdot * \cdot a^7 = a^{19}$.

13.32. Подайте вираз:
1) 8^7; $(16^3)^5$ у вигляді степеня з основою 2;
2) 25^3; 625^7 у вигляді степеня з основою 5.

13.33. Подайте вираз:
1) 9^7; $(81^3)^5$ у вигляді степеня з основою 3;
2) 100^4; 1000^9 у вигляді степеня з основою 10.

13.34. Обчисліть, використовуючи властивості степенів:
1) $256 : 2^5$; 2) $243 : 3^4 \cdot 9$; 3) $\dfrac{125^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 25}$; 4) $\dfrac{100 \cdot 10^7}{10^5 \cdot 1000}$.

13.35. Подайте у вигляді степеня (n – натуральне число):
1) x^5x^n; 2) $x^8 : x^n$, $n < 8$;
3) $x^n : (x^8 \cdot x^9)$, $n > 17$; 4) $x^{2n} : x^n \cdot x^{3n+1}$;
5) $((x^n)^3)^5$; 6) $(-x^4)^{2n}$.

13.36. Знайдіть значення виразу:
1) $5^3 \cdot 2^3$; 2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \cdot 20^2$; 3) $0{,}2^{13} \cdot 5^{13}$;
4) $(1{,}5)^7 \cdot \left(1\dfrac{1}{3}\right)^7$; 5) $0{,}5^7 \cdot 2^8$; 6) $\left(1\dfrac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^8$.

13.37. Обчисліть: 1) $0{,}25^7 \cdot 4^7$; 2) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^5 \cdot 14^5$;
3) $\left(1\dfrac{1}{8}\right)^9 \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^{10}$; 4) $1{,}5^7 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^9$.

13.38. Знайдіть значення виразу, використовуючи властивості степенів:
1) $\dfrac{9^5}{3^7}$; 2) $\dfrac{8^7}{4^8}$; 3) $\dfrac{27^3 \cdot 9^4}{81^3}$; 4) $\dfrac{25^4 \cdot 125^{10}}{5^{36}}$.

4 **13.39.** Знайдіть значення виразу:
1) $\dfrac{5^7 \cdot 7^8}{35^7}$; 2) $\dfrac{2^{17} \cdot 3^6}{24^5}$; 3) $\dfrac{36^7}{2^{12} \cdot 3^{10}}$; 4) $\dfrac{27^3}{18^4}$.

13.40. Обчисліть:

1) $\dfrac{7^9 \cdot 49^8}{343^8}$; 2) $\dfrac{6^{12}}{2^{10} \cdot 3^{11}}$; 3) $\dfrac{2^8 \cdot 5^7}{100^3}$; 4) $\dfrac{36^5}{24^6}$.

13.41. Порівняйте вирази: 1) 6^{10} і 36^5; 2) 10^{20} і 20^{10}; 3) 5^{14} і 26^7; 4) 2^{3000} і 3^{2000}.

Вправи для повторення

13.42. Спростіть вираз:

1) $5{,}2 \cdot 6a$; 2) $-4{,}5b \cdot 8$; 3) $-5x \cdot (-12)$;

4) $\dfrac{2}{3}m \cdot \dfrac{3}{4}k$; 5) $1\dfrac{1}{3}x \cdot \left(-1\dfrac{2}{7}y\right)$; 6) $-1{,}8a \cdot (-b) \cdot 5c$.

13.43. Вартість деякого товару становила 80 грн. Спочатку її знизили на 15 %, а потім підвищили на 10 %. Знайдіть:
1) вартість товару після зниження;
2) вартість товару після підвищення;
3) як саме і на скільки гривень змінилася вартість товару;
4) як саме і на скільки відсотків змінилася вартість товару.

13.44. Нехай $a + b = 5$ і $c = -2$. Знайдіть значення виразу:

1) $a + b - c$; 2) $a - 2c + b$;

3) $\dfrac{a+b+c}{c}$; 4) $c(a + b - 4c)$.

13.45. Спростіть вираз $1{,}7\left(1\dfrac{1}{5}a - 4b\right) - 1{,}5(1{,}2b - a)$ і знайдіть його значення, якщо $a = 5$, $b = -10$.

Життєва математика

13.46. Студент-художник Максим отримав свій перший гонорар у розмірі 4000 грн за написану картину. Із цього приводу він вирішив привітати букетом троянд свою викладачку мистецтва Ларису Василівну. Яку найбільшу кількість троянд зможе придбати Максим, якщо витратить на букет половину тієї суми, яку отримає після вирахування з гонорару прибуткового податку в розмірі 18 % та 1,5 % військового збору, за умови, що одна троянда коштує 100 грн і букет має містити непарну кількість квітів?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

13.47. Запишіть коефіцієнт буквеного виразу:

1) $5c$; 2) $-2a$; 3) $0{,}17kb$;

4) $-\frac{1}{3}m$; 5) acx; 6) $-ad$.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

13.48. Дано п'ять різних додатних чисел, які можна розбити на дві групи так, щоб суми чисел у кожній з груп були однакові. Скількома способами це можна зробити?

§ 14. Одночлен. Стандартний вигляд одночлена

Одночлен

Розглянемо вирази: 7; $-\frac{8}{11}$; a^9; $-b$; $7b^2m$; $4a^2\cdot(-5)ac$.

Це – числа, змінні, їхні степені й добутки. Такі вирази називають ***одночленами***.

Цілі вирази – числа, змінні, їхні степені й добутки – називають *одночленами*.

Вирази $a + b^2$; $c^3 - 5m$; $0{,}9a^2 : m$ не є одночленами, оскільки містять дії додавання, віднімання, ділення.

Одночлен стандартного вигляду

Спростимо одночлен $4a^2 \cdot (-5)ac$, використавши переставну та сполучну властивості множення:

$$4a^2 \cdot (-5)ac = 4 \cdot (-5)a^2ac = -20a^3c.$$

Звівши одночлен $4a^2 \cdot (-5)ac$ до вигляду $-20a^3c$, кажуть, що звели його ***до стандартного вигляду***.

Якщо одночлен є добутком, що має один числовий множник, записаний на першому місці, а інші множники є степенями різних змінних, то такий одночлен називають *одночленом стандартного вигляду*.

Одночлени 5; -9; b; $-p^3$ – теж одночлени стандартного вигляду.

Коефіцієнт і степінь одночлена

Очевидно, що до стандартного вигляду можна звести будь-який одночлен. Числовий множник одночлена стандартного вигляду називають ***коефіцієнтом*** цього одночлена.

Наприклад, коефіцієнтом одночлена $-20a^3c$ є число -20, а коефіцієнтом одночлена $\frac{7}{11}b^9$ – число $\frac{7}{11}$.

Зазвичай, якщо одночлен має коефіцієнт 1, то його не записують → $1 \cdot c^2d = c^2d$

Якщо одночлен має коефіцієнт −1, то записують лише знак мінус → $-1 \cdot p^7 = -p^7$

! Для кожного *одночлена* можна вказати *його степінь*.

Степенем одночлена **називають суму показників степенів усіх змінних, які він містить. Якщо одночлен не містить змінних (тобто є числом), то вважають, що його степінь дорівнює нулю.**

Наприклад, одночлен $4a^2b^7c^3$ – це одночлен 12-го степеня, адже $2 + 7 + 3 = 12$; m^7n – одночлен 8-го степеня, адже $7 + 1 = 8$; $-5a^4$ – одночлен 4-го степеня; $5m$ – одночлен 1-го степеня.

Якщо одночлен не містить змінних, то є одночленом нульового степеня. Так, наприклад, одночлен -7 є одночленом 0-го степеня.

? Який вираз називають одночленом? ○ Який вигляд одночлена називають стандартним виглядом? ○ Наведіть приклад одночлена стандартного вигляду та назвіть його коефіцієнт. ○ Що називають степенем одночлена?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **14.1.** (*Усно.*) Які з виразів є одночленами:

1) $4{,}5a^2b$; 2) $-0{,}45mpc$; 3) $a^2 - 9$;

4) $p \cdot (-0{,}2)$; 5) a^2am; 6) $\left(-\frac{2}{3}p + 7\right)m$;

7) $x - y$; 8) $c^{12} : c^3$; 9) $5(m + p)^7$;
10) $-m$; 11) $-4,9$; 12) 0?

14.2. (*Усно.*) Назвіть одночлени стандартного вигляду та їх коефіцієнти:
1) $5xy$; 2) $-4ama$; 3) $9a^2ba^3b$; 4) $-a^7b^3$;
5) $0,2a \cdot 3b$; 6) $-2xyt$; 7) x^9c^7; 8) 17.

14.3. Які з виразів є одночленами? Серед одночленів укажіть ті, які записано у стандартному вигляді:
1) $5a \cdot 3b$; 2) $-7x^2y$; 3) $a^2 - a + 1$; 4) $x \cdot xy \cdot 7$;
5) $\left(\frac{1}{3}a - 1\right) \cdot 5$; 6) $-m^2$; 7) $12 + m$; 8) -145;
9) $4(x - y)^2$; 10) p^{18}; 11) $1 : x$; 12) $-xytm$.

2

14.4. Зведіть одночлен до стандартного вигляду, укажіть його коефіцієнт і степінь:
1) $7a^2a^3a$; 2) $8 \cdot a \cdot 0,1m \cdot 2p$;
3) $5t \cdot (-4at)$; 4) $-1\frac{2}{3}m^4 \cdot 12m^2p$;
5) $-5a^2 \cdot 0,2am^7 \cdot (-10m)$; 6) $t^3 \cdot (-p)^7 \cdot t$.

14.5. Зведіть одночлен до стандартного вигляду, укажіть його коефіцієнт і степінь:
1) $-7m^2b \cdot 8mb^2$; 2) $5m \cdot 2a \cdot (-3b)$;
3) $-7a \cdot (-5a^2)$; 4) $-2,2a^2 \cdot \frac{25}{44}a^3p$;
5) $-a \cdot (-0,2a^2p) \cdot (-0,3p^4)$; 6) $c^5 \cdot (-a) \cdot (-c^4a) \cdot a^7$.

14.6. Знайдіть значення одночлена:
1) $3,5a^2$, якщо $a = 4$; $0,1$;
2) $-4m^3$, якщо $m = 0$; -1;
3) $10xy$, якщо $x = 1,4$, $y = -5$;
4) $-0,01a^2c$, якщо $a = 5$, $c = -2$.

14.7. Обчисліть значення одночлена:
1) $1,6a^2$, якщо $a = -5$; 0; -1;
2) $5b^2c$, якщо $b = 0,2$ і $c = 0,1$; $b = -0,4$ і $c = 2$.

14.8. Заповніть таблицю в зошиті:

a	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$4a^2$											
$-2a^2$											

3

14.9. Знайдіть:

1) значення x, для якого значення одночлена $-0{,}8x$ дорівнює 0; 1; –1; 12;

2) значення a і b, для яких значення одночлена $15ab$ дорівнює 10; –60; 0.

14.10. Знайдіть:

1) значення a, для якого значення одночлена $-0{,}6a$ дорівнює 0; –3; 12; –300;

2) пару значень x і y, для яких значення одночлена $12xy$ дорівнює 15; –120; 0.

14.11. (*Усно*.) Чи є правильним твердження? У разі ствердної відповіді обґрунтуйте її; якщо відповідь заперечна – наведіть приклад, що спростовує твердження.

1) Одночлен $7m^2$ для будь-яких значень m набуває додатних значень;

2) одночлен $\frac{1}{16}p^4$ для будь-яких значень p набуває невід'ємних значень;

3) одночлен $-12a^2$ для будь-яких значень a набуває від'ємних значень;

4) одночлен $8b^3$ для будь-яких значень b набуває додатних значень.

14.12. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, висота якого дорівнює x см, ширина у 3 рази більша за висоту, а довжина у 2 рази більша за ширину.

14.13. Ширина прямокутника дорівнює b дм, а довжина втричі більша за ширину. Знайдіть площу прямокутника.

Вправи для повторення

14.14. Розкрийте дужки та спростіть вираз:

1) $3(12x - 5) + 4x$;
2) $7(a - 1) - 7a + 13$;
3) $4{,}2(x - y) + 3{,}5(x + y)$;
4) $12 - 5(1 - x) - 5x$.

14.15. Серед виразів $3(y - x)$, $-3(x - y)$, $-3x - 3y$, $-3x + 3y$ знайдіть ті, що тотожно рівні виразу $3y - 3x$.

Життєва математика

14.16. Подружжя, Леонід та Олена, відкрили депозити по 100 000 грн кожний і домовилися через рік порівняти отримані від цих депозитів прибутки. Леонід відкрив депозит у банку, що нараховує 4 % щоквартально, а Олена – у банку, що приймає кошти під 17 % річних. Чий прибуток через рік виявиться більшим і на скільки?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

14.17. Спростіть вираз: 1) $-4a \cdot (-0{,}5b)$; 2) $10c \cdot 0{,}1d$; 3) $0{,}25y \cdot (-40x)$; 4) $4c \cdot (-2a) \cdot (-3b)$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

14.18. *Задача Стенфордського університету.* Щоб пронумерувати всі сторінки книжки, друкар використав 1890 цифр. Скільки сторінок у цій книжці?

§ 15. Множення одночленів. Піднесення одночлена до степеня

Множення одночленів

Під час *множення одночленів* використовують властивості множення та правило множення степенів з однаковими основами.

Приклад 1. Перемножити одночлени $-3x^3y^7$ і $5x^2y$.

Розв'язання. $-3x^3y^7 \cdot 5x^2y = (-3 \cdot 5)(x^3x^2)(y^7y) = -15x^5y^8$.

Відповідь: $-15x^5y^8$.

Добутком будь-яких одночленів є одночлен, який зазвичай подають у стандартному вигляді. Аналогічно до прикладу 1 можна множити три і більше одночленів.

Приклад 2. Знайти добуток одночленів $-\frac{1}{2}a^2b \cdot \frac{2}{3}ab^7 \cdot (-6a^7b^{13})$.

Розв'язання. $-\frac{1}{2}a^2b \cdot \frac{2}{3}ab^7 \cdot (-6a^7b^{13}) =$

$= \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-6)\right)(a^2aa^7)(bb^7b^{13}) = 2a^{10}b^{21}$.

Відповідь: $2a^{10}b^{21}$.

Піднесення одночлена до степеня

Під час *піднесення одночлена до степеня* використовують властивості степенів.

Приклад 3. Піднести одночлен:

1) $-2x^2y$ до куба; 2) $-p^7m^2$ до четвертого степеня.

Розв'язання. 1) $(-2x^2y)^3 = (-2)^3(x^2)^3y^3 = -8x^6y^3$;

2) $(-p^7m^2)^4 = (-1)^4(p^7)^4(m^2)^4 = p^{28}m^8$.

Відповідь: 1) $-8x^6y^3$; 2) $p^{28}m^8$.

Результатом піднесення одночлена до степеня є одночлен, який зазвичай записують у стандартному вигляді.

Розглянемо ще кілька прикладів.

Приклад 4. Спростити вираз $\left(-\frac{2}{3}xy^5\right)^3 \cdot 18x^5y$.

Розв'язання. $\left(-\frac{2}{3}xy^5\right)^3 \cdot 18x^5y = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot x^3(y^5)^3 \cdot 18x^5y =$

$= \left(-\frac{8}{27} \cdot 18\right) \cdot (x^3x^5) \cdot (y^{15}y) = -5\frac{1}{3}x^8y^{16}$.

Відповідь: $-5\frac{1}{3}x^8y^{16}$.

Приклад 5. Подати одночлен $16m^8p^{10}$ у вигляді квадрата одночлена стандартного вигляду.

Розв'язання. Оскільки $16 = 4^2$, $m^8 = (m^4)^2$, $p^{10} = (p^5)^2$, то $16m^8p^{10} = 4^2 \cdot (m^4)^2 \cdot (p^5)^2 = (4m^4p^5)^2$.

Відповідь: $(4m^4p^5)^2$.

? Які правила та властивості використовують під час множення одночленів; піднесення одночлена до степеня?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **15.1.** (*Усно.*) Перемножте одночлени:

1) $3x$ і $5y$; 2) $-a$ і $2b$; 3) $4x^2$ і $-2y$; 4) $-3m^2$ і $-n^2$.

2 **15.2.** Виконайте множення одночленів:

1) $1{,}5x \cdot 12y$; 2) $-p^2 \cdot 9p^7$;

3) $8a \cdot \left(-\frac{3}{4}a^7\right)$; 4) $-\frac{2}{3}a \cdot (-12ab^3)$;

5) $0{,}7mn^2 \cdot (-m^7n^3)$; 6) $-0{,}2m^7p^9 \cdot (-4m^4p)$;

7) $-0{,}6ab^2c^3 \cdot 0{,}5a^3bc^7$; 8) $\frac{3}{4}mn^2 \cdot \left(-\frac{4}{5}m\right) \cdot \frac{5}{3}n^7$.

15.3. Знайдіть добуток одночленів:

1) $20a \cdot (-0{,}5b)$;
2) $-a^2 \cdot (-3a^7b)$;
3) $5b \cdot \left(-\frac{1}{5}b^3\right) \cdot 2c$;
4) $\frac{3}{5}xy^3 \cdot \frac{10}{21}x^2y^5$;
5) $\frac{3}{5}ab^2 \cdot \left(-\frac{5}{6}a^3\right) \cdot 2b^7$;
6) $-\frac{1}{2}m^2p \cdot \frac{2}{3}m^3p \cdot \frac{1}{5}mp^3$.

15.4. Перемножте одночлени:

1) $-13x^2y$ і $12xy^3$;
2) $0{,}8mn^8$ і $50m^2n$;
3) $-\frac{1}{5}ab^2$, $15a^2p$ і $-\frac{1}{3}pb^4$;
4) $20xy^2$, $-0{,}1x^2y$ і $0{,}2x^2y^2$.

15.5. Знайдіть два різних записи одночлена $-12m^2n^5$ у вигляді добутку двох одночленів стандартного вигляду.

15.6. Знайдіть два різних записи одночлена $18m^2n^7$ у вигляді добутку:

1) двох одночленів стандартного вигляду;
2) трьох одночленів стандартного вигляду.

15.7. (*Усно.*) Піднесіть одночлен до степеня:

1) $(-mn^2)^2$;
2) $(2a^2b)^3$;
3) $(-m^3b^2)^4$;
4) $(-a^3b^5)^7$.

15.8. Піднесіть до квадрата одночлен:

1) $3a$;
2) $2b^2$;
3) $-4a^3b^7$;
4) $-0{,}1p^9a^4$;
5) $-\frac{1}{5}m^5$;
6) $\frac{6}{7}p^6m^8$.

15.9. Піднесіть до куба одночлен:

1) $2p$;
2) $7m^5$;
3) $-3a^3b^2$;
4) $-0{,}1a^7b^2$;
5) $\frac{1}{4}p^6$;
6) $-\frac{2}{5}mn^4$.

15.10. Виконайте піднесення до степеня:

1) $(-xy^3)^3$;
2) $(-7a^2bc^3)^2$;
3) $(p^3m^4q^5)^4$;
4) $(-2a^2b)^4$;
5) $\left(\frac{1}{6}p^2c^5\right)^3$;
6) $(-c^5m^{10}a^3)^5$.

15.11. Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $(-5x)^2$;
2) $\left(\frac{1}{2}p^4\right)^3$;
3) $(-0{,}2a^2b^3)^4$;
4) $(-ab^7c^5)^6$;
5) $(-10a^{11}b)^5$;
6) $(a^8c^{10})^7$.

3

15.12. Подайте вираз:

1) $\frac{1}{9}x^6$; $0{,}25m^6p^{10}$; $121a^{18}b^2c^4$ у вигляді квадрата одночлена;

2) $0{,}001a^9$; $-125p^3b^{12}$; $\frac{8}{27}c^6m^{15}a^{21}$ у вигляді куба одночлена.

15.13. Який одночлен стандартного вигляду має бути в дужках замість пропусків, щоб рівність була правильною:
1) $(\ \dots\ )^2 = 4m^6$; 2) $(\ \dots\ )^2 = 0{,}36p^8q^{10}$; 3) $(\ \dots\ )^3 = -8c^9$;
4) $(\ \dots\ )^3 = 1000c^6m^{12}$; 5) $(\ \dots\ )^4 = 16a^4b^8$; 6) $(\ \dots\ )^5 = c^{15}p^{45}$?

15.14. Який одночлен стандартного вигляду потрібно записати замість «зірочки», щоб одержати правильну рівність:
1) $* \cdot 4m^2n = 12m^7n^{12}$; 2) $5a^2b \cdot * = a^3b^7$;
3) $* \cdot (-2m^2p) = 24m^3p^2$; 4) $* \cdot (-9a^2b) = a^3b$;
5) $5m^2a^3 \cdot * = -5m^2a^3$; 6) $4m^2n \cdot * = -\frac{1}{16}m^2n^8$?

15.15. Який одночлен стандартного вигляду треба записати замість «зірочки», щоб одержати правильну рівність:
1) $* \cdot 3m^2n^3 = 15m^3n^8$; 2) $-7p^2x^3 \cdot * = 21p^2x^9$;
3) $* \cdot (-3a^3b^9) = a^6b^{10}$; 4) $12p^3m \cdot * = -\frac{1}{2}p^3m$?

15.16. Спростіть вираз:
1) $15m^2 \cdot (4m^3)^2$; 2) $-0{,}5m^5 \cdot (2m^3)^4$;
3) $(-3a^3b^4)^4 \cdot \left(-\frac{1}{81}ab^3\right)$; 4) $\left(-\frac{2}{3}ac^4\right)^3 \cdot 18a^5c$.

15.17. Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду:
1) $6a^3 \cdot (2a^5)^2$; 2) $-0{,}8a^4 \cdot (5a^7)^3$;
3) $(-2b^2a^7)^4 \cdot \left(-\frac{1}{8}a^3b\right)$; 4) $\left(-\frac{4}{5}mn^4\right)^3 \cdot 25m^4n$.

15.18. Подайте вираз у вигляді добутку числа 5 і квадрата деякого виразу:
1) $5a^4b^2$; 2) $20c^4d^2m^8$; 3) $\frac{5}{16}p^{12}$.

15.19. Запишіть вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:
1) $(8ab^3)^2 \cdot (0{,}5a^3b)^3$; 2) $\left(\frac{3}{4}m^2n^8\right)^3 \cdot (-4m^7)^2$;
3) $-(-m^2n^3)^4 \cdot (7m^3n)^2$; 4) $(-0{,}2x^3c^7)^5 \cdot (10xc^3)^5$.

15.20. Спростіть вираз:

1) $(10m^2n)^2 \cdot (3mn^2)^3$;
2) $\left(-\frac{1}{2}ab^3\right)^3 \cdot (4a^5)^2$;
3) $-(3a^6m^2)^3 \cdot (-a^2m)^4$;
4) $(-5xy^6)^4 \cdot (0{,}2x^6y)^4$.

15.21. Подайте одночлен у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $-4ab^2$:

1) $8a^2b^2$;
2) $-\frac{1}{5}ab^4$;
3) $-7{,}8a^3b^5$;
4) $1\frac{1}{8}a^3b^2$.

15.22. Подайте одночлен у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $3mn^2$:

1) $12m^2n^2$;
2) $-\frac{1}{4}mn^5$;
3) $-6{,}9m^7n^8$;
4) $1\frac{1}{5}m^8n^2$.

4

15.23. Запишіть у вигляді одночлена стандартного вигляду (n – натуральне число):
1) $(-0{,}2a^{n+5}b^{n+2}) \cdot (0{,}5a^{n-2}b^{n+3})$, $n > 2$;
2) $(2a^{2n}b^5)^3 \cdot (-3a^3b^{3n})^2$;
3) $(a^2b^3)^n \cdot (a^{2n}b)^3 \cdot (a^2b^{3n})^5$;
4) $(x^{2n-1}y^{3n+1})^2 \cdot (x^{3n-1}y^{2n+1})^3$.

15.24. Відомо, що $3ab^2 = 7$. Знайдіть значення виразу:
1) ab^2;
2) $5ab^2$;
3) $-9a^2b^4$;
4) $27a^3b^6$.

15.25. Відомо, що $5xy^2 = 9$. Знайдіть значення виразу:
1) xy^2;
2) $7xy^2$;
3) $-25x^2y^4$;
4) $125x^3y^6$.

Вправи для повторення

15.26. Для перевезення школярів до літнього оздоровчого табору використали 3 мікроавтобуси марки «Газель» і 2 мікроавтобуси марки «Богдан». У кожній «Газелі» розмістилося по x учнів/учениць, а в кожному «Богдані» – по y учнів/учениць. Скільки всього учнів/учениць прибуло до табору на відпочинок указаним транспортом? Запишіть відповідь у вигляді виразу і знайдіть його значення, якщо $x = 20$, $y = 22$.

15.27. Замініть «зірочку» таким виразом, щоб рівність була тотожністю:
1) $(b^3)^2 \cdot * = b^{10}$;
2) $(m^2)^3 \cdot * = -m^{14}$;
3) $(a \cdot a^4)^2 : * = a^3$;
4) $n^6 \cdot (n \cdot n^2)^2 = * \cdot (-n^4)$.

15.28. Обчисліть значення виразу $\frac{2^{n+1} \cdot 7^{n+2}}{14^n}$, де n – натуральне число.

Життєва математика

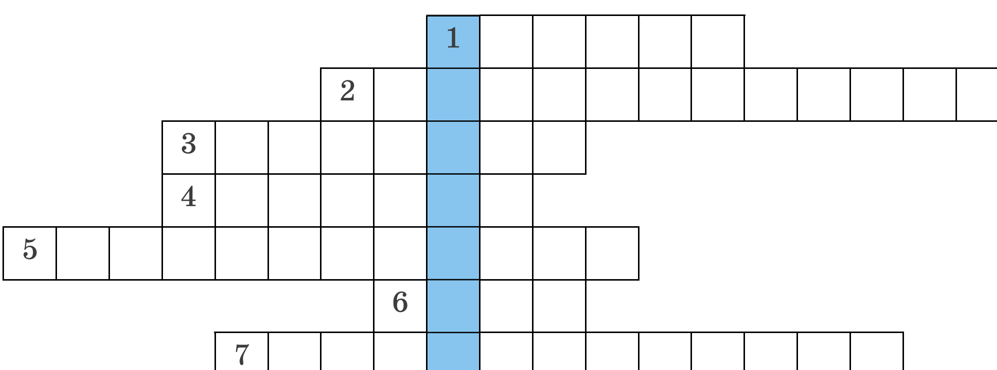
15.29. Через стирання гумових покришок кожний автомобіль щороку розсіює в повітря 10 кг гумового пилу. Нехай у невеликому містечку на 1000 родин кожна четверта родина має автомобіль, а 5 % усіх родин мають по два автомобілі. Скільки гумового пилу розсіють у повітря за рік автомобілі жителів цього містечка?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

15.30. Накресліть прямокутник *ABCD* та запишіть усі пари перпендикулярних прямих, які утворилися.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

15.31. *Видатні українці та українки.* Запишіть по горизонталях прізвища видатних українців (за потреби використайте додаткову літературу чи інтернет) і прочитайте у виділеному стовпчику одне з фундаментальних понять математики, з яким ви ознайомитеся в наступній темі.



1. Видатний письменник, учений, публіцист.
2. Легенда оперної сцени, примадонна XX століття.
3. Видатний поет і художник, літературна спадщина якого вважається основою української літератури та сучасної української мови.
4. Перша переможниця від України на міжнародному пісенному конкурсі «Євробачення».
5. Видатна актриса, яка перша здобула звання Народної артистки Української РСР.

6. Ім'я сучасної української поетеси та активної громадської діячки сучасної України (1930 р.н.).

7. Автор «Енеїди» – першого твору нової української літератури, написаного народною мовою, один із засновників нової української драматургії.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 3 (§§ 10–15)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Який з виразів тотожно рівний виразу $b + b + b + b$?

А. b^4 **Б.** $4 + b$ **В.** $4b$ **Г.** $\frac{b}{4}$

2. Який з виразів є одночленом?

А. $7x - y$ **Б.** $7x + y$ **В.** $\frac{7x}{y}$ **Г.** $7xy$

3. $a^6 : a^3 = ...$

А. a^3 **Б.** a^2 **В.** a **Г.** 1

2

4. Укажіть значення виразу $(-2)^3$.

А. 8 **Б.** −8 **В.** −6 **Г.** 6

5. Запишіть у вигляді виразу квадрат суми чисел m і $3a$.

А. $(m - 3a)^2$ **Б.** $m^2 + (3a)^2$ **В.** $(m + 3a)^2$ **Г.** $(m \cdot 3a)^2$

6. Обчисліть значення виразу $2{,}5a^2$, якщо $a = -4$.

А. −40 **Б.** 40 **В.** 100 **Г.** −100

3

7. Знайдіть значення виразу $-14\frac{1}{2}a + 8{,}3b + 4\frac{1}{2}a - 7{,}3b$, якщо $a = 1{,}9$, $b = -3{,}5$.

А. 22,5 **Б.** −15,5 **В.** −22,5 **Г.** 15,5

8. Обчисліть $\frac{9^{18}}{27^{12}}$.

А. 3 **Б.** 9 **В.** 27 **Г.** 1

9. $(4mp^3)^2 \cdot (0{,}5m^7p)^3 = ...$

А. $\frac{1}{2}m^{23}p^9$ **Б.** $2m^8p^4$ **В.** $2m^{23}p^9$ **Г.** $2m^{12}p$

4

10. Якого найбільшого значення може набувати вираз $1 - (a - 3)^2$?

А. 1 **Б.** −1 **В.** −3 **Г.** −8

11. Укажіть найбільше із чисел 2^{300}, 3^{200}, 7^{100}, 25^{50}.

А. 2^{300} **Б.** 3^{200} **В.** 7^{100} **Г.** 25^{50}

12. Знайдіть значення виразу $8x^2y^4$, якщо $2xy^2 = -5$.

А. 25 **Б.** −50 **В.** 50 **Г.** 100

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** Установіть відповідність між виразами (1–3) та їхніми значеннями (А–Г).

Вираз	*Значення виразу*
1. $2^9 : 64$	**А.** 2
2. $1{,}5^4 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^4$	**Б.** 4
3. $\frac{8^4 \cdot 2^5}{4^8}$	**В.** 8
	Г. 16

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 10–15

1 **1.** Чи є тотожно рівними вирази:

1) $3b + 4b$ і $7b$; 2) $a + a + a$ і a^3;
3) $m + 2a$ і $2a + m$; 4) $3(x - 2)$ і $3x - 2$?

2. Подайте у вигляді степеня добуток:

1) $4 \cdot 4 \cdot 4$;
2) $-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$.

3. Виконайте дії:

1) x^5x^4; 2) $x^7 : x^2$.

2 **4.** Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}4 \cdot (-5)^4$; 2) $2^5 - 4^3 + (-1)^5$.

5. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $(m^3)^4 \cdot m^7$; 2) $(a^2)^7 : (a^3)^2$.

6. Запишіть вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $-0{,}3m^2np^3 \cdot 4mn^2p^7$; 2) $\left(-\frac{1}{2}p^7a\right)^3$.

3 **7.** Спростіть вираз:

1) $0{,}2a^2b \cdot (-10ab^3)^2$; 2) $\left(-\frac{1}{4}m^2n^3\right)^4 \cdot (4m^5n)^3$.

8. Доведіть тотожність $2(a + b - c) + 3(a - c) - 2b = 5(a - c)$.

4 **9.** Порівняйте вирази:
1) 5^{12} і 25^6;
2) 2^{30} і 3^{20}.

Додаткові вправи

4 **10.** Доведіть, що сума трьох послідовних непарних натуральних чисел ділиться на 3.

11. Якого найменшого значення може набувати вираз:
1) $m^4 - 12$;
2) $(a + 2)^8 + 7$?

12. Відомо, що $4m^2n = 9$. Знайдіть значення виразу:
1) $12m^2n$;
2) $4m^4n^2$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 3

До § 10

1 **1.** Випишіть вирази, які є виразами зі змінними, у дві групи: у першу – цілі раціональні вирази, у другу – дробові раціональні вирази:

1) $m - 7$;
2) $\frac{a^2 - b}{5}$;
3) $\frac{7 + 9 \cdot 2}{3}$;
4) $(3 - 9) + 7 \cdot 8$;
5) $-\frac{1}{6}ab$;
6) $\frac{3}{a + c^3}$;
7) $\frac{1}{x} + \frac{1}{3}$;
8) $a^3 - a^2 + a$.

2 **2.** На склад привезли a мішків цукру, по 50 кг у кожному. Запишіть виразом масу всього завезеного цукру. Знайдіть значення цього виразу, якщо $a = 12$.

3 **3.** Запишіть у вигляді виразу:
1) двоцифрове число, у якому x десятків і y одиниць;
2) двоцифрове число, у якому 5 десятків і a одиниць;
3) трицифрове число, у якому a сотень, b десятків і c одиниць;
4) трицифрове число, у якому m сотень, n десятків і 6 одиниць.

4 **4.** Відомо, що $x - y = 2$ і $p = 3$. Знайдіть значення виразу:
1) $x + p - y$;
2) $x - y + 5p$;
3) $(y - x)p$;
4) $\frac{3(y - x)}{-p + 4(x - y)}$;
5) $7x - 7y - p$;
6) $\frac{6}{p} - \frac{4}{5(y - x)}$.

До § 11

1 **5.** Спростіть вираз:

1) $2 + 3a - 5$;
2) $0{,}4m + m$;
3) $3p - 2p + 5$;
4) $-(m - 3)$.

2 **6.** Розкрийте дужки та зведіть подібні доданки:

1) $7(5x + 8) - 12x$;
2) $9m + 3(15 - 4m)$;
3) $6(x + 1) - 6x - 9$;
4) $12x - 2(3x - 5)$;
5) $-(2x + 1) - 3(2x - 5)$;
6) $5(x - 2) - 4(2x - 3)$.

3 **7.** Доведіть тотожність:

1) $18(a - 2) = 12a - (20 - (6a - 16))$;
2) $2(x - y + t) - 3(x + y - t) - 5(t - y) = -x$.

4 **8.** Доведіть, що сума будь-яких трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3.

* **9.** Чи є тотожністю рівність:

1) $|a + 5| = a + 5$;
2) $|m^2 + 1| = m^2 + 1$;
3) $|m - n| = |n - m|$;
4) $|a| + |b| = |a + b|$?

До § 12

1 **10.** а) Подайте добуток у вигляді степеня:

1) $0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3$;
2) $-2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$;
3) aa;
4) $\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y}$.

б) Подайте степінь у вигляді добутку однакових множників:

1) m^3;
2) 17^4;
3) $(p + 2)^2$;
4) $\left(\frac{a}{9}\right)^5$.

2 **11.** Обчисліть:

1) 2^6;
2) $(0{,}2)^3$;
3) $\left(-\frac{1}{8}\right)^2$;
4) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^3$;
5) $-(-2)^3$;
6) $-\left(\frac{1}{4}\right)^2$;
7) $-(-0{,}1)^2$;
8) $-(-1)^{27}$.

3 **12.** Не виконуючи обчислень, порівняйте з нулем значення виразу:

1) $(-1{,}7)^{15} \cdot (-2{,}7)^2$;
2) $(-2{,}3)^3 : (-5{,}89)$;
3) $-3{,}7^2 \cdot (-2{,}8)^4$;
4) $-(-2{,}6)^8 \cdot (-5{,}7)^5$.

4 **13.** Знайдіть останню цифру числа:

1) 2015^{13};
2) 5011^7;
3) 1006^{17};
4) $15^9 + 16^8 + 101^{17}$.

14. Чи є число:
1) $10^{17} + 5$ кратним числу 3; 2) $10^{29} + 7$ кратним числу 9?

До § 13

15. Подайте у вигляді степеня:
1) b^7b^3; 2) a^3a; 3) $9^8 \cdot 9^7$; 4) $p^{10} : p^3$;
5) $19^8 : 19^6$; 6) $7^{15} : 7^{14}$; 7) $(a^3)^4$; 8) $(2^5)^3$.

16. Обчисліть:

1) $3^8 : 3^7$; 2) $2^5 \cdot 2^{12} : 2^{15}$; 3) $\dfrac{10^4 \cdot 10^9}{10^{10}}$; 4) $\dfrac{8^5 \cdot 8^{10}}{8^{11} \cdot 8^3}$.

17. Знайдіть значення x, за якого рівність є тотожністю:

1) $(4^7)^x = 4^{21}$; 2) $(3^2)^6 = 3^{3x}$; 3) $\left(\left(\left(\dfrac{1}{7}\right)^x\right)^3\right)^4 = \left(\dfrac{1}{7}\right)^{24}$.

18. Запишіть вираз у вигляді степеня (n – натуральне число):

1) $(a^{18} : a^{2n})(a^7 : a^n)$, де $n < 7$; 2) $\dfrac{a^8 \cdot a^{2n}}{a^n \cdot a^5} \cdot a^{4n}$.

19. Знайдіть останню цифру числа (n – натуральне число):
1) 8^{4n}; 2) 7^{4n+1}.

До § 14

20. Які з виразів є одночленами? Які з одночленів подано у стандартному вигляді:
1) $-a^2c$; 2) $7a \cdot 2b \cdot 4$; 3) 17; 4) $aaba$;

5) $6\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}y\right)$; 6) $p + 1$; 7) $-p^2$; 8) $c^9 - c$?

21. Зведіть одночлен до стандартного вигляду, укажіть його коефіцієнт і степінь:

1) $-\dfrac{1}{2}a^2b \cdot 2ab^7$; 2) $3m \cdot (-2m^2) \cdot 5m^7$;

3) $-7ap^2 \cdot 0{,}1a^2p^9$; 4) $1\dfrac{1}{8}m^2 \cdot \dfrac{8}{9}mc^2$;

5) $-a \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-5d)$; 6) $p^9 \cdot (-2a^2) \cdot (-5p^7) \cdot a^8$.

22. Складіть два різних одночлени стандартного вигляду зі змінними a і b так, щоб: 1) степінь кожного з них дорівнював 7, а коефіцієнт дорівнював -8; 2) степінь кожного з них дорівнював 3, а коефіцієнт дорівнював 17.

До § 15

1 **23.** Знайдіть добуток одночленів:
1) $3m \cdot 2n$; 2) $-4p \cdot 2a$;
3) $8m^2 \cdot 3n$; 4) $-2a^3 \cdot (-b^7)$.

2 **24.** Подайте вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $-2{,}5m^2 \cdot (-4m^3p)$; 2) $12p^2m \cdot \left(-\frac{5}{6}p^3m^7\right)$;

3) $0{,}6m^7a^9 \cdot 10m^2a^7 \cdot \frac{1}{2}m^3$; 4) $(-mn^7)^3$;

5) $(-2a^5b^7)^2$; 6) $(m^3p^7a^9)^5$.

3 **25.** Знайдіть одночлен A, якщо:
1) $A \cdot 14m^2n = 42m^4n^2$;
2) $3p^2q^7 \cdot A = -21p^3q^7$.

26. Виконайте множення одночленів $0{,}4m \cdot 10nm^2$ та знайдіть значення одержаного добутку, якщо $m = -2$, $n = 0{,}5$.

4 **27.** Чи можна подати вираз у вигляді квадрата одночлена:
1) $49m^8n^{12}$; 2) $-25a^4b^8$;
3) $-0{,}2m^4n^2 \cdot (-5m^2n^4)$; 4) $-(-3a^4)^3 \cdot 3a^{12}$?

28. За якого натурального значення n рівність

$$(2{,}5a^8c)^n \cdot 0{,}16c^5 = 2{,}5a^{24}c^8$$

є тотожністю?

Головне в темі 3

ТОТОЖНІ ВИРАЗИ

Два вирази, відповідні значення яких рівні між собою за будь-яких значень змінних, називають ***тотожними***, або ***тотожно рівними***.

ТОТОЖНІСТЬ

Рівність, яка є правильною за будь-яких значень змінних, називають ***тотожністю***.

ДОВЕДЕННЯ ТОТОЖНОСТЕЙ

Довести тотожність можна одним з таких способів:

- виконати тотожні перетворення її лівої частини, тим самим звівши до вигляду правої частини;
- виконати тотожні перетворення її правої частини, тим самим звівши до вигляду лівої частини;
- виконати тотожні перетворення обох її частин, тим самим звівши обидві частини до однакових виразів.

СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Степінь числа a з натуральним показником n ($n > 1$) – це добуток n множників, кожний з яких дорівнює a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}},\ n > 1.$$

Степінь числа a з показником 1 – це саме число a:

$$a^1 = a.$$

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

$a^m a^n = a^{m+n}$	$a^{m+n} = a^m a^n$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$a^{m-n} = a^m : a^n$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$
$(ab)^n = a^n b^n$	$a^n b^n = (ab)^n$

ОДНОЧЛЕН

Цілі вирази – числа, змінні, їх степені й добутки – називають ***одночленами***.

Якщо одночлен є добутком, що має один числовий множник, який записано на першому місці, а інші множники є степенями різних змінних, то такий одночлен називають ***одночленом стандартного вигляду***.

Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, які він містить. Якщо одночлен не містить змінних (тобто є числом), то вважають, що його степінь дорівнює нулю.

ТЕМА 4

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

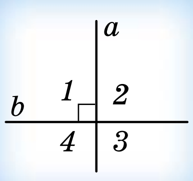
У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **пригадаєте** паралельні та перпендикулярні прямі;
- **дізнаєтеся** про кути, що утворилися при перетині двох прямих січною;
- **навчитеся** зображувати паралельні та перпендикулярні прямі за допомогою косинця та лінійки; застосовувати властивості кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, до розв'язування задач; доводити теореми.

§ 16. Перпендикулярні прямі. Перпендикуляр. Відстань від точки до прямої

Перпендикулярні прямі

Нехай при перетині двох прямих a і b один з кутів, що утворилися, є прямим, наприклад $\angle 1 = 90°$.

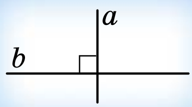


$\angle 1$ і $\angle 3$ – вертикальні; $\angle 1$ і $\angle 2$ – суміжні; $\angle 2$ і $\angle 4$ – вертикальні

$\angle 3 = \angle 1 = 90°$; $\angle 2 = 180° - \angle 1 = 180° - 90° = 90°$; $\angle 4 = \angle 2 = 90°$

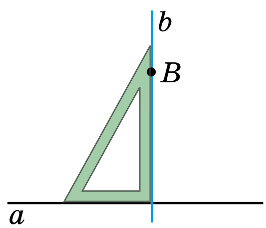
Якщо один із чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 90°, то решта кутів також прямі. Про такі прямі кажуть, що вони перетинаються під прямим кутом, або що вони перпендикулярні.

Дві прямі називають *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

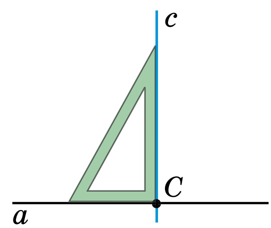


Записують: $a \perp b$.
Читають так: «пряма a перпендикулярна до прямої b».

Для побудови перпендикулярних прямих використовують креслярський косинець. На малюнку 16.1 через точку B, яка не належить прямій a, проведено пряму b, перпендикулярну до прямої a. На малюнку 16.2 точка C належить прямій a, і через неї перпендикулярно до прямої a проведено пряму c. В обох випадках побудовано єдину пряму, яка проходить через задану точку і є перпендикулярною до прямої a.



Мал. 16.1

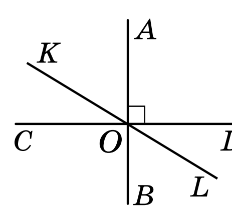


Мал. 16.2

Отже,

через будь-яку точку площини проходить лише одна пряма, перпендикулярна до даної прямої.

Приклад. Прямі AB, CD і KL перетинаються в точці O, причому $AB \perp CD$ (мал. 16.3). Знайти $\angle AOK$, якщо $\angle COL = 160°$.



Мал. 16.3

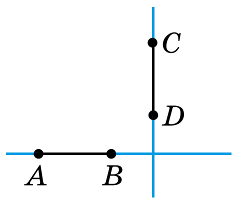
Розв'язання.
1) Оскільки $AB \perp CD$, то $\angle COB = 90°$.
2) $\angle BOL = \angle COL - \angle COB = 160° - 90° = 70°$.
3) $\angle AOK = \angle BOL$ (як вертикальні), тому $\angle AOK = 70°$.

Відповідь: $70°$.

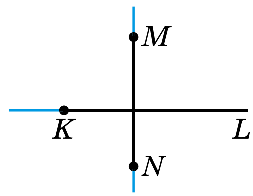
Перпендикулярні відрізки та промені

Відрізки **або** ***промені*** **називають** ***перпендикулярними*****, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.**

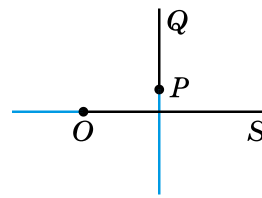
Наприклад, на малюнку 16.4 відрізок AB перпендикулярний до відрізка CD, на малюнку 16.5 промінь KL перпендикулярний до відрізка MN, а на малюнку 16.6 промінь PQ перпендикулярний до променя OS. Для запису перпендикулярності відрізків і променів також використовують знак $\perp$.



Мал. 16.4



Мал. 16.5

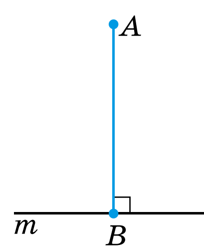


Мал. 16.6

Перпендикуляр. Відстань від точки до прямої

Перпендикуляром до прямої, **проведеним з даної точки, називають відрізок прямої, перпендикулярної до даної, один з кінців якого – дана точка, а другий – точка перетину прямих. Довжину цього відрізка називають *відстанню від точки до прямої*.**

На малюнку 16.7 з точки A проведено перпендикуляр AB до прямої m. Точка B – ***основа перпендикуляра***, а довжина відрізка AB – відстань від точки A до прямої m.



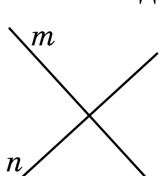
Мал. 16.7

Які прямі називають перпендикулярними? ○ Як побудувати пряму, перпендикулярну до даної прямої? ○ Що називають перпендикуляром до прямої, проведеним з даної точки? ○ Що називають відстанню від точки до прямої?

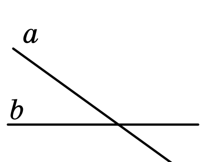
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

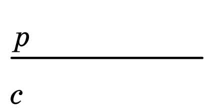
16.1. На яких з малюнків 16.8–16.11 зображено перпендикулярні прямі? За потреби використайте косинець. Виконайте відповідні записи.



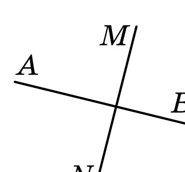
Мал. 16.8



Мал. 16.9



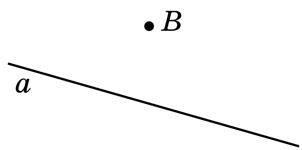
Мал. 16.10



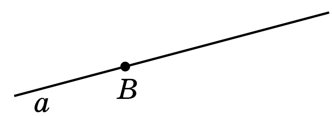
Мал. 16.11

16.2. Накресліть пряму c та позначте точку A, що їй належить, і точку B, що їй не належить. Проведіть за допомогою косинця прямі через точки A і B так, щоб вони були перпендикулярними до прямої c.

16.3. Перенесіть малюнки 16.12 і 16.13 у зошит та для кожного випадку за допомогою косинця проведіть пряму b, що проходить через точку B перпендикулярно до прямої a.

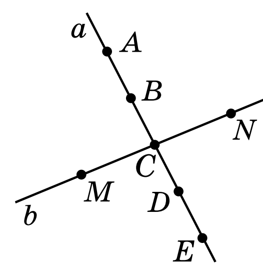


Мал. 16.12



Мал. 16.13

16.4. На малюнку 16.14 прямі a і b перпендикулярні. Чи перпендикулярні:
1) відрізки AB і MN;
2) промінь EA і відрізок CM;
3) відрізки AB і DE;
4) промені CN і CE?



Мал. 16.14

16.5. На малюнку 16.14 прямі a і b перпендикулярні. Чи перпендикулярні:
1) відрізки DE і CN;
2) промені CM і CA;
3) промінь CE і відрізок CA;
4) відрізки BD і MN?

2

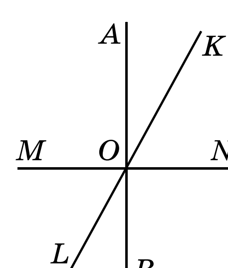
16.6. Накресліть пряму a, позначте точку A, що розміщена на відстані 2,5 см від прямої a, і точку B, що розміщена на відстані 4 см від прямої a.

16.7. Проведіть пряму m, позначте точку P, що розміщена на відстані 3 см від прямої m, і точку K, що розміщена на відстані 1,5 см від прямої m.

16.8. Накресліть відрізки AB і CD так, щоб вони були перпендикулярними та не перетиналися.

16.9. Накресліть промені MN і KL так, щоб вони були перпендикулярними та перетиналися.

16.10. Прямі AB, KL і MN перетинаються в точці O (мал. 16.15). Чи є перпендикулярними прямі AB і MN, якщо:
1) $\angle AOK = 25°$, $\angle KON = 66°$;
2) $\angle LON = 118°$, $\angle LOB = 28°$?



Мал. 16.15

16.11. Прямі AB, KL і MN перетинаються в точці O (мал. 16.15). Чи є перпендикулярними прямі AB і MN, якщо:

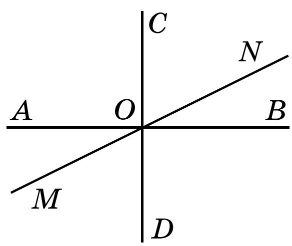
1) $\angle MOK = 122°$, $\angle AOK = 31°$;

2) $\angle MOL = 59°$, $\angle LOB = 31°$?

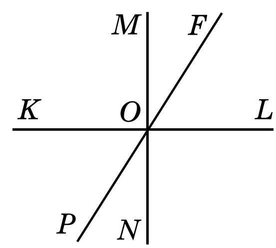
16.12. (*Усно.*) Чи є правильним означення: «Перпендикуляр до прямої – це будь-який відрізок, перпендикулярний до даної прямої»? Чому?

16.13. Прямі AB, CD і MN перетинаються в точці O, причому $AB \perp CD$ (мал. 16.16). Знайдіть:

1) $\angle MOD$, якщо $\angle NOB = 25°$; 2) $\angle CON$, якщо $\angle MOB = 150°$.



Мал. 16.16



Мал. 16.17

16.14. Прямі KL, MN і PF перетинаються в точці O, причому $KL \perp MN$ (мал. 16.17). Знайдіть:

1) $\angle KOP$, якщо $\angle NOF = 140°$; 2) $\angle KOF$, якщо $\angle PON = 37°$.

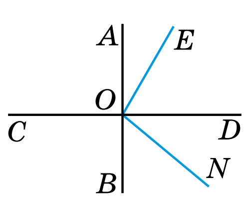
16.15. Кути ABC і CBM прямі. Доведіть, що точки A, B і M лежать на одній прямій.

16.16. Два суміжних кути, що утворилися в результаті перетину двох прямих, рівні між собою. Доведіть, що це перпендикулярні прямі.

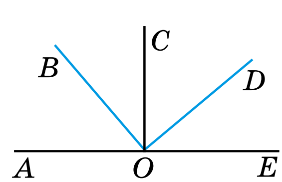
16.17. $AB \perp CD$ (мал. 16.18), $\angle EON = 110°$. Знайдіть $\angle CON$, якщо $\angle AOE = 20°$.

16.18. $AB \perp CD$ (мал. 16.18), $\angle CON = 135°$, $\angle AOE = 25°$. Знайдіть $\angle EON$.

16.19. На малюнку 16.19 $\angle AOB = \angle COD$, $\angle BOC = \angle DOE$. Доведіть, що $OC \perp AE$ і $BO \perp OD$.



Мал. 16.18



Мал. 16.19

16.20. Доведіть, що промінь, проведений через вершину кута перпендикулярно до його бісектриси, є бісектрисою кута, суміжного з даним.

16.21. Промені OK і OL є бісектрисами кутів AOB і BOC відповідно, причому $OK \perp OL$. Доведіть, що кути AOB і BOC – суміжні.

Вправи для повторення

16.22. На прямій послідовно позначено точки M, N і K. Знайдіть:
1) MK, якщо $MN = 3$ см 2 мм, $NK = 4{,}1$ см;
2) MN, якщо $MK = 7{,}8$ см, $NK = 2$ см 5 мм.

16.23. Знайдіть суміжні кути, різниця яких дорівнює $36°$.

Життєва математика

16.24. Рулон шпалер має завширшки 50 см і завдовжки 10 м. Потрібно обклеїти стіни в кімнаті, довжина якої 4,5 м, ширина – 3 м, а висота – 2,5 м. Загальна площа вікна і дверей становить 3,5 м^2.

1) Скільки рулонів потрібно купити?

2) Скільки коробок клею знадобиться, якщо для того, щоб поклеїти 4 рулони шпалер, витрачається одна коробка?

3) Скільки коштуватимуть матеріали, якщо рулон шпалер коштує 240 грн, а коробка клею – 85 грн?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

16.25. Накресліть квадрат $ABCD$ та запишіть усі пари паралельних прямих, які утворилися.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

16.26. Периметр прямокутника дорівнює 32 см, а довжина кожної з його сторін є цілим числом сантиметрів. Чи може площа прямокутника дорівнювати:

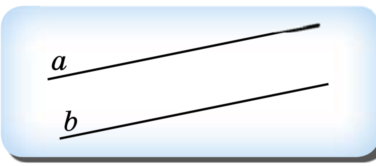
1) 256 см^2;	2) 220 см^2;
3) 64 см^2;	4) 60 см^2;
5) 55 см^2;	6) 54 см^2?

§ 17. Паралельні прямі

Паралельні прямі. Основна властивість паралельних прямих

Дві прямі на площині можуть мати спільну точку (перетинатися) або не мати спільних точок (не перетинатися).

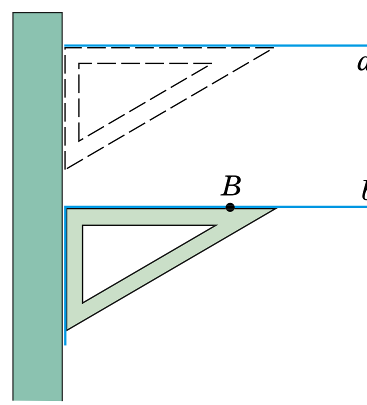
Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються.



Записують: $a \parallel b$.
Читають так: «пряма a паралельна прямій b».

Навколо нас є багато прикладів паралельних прямих: прямолінійні ділянки шляху залізниці, горизонтальні чи вертикальні прямі зошита у клітинку, протилежні сторони рами тощо.

Для побудови паралельних прямих використовують креслярський косинець і лінійку. На малюнку 17.1 показано, як через точку B, яка не належить прямій a, проведено пряму b, паралельну прямій a.



Мал. 17.1

Здавна істинною вважають таку аксіому, що виражає *основну властивість паралельних прямих*.

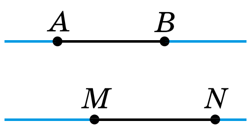
VIII. Через точку, що не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Цю аксіому називають *аксіомою паралельності прямих*.

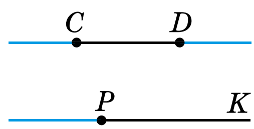
Паралельні відрізки та промені

***Відрізки* або *промені* називають *паралельними*, якщо вони лежать на паралельних прямих.**

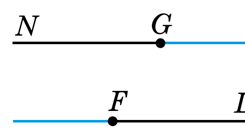
На малюнку 17.2 відрізок AB паралельний відрізку MN, на малюнку 17.3 відрізок CD паралельний променю PK, а на малюнку 17.4 промінь GN паралельний променю FL. Для запису паралельності відрізків і променів також використовують знак $\parallel$.



Мал. 17.2



Мал. 17.3



Мал. 17.4

Доведення від супротивного

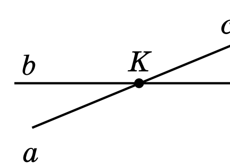
Ми вже доводили деякі теореми та розв'язували задачі на доведення. Розглянемо задачу, у якій застосуємо ще один важливий спосіб доведення геометричних тверджень.

Приклад. Довести, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму.

Доведення. Нехай a і b – паралельні прямі й пряма c перетинає пряму b в точці K (мал. 17.5).

1) Припустимо, що пряма c не перетинає пряму a, тобто $c \parallel a$.

2) Отже, через точку K проходять дві прямі c і b, які обидві паралельні прямій a. Це суперечить аксіомі паралельності прямих.



Мал. 17.5

3) Отже, наше припущення є хибним, значить, правильним є те, що пряма c перетинає пряму a. Твердження доведено. ■

Зауважимо, що спосіб міркування, яким ми довели твердження попередньої задачі, називають *доведенням від супротивного*. Щоб довести, що прямі a і c перетинаються, ми припустили протилежне, тобто що a і c не перетинаються. У процесі міркувань, з огляду на це припущення, ми прийшли до протиріччя з аксіомою паралельності прямих. Це означає, що наше припущення було хибним, отже, правильним є протилежне до нього припущення, тобто що пряма c перетинає пряму a.

Суть доведення від супротивного полягає в тому, що на початку доведення припускається істинність твердження, протилежного тому, що потрібно довести. *Доведення* (міркування) на основі цього припущення приводить до висновку, який суперечить або умові теореми (задачі), або деякому з істинних тверджень (аксіомі, теоремі тощо), а це означатиме, що припущення, протилежне тому, яке потрібно було довести, є хибним. Отже, істинним є те, що вимагалося довести.

А ще раніше...

У «Началах» Евклід деякі з аксіом називав *постулатами*. Так, зокрема, з п'ятого постулату Евкліда, який ще називають *аксіомою паралельності Евкліда*, фактично випливає, що через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Протягом понад двох тисячоліть учені намагалися довести п'ятий постулат Евкліда. На початку XIX ст. три видатних учених – М. І. Лобачевський (1792–1856), К. Ф. Гаусс (1777–1855) та Я. Больяй (1802–1860) – незалежно один від одного дійшли висновку, що довести п'ятий постулат Евкліда неможливо, він є початковим положенням, а тому є аксіомою.

М. І. Лобачевський пішов далі і, замінивши аксіому паралельності на таку: «через точку, що не лежить на даній прямій, проходять щонайменше дві прямі, що лежать з даною прямою в одній площині і не перетинають її», побудував нову геометрію – неевклідову. Її стали називати «геометрією Лобачевського».

К. Ф. Гаусс
(1777–1855)

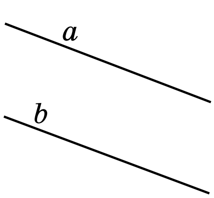
Які прямі називають паралельними? ○ Які інструменти використовують для побудови паралельних прямих? ○ Сформулюйте аксіому паралельності прямих. ○ Поясніть, у чому полягає спосіб доведення від супротивного.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

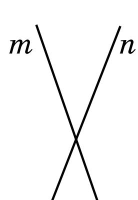
1

17.1. Запишіть з використанням символів:
1) пряма a паралельна прямій m;
2) пряма CD паралельна прямій PK.

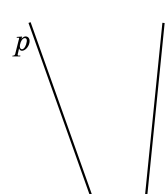
17.2. На яких з малюнків 17.6–17.9 зображено паралельні прямі?



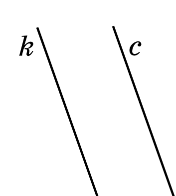
Мал. 17.6



Мал. 17.7



Мал. 17.8

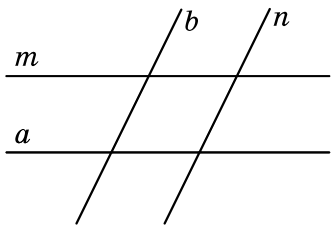


Мал. 17.9

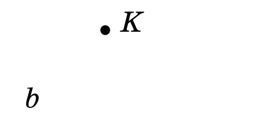
17.3. Укажіть пари паралельних прямих на малюнку 17.10.

17.4. 1) Дано пряму b і точку K, що їй не належить (мал. 17.11). Скільки можна провести через точку K прямих, паралельних прямій b?

2) Скільки взагалі можна провести прямих, паралельних прямій b?



Мал. 17.10



Мал. 17.11

2

17.5. Проведіть пряму l і позначте точку A, що їй не належить. За допомогою косинця і лінійки через точку A проведіть пряму, паралельну прямій l.

17.6. Позначте точку P і проведіть пряму a, що не проходить через цю точку. За допомогою косинця і лінійки через точку P проведіть пряму, паралельну прямій a.

17.7. Накресліть відрізки AB і CD та промінь KL так, щоб відрізок AB був паралельний променю KL і перпендикулярний до відрізка CD.

17.8. Накресліть промені MN і KL та відрізок AB так, щоб промінь MN був паралельний променю KL і перпендикулярний до відрізка AB.

3

17.9. 1) Накресліть $\angle ABC = 120°$ та позначте точку K, що лежить у внутрішній області цього кута.

2) Через точку K за допомогою косинця і лінійки проведіть пряму m, паралельну променю BA, та пряму n, паралельну променю BC.

3) Використовуючи транспортир, знайдіть кут між прямими m і n.

4) Зробіть висновки.

17.10. 1) Накресліть $\angle MNL$, який дорівнює $50°$, і позначте точку C, що належить внутрішній області цього кута.

2) Через точку C за допомогою косинця і лінійки проведіть пряму a, паралельну променю NM, і пряму b, паралельну променю NL.

3) Використовуючи транспортир, знайдіть кут між прямими a і b.

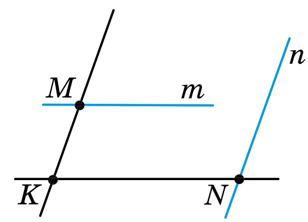
4) Зробіть висновки.

17.11. Прямі a і b перетинаються. Пряма m паралельна прямій a. Доведіть, що прямі m і b перетинаються.

17.12. Прямі a і b паралельні. Пряма l не перетинає пряму a. Доведіть, що пряма l не перетинає пряму b.

4

17.13. Прямі KM і KN (мал. 17.12) перетинаються. Через точку M проведено пряму m, паралельну прямій KN, а через точку N проведено пряму n, паралельну прямій KM. Доведіть, що прямі m і n перетинаються.



Мал. 17.12

17.14. Прямі a і b – паралельні, прямі b і c також паралельні. Пряма l перетинає пряму a. Доведіть, що пряма l перетинає прямі b і c.

Вправи для повторення

17.15. 1) Позначте на прямій m точки A і B та точку C, яка не належить прямій m.

2) Виміряйте відстані AB, AC і BC та порівняйте AB з $AC + BC$.

3) Зробіть висновки.

17.16. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, становить 25 % від іншого. Знайдіть кут між прямими.

Життєва математика

17.17. Дитячий майданчик, що має форму прямокутника 6,5 м завдовжки і 3,5 м завширшки, потрібно вкрити плиткою, що має форму квадрата, довжина сторони якого 50 см. Скільки грошей буде витрачено на це, якщо одна плитка коштує 52 грн, а вартість додаткових матеріалів та укладання становить 35 % від вартості плитки?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

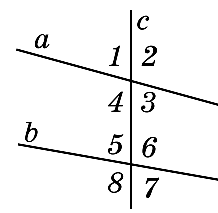
17.18. Чи можна квадрат, довжина сторони якого дорівнює 2017 клітинок, розрізати на дві рівні фігури так, щоб лінії розрізів проходили по сторонах клітинок?

§ 18. Кути, утворені при перетині двох прямих січною. Ознаки паралельності прямих

Кути, утворені при перетині прямих січною

Пряму c називають ***січною*** для прямих a і b, якщо вона перетинає їх у двох точках (мал. 18.1).

При перетині прямих a і b січною c утворилося вісім кутів, позначених на малюнку 18.1. Деякі пари цих кутів мають спеціальні назви:



Мал. 18.1

внутрішні односторонні кути: *4* і *5*; *3* і *6*;
внутрішні різносторонні кути: *4* і *6*; *3* і *5*;
відповідні кути: *1* і *5*; *2* і *6*; *3* і *7*; *4* і *8*.

Приклад 1. На малюнку 18.1 $\angle 2 + \angle 6 = 190°$. Знайти:
1) $\angle 4 + \angle 8$; 2) $\angle 1 + \angle 7$.

Розв'язання. 1) Оскільки $\angle 4 = \angle 2$ (як вертикальні) і $\angle 8 = \angle 6$ (аналогічно), то $\angle 4 + \angle 8 = \angle 2 + \angle 6 = 190°$.

2) Кути *1* і *2* – суміжні, тому $\angle 1 = 180° - \angle 2$. Аналогічно $\angle 7 = 180° - \angle 6$. Тоді $\angle 1 + \angle 7 = (180° - \angle 2) + (180° - \angle 6) = 360° - (\angle 2 + \angle 6) = 360° - 190° = 170°$.

Відповідь: 1) 190°; 2) 170°.

Ознака в геометрії

Якщо в задачі потрібно з'ясувати, чи паралельні прямі, то, з огляду на означення, це зробити неможливо, оскільки для цього прямі потрібно продовжити до нескінченності. Проте встановити, прямі паралельні чи ні, можна, використавши спеціальні теореми, які називають ознаками.

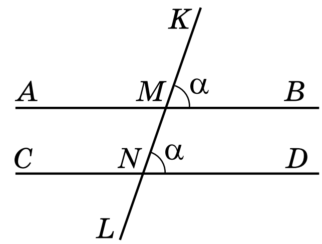
Ознака (у геометрії) – це теорема, яка вказує умови, виконання яких дає змогу стверджувати про певні властивості фігур, належність їх до певного класу тощо.

Ознака паралельності прямих

Розглянемо *ознаки* паралельності прямих.

Т Теорема (ознака паралельності прямих). **Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.**

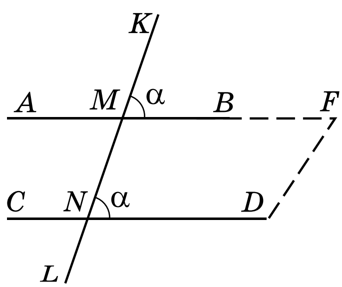
Доведення. Нехай при перетині прямих AB і CD січною KL утворилися рівні між собою відповідні кути $\angle KMB = \angle MND = \alpha$ (мал. 18.2).



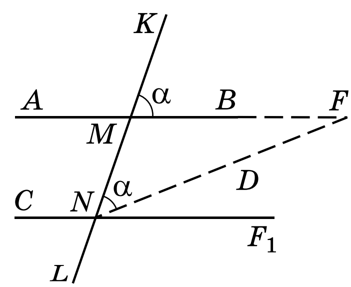
Мал. 18.2

Доведемо теорему методом від супротивного.

Припустимо, що дані прямі AB і CD не паралельні, а перетинаються в деякій точці F (мал. 18.3). Не змінюючи міри кута KMB, перенесемо його так, щоб вершина кута – точка M – збіглася з точкою N, промінь MK збігся з променем NM, а промінь MB зайняв положення променя NF_1 (мал. 18.4). Тоді $\angle MNF_1 = \angle KMF = \alpha$. Оскільки промінь NF_1 не збігається з променем NF, бо $F \notin NF_1$, то $\angle MNF_1 \neq \angle MNF$. Але ж було встановлено, що $\angle MNF = \alpha$ і $\angle MNF_1 = \alpha$.



Мал. 18.3



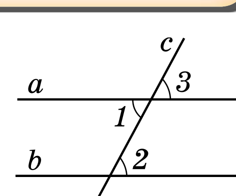
Мал. 18.4

Прийшли до протиріччя, бо наше припущення про те, що прямі AB і CD не паралельні, було хибним. А значить, прямі AB і CD паралельні, що й треба було довести. ■

Наслідки з ознаки паралельності прямих

Н Наслідок 1. **Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні між собою, то прямі паралельні.**

Доведення. Нехай при перетині прямих a і b січною c внутрішні різносторонні кути виявилися рівними, наприклад $\angle 1 = \angle 2$ (мал. 18.5).

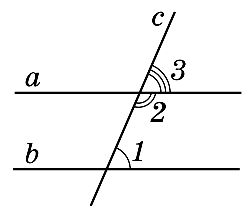


Мал. 18.5

Але кути 1 і 3 – вертикальні, тому $\angle 1 = \angle 3$. Отже, $\angle 2 = \angle 3$. Кути 2 і 3 – відповідні, тому за ознакою паралельності прямих маємо $a \parallel b$. ■

Н **Наслідок 2. Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.**

Доведення. Нехай при перетині прямих a і b січною c сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, наприклад $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (мал. 18.6). Кути 2 і 3 – суміжні, тому $\angle 3 + \angle 2 = 180°$.

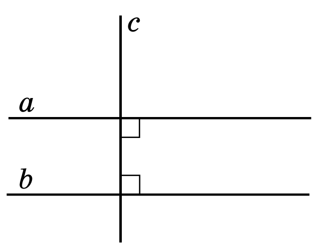

Мал. 18.6

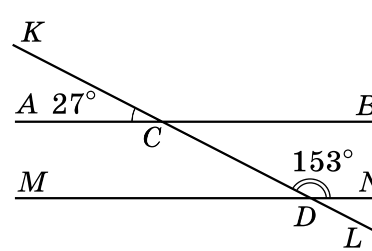
Із цих двох рівностей випливає, що $\angle 1 = \angle 3$. Ці кути є відповідними, а тому прямі a і b – паралельні за ознакою паралельності прямих. ■

Н **Наслідок 3. Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.**

Доведення. На малюнку 18.7: $a \perp c$ і $b \perp c$. Враховуючи наслідок 2, маємо $a \parallel b$. ■

Зауважимо, що наслідки 1–3 можна також розглядати як ознаки паралельності прямих.


Мал. 18.7



Мал. 18.8

Приклад 2. Чи паралельні прямі AB і MN на малюнку 18.8?

Розв'язання.

1) $\angle BCD = \angle ACK$ (як вертикальні). Отже, $\angle BCD = 27°$.

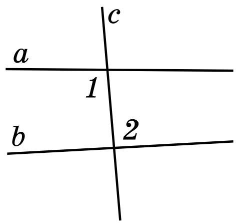
2) Оскільки $27° + 153° = 180°$, то сума внутрішніх односторонніх кутів BCD і CDN дорівнює 180°. Тому за наслідком 2 $AB \parallel MN$.

Відповідь: так.

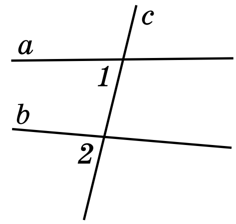
- Що таке січна?
- За малюнком 18.1 назвіть пари внутрішніх односторонніх кутів; внутрішніх різносторонніх кутів; відповідних кутів.
- Сформулюйте та доведіть ознаку паралельності прямих і наслідки з неї.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

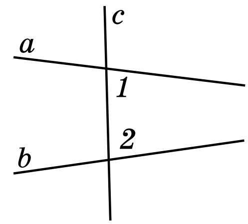
18.1. (*Усно.*) Як називають кути *1* і *2* на малюнках 18.9–18.11?



Мал. 18.9

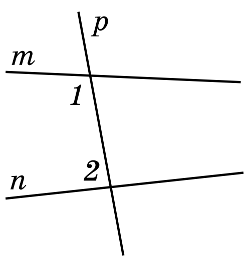


Мал. 18.10

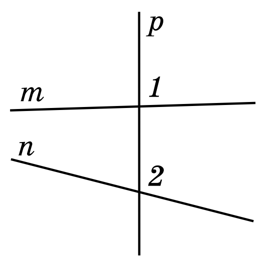


Мал. 18.11

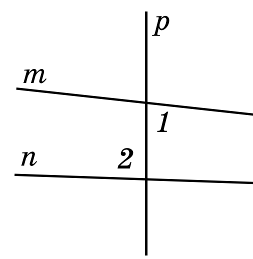
18.2. Запишіть, як називають кути *1* і *2* на малюнках 18.12–18.14.



Мал. 18.12

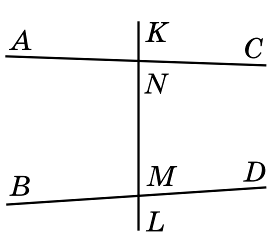


Мал. 18.13

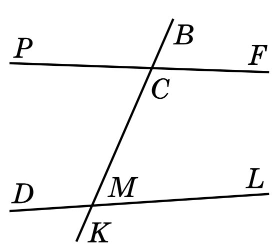


Мал. 18.14

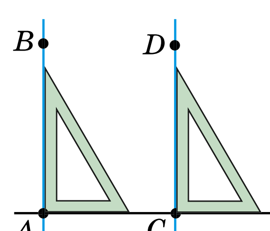
18.3. Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів; внутрішніх різносторонніх кутів; відповідних кутів (мал. 18.15).



Мал. 18.15



Мал. 18.16

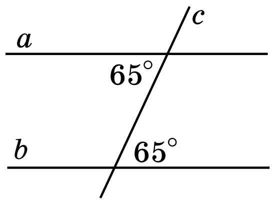


Мал. 18.17

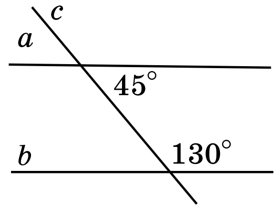
18.4. Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів; внутрішніх різносторонніх кутів; відповідних кутів (мал. 18.16).

18.5. (*Усно.*) Чи паралельні прямі *AB* і *CD* на малюнку 18.17? Чому?

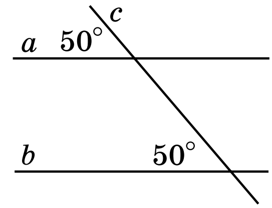
18.6. Якими є прямі a і b (паралельними чи такими, що перетинаються) на малюнках 18.18–18.23?



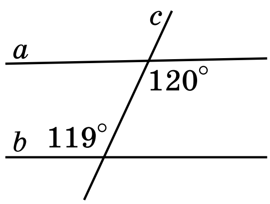
Мал. 18.18



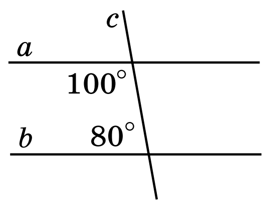
Мал. 18.19



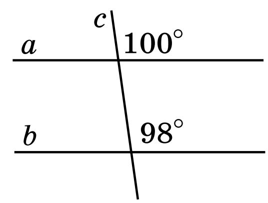
Мал. 18.20



Мал. 18.21



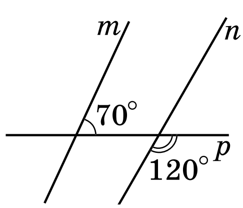
Мал. 18.22



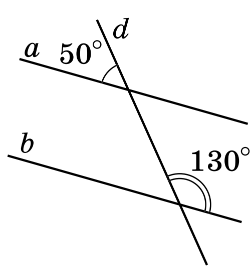
Мал. 18.23

18.7. На малюнку 18.24 позначено міри двох кутів, що утворилися при перетині прямих m і n січною p. Обчисліть міри всіх інших кутів, що утворилися. Чи паралельні прямі m і n?

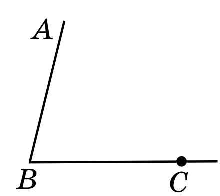
18.8. На малюнку 18.25 позначено міри двох кутів, що утворилися при перетині прямих a і b січною d. Обчисліть міри всіх інших кутів, що утворилися. Чи паралельні прямі a і b?



Мал. 18.24



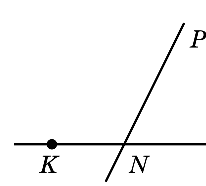
Мал. 18.25



Мал. 18.26

18.9. Доповніть малюнок 18.26: проведіть пряму CM так, щоб кути ABC і BCM були внутрішніми різносторонніми кутами для прямих AB і CM та січної BC. Як розмістяться точки A і M відносно прямої BC?

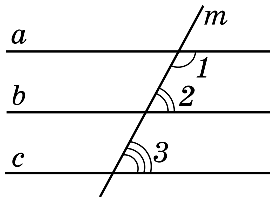
18.10. Доповніть малюнок 18.27: проведіть пряму KA так, щоб кути AKN і KNP були внутрішніми односторонніми кутами для прямих AK і PN та січної KN. Як розмістяться точки A і P відносно прямої KN?



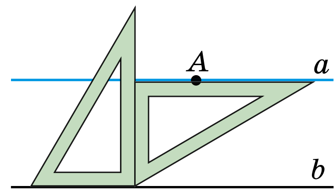
Мал. 18.27

18.11. На малюнку 18.28 укажіть паралельні прямі, якщо $\angle 1 = 118°$, $\angle 2 = 62°$, $\angle 3 = 63°$.

18.12. На малюнку 18.28 укажіть паралельні прямі, якщо $\angle 1 = 121°$, $\angle 2 = 60°$, $\angle 3 = 60°$.



Мал. 18.28



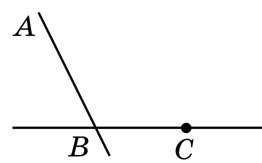
Мал. 18.29

18.13. Через точку A за допомогою двох креслярських косинців провели пряму a (мал. 18.29). Чи паралельні прямі a і b? Відповідь обґрунтуйте.

18.14. 1) Виміряйте $\angle ABC$ (мал. 18.30) і накресліть його в зошиті.

2) Побудуйте $\angle PCK$, що дорівнює $\angle ABC$ і є йому відповідним.

3) Назвіть паралельні прямі, які утворилися. Обґрунтуйте їхню паралельність.

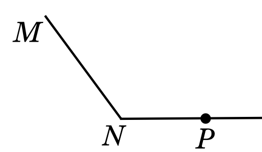


Мал. 18.30

18.15. 1) Виміряйте $\angle MNP$ (мал. 18.31) і накресліть його в зошиті.

2) Побудуйте $\angle APB$, що дорівнює $\angle MNP$ і є йому відповідним.

3) Назвіть паралельні прямі, які утворилися. Обґрунтуйте їхню паралельність.

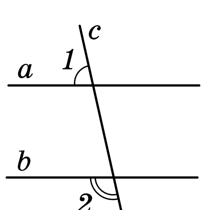


Мал. 18.31

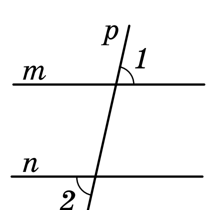
18.16. Пряма AB перетинає пряму CD у точці A, а пряму MN – у точці B, $\angle CAB = 90°$, $\angle ABN = 90°$. Чи паралельні прямі CD і MN?

18.17. На малюнку 18.32 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Доведіть, що $a \parallel b$.

18.18. На малюнку 18.33 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $m \parallel n$.



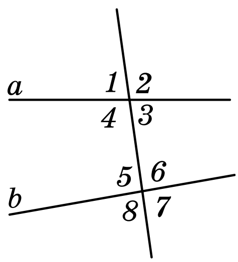
Мал. 18.32



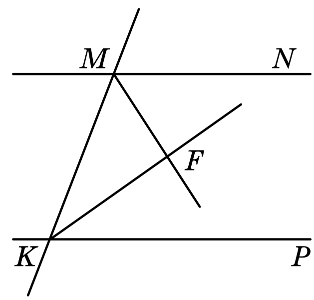
Мал. 18.33

18.19. На малюнку 18.34 $\angle 4 + \angle 5 = 190°$. Знайдіть:
1) $\angle 2 + \angle 7$; 2) $\angle 1 + \angle 8$; 3) $\angle 3 + \angle 6$.

18.20. На малюнку 18.34 $\angle 3 + \angle 6 = 160°$. Знайдіть:
1) $\angle 2 + \angle 7$; 2) $\angle 1 + \angle 8$; 3) $\angle 4 + \angle 5$.



Мал. 18.34



Мал. 18.35

18.21. $\angle ABC = 70°$, $\angle BCD = 100°$. Чи можуть прямі AB і CD бути паралельними? Відповідь обґрунтуйте.

18.22. $\angle MNP = 60°$, $\angle NPK = 120°$. Чи можуть прямі MN і KP бути паралельними? Відповідь обґрунтуйте.

18.23. Кут між прямими a і b дорівнює куту між прямими b і c. Чи можна стверджувати, що прямі a і c паралельні?

18.24. Пряма c є січною для прямих a і b. Чотири з восьми кутів, що утворилися, дорівнюють по $30°$, а решта чотири – по $150°$. Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?

18.25. MF – бісектриса кута KMN, KF – бісектриса кута MKP (мал. 18.35). $\angle MKF + \angle FMK = 90°$. Доведіть, що $MN \parallel KP$.

18.26. Прямі a і b перпендикулярні до прямої m. Пряма c перетинає пряму a. Чи перетинаються прямі b і c? Відповідь обґрунтуйте.

Вправи для повторення

18.27. 1) Накресліть $\angle ABC = 70°$ і позначте точку K, що належить променю BA.

2) Через точку K за допомогою косинця проведіть пряму m, перпендикулярну до променя BA, та пряму n, перпендикулярну до променя BC.

3) Користуючись транспортиром, знайдіть кут між прямими m і n.

18.28. Відомо, що $\angle AOB = \angle BOC = 130°$. Знайдіть $\angle AOC$.

Життєва математика

18.29. *Задача-жарт*. Зріст Сергія 1 м 60 см. На скільки кілометрів верхівка голови Сергія пройшла б більше, ніж кінець його ноги, якби він мав змогу пройти земну кулю по її екватору?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

18.30. Чи можна трикутник розрізати на частини так, щоб утворилося три чотирикутники? Якщо так, то виконайте це.

§ 19. Властивість паралельних прямих. Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною

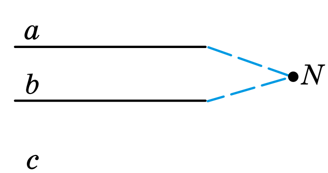
Властивості паралельних прямих

Розглянемо властивість паралельних прямих.

Теорема 1 (властивість паралельних прямих).
Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні одна одній.

Доведення. Нехай прямі a і b паралельні прямій c. Доведемо, що $a \parallel b$.

Застосуємо доведення від супротивного. Припустимо, що прямі a і b не паралельні, а перетинаються в деякій точці N (мал. 19.1). Отже, через точку N проходять дві прямі a і b, що паралельні прямій c. Це суперечить аксіомі паралельності прямих. Отже, наше припущення є хибним. Тому $a \parallel b$. Теорему доведено. ■



Мал. 19.1

Властивість відповідних кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною

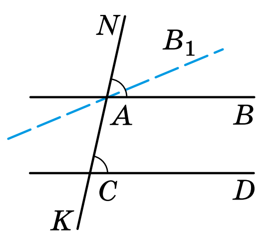
Розглянемо властивості кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною.

Теорема 2 (властивість відповідних кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною). Відповідні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, рівні між собою.

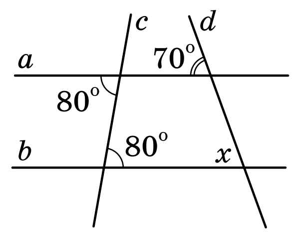
Доведення. Нехай паралельні прямі AB і CD перетинає січна NK (мал. 19.2). Доведемо, що $\angle NAB = \angle ACD$.

Припустимо, що $\angle NAB \neq \angle ACD$. Проведемо пряму AB_1 так, щоб виконувалася рівність $\angle NAB_1 = \angle ACD$. За ознакою паралельності прямих прямі AB_1 і CD паралельні. Але ж за умовою і $AB \parallel CD$. Прийшли до того, що через точку A проходять дві прямі AB і AB_1, паралельні прямій CD, що суперечить аксіомі паралельності прямих. Отже, наше припущення є хибним і тому відповідні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, між собою рівні: $\angle NAB = \angle ACD$.

Теорему доведено. ■



Мал. 19.2



Мал. 19.3

Приклад 1. Знайти невідомий кут x за малюнком 19.3.

Розв'язання. 1) Оскільки внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині січною c прямих a і b, рівні між собою (обидва по 80°), то $a \parallel b$.

2) Відповідні кути, утворені при перетині січною d паралельних прямих a і b, рівні між собою. Тому $x = 70°$.

Відповідь: 70°.

Пряма та обернена теорема в геометрії

Теорема про властивість відповідних кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, є *оберненою* до ознаки паралельності прямих.

Пояснимо, як це слід розуміти. Кожна теорема має *умову* і *висновок*. Якщо поміняти місцями умову і висновок теореми, то одержимо нове твердження (правильне або неправильне), умовою якого буде висновок цієї теореми, а висновком – її умова. Якщо одержане при цьому твердження є істинним, його називають *теоремою, оберненою до даної,* а цю теорему – *прямою.*

У теоремі, яка виражає ознаку паралельності прямих, умовою є перша частина твердження: «при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні» (це дано), а висновком – друга частина:

«прямі паралельні» (це потрібно довести). Бачимо, що остання теорема, яку ми розглянули, і є оберненою до ознаки паралельності прямих. Умова цієї теореми: «прямі паралельні» (це дано), а висновок – «відповідні кути, утворені при перетині прямих січною, рівні між собою» (це потрібно довести).

Не для кожної теореми буде справджуватися й обернена теорема. Наприклад, для теореми про властивість вертикальних кутів не існує оберненої, оскільки твердження: «якщо два кути між собою рівні, то вони вертикальні» – неправильне.

Систематизуємо викладене вище в таблиці.

Частина твердження (теореми)	Ознака паралельності прямих (*пряма теорема*)	Властивість відповідних кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною (*обернена теорема*)
Умова	Відповідні кути, утворені при перетині прямих січною, рівні між собою	Прямі паралельні
Висновок	Прямі паралельні	Відповідні кути, утворені при перетині прямих січною, рівні між собою

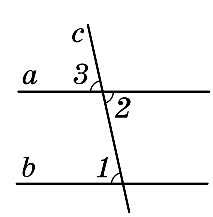
Властивість внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною

Розглянемо наслідок з теореми 2.

Н **Наслідок 1 (властивість внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною). Внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні між собою.**

Доведення. Нехай паралельні прямі a і b перетинає січна c (мал. 19.4). Доведемо, що внутрішні різносторонні кути, наприклад 1 і 2, рівні між собою.

Оскільки $a \parallel b$, то відповідні кути 1 і 3 рівні між собою. Кути 2 і 3 між собою рівні, як вертикальні. З рівностей $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 3$ випливає, що $\angle 1 = \angle 2$. ■



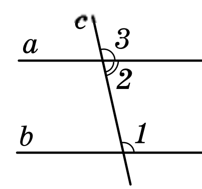
Мал. 19.4

Властивість внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною

Розглянемо ще один наслідок з теореми 2.

Н **Наслідок 2** (**властивість внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною**). **Сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 180°.**

Доведення. Нехай паралельні прямі a і b перетинає січна c (мал. 19.5). Доведемо, що сума внутрішніх односторонніх кутів, наприклад 1 і 2, дорівнює 180°.



Мал. 19.5

Оскільки $a \parallel b$, то відповідні кути 1 і 3 рівні між собою. Кути 2 і 3 – суміжні, тому $\angle 3 + \angle 2 = 180°$, але ж $\angle 1 = \angle 3$. Тому $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. ■

Приклад 2. Знайти градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них становить $\frac{2}{3}$ від іншого.

Розв'язання. Нехай кути 1 і 2 (мал. 19.5) – внутрішні односторонні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих a і b січною c.

1) За властивістю цих кутів маємо, що $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

2) Нехай $\angle 1 = x°$, $\angle 2 = \frac{2}{3}x°$.

3) Маємо рівняння $x + \frac{2}{3}x = 180°$, звідки $x = 108°$.

4) Отже, $\angle 1 = 108°$; $\angle 2 = \frac{2}{3} \cdot 108° = 72°$.

Відповідь: 108°; 72°.

Властивості паралельних прямих

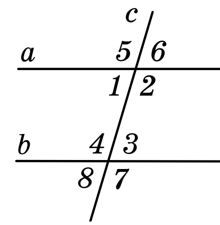
Теорему 2 та наслідки з неї також можна розглядати як *властивості паралельних прямих* і використовувати для розв'язування задач.

? Сформулюйте та доведіть властивість паралельних прямих. ○ Сформулюйте та доведіть теорему про властивість відповідних кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, і наслідки з неї. ○ Поясніть, що таке теорема, обернена до даної.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

19.1. (*Усно*.) На малюнку 19.6 $a \parallel b$, c – січна.

1) Чи рівні між собою кути *5* і *4*; *2* і *7*?
2) Чи рівні між собою кути *1* і *3*?
3) Обчисліть суму кутів *1* і *4*.



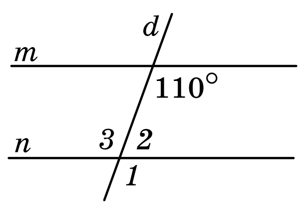
Мал. 19.6

19.2. На малюнку 19.6 прямі a і b паралельні, c – січна.

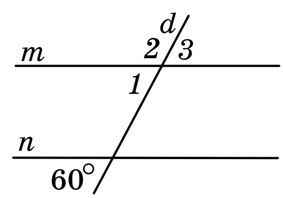
1) Чи рівні між собою кути *1* і *8*; *6* і *3*?
2) Чи рівні між собою кути *2* і *4*?
3) Обчисліть суму кутів *2* і *3*.

19.3. $m \parallel n$, d – січна (мал. 19.7). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

19.4. $m \parallel n$, d – січна (мал. 19.8). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.



Мал. 19.7



Мал. 19.8

19.5. Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 140°. Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

19.6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 50°. Знайдіть інші сім кутів.

19.7. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 37°. Чи може один з решти семи кутів дорівнювати:

1) 133°; 2) 143°; 3) 153°?

19.8. Дано паралельні прямі a і b та точку M, що не належить жодній з прямих. Через точку M паралельно прямій a проведено пряму m. Чи паралельні прямі b і m?

19.9. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх різносторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо їхня сума дорівнює 240°.

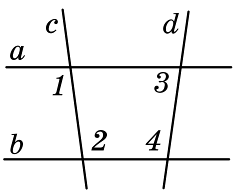
19.10. Сума двох відповідних кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 108°. Знайдіть ці кути.

19.11. На малюнку 19.9 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $\angle 3 + \angle 4 = 180°$.

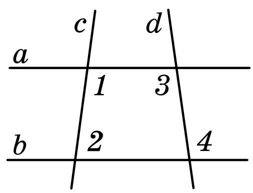
19.12. На малюнку 19.10 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$.

19.13. На малюнку 19.11 $\angle 1 = \angle 2$, $c \perp a$. Доведіть, що $c \perp b$.

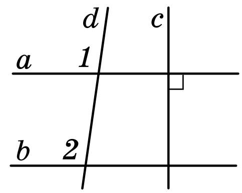
19.14. На малюнку 19.12 $a \perp d$, $b \perp d$. Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.



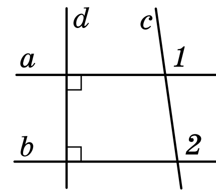
Мал. 19.9



Мал. 19.10



Мал. 19.11

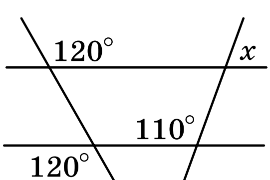


Мал. 19.12

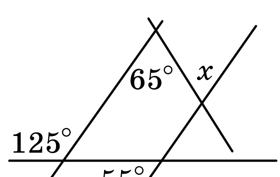
19.15. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:
1) перший з них на 16° більший за другий;
2) перший з них утричі менший від другого;
3) їхні градусні міри відносяться як 5 : 7.

19.16. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:
1) перший з них у 4 рази більший за другий;
2) перший з них на 8° менший від другого;
3) їхні градусні міри відносяться як 5 : 4.

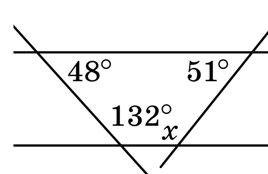
19.17. Знайдіть градусну міру кута x на кожному з малюнків 19.13–19.15.



Мал. 19.13

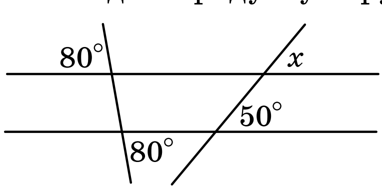


Мал. 19.14

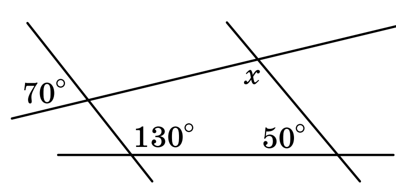


Мал. 19.15

19.18. Знайдіть градусну міру кута x на малюнках 19.16 і 19.17.



Мал. 19.16



Мал. 19.17

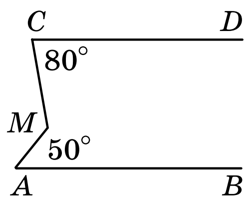
19.19. Прямі a і b не паралельні прямій m. Чи можна зробити висновок, що прямі a і b не паралельні між собою?

19.20. Сума градусних мір трьох з восьми кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 120°. Знайдіть градусні міри кожного з восьми кутів.

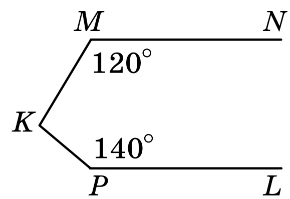
19.21. Сума градусних мір чотирьох з восьми кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 128°. Знайдіть градусні міри кожного з восьми кутів.

4 **19.22.** На малюнку 19.18 $AB \parallel CD$. Знайдіть $\angle CMA$.

19.23. На малюнку 19.19 $MN \parallel PL$. Знайдіть $\angle MKP$.



Мал. 19.18



Мал. 19.19

19.24. Доведіть, що бісектриси пари внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

19.25. Доведіть, що бісектриси пари відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

Вправи для повторення

19.26. Накресліть відрізок AB, промінь CD та пряму a так, щоб відрізок AB був перпендикулярним до променя CD, але не перетинав його, а промінь CD був паралельний прямій a.

19.27. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та дізнайтеся прізвище видатного українського письменника.

Точка C належить відрізку AB завдовжки 16 см. Знайдіть відрізки AC і BC, якщо:	AC	BC
AC більший за BC на 2 см	Н	А
AC більший за BC утричі	О	Ф
$AC : BC = 5 : 3$	К	Р

4 см	6 см	7 см	9 см	10 см	12 см

Життєва математика

19.28. Щоб засіяти 1 м^2 землі, потрібно 40 г насіння газонної трави. Кілограм такого насіння коштує 90 грн. Скільки коштів потрібно, щоб засіяти газонною травою клумбу у формі квадрата, сторона якого 20 м?

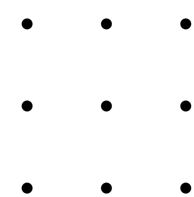
Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

19.29. Зведіть подібні доданки:

1) $7a - 6b - 2a + b$;
2) $-11x + 10y - 3x - 2y$;
3) $10{,}3m - 12{,}9t + 6{,}7m$;
4) $3c + d + 3c - d$.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

19.30. Не відриваючи олівця від паперу, проведіть у зошиті через дев'ять точок (див. мал.) чотири відрізки.

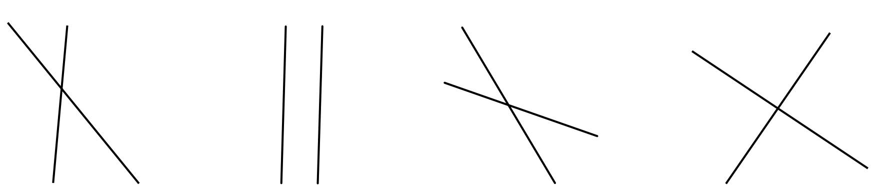


ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 4 (§§ 16–19)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. На якому з малюнків 1–4 зображено перпендикулярні прямі?

А. Мал. 1 **Б.** Мал. 2 **В.** Мал. 3 **Г.** Мал. 4



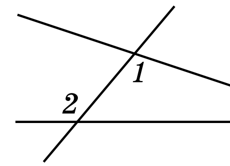
Мал. 1 Мал. 2 Мал. 3 Мал. 4

2. Укажіть, на якому з малюнків 1–4 зображено паралельні прямі.

А. Мал. 1 **Б.** Мал. 2 **В.** Мал. 3 **Г.** Мал. 4

3. Як називають кути *1* і *2* на малюнку 5?

А. Внутрішні односторонні
Б. Відповідні
В. Вертикальні
Г. Внутрішні різносторонні



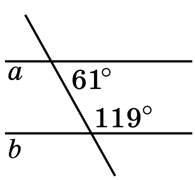
Мал. 5

4. Укажіть, яке з наведених тверджень є правильним.

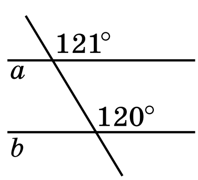
А. Перпендикулярні відрізки завжди мають спільну точку
Б. Перпендикулярні прямі завжди мають спільну точку
В. Перпендикулярні промені завжди мають спільну точку
Г. Перпендикулярні промінь і відрізок завжди мають спільну точку

5. На якому з малюнків 6–9 прямі a і b паралельні?

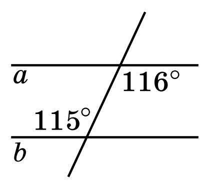
А. Мал. 6 **Б.** Мал. 7 **В.** Мал. 8 **Г.** Мал. 9



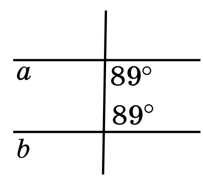
Мал. 6



Мал. 7



Мал. 8



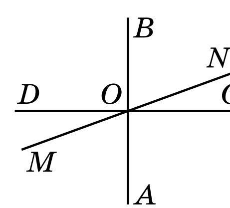
Мал. 9

6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 35°. Якою може бути градусна міра одного з інших семи кутів?

А. 50° **Б.** 105°
В. 145° **Г.** 55°

7. Прямі AB, CD і MN перетинаються в точці O, причому $AB \perp CD$ (мал. 10). $\angle MOD = 20°$. Знайдіть градусну міру кута AON.

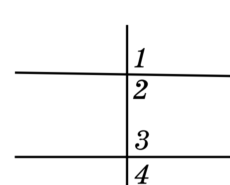
А. 20° **Б.** 70°
В. 110° **Г.** 160°



Мал. 10

8. На малюнку 11 $\angle 2 + \angle 3 = 175°$. Знайдіть $\angle 1 + \angle 4$.

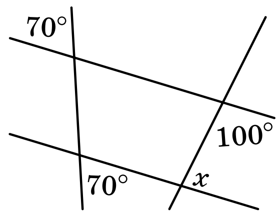
А. 195°
Б. 185°
В. 175°
Г. 165°



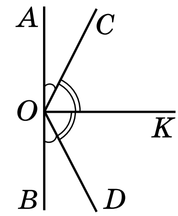
Мал. 11

9. За малюнком 12 знайдіть градусну міру кута x.

А. 80° **Б.** 70° **В.** 100° **Г.** 110°



Мал. 12



Мал. 13

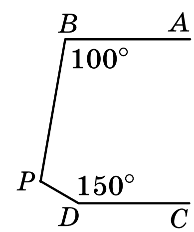
10. На малюнку 13 точки A, O і B лежать на одній прямій, $\angle AOC = \angle BOD$, $\angle COK = \angle DOK$. Знайдіть, якщо це можливо, градусну міру кута AOK.

А. Знайти неможливо **Б.** 80°

В. 90° **Г.** 100°

11. Прямі AB і CD паралельні (мал. 14). Тоді $\angle BPD = \ldots$

А. 100° **Б.** 110° **В.** 130° **Г.** 150°



Мал. 14

12. Промінь OC проходить між сторонами кута AOB. OK – бісектриса кута AOC, OL – бісектриса кута COB, $OK \perp OL$. Визначте вид $\angle AOB$.

А. Гострий **Б.** Тупий

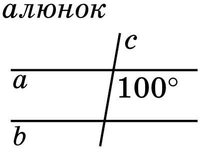
В. Прямий **Г.** Розгорнутий

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами.

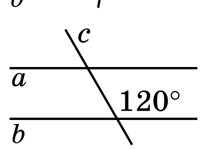
13. На кожному малюнку прямі a і b – паралельні, c – січна. Установіть відповідність між малюнками (1–3) та градусною мірою кута між прямими a і c (А–Г).

Малюнок

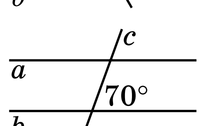
1.



2.



3.



Кут між прямими a і c

А. 60°

Б. 70°

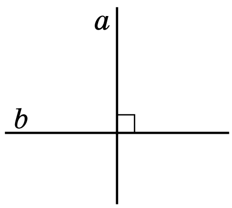
В. 80°

Г. 100°

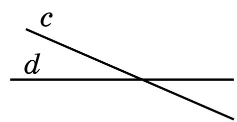
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 16–19

1

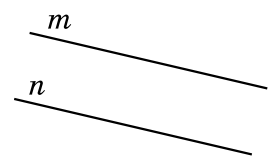
1. На якому з малюнків 1–3 зображено паралельні прямі, а на якому – перпендикулярні? Виконайте відповідні записи.



Мал. 1



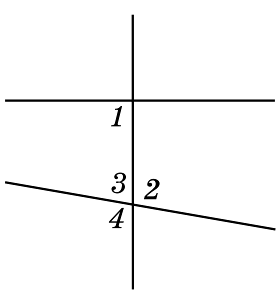
Мал. 2



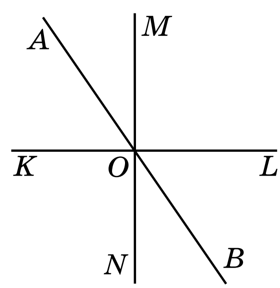
Мал. 3

2. Накресліть пряму a та позначте точку N, яка їй не належить. За допомогою косинця і лінійки через точку N проведіть:
1) пряму b, перпендикулярну до прямої a;
2) пряму c, перпендикулярну до прямої b.

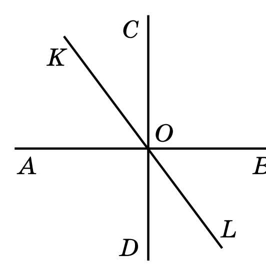
3. За малюнком 4 укажіть, як називають пару кутів:
1) *1* і *2*; 2) *1* і *3*; 3) *1* і *4*?



Мал. 4



Мал. 5



Мал. 6

2

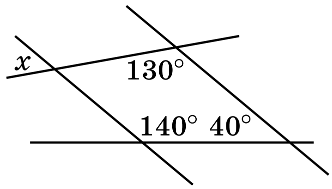
4. Прямі AB, KL і MN перетинаються в точці O (мал. 5). Чи перпендикулярні прямі KL і MN, якщо:
1) $\angle KOA = 70°$, $\angle AOM = 19°$;
2) $\angle NOB = 21°$, $\angle KOB = 111°$?

5. Накресліть промені AB і CD та відрізок MN так, щоб промінь AB був паралельний відрізку MN і перпендикулярний до променя CD.

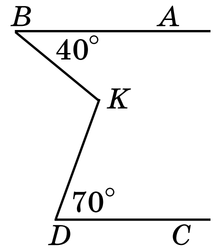
6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 78°. Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

3

7. Прямі AB, CD і KL перетинаються в точці O, причому $AB \perp CD$ (мал. 6). Знайдіть $\angle AOK$, якщо $\angle DOL = 38°$.



Мал. 7



Мал. 8

8. За малюнком 7 знайдіть градусну міру кута x.

9. На малюнку 8 $AB \parallel CD$. Знайдіть $\angle BKD$.

Додаткові вправи

10. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо перший з них у 4 рази більший за другий.

11. Пряма m є січною для прямих c і d. Чотири з восьми кутів, що утворилися, дорівнюють по 50°, а решта – по 130°. Чи можна стверджувати, що прямі c і d між собою паралельні?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 4

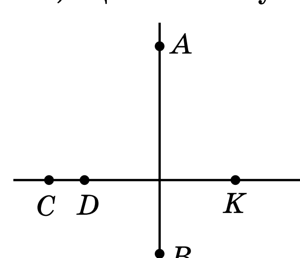
До § 16

1. Накресліть пряму a та позначте точку M, що їй не належить. За допомогою косинця проведіть з точки M перпендикуляр до прямої a. Виміряйте відстань від точки M до прямої a.

2. Накресліть гострий $\angle KAM$, позначте на стороні AK точку B. Побудуйте за допомогою косинця пряму, що проходить через точку B перпендикулярно до AK.

3. Накресліть промінь AB і відрізок KP так, щоб вони були перпендикулярними і не перетиналися.

4. Назвіть усі пари перпендикулярних між собою відрізків на малюнку 1. Виконайте відповідні записи.



Мал. 1

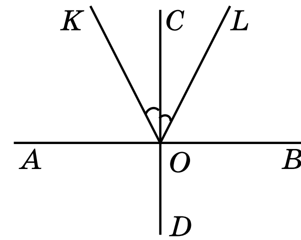
5. На малюнку 2: $AB \perp CD$, $\angle KOC = \angle COL$.

1) Чи правильно, що $\angle AOK = \angle LOB$, $\angle AOL = \angle KOB$?

2) Порівняйте $\angle KOB$ і $\angle AOK$.

6. 1) Чи можуть два гострих кути бути між собою рівними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші – перпендикулярні між собою?

2) Чи можуть два тупих кути бути між собою рівними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші – перпендикулярні між собою?



Мал. 2

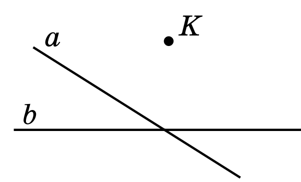
4 **7.** Як, використовуючи шаблон кута, градусна міра якого 6°, побудувати взаємно перпендикулярні прямі?

* **8.** Доведіть, що коли бісектриси кутів ABC і CBD взаємно перпендикулярні, то точки A, B і D лежать на одній прямій.

До § 17

1 **9.** Накресліть відрізки AB і CD так, щоб вони були паралельними між собою.

2 **10.** На малюнку 3 зображено дві прямі a і b, що перетинаються, та точку K, що не належить жодній з них. Проведіть через точку K прямі, паралельні прямим a і b.



Мал. 3

11. 1) Прямі a і b не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони між собою паралельні?

2) Відрізки AB і CD не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони паралельні?

3) Промені MN і KL не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони паралельні?

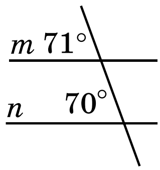
3 **12.** Дано пряму a і точку K, що їй не належить. Через точку K провели дві прямі b і c. Як можуть розміщуватися ці прямі відносно прямої a? Розгляньте всі випадки та виконайте до них малюнки.

4 **13.** Прямі a і b – паралельні, а прямі b і n – перетинаються. Пряма c паралельна прямій b. Доведіть, що пряма c перетинає пряму n і паралельна прямій a.

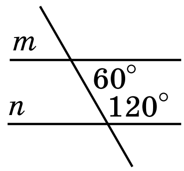
До § 18

1 **14.** Накресліть дві прямі та їхню січну. Пронумеруйте кути, що утворилися, числами від 1 до 8. Які із цих кутів будуть внутрішніми односторонніми, які – внутрішніми різносторонніми, а які – відповідними?

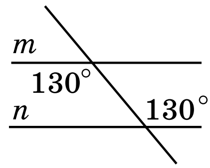
15. Чи є прямі m і n паралельними на малюнках 4–7?



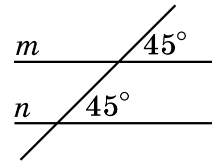
Мал. 4



Мал. 5



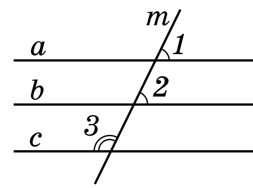
Мал. 6



Мал. 7

16. При перетині прямих a і b січною c утворилося два між собою рівних гострих кути. Чи можна стверджувати, що $a \parallel b$?

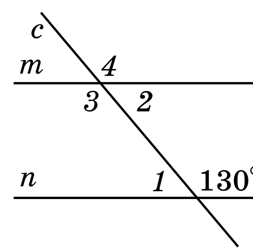
17. На малюнку 8: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Чи є прямі a і c паралельними між собою?



Мал. 8

До § 19

18. На малюнку 9 прямі m і n – паралельні, c – січна. Знайдіть градусні міри кутів 1, 2, 3, 4.

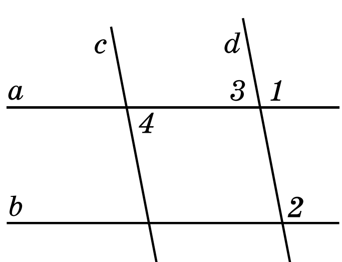


Мал. 9

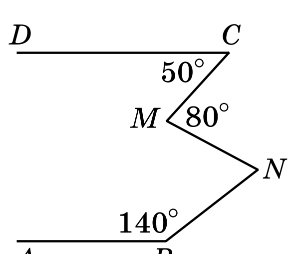
19. Дано: $a \parallel b$, $b \parallel c$, $c \parallel d$. Доведіть, що $a \parallel d$.

20. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них становить 80 % від іншого.

21. $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 1 = 100°$ (мал. 10). Знайдіть градусні міри кутів 2, 3, 4.



Мал. 10



Мал. 11

22. Один з внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 72°. Знайдіть кут між бісектрисами внутрішніх односторонніх кутів.

23. Прямі AB і CD паралельні (мал. 11). Знайдіть $\angle MNB$.

Головне в темі 4

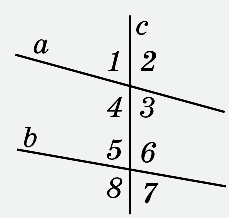
- Дві **прямі перпендикулярні**, якщо вони перетинаються під прямим кутом.
- Через будь-яку точку площини проходить лише одна пряма, перпендикулярна до даної прямої.
- **Перпендикуляр до прямої**, проведений з даної точки, – відрізок прямої, перпендикулярної до даної, один з кінців якого – дана точка, а другий – точка перетину прямих. Довжина цього відрізка – **відстань від точки до прямої**.
- Дві **прямі** на площині **паралельні**, якщо вони не перетинаються.

АКСІОМА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

Через точку, що не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

КУТИ, УТВОРЕНІ ПРИ ПЕРЕТИНІ ДВОХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ:

внутрішні односторонні кути: *4* і *5*; *3* і *6*;
внутрішні різносторонні кути: *4* і *6*; *3* і *5*;
відповідні кути: *1* і *5*; *2* і *6*; *3* і *7*; *4* і *8*.



ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

- Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні між собою, то прямі паралельні.
- Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні між собою, то прямі паралельні.
- Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.
- Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

ВЛАСТИВІСТЬ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ

- ✓ Відповідні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, між собою рівні.
- ✓ Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні одна одній.

ВЛАСТИВОСТІ КУТІВ, УТВОРЕНИХ ПРИ ПЕРЕТИНІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ

- ✓ Внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, між собою рівні.
- ✓ Сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, дорівнює $180°$.

А ще раніше...

Михайло Кравчук – відомий у світі й незнаний в Україні

Вислів «Рукописи не горять!», на щастя, іноді справджується… У селі Саварка, що на Богуславщині, на горищі хатини, у якій у 20-ті роки XX ст. мешкали вчителі, через 80 років випадково знайшли мішок, наповнений паперами й книжками… Пожовклі зшитки зошитів виявилися конспектами вчителів, які працювали в Саварській школі на початку минулого століття. І серед них – рукописний підручник Михайла Кравчука!

96 аркушів густо списаного зошита, на першій сторінці якого напис: «Геометрія для семирічних трудових шкіл, 1920 рік», виявилися сторінками неопублікованого підручника генія української математики!


М. П. Кравчук

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942) – найвизначніший український математик XX ст., всесвітньо відомий учений, педагог, громадський діяч, дійсний член Всеукраїнської академії наук, учений світової слави. Його ім’я знане у світовій математичній науці, але широкому загалу не було відомо, що він – українець. Його наукові праці з різних галузей математики увічнилися в безцінній скарбниці науки. Творець першого у світі електронного цифрового комп’ютера – американський фізик Джон Вінсент Атанасов під час розробки свого творіння щедро користався теоретичними напрацюваннями Михайла Кравчука. Так він засвідчив, що наш співвітчизник заслужено належить до співзасновників ЕОМ (електронно-обчислювальної машини). Теоретичні розробки М. Кравчука було використано й під час формування перших мереж телебачення у США та Японії.

Народився Михайло Кравчук у селі Човниця на Волині в родині землеміра та вчительки. Після закінчення чоловічої гімназії з 1910 по 1914 рік навчався на математичному відділенні фізико-математичного факультету Університету Святого Володимира в Києві (нині – Київський національний університет імені Тараса Шевченка). Викладачі одразу вирізнили його з-поміж інших за парадоксальність мислення. Академік Д. Граве, який створив алгебраїчну школу, давав молодому вченому чудові рекомендації, вважав його одним з найталановитіших своїх учнів і просив залишитися при університеті професорським стипендіатом для підготовки до наукової та викладацької роботи. Вільні від студіювання вечори Михайло проводив в Українському клубі, у Народному домі на Лук'янівці, де ставив свої вистави український театр під керівництвом М. Старицького.

Після отримання звання приват-доцента Михайло Кравчук працює як математик-науковець і як педагог. Викладає у двох новостворених українських гімназіях та Українському народному університеті, з 1918-го – співробітник Української академії наук. Кажуть, що у Кравчука була така красива й милозвучна українська мова, що на його математичні лекції із захопленням приходили й філологи – слухати неймовірну вимову викладача. Лекції відзначалися великим багатством і глибиною змісту, логікою і чіткістю викладу, широтою охоплення матеріалу, особливою красою та витонченістю. Водночас найскладніші математичні положення Михайло Пилипович подавав дохідливо й зрозуміло, але не в спрощеній формі. На лекціях Кравчука ніколи не було вільних місць: слухати його приходили ще й біологи, хіміки, філософи… Він перший в Україні почав писати математичні праці українською мовою. Підкомісія математичної секції природничого відділу Інституту української наукової мови під головуванням Кравчука створила й перший тритомний математичний словник.

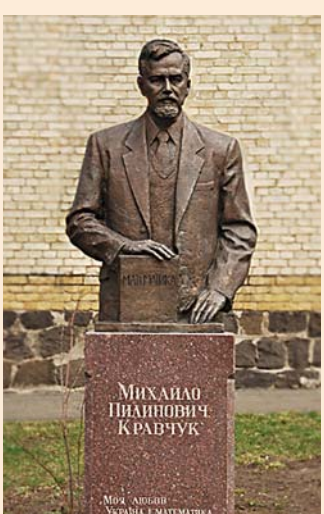
Михайло Пилипович підготував кілька підручників з математики українською мовою. У 1919 р. вийшов друком його курс лекцій з геометрії, який він прочитав в Українському народному університеті. У тому ж році опубліковано перший переклад українською мовою, який здійснив Кравчук, широковідомого підручника з геометрії Кисельова.

Економічна руйнація початку 20-х років XX ст. примусила науковця виїхати в село Саварка Богуславського району на Київщині, де він став директором школи. Тут М. Кравчук мав можливість реально втілити свої педагогічні задуми. Крім безпосереднього навчання, Кравчук приділяв велику увагу виявленню та вихованню обдарованих учнів. Він навчав математики **Архипа Люльку** (автора-конструктора першого у світі двоконтурного турбореактивного двигуна, творця літаків з надзвуковою швидкістю), а пізніше – **Сергія Корольова** (ученого-конструктора, основоположника радянської космонавтики), **Володимира Челомея** (провідного творця радянського «ядерного щита», конструктора ракетно-космічної та авіаційної техніки, розробника перших супутників).

М. Кравчука запрошують до роботи у Всеукраїнську академію педагогічних наук (ВУАН), де він очолює комісію математичної статистики, обіймає посаду вченого секретаря президії Академії, завідує відділом математичної статистики Інституту математики ВУАН. Водночас він – член управи Київського інституту народної освіти, декан факультету професійної освіти; активний громадський діяч – член секції наукових працівників міської Ради, організатор першої в Україні **математичної олімпіади** для обдарованих школярів (1935 р.).

Добре володіючи п'ятьма мовами (французькою, німецькою, італійською, польською та російською), молодий учений листувався з колегами з різних країн. М. Кравчука було обрано членом математичних товариств Франції, Німеччини, Італії. Але в сумнозвісному 1937 р. в тодішній газеті «Комуніст» з'явилася наклепницька стаття «Академік Кравчук підтримує ворогів народу». Йому дорікали листуванням з львівськими вченими, обвинувачували в націоналізмі. У 1938 р. М. Кравчука заарештували, інкримінувавши йому «вбивчий» на той час набір контрреволюційних стереотипів: націоналіст, шпигун. Суд над Михайлом Кравчуком тривав усього 30 хвилин, але вирок – 20 років тюремного ув'язнення та 5 років заслання. В останньому слові на суді М. Кравчук просив дати йому можливість закінчити розпочату працю з математики.

Незважаючи на хворе серце та повністю підірване у в'язниці здоров'я, М. Кравчук і вдень, і вночі невтомно займався наукою. Своєї реабілітації вчений не дочекався. Його було посмертно реабілітовано лише в 1956 р., а в 1992 р. поновлено у складі дійсних членів Академії наук України.



Його спадок налічує понад 180 наукових праць. Його пам'ять вшановують і нині.

У 1987 р. у с. Човниця, на батьківщині академіка, було встановлено його погруддя та відкрито музей М. Кравчука.

У 2003 р. на території Політехнічного інституту в Києві, вперше в Україні, відкрито пам'ятник Михайлові Кравчуку. «Моя любов – Україна і математика» – викарбовано на постаменті пам'ятника. Щороку в цьому навчальному закладі проводяться конференції імені академіка Кравчука, засновано стипендію М. Кравчука для кращих студентів.

У 2009 р. в Києві, на Харківському житловому масиві, одну з нових вулиць було названо на честь Михайла Кравчука.

Ім'я математика присвоєно Луцькій гімназії № 21, що міститься на вулиці академіка Кравчука, де також, до 110-річчя від дня народження, було відкрито музей видатного вченого.

У 2012 р. Національний банк України ввів в обіг пам'ятну монету номіналом 2 гривні, присвячену М. П. Кравчуку.

Уже в XXI ст. ЮНЕСКО внесла ім'я М. П. Кравчука до переліку найвизначніших людей планети.

А чи зможете ви розв'язати геометричні задачі Київських міських олімпіад з математики, що пропонувалися пів століття тому?

1. (1950 р.) Розділіть прямокутник розміром 18 × 8 на дві частини так, щоб з них можна було утворити квадрат.

2. (1975 р.) У країні 1000 доріг з'єднують 200 міст, причому з кожного міста виходить хоча б одна дорога. Яку найбільшу кількість доріг можна одночасно закрити на ремонт, не порушуючи при цьому зв'язок між містами?

Відповідь: 801.

3. (1978 р.) Точки A, B, C розміщені так, що незалежно від вибору точки M відрізок AM коротший від одного з відрізків BM або CM. Доведіть, що точка M належить відрізку BC.

4. (1979 р.) Розмістіть 6 точок на площині так, щоб кожні 3 з них були вершинами рівнобедреного трикутника.

5. (1985 р.) Довільний трикутник розріжте на 3 частини так, щоб з них можна було скласти прямокутник.

6. (1987 р.) Чи можна квадрат розміром 6 × 6 розрізати на прямокутники розміром 1 × 4?

ТЕМА 5

МНОГОЧЛЕН

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **ознайомитеся** з поняттями многочлена;
- **навчитеся** виконувати арифметичні дії над одночленами та многочленами, тотожні перетворення виразів; розкладати многочлени на множники.

§ 20. Многочлен. Подібні члени многочлена та їх зведення. Степінь многочлена

Многочлен

Вираз $7x^2y^3 - 5xy^7 + 9x^5 - 8$ є сумою одночленів $7x^2y^3$, $-5xy^7$, $9x^5$ і -8. Цей вираз називають ***многочленом***.

> ***Многочленом*** **називають суму одночленів.**

Одночлени, з яких складається многочлен, називають ***членами многочлена***. Наприклад, многочлен $7x^2y^3 - 5xy^7 + 9x^5 - 8$ складається із чотирьох членів: $7x^2y^3$, $-5xy^7$, $9x^5$ і -8.

Многочлен, який містить два члени, називають ***двочленом***, многочлен, який містить три члени, – ***тричленом***. Наприклад, $a + b^7$, $2xy - 3y^7$ – двочлени; $x + xy + y^3$, $mn + m - n$ – тричлени. Одночлен вважають окремим видом многочлена.

Будь-який многочлен є цілим виразом. Але не кожний цілий вираз є многочленом. Наприклад, цілі вирази $3(x - 1)$; $(a + b)^2$; $(m - n)^3$ не є многочленами, бо вони не є сумою одночленів.

Подібні члени многочлена

У многочлені $7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9$ члени $7x^2y$ і $-5x^2y$ є подібними доданками, оскільки вони мають одну й ту саму буквену частину x^2y. Також подібними доданками є й члени 8 і -9, які не мають буквеної частини.

> **Подібні доданки многочлена називають *подібними членами многочлена*, а зведення подібних доданків у многочлені – *зведенням подібних членів многочлена*.**

Приклад 1. Звести подібні члени у многочлені

$$7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9.$$

Розв'язання. $7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9 = (7x^2y - 5x^2y) + (8 - 9) + 9xy = 2x^2y - 1 + 9xy$.

Відповідь: $2x^2y - 1 + 9xy$.

Многочлен стандартного вигляду

Кожний член многочлена $2x^2y - 1 + 9xy$ є одночленом стандартного вигляду, причому цей многочлен уже не містить подібних доданків. Такі многочлени називають ***многочленами стандартного вигляду***.

Многочлен, що є сумою одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних доданків, називають *многочленом стандартного вигляду*.

Приклад 2. Чи записано в стандартному вигляді многочлен:

1) $xy^2 - x^2y^3x + 7$; 2) $m^2 + 3mn - 3n^2$; 3) $9ab + 7 - 5ab$?

Розв'язання. 1) Оскільки x^2y^3x не є одночленом стандартного вигляду, то многочлен $x^2y - x^2y^3x + 7$ не є многочленом стандартного вигляду.

2) $m^2 + 3mn - 3n^2$ – многочлен стандартного вигляду.

3) Многочлен $9ab + 7 - 5ab$ містить подібні доданки, тому не є многочленом стандартного вигляду.

Відповідь: 1), 3) ні; 2) так.

Приклад 3. Записати у стандартному вигляді многочлен

$$3x^2yx + 5 - 4xy^2y - 5x^3y + 7xy^3 - 8.$$

Розв'язання. Спочатку зведемо до стандартного вигляду члени многочлена, потім зведемо подібні доданки:

$3x^2yx + 5 - 4xy^2y - 5x^3y + 7xy^3 - 8 =$

$= \underline{3x^3y} + 5 - \underline{\underline{4xy^3}} - \underline{5x^3y} + \underline{\underline{7xy^3}} - 8 = -2x^3y + 3xy^3 - 3.$

Відповідь: $-2x^3y + 3xy^3 - 3$.

Степінь многочлена стандартного вигляду

Члени многочлена $7m^4p - 9m^2p^4 + 3$, який має стандартний вигляд, – це одночлени відповідно п'ятого, шостого та нульового степенів. Найбільший із цих степенів називають ***степенем многочлена***. Отже, $7m^4p - 9m^2p^4 + 3$ – многочлен шостого степеня.

Степенем многочлена стандартного вигляду **називають найбільший зі степенів одночленів, що містить цей многочлен.**

Наприклад, $5x - 7$ та $2a - 3b + 7$ – многочлени першого степеня; $2mn + n$ – другого; $2x^4 + x^5 - x^2$ – п'ятого степеня.

Степенем довільного многочлена називають степінь тотожно рівного йому многочлена стандартного вигляду.

Приклад 4. Визначити степінь многочлена

$$2x^2y + 3xy - 6x^2y + 4x^2y - 7.$$

Розв'язання. Спочатку запишемо многочлен у стандартному вигляді: $\underline{2x^2y} + 3xy - \underline{6x^2y} + \underline{4x^2y} - 7 = 3xy - 7$. Многочлен $3xy - 7$ є многочленом другого степеня, а тому і многочлен $2x^2y + 3xy - 6x^2y + 4x^2y - 7$ є многочленом другого степеня.

Відповідь: другого степеня.

Члени многочлена можна записувати в різній послідовності. Для многочленів стандартного вигляду, які містять одну змінну, члени зазвичай упорядковують за зростанням або спаданням показників степенів цієї змінної.

Наприклад, $7a^4 + 5a^3 - 8a^2 - 5$ або $-5 - 8a^2 + 5a^3 + 7a^4$.

Що називають многочленом? ○ Що називають членами многочлена? ○ Який многочлен називають двочленом, а який – тричленом? ○ Які члени многочлена називають подібними? ○ Який многочлен називають многочленом стандартного вигляду? ○ Що називають степенем многочлена?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **20.1.** (*Усно.*) Які з даних виразів є многочленами:

1) $a(a^2 - 3)$; 2) $4c^2 - c^2 + x^6$; 3) $\frac{9}{a-2}$;

4) y; 5) $(c - 3)(c + 2)$; 6) $t^2 - \frac{1}{2}t$;

7) 4,9; 8) $(m - 2c)^2$; 9) $a - \frac{b}{x}$?

20.2. Серед наведених виразів виберіть многочлени:

1) $c^3 - c^2 + c$; 2) $\frac{m}{m-p}$; 3) d^2;

4) $x(x - y)$; 5) $-4\frac{1}{7}$; 6) $(x + 5)(x - 5)$;

7) $c^7 - 1$; 8) $(a + b)^2$; 9) $c - \frac{b}{5}$.

20.3. Назвіть члени многочлена:

1) $4x^2y - 7xy^2 + 5 + 3xy$; 2) $-a^3 + 4a^2 - 9a + 3$.

20.4. Складіть многочлен з одночленів:

1) $5m^2$, $-2m$ і 3; 2) $7ab$, $-2a^2$ і b^2;
3) $4p$ і $2q^3$; 4) $-c^2$, $-3mc$, m^3 і 7.

20.5. Складіть многочлен з одночленів:

1) $5m$ і $-5n$; 2) m^3, $-2m^2$ і mn; 3) $-x^3$, $-2y^2$, xy і 4.

20.6. (*Усно.*) Чи записано многочлен у стандартному вигляді? Для многочленів стандартного вигляду визначте їхній степінь.

1) $5m^2 + m^3 + 1$; 2) $7x^2 + 2x + 3x^2$;
3) $2 + a + a^2b + 3$; 4) $c^2c + c^5 - 8$;
5) $3x^2x + 2xx^2 + x$; 6) $p^2 - 19$.

20.7. Зведіть подібні члени многочлена:

1) $7x - 15xy - 8xy$;
2) $8ab - 5ab + 4b^2$;
3) $9a^4 - 5a + 7a^2 - 5a^4 + 5a$;
4) $18a^4b - 9a^4b - 7ba^4$;
5) $4b^3 + b^2 - 15 - 7b^2 + b^3 - b + 18$;
6) $9xy^2 - x^3 - 5xy^2 + 3x^2y - 4xy^2 + 2x^3$.

20.8. Зведіть подібні члени многочлена:

1) $a^3 - 2a^3 + 3a^3$;
2) $-x^4 + 2x^3 - 3x^4 + 5x^2 - 3x^2$;
3) $7 + 3m^6 - 2m^3 - 5m^6 + 2m^6 - m^5 - 7$;
4) $9xy^3 + 6x^2y^2 - x^3y + x^2y^2 - 9xy^3$.

20.9. (*Усно.*) Які з многочленів – многочлени четвертого степеня:

1) $a^3 + 3a^2 + 1$; 2) $a^2a^2 - 8$; 3) $a^4 - 4a^3 - a^4$; 4) $aa^3 + 2$?

20.10. Які з многочленів є многочленами п'ятого степеня:

1) $m^3 + m^4 - m^2$; 2) $12 + mm^4$;
3) $mm + mm^2 + m^2m^2$; 4) $m^5 - 3 - m^5$?

20.11. Зведіть многочлен до стандартного вигляду та визначте його степінь:

1) $x^2y + xyy$; 2) $2a \cdot a^2 \cdot 3b + a \cdot 5c$;
3) $7x \cdot 5y^2 - 4y \cdot 7x^2$; 4) $3a \cdot 4a \cdot (-5a) - a^3 \cdot (-8b)$.

20.12. Подайте многочлен у стандартному вигляді та визначте його степінь:

1) $3x \cdot x^2 + 2x \cdot 5y^2$; 2) $5a \cdot b^2a + 3b \cdot 2ab^2$;
3) $-5mn^3m + 4mmm$; 4) $5p \cdot 3p \cdot (-p) - p^4qp$.

20.13. Перепишіть многочлен у порядку спадання степенів змінної:
1) $7x - 5x^3 + x^4 - 9x^2 + 1$;
2) $8y^3 - 5 + 7y^6 - 9y^4 + y^2$.

20.14. Перепишіть многочлен у порядку зростання степенів змінної:
1) $3m^2 - 3m + m^3 - 8$;
2) $7a^2 - 9a^5 + 4a^3 + 5 - a^4$.

20.15. Знайдіть значення:
1) двочлена $3x^2 - 1$, якщо $x = -1$; 2;
2) тричлена $5m + 9n^2 - 1$, якщо $m = -2$, $n = \frac{1}{3}$.

20.16. Обчисліть значення многочлена:
1) $64x^3 - x^2 + 1$, якщо $x = \frac{1}{4}$;
2) $4mn - 3m + 2n - 4mn$, якщо $m = 4$, $n = -3$.

20.17. Обчисліть значення многочлена:
1) $9p^2 - p^3$, якщо $p = \frac{1}{3}$;
2) $2xy - 4x + 3y + 4x$, якщо $x = -1$, $y = 2$.

20.18. Чи існує таке значення x, для якого значення многочлена $x^2 + 5$ дорівнює нулю; є від'ємним?

20.19. Зведіть многочлен до стандартного вигляду і вкажіть його степінь:
1) $3a^2ab - 5a^2b^2b^2 - 6ab \cdot 2a + 5ab \cdot 0{,}4ab - 1{,}5a \cdot 2b \cdot a^2$;
2) $3xy^2 \cdot 4x^3y + 5x^3y \cdot 2y \cdot (-x) - 10x^3y^3 \cdot \frac{1}{2}x - 7xy \cdot (-3xy^3)$.

20.20. Зведіть многочлен до стандартного вигляду і вкажіть його степінь:
1) $3a^2b^3 - ab^3 - a^3a - a^2b^2 \cdot b + 0{,}5ab \cdot 2b^2 + 4ab \cdot 0{,}5ab^2$;
2) $7x \cdot 2y^3 - 5x \cdot 3xy \cdot (-x) + \frac{1}{2}y \cdot (-14xy) - 3yx \cdot 4y^2$.

20.21. Зведіть многочлен
$$5xy^3 + x^2y^2 + 748{,}75 - 2x^3y - 3xy^3 - x^2y^2$$
до стандартного вигляду, знайдіть його значення, якщо $x = \frac{1}{2}$, $y = -1$, та дізнайтеся в кілометрах відстань від Києва до столиці Литви – міста Вільнюс.

20.22. Доведіть, що многочлен $a^2 + b^2 + 1$ для будь-яких значень змінних a і b набуває лише додатних значень.

20.23. Замість «зірочки» запишіть такий одночлен, щоб утворився многочлен четвертого степеня:

1) $x^3 + 3x^2 + * - 2$; 2) $m^6 - 4m^4 + mn + *$;
3) $a^3b - 3a^4b^3 + 3a^2 + *$; 4) $pq^3 - p^2q^2 + p^2q^3 + * - p^3q$.

20.24. Замість «зірочки» запишіть такий одночлен, щоб після зведення многочлена до стандартного вигляду отримати многочлен, що не містить змінної x:

1) $3x - 12 + 5x + 15 - 9x + *$;
2) $5xy^2 - y^3 + 7y^2 + 7y^2x - 5 + *$.

4 **20.25.** Дано многочлен $5x^3 + 2x^2 - x + 7$. Утворіть з нього новий многочлен, замінивши змінну x на одночлен:

1) m; 2) $-x$; 3) $2a$; 4) $3b^2$.

Отримані многочлени зведіть до стандартного вигляду.

20.26. Дано многочлен $3a^3 - 5a^2 + a - 8$. Утворіть з нього новий многочлен, замінивши змінну a на даний одночлен, та зведіть до стандартного вигляду:

1) x; 2) $-a$; 3) $2b$; 4) $3c^2$.

20.27. Оберіть ті многочлени, значення яких є додатними для будь-яких значень змінних; є від'ємними для будь-яких значень змінних:

1) $a^4 + 3a^2 + 5$; 2) $c^5 + c^3 + c$;
3) $-p^2 - 7$; 4) $-m^2 - m^2n^2 - n^2 - 9$;
5) $-a - b - 7$; 6) $x^8 + y^6 + c^4 + 1$.

Вправи для повторення

20.28. Розкрийте дужки та спростіть вираз:

1) $x + 5 + (2x - 7)$; 2) $2y - 7 - (3y - 8)$;
3) $7 - (2x + 9) + (3x - 11)$.

20.29. Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:

1) сума квадратів чисел 3,1 і –2,7;
2) квадрат різниці чисел –3,8 і –3,7;
3) куб суми чисел 1,52 і –1,5.

20.30. Замініть пропуски степенем з основою x так, щоб одержати тотожність:

1) $x^3 \cdot (\ \dots\ )^2 = x^{13}$; 2) $(\ \dots\ )^3 \cdot x^7 = x^{19}$.

Життєва математика

20.31. 1) У зв'язку зі збільшенням кількості замовлень конвеєр невеликого підприємства з пакування продукції в листопаді спожив на 20 % більше електроенергії, ніж у жовтні. Скільки кВт · год спожив конвеєр у листопаді, якщо в жовтні його споживання становило 250 кВт · год?

2) *Практична діяльність.* Дізнайтеся, скільки коштує 1 кВт · год електроенергії для підприємств, та визначте суму, яку сплатило підприємство за використану для пакування продукції електроенергію в жовтні, а яку – у листопаді.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

20.32. Розкрийте дужки та спростіть вираз:

1) $d - (d - 1)$;
2) $-(a + 10) + a$;
3) $p + (-p + a)$;
4) $(t + 4) - (t - 5)$;
5) $-(10 - x) + (-x + 7)$;
6) $-(b - 5 + a) - (2 - b)$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

20.33. Знайдіть усі натуральні значення n, для яких справджується нерівність $\frac{7}{12} < \frac{n}{63} < \frac{11}{18}$.

§ 21. Додавання і віднімання многочленів

Додавання многочленів

Додамо многочлени $7x^2 - 4x + 9$ і $-3x^2 + 5x - 7$. Для цього запишемо їхню суму, потім розкриємо дужки та зведемо подібні доданки:

$$(7x^2 - 4x + 9) + (-3x^2 + 5x - 7) =$$
$$= 7x^2 - 4x + 9 - 3x^2 + 5x - 7 = 4x^2 + x + 2.$$

Ми записали суму многочленів $7x^2 - 4x + 9$ і $-3x^2 + 5x - 7$ у вигляді многочлена $4x^2 + x + 2$. Так само можна додавати три й більше многочленів. *Сумою будь-яких многочленів є многочлен або одночлен*, які зазвичай записують у стандартному вигляді.

Віднімання многочленів

Тепер від многочлена $5x^2 - 8x + 7$ віднімемо многочлен $2x^2 - 6x - 5$. Для цього запишемо різницю цих многочленів, далі розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$(5x^2 - 8x + 7) - (2x^2 - 6x - 5) =$$
$$= 5x^2 - 8x + 7 - 2x^2 + 6x + 5 = 3x^2 - 2x + 12.$$

Різницю многочленів $5x^2 - 8x + 7$ і $2x^2 - 6x - 5$ ми подали у вигляді многочлена $3x^2 - 2x + 12$. *Різницею будь-яких многочленів є многочлен або одночлен*, які зазвичай записують у стандартному вигляді.

Застосування додавання і віднімання многочленів під час розв'язування вправ

Розглянемо приклади застосування додавання і віднімання многочленів під час розв'язування вправ.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(7x - 5) - (2x^2 + 3x - 7) + (9 - 2x) = 4 - 2x^2.$$

Розв'язання. Розкриємо дужки в лівій частині рівняння:

$$7x - 5 - 2x^2 - 3x + 7 + 9 - 2x = 4 - 2x^2.$$

Перенесемо доданки, що містять змінну, у ліву частину рівняння, а ті, що не містять змінної, – у праву. Матимемо:

$\underline{7x} - \underline{\underline{2x^2}} - \underline{3x} - \underline{2x} + \underline{\underline{2x^2}} = 4 + 5 - 7 - 9;$

$2x = -7;$

$x = -3{,}5.$

Відповідь: $-3{,}5$.

Приклад 2. Довести, що значення виразу

$$(7x^2 - 4x + 5) - (x^2 - 3) + (4 - 2x^2 + 4x)$$

є додатним числом для будь-якого значення змінної.

Доведення. Маємо $(7x^2 - 4x + 5) - (x^2 - 3) + (4 - 2x^2 + 4x) =$ $= 7x^2 - 4x + 5 - x^2 + 3 + 4 - 2x^2 + 4x = 4x^2 + 12$.

Значення виразу x^2 є невід'ємним числом для будь-якого значення x. Тому й значення виразу $4x^2$ також є невід'ємним числом для будь-якого значення x. А отже, значення виразу $4x^2 + 12$ є додатним для будь-якого значення змінної x. Твердження задачі доведено. ■

Запис многочлена у вигляді суми або різниці многочленів

Іноді виникає потреба розв'язати обернену задачу – записати многочлен у вигляді суми або різниці многочленів. У такому випадку доцільно скористатися правилами взяття виразу в дужки, перед якими стоїть знак «плюс» або «мінус», які вивчалися в попередніх класах.

Приклад 3. Записати многочлен $a^2 - b^3 - a + b^7 + 5$ у вигляді:

1) суми двох многочленів, один з яких містить змінну a, а інший її не містить;

2) різниці двох многочленів, перший з яких містить змінну b, а другий її не містить.

Розв'язання. 1) $a^2 - b^3 - a + b^7 + 5 = (a^2 - a) + (-b^3 + b^7 + 5)$;

2) $a^2 - b^3 - a + b^7 + 5 = (-b^3 + b^7) - (-a^2 + a - 5)$.

Відповідь: 1) $(a^2 - a) + (-b^3 + b^7 + 5)$;

2) $(-b^3 + b^7) - (-a^2 + a - 5)$.

Як знайти суму многочленів? Як знайти різницю многочленів? Які правила допоможуть записати многочлен у вигляді суми або різниці многочленів?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

21.1. (*Усно.*) Прочитайте многочлен, який одержимо після розкриття дужок:

1) $a + (b - 5)$; 2) $y + (3 - m + t)$;
3) $x - (p - 1)$; 4) $c - (-b^2 + 1)$.

2

21.2. Знайдіть суму многочленів:

1) $2x^2 + 3x^3 - 1$ та $5x^3 + 3x^2 + 7$;
2) $a^3 + 3a^2 + 1$, $2a^2 - 5$ та $6 - 5a^2$.

21.3. Знайдіть суму многочленів:

1) $3m^3 + 5m^2 - 7$ та $2m^3 + 6$;
2) $b^2 + 3b - 1$, $2b - 3b^2$ та $2b^2 + 7$.

21.4. Знайдіть різницю многочленів:

1) $4p^3 + 7p^2 - p$ та $2p^2 + p$;
2) $m^2 + 2m - 1$ та $m^3 + 2m - 1$.

21.5. Знайдіть різницю многочленів:

1) $2a^3 - 3a^2 + 7$ та $a^3 - 5a^2 - 8$;
2) $c^4 + c^3 - 2$ та $c^3 + 2c^2 - 2$.

21.6. Знайдіть суму та різницю виразів:

1) $x + y$ і $x - y$; 2) $x - y$ і $-x + y$;
3) $-x - y$ і $y - x$; 4) $x - y$ і $y - x$.

21.7. Знайдіть суму та різницю виразів:

1) $2a - b$ і $2a + b$; 2) $2a - b$ і $-2a + b$;
3) $-2a - b$ і $2a + b$; 4) $2a - b$ і $b - 2a$.

21.8. Знайдіть суму та різницю многочленів і зведіть їх до многочленів стандартного вигляду:

1) $3x^2 - 2x + 1$ і $3x^2 - 4$;
2) $2x + 1$ і $-3x^2 - 2x - 1$;
3) $a + 5b$ і $3a - 5b$;
4) $m^2 - 2mn - n^2$ і $m^2 + n^2$.

21.9. Запишіть суму та різницю першого та другого многочленів і зведіть їх до многочленів стандартного вигляду:
1) $5y^2 + 2y - 10$ і $3y^2 - y + 7$;
2) $5m^3 - m + 3$ і $4m^2 + m - 4$;
3) $5p^2 - 2pq - 7q^2$ і $3p^2 + 2pq + 5q^2$.

21.10. Спростіть вираз:
1) $(1 + 2p) + (p^2 - p)$; 2) $(5a^2 + a^3) - (-a + 5a^2)$;
3) $(x^2 - 5x) + (5x - 13)$; 4) $(3b^3 - 5b^2) - (5 + 3b^3 - 2b^2)$.

21.11. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:
1) $(5ab^2 - 12ab - 7a^2b) - (15ab + 8a^2b)$;
2) $\left(\frac{3}{5}a^3b^2 - \frac{3}{4}ab^2\right) - \left(-\frac{5}{8}b^2a - \frac{7}{10}b^2a^3\right)$;
3) $(x + y - z) - (-2x + 3y - z) - (-5y + 4z + x)$;
4) $(2m - 3n) - (4m - 3mn + 3n^2) - (5mn - 5n^2 - 3n)$.

21.12. Спростіть вираз:
1) $(15x^2 - 3xy) - (12x^2 - 5xy + y^2)$;
2) $(5a^2b - 12ab + 14ab^2) - (-5ab + 14ab^2 - 7a^2b)$;
3) $(m + n - 2p) - (-2m + p - 3n) - (4n + 3m - 4p)$.

21.13. Розв'яжіть рівняння:
1) $5x + 2x^2 - (2x^2 - 10) = 25$;
2) $5 - x^3 - (2x + 7 - x^3) = -8$.

21.14. Розв'яжіть рівняння:
1) $5x^2 + 7x - (2x + 5x^2 - 8) = 8$;
2) $2 - 3x^3 - (5x - 3x^3) = -13$.

21.15. Подайте многочлен у вигляді суми двох многочленів, один з яких містить змінну x, а інший її не містить:
1) $xa + b - m - xb$; 2) $xa^2 - 17a + 5x + 10b$.

21.16. Запишіть многочлен $5x^2 - 9x^3 + 7x - x^4 - 1$ у вигляді суми двочлена і тричлена. Знайдіть два розв'язки задачі.

3

21.17. Для якого значення x:
1) значення різниці одночлена $5x$ і многочлена $3x - 5x^2 + 12$ дорівнює значенню многочлена $7x + 5x^2 - 18$;
2) значення різниці многочленів $5x^3 + 3x^2 - x$ і $2x^3 - 2x^2 + x$ дорівнює значенню многочлена $5x^2 + 3x^3 + 14$?

21.18. Для якого значення змінної y:
1) сума многочленів $2y^3 - 3y + y^2$ та $5y - 2y^3 - y^2 + 7$ дорівнює 19;
2) різниця двочлена $5y^2 - 7y$ і тричлена $2y^2 - 8y + 9$ дорівнює двочлену $3y^2 - 3y$?

21.19. Подайте многочлен у вигляді різниці двох многочленів, перший з яких містить змінну y, а другий її не містить:
1) $-ya + yx + x - y - a + 1$;
2) $-p^2 + y^2 + 2p - 7y - 1$.

21.20. Який многочлен стандартного вигляду потрібно записати замість пропусків, щоб одержати тотожність:
1) $-(\ldots) = 4p - q$;
2) $-(\ldots) = 4m^2 - p^2 + 5$;
3) $(\ldots) + 2m^2n - 5mn^2 = 7m^2 - 3mn^2$;
4) $7a^2b + 9a^3 + (\ldots) = 8a^2b$;
5) $3 + 2a^2 - 5a + (\ldots) = 9a^2 - 12$;
6) $(\ldots) - (4x^2 - 2xy) = 5 + 5x^2 - 2xy$?

21.21. Знайдіть многочлен стандартного вигляду, підставивши який замість M матимемо тотожність:
1) $-M = 5a - b^2 + 7$;
2) $M + (3a^2 - 2ab) = 5a^2 + 3ab - b^2$;
3) $M - (3mn - 4n^2) = m^2 - 4mn + n^2$;
4) $(7a^2 - b^2 - 9ba) - M = 0$.

21.22. Велосипедист був у дорозі 4 год. За першу годину він проїхав x км, а за кожну наступну – на 3 км більше, ніж за попередню. Яку відстань проїхав велосипедист:
1) за другу годину; 2) за третю годину;
3) за перші три години; 4) за весь час руху?

21.23. Бригада робітників і робітниць викопала криницю за 5 днів. За перший день вони викопали a метрів, а за кожний наступний – на 2 метри менше, ніж за попередній. Скільки метрів криниці викопала бригада:
1) за другий день; 2) за третій день;
3) за перших два дні; 4) за останніх три дні?

21.24. Доведіть тотожність:
1) $(x - y) + (y - p) - (x - p) = 0$;
2) $(a^2 + b^2 - c^2) - (b^2 - a^2 - c^2) - (a^2 - b^2) = a^2 + b^2$.

21.25. Доведіть тотожність:
$(a^3 + a^2 - a) + (2a^2 - 5a + 3a^3) - (4a^3 - 6a + 2a^2) = a^2$.

21.26. Доведіть, що для будь-яких натуральних значень n значення виразу $(15 - 7n) - (7 - 11n)$ є кратним числу 4.

21.27. Доведіть, що для будь-яких натуральних значень m значення виразу $(m^2 - 4m + 1) - (m^2 - 9m - 14)$ ділиться на 5.

21.28. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{1}{8}a^2b+\frac{3}{5}ab\right)-\left(\frac{7}{10}ab-\frac{3}{4}ba^2\right)-\left(\frac{7}{8}a^2b-\frac{1}{10}ab-2\right)$$

не залежить від значення змінних.

21.29. Доведіть, що значення виразу
$(7x^5 - 4x^4 + x^3 - 8) - (3x^5 - 4x^4 + 4x^3) - (4x^5 - 3x^3 + 7)$
не залежить від значення змінної.

21.30. Знайдіть значення виразу:
1) $(b^2 + 3b - 8) - (7b^2 - 5b + 7) + (5b^2 - 8b + 10)$, якщо $b = -2$;
2) $17x^2 - (3x^2 - 2xy + 3y^2) - (14x^2 + 3xy - 4y^2)$, якщо $x = -0{,}1$, $y = 10$.

21.31. Знайдіть значення виразу:
1) $(m^2 - 2m - 8) - (0{,}1m^2 - 5m + 9) + (4m - 0{,}9m^2 + 5)$, якщо $m = \frac{1}{7}$;
2) $7a^2 - (3ab - 2a^2) + (4ab - 9a^2)$, якщо $a = -\frac{1}{8}$, $b = -32$.

21.32. Подайте многочлен $3m^2n - 5mn + 4n^2 - 9n - 7$ у вигляді різниці двох многочленів так, щоб усі члени обох многочленів мали додатні коефіцієнти.

4 **21.33.** Нехай $a = 7m^2 + 5mn - n^2$, $b = -6m^2 + 2mn + 3n^2$, $c = m^2 - 2n^2$. Підставте ці многочлени замість a, b, c у вираз і спростіть його:
1) $a + b + c$;
2) $a - b - c$.

21.34. Доведіть, що для будь-якого значення x різниця многочленів $0{,}5x^4 + x^3 - 0{,}2x^2 - 5$ і $0{,}3x^4 + x^3 - 0{,}7x^2 - 9$ набуває додатного значення. Якого найменшого значення набуває ця різниця і для якого значення x?

21.35. Доведіть, що сума:
1) трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3;
2) чотирьох послідовних натуральних чисел при діленні на 4 дає в остачі 2.

21.36. Запис $\overline{xy}$ означає натуральне число, у якому x десятків і y одиниць. Доведіть, що:
1) сума чисел $\overline{xy}$ і $\overline{yx}$ кратна числу 11;
2) різниця чисел $\overline{xy}$ і $\overline{yx}$, де $x > y$, кратна числу 9.

21.37. Запис $\overline{xyz}$ означає натуральне число, у якому x сотень, y десятків і z одиниць. Подайте у вигляді многочлена:

1) $\overline{xyz}$; 2) $\overline{zyx}$;

3) $\overline{xyz} + \overline{zy}$; 4) $\overline{yxz} - \overline{yx}$.

Вправи для повторення

21.38. Обчисліть значення виразу $(0{,}018 + 0{,}982) : (4 \cdot 0{,}5 - 0{,}2)$.

21.39. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $-8x \cdot 1{,}5y$, якщо $x = \frac{4}{7}$, $y = -1\frac{3}{4}$;

2) $-2a \cdot (-3{,}5b) \cdot 5c$, якщо $a = -1$, $b = -\frac{2}{5}$, $c = \frac{3}{7}$.

21.40. Подайте вираз 2^{60} у вигляді степеня з основою:

1) 4; 2) 8; 3) 16; 4) 32.

Життєва математика

21.41. 1) Для 13-річного підлітка мінімальна потреба в молочних продуктах (молоко, кефір, ряжанка) становить 15 % від норми рідини на день. Скільки рідких молочних продуктів має вживати підліток згаданого віку щоденно, якщо потреба його організму в рідині становить 2 літри на день?
2) *Практична діяльність.* Проаналізуйте свій раціон харчування. Чи виконуєте ви зазначені рекомендації?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

21.42. Розкрийте дужки:

1) $-0{,}6d(-5b + 4p - 0{,}3x)$; 2) $10(0{,}9x - 2{,}3y + 0{,}1z)$;

3) $(-0{,}3a + 5b - 2c) \cdot (-20)$; 4) $\left(-\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}m - 1\frac{1}{3}x\right) \cdot 12$.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

21.43. Знайдіть цифри a і b, якщо число $\overline{9a6b2}$ кратне числу 36. Укажіть усі можливі розв’язки.

§ 22. Множення одночлена на многочлен

Правило множення одночлена на многочлен

Помножимо одночлен $5x$ на многочлен $3x - 7$, використовуючи розподільну властивість множення:

$$5x(3x - 7) = 5x \cdot 3x - 5x \cdot 7 = 15x^2 - 35x.$$

Отже, добутком одночлена $5x$ і многочлена $3x - 7$ є многочлен $15x^2 - 35x$, який одержали, помноживши одночлен на кожний член многочлена і додавши знайдені результати. Маємо *правило множення одночлена на многочлен*:

щоб помножити одночлен на многочлен, треба помножити цей одночлен на кожний член многочлена й отримані добутки додати.

Добуток будь-якого одночлена на будь-який многочлен завжди можна подати у вигляді многочлена.

Застосування правила множення одночлена на многочлен до розв'язування вправ

Розглянемо застосування правила множення одночлена на многочлен під час розв'язування вправ.

Приклад 1. Виконати множення $-3ab(5a^2 - 2ab + b^2)$.

Розв'язання. $-3ab(5a^2 - 2ab + b^2) =$
$= -3ab \cdot 5a^2 - 3ab \cdot (-2ab) - 3ab \cdot b^2 = -15a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3.$

Записати це множення можна коротше, пропустивши проміжні результати: $-3ab(5a^2 - 2ab + b^2) = -15a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3$.

Відповідь: $-15a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3$.

Приклад 2. Спростити вираз $5m(m^2 - 2) - 2(m^3 - 5m)$.

Розв'язання.

$5m(m^2 - 2) - 2(m^3 - 5m) = \underline{5m^3} - \underline{\underline{10m}} - \underline{2m^3} + \underline{\underline{10m}} = 3m^3$.

Відповідь: $3m^3$.

Приклад 3. Спростити вираз $4ab(2a^2b - a) - 8a(a^2b^2 - ab)$ та знайти його значення, якщо $a = -\frac{1}{8}$, $b = -4$.

Розв'язання. Спочатку спростимо заданий вираз.

$4ab(2a^2b - a) - 8a(a^2b^2 - ab) = \underline{8a^3b^2} - \underline{\underline{4a^2b}} - \underline{8a^3b^2} + \underline{\underline{8a^2b}} = 4a^2b.$

Якщо $a = -\frac{1}{8}$, $b = -4$, то

$$4a^2b = 4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)^2\cdot(-4) = -16\cdot\frac{1}{64} = -\frac{1}{4} = -0,25.$$

Відповідь: $4a^2b$; $-0,25$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{4} = \frac{x-14}{12}.$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на найменший спільний знаменник дробів, тобто на 12:

$$12\left(\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{4}\right) = 12\cdot\frac{x-14}{12}.$$

Маємо:
$$\frac{12\cdot(2x-1)}{3} - \frac{12\cdot(3x+2)}{4} = \frac{12\cdot(x-14)}{12};$$
$$4(2x - 1) - 3(3x + 2) = x - 14;$$
$$8x - 4 - 9x - 6 = x - 14;$$
$$8x - 9x - x = -14 + 4 + 6;$$
$$-2x = -4;$$
$$x = 2.$$

Відповідь: 2.

Сформулюйте правило множення одночлена на многочлен.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

22.1. (*Усно*.) Виконайте множення:

1) $x(a - 3)$;
2) $-p(x + y)$;
3) $m(a - b + 2)$;
4) $-y(x - 3 + p)$.

22.2. Виконайте множення:

1) $a(b - 2)$;
2) $m(a + c)$;
3) $p(a - b - 3)$;
4) $-b(a - c + 3)$.

2

22.3. Виконайте множення одночлена на многочлен:

1) $7a^2(3 - a)$;
2) $-5x^2(x^3 + 4x)$;
3) $-3c^3(c - 2c^2)$;
4) $2a^4(a^5 - a^3 - 1)$;
5) $(3x^2 - 5x - 3)\cdot 2x$;
6) $(c^3 + c - 4)\cdot(-3c)$.

22.4. Перетворіть добуток на многочлен:

1) $4xy(x^2 - 2xy - y^2)$;
2) $-a^2b(ab^2 - b^2 + a^2)$;
3) $(2mn - 3m^2 - 5n^2) \cdot (-4m^2)$;
4) $(-2x^2y + 3xy - x^2) \cdot xy^2$;
5) $(2{,}8a^2b - 3{,}7a^3b - 0{,}8b) \cdot 10ab^2$;
6) $-1{,}8a^2b^6(5a^2b - 1{,}5a - 2b^3)$.

22.5. Подайте добуток у вигляді многочлена:

1) $4a(a^2 - 2a + 3)$;
2) $-3b^2(4b^3 - 2b^2 + 3b - 8)$;
3) $(3x^2 - 4x + 12) \cdot (-0{,}1x^3)$;
4) $(p^2 - 9p^3 + 7p - 1) \cdot 3p^4$;
5) $7ab(2a^2b - 3ab^2 - 3a^3)$;
6) $-6m^2n(m^2n - 3mn^2 - 4n^3)$;
7) $(9a^2b - 8ab^3 - a^2b^2) \cdot (-3a^2b^3)$;
8) $(p^2q^3 - 2pq^4 + 3p^3) \cdot 5p^3q^2$.

22.6. Виконайте множення:

1) $\frac{1}{7}a^2b(1{,}4a^2 - 2{,}1b^3)$;
2) $-\frac{2}{3}x^2y^3\left(1{,}2y^5 - \frac{9}{10}xy\right)$;
3) $\left(1\frac{1}{5}mn^2 - 1\frac{1}{15}m^2\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}m^2n\right)$;
4) $\left(1\frac{1}{4}m - \frac{5}{6}n\right) \cdot 2\frac{2}{5}m^2n^7$.

22.7. Виконайте множення:

1) $\frac{1}{4}m^2n(2{,}4mn - 2{,}8m^2)$;
2) $-\frac{2}{5}ab^3\left(1{,}5ab - \frac{5}{6}b^2\right)$;
3) $\left(1\frac{1}{2}x^2y - \frac{9}{10}xy^4\right) \cdot \frac{2}{3}xy^3$;
4) $\left(1{,}5a - \frac{4}{7}b\right) \cdot \left(-\frac{1}{14}a^2b^5\right)$.

22.8. Подайте у вигляді многочлена:

1) $5(x - 3) - 2(x - 3)$;
2) $5(7a - 1) - 7(5a + 3)$;
3) $2b(b - 3) - 5b(b + 7)$;
4) $7y^2(3y - 2) + 4y^2(y + 5)$.

22.9. Спростіть вираз:

1) $5(3 - 2a) + 7(3a - 1)$;
2) $3(2x - 8) - 3(2x - 5)$;
3) $3m(m - 2) - 5m(7 - m)$;
4) $2a^2(3a - 5) + 4a^2(a + 3)$.

22.10. Перетворіть вираз на многочлен:

1) $5m(m - n) + 3n(n - m)$;
2) $2a(2b - 3a) - 3a(5b - 7a)$;
3) $a(3a^2 - 2b) - b(5a^2 - 2a)$;
4) $0{,}2mn(m^2 - n^2 + 3) - 0{,}5m(nm^2 - n^3)$.

22.11. Виконайте дії:

1) $3a(a - b) + 5b(a + b)$;
2) $3y(x - y) + y(2y - 3x)$;
3) $p(p^2 - 2a) - a(a^2 - 2p)$;
4) $3xy(x^2 - y^2 + 7) - 5xy(y^2 + x^2)$.

22.12. Розв'яжіть рівняння:

1) $6 + 2(5x + 4) = 24$;
2) $3(5x - 1) = 4(4x - 8)$;
3) $7 - 4(y - 1) = (3y - 2) \cdot (-2)$;
4) $3(y - 2) - 5(y + 7) = -7(y - 1)$.

22.13. Розв'яжіть рівняння:
1) $5(2x - 1) = 3(4x + 5)$; 2) $9 - 5(y + 2) = (7y - 5) \cdot (-3)$.

22.14. Знайдіть корінь рівняння:
1) $x(x - 3) - 9 = 12 + x^2$; 2) $3x - 2x^2 = 2x(5 - x) + 14$.

22.15. Знайдіть корінь рівняння:
1) $7 - x(x - 2) = 5 - x^2$; 2) $3x(x - 5) = 3x^2 - 5x + 20$.

22.16. Запишіть замість «зірочки» такий одночлен, щоб справджувалася рівність:
1) $(a + b) \cdot * = am + bm$;
2) $* \cdot (x - y) = -nx + ny$;
3) $* \cdot (a - b + c) = ax^2 - bx^2 + cx^2$;
4) $* \cdot (c - n + p) = -abc + abn - abp$;
5) $* \cdot (x^2 - xy) = x^2y^2 - xy^3$;
6) $(p - 1) \cdot * = p^2q^2 - pq^2$.

3

22.17. Доведіть, що для будь-якого значення a вираз
$$a(3a + 1) - a^2(a + 2) + (a^3 - a^2) - (a + 1)$$
набуває одного й того самого значення.

22.18. Доведіть, що значення виразу
$$x(5x^2 - x + 2) - (5x - 2 + 4x^3) - x(x^2 - x - 3)$$
не залежить від значення змінної.

22.19. Доведіть, що вираз тотожно дорівнює нулю:
1) $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)$;
2) $a(b + c - bc) - b(c + a - ac) + c(b - a)$.

22.20. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:
1) $-7a^5b(2b^4 + ab^5 - 3a^2b^6 + a^3b^7)$;
2) $(3x^3 + 5x^2 - 2a - 3a^2)xay$;
3) $-4pm^3(m^4 - 2p^3m + 7p^6m^7 + 11p^7m^3)$;
4) $\left(-\frac{1}{2}a^2b^9 + \frac{1}{6}ab^7 - \frac{1}{3}a^3b^6\right)(-12a^3b^7)$.

22.21. Доведіть, що для будь-якого значення змінної a вираз $2a^2(a - 5) - a(-6a + 2a^2 + 3a^3) - 4$ набуває від'ємних значень.

22.22. Доведіть, що для будь-якого значення змінної m вираз $5(m^2 - 3m + 1) - 3m(m - 5)$ набуває лише додатних значень.

22.23. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:
1) $3a(5a^2 - 3ab + ab^3 - b^2) \cdot b$;
2) $-xy \cdot (x^2y - 2x^2y^2 + 3xy^3 + x^3) \cdot x^2$.

22.24. Спростіть вираз і знайдіть його значення. Знайдіть суму всіх отриманих значень і дізнайтеся, скільки разів представники України вигравали в пісенному конкурсі «Євробачення».

1) $4a - 2(5a - 1) + (8a - 2)$, якщо $a = -3{,}5$;

2) $10(2 - 3x) + 12x - 9(x + 1)$, якщо $x = -\dfrac{1}{27}$;

3) $a(3a - 4b) - b(3b - 4a)$, якщо $a = -5$, $b = 5$;

4) $3xy(5x^2 - y^2) - 5xy(3x^2 - y^2)$, якщо $x = \dfrac{1}{8}$, $y = -2$.

22.25. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $7a(2a - 0{,}1) - 0{,}1a(10a - 7)$, якщо $a = \dfrac{1}{13}$;

2) $4x(2x - 5y) - 2y(4y - 10x)$, якщо $x = -15$, $y = 15$.

22.26. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{5x-9}{4} + \dfrac{5x-7}{4} = 1$;

2) $\dfrac{3x-1}{14} - \dfrac{x}{7} = -2$;

3) $\dfrac{x-6}{3} + \dfrac{2x+3}{3} = 2x$;

4) $\dfrac{2-x}{5} - \dfrac{x}{15} = \dfrac{1}{3}$;

5) $2x(1 - 3x) + 5x(3 - x) = 17x - 11x^2$;

6) $(7x^3 + 2x^2 - 4x - 5) - (6x^3 - x^2 + 2x) = 3x^2 - (6x - x^3)$.

22.27. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{7x-3}{6} - \dfrac{5x+1}{2} = 0$;

2) $\dfrac{x-3}{5} - \dfrac{x}{4} = 1$;

3) $\dfrac{4x+1}{6} + \dfrac{10x+1}{6} = x$;

4) $\dfrac{x+2}{15} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{5}$;

5) $3x(2 + x) - 4(1 - x^2) = 7x^2 + 6x$;

6) $(x^2 + 4x - 8) - (7x - 2x^2 - 5) = 3x^2 - (3x + 3)$.

22.28. Для якого значення змінної:

1) значення виразу $2(3y + 1)$ у 4 рази більше за значення виразу $3y - 2$;

2) добуток виразів $3x$ і $2x + 1$ дорівнює сумі виразів $x(4x - 1)$ і $2(x^2 - 3)$?

22.29. Для виготовлення одного тістечка потрібно на 4 г цукру більше, ніж для виготовлення одного пиріжка або одного пончика. За день у кондитерському цеху було виготовлено 80 тістечок, 50 пончиків і 50 пиріжків. При цьому на всі тістечка пішло на 80 г цукру більше, ніж на всі пончики і пиріжки разом. Скільки грамів цукру йде на виготовлення одного тістечка?

22.30. За 8 олівців, 4 ручки і блокнот заплатили 265 грн. Олівець на 17 грн 50 коп. дешевший за ручку і на 32 грн 50 коп. дешевший за блокнот. Скільки коштують окремо олівець, ручка і блокнот?

22.31. Одна котушка бавовняних ниток коштує 5 грн 40 коп., а льняних – 6 грн 50 коп. Бабуся для плетіння серветок придбала бавовняних ниток на 6 котушок більше, ніж льняних, витративши на всю покупку 175 грн 20 коп. Скільки котушок бавовняних і скільки котушок льняних ниток придбала бабуся?

22.32. Човен плив 3,5 год за течією річки і 2,5 год проти течії. Відстань, яку він проплив за течією річки, на 30 км більша за відстань, яку він проплив проти течії. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії 2 км/год.

22.33. Якими одночленами потрібно замінити «зірочки», щоб одержати тотожність:

1) $5ax^2 \cdot (* + *) = 5ax^3 + 35ax^2$; 2) $(9a^2 + *) \cdot 3a = * + 18a^5$;
3) $(* - 4mc^2) \cdot * = 3m^3c^2 - 12m^2c^4$;
4) $(* - *) \cdot x^2y^3 = 5x^2y^3 - 7x^2y^4$?

22.34. Які одночлени потрібно вписати у клітинки, щоб одержати тотожність:

1) $3a^2(\square - \square) = 9a^5 - 12a^2$;
2) $(\square + \square) \cdot 5ab^2 = 5ab^2 + 10a^2b^3$;
3) $(\square - 2m^2a) \cdot 7m = 14m^2 - \square$;
4) $(7x^2a - 9xa^2) \cdot \square = 14x^3a^5 - \square$?

4

22.35. Спростіть вираз (n – натуральне число):

1) $x^{n+3}(x^{n+4} - x) - x^{2n+7}$;
2) $y^n(y^{n+2} - y^n - y^2) - y^2(y^{2n} - y^n)$;
3) $z^n(z^2 - 1) - z^2(z^n + 2) - 2(z^n - z^2)$.

Вправи для повторення

22.36. У яких координатних чвертях лежать точки $A(4; -8)$, $B(-5; -7)$, $C(1; 17)$, $D(-9; 8)$?

22.37. Спростіть:

1) $(-3a^2b^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}ab^2\right)^3$; 2) $(0{,}1mn^7)^2 \cdot (-10m^2n^3)^3$.

22.38. Використовуючи властивості степенів, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{24^{17} \cdot 6^{16}}{48^{16} \cdot 3^{17}}$; 2) $\frac{35^9 \cdot 2^7}{5^7 \cdot 14^8}$.

Життєва математика

22.39. У багатьох країнах світу, зокрема і в Україні, температуру вимірюють за шкалою Цельсія. А в деяких країнах, наприклад у США, основною шкалою для вимірювання температури є шкала Фаренгейта. Щоб значення температури за Фаренгейтом t_F перетворити у градуси Цельсія t_C, користуються формулою $t_C = 1{,}8t_F + 32$.

1) Запишіть формулу, за якою значення температури у градусах Цельсія t_C можна перетворити у значення температури за шкалою Фаренгейта t_F.

2) Уявіть, що ваш термометр вимірює температуру тіла за Фаренгейтом. Заповніть таблицю, перетворивши значення температури за Фаренгейтом у значення температури за Цельсієм.

t_F	95	95,9	96,8	97,7	98,6	99,5	100,4	101,3	102,2
t_C									

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

22.40. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $7a - 7b$; 2) $-2y - 2x$; 3) $9n + 9m$; 4) $bx + by$;
5) $3m - mx$; 6) $7t + 7$; 7) $5ap + 5pb$; 8) $4ax - 4bx$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

22.41. Відомо, що для деяких натуральних значень a і b значення виразу $6a + b$ кратне числу 7. Доведіть, що для тих самих значень a і b значення виразу $6b + a$ також кратне числу 7.

§ 23. Розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки

Розкладання многочлена на множники

У 6 класі ми розкладали складені числа на прості множники, тобто подавали натуральні числа у вигляді добутку. Наприклад, $12 = 2^2 \cdot 3$; $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ тощо.

Подати у вигляді добутку можна і деякі многочлени. Це означає, що ці многочлени можна розкладати на множники.

Наприклад, $5x - 5y = 5(x - y)$; $a^3 + 3a^2 = a^2(a + 3)$ тощо.

Розкласти многочлен на множники **означає подати його у вигляді добутку одночлена на многочлен або добутку кількох многочленів так, щоб цей добуток був тотожно рівним даному многочлену.**

Винесення спільного множника за дужки

Розглянемо один із способів розкладання многочлена на множники – ***винесення спільного множника за дужки***. Одним з відомих нам прикладів такого розкладання є розподільна властивість множення $a(b + c) = ab + ac$, якщо її записати у зворотному порядку: $ab + ac = a(b + c)$. Цей запис означає, що многочлен $ab + ac$ розклали на два множники a та $b + c$.

Під час розкладання на множники многочлена із цілими коефіцієнтами множник, який виносять за дужки, обирають так, щоб члени многочлена, який залишиться в дужках, не мали спільного буквеного множника, а модулі їхніх коефіцієнтів не мали спільних дільників.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Розкласти вираз на множники:

1) $8m + 4$; 2) $at + 7ap$; 3) $15a^3b - 10a^2b^2$.

Розв'язання. 1) Спільним множником є число 4, тому

$$8m + 4 = \underline{4} \cdot 2m + \underline{4} \cdot 1 = 4(2m + 1).$$

2) Спільним множником є змінна a, тому $at + 7ap = a(t + 7p)$.

3) У цьому випадку спільним числовим множником є найбільший спільний дільник чисел 10 і 15 – число 5, а спільним буквеним множником є одночлен a^2b. Отже,

$$15a^3b - 10a^2b^2 = \underline{5a^2b} \cdot 3a - \underline{5a^2b} \cdot 2b = 5a^2b(3a - 2b).$$

Відповідь: 1) $4(2m + 1)$; 2) $a(t + 7p)$; 3) $5a^2b(3a - 2b)$.

Приклад 2. Розкласти на множники:

1) $2m(b - c) + 3p(b - c)$; 2) $x(y - t) + c(t - y)$.

Розв'язання.

1) У цьому випадку спільним множником є двочлен $b - c$. Отже, $2m\underline{(b - c)} + 3p\underline{(b - c)} = (b - c)(2m + 3p)$.

2) Доданки мають множники $y - t$ і $t - y$, які є протилежними виразами. Тому в другому доданку винесемо за дужки множник –1, одержимо: $c(t - y) = -c(y - t)$.

Отже, $x(y - t) + c(t - y) = x(y - t) - c(y - t) = (y - t)(x - c)$.

Відповідь: 1) $(b - c)(2m + 3p)$; 2) $(y - t)(x - c)$.

Для перевірки правильності розкладання на множники слід перемножити отримані множники. Результат має дорівнювати даному многочлену.

Розв'язування рівнянь за допомогою розкладання многочлена на множники

Розкладання многочленів на множники часто спрощує процес розв'язування рівняння.

Приклад 3. Знайти корені рівняння $5x^2 - 7x = 0$.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники винесенням спільного множника за дужки: $x(5x - 7) = 0$. Враховуючи, що добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю, матимемо: $x = 0$ або $5x - 7 = 0$, отже, $x = 0$ або $x = 1{,}4$.

Відповідь: 0; 1,4.

Зауважимо, що такий спосіб розв'язування рівняння можна застосовувати, лише коли права частина рівняння дорівнює 0. Рівняння $5x^2 - 7x = 12$, $5x^2 - 7x = 40$ тощо таким способом розв'язувати не можна.

Яке перетворення називають розкладанням многочлена на множники? ○ На прикладі многочлена $ab + ac$ поясніть, як виконують розкладання на множники за допомогою винесення спільного множника за дужки.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

23.1. (*Усно.*) Знайдіть спільний множник у виразі:

1) $5x + 5y$; 2) $7a - 7$; 3) $ab + at$; 4) $ma - pm$.

23.2. (*Усно.*) Розкладіть на множники:

1) $am + an$; 2) $12x - 12y$; 3) $tm - tc$; 4) $2c + 2m$.

23.3. Винесіть за дужки спільний множник:
1) $5a + 5c$; 2) $7x - 7u$; 3) $ap - ab$; 4) $mx + yx$.

23.4. Винесіть за дужки спільний множник:
1) $2u - 2p$; 2) $7x + 7y$; 3) $at + bt$; 4) $ma - mc$.

2

23.5. (*Усно.*) Чи правильно виконано розкладання на множники:
1) $7a + 7 = 7a$; 2) $5m - 5 = 5(m - 5)$;
3) $2a - 2 = 2(a - 1)$; 4) $7xy - 14x = 7x(y - 2)$;
5) $5mn + 5n = 5m(n + 3)$; 6) $7ab + 8cb = 15b(a + c)$?

23.6. Запишіть суму у вигляді добутку:
1) $3a + 12b$; 2) $-6a - 9x$; 3) $17a + 17$;
4) $-ab - a$; 5) $14a - 21x$; 6) $8b - 8$.

23.7. Розкладіть на множники:
1) $4m - 16a$; 2) $-12m + 18a$; 3) $14m - 14$;
4) $-xb - b$; 5) $8p + 8$; 6) $20b - 30c$.

23.8. Розкладіть на множники:
1) $5ab + 5xb$; 2) $2xy - 8y$; 3) $-5ab + 5a$;
4) $7a + 21ay$; 5) $9x^2 - 27x$; 6) $3a - 9a^2$;
7) $m^2 - ma$; 8) $12ax - 4a^2$; 9) $-18xy + 24y^2$;
10) $a^2b - ab^2$; 11) $pm - p^2m$; 12) $-x^2y^2 - xy$.

23.9. Винесіть за дужки спільний множник:
1) $7ax - 7bx$; 2) $3ab + 9a$; 3) $6xm - 8xn$;
4) $15xy + 5x$; 5) $9m^2 - 18m$; 6) $15m - 30m^2$;
7) $9xy + 6x^2$; 8) $a^2b - ab$; 9) $-p^2q - pq^2$.

23.10. Розкладіть на множники:
1) $x^3 - x^2$; 2) $a^4 + a^2$; 3) $m^3 - m^5$;
4) $a^3 + a^7$; 5) $3b^2 - 9b^3$; 6) $7a^3 + 6a$;
7) $4y^2 + 12y^4$; 8) $5m^5 + 15m^2$; 9) $-16a^4 - 20a$.

23.11. Розкладіть на множники:
1) $m^4 - m^2$; 2) $a^4 + a^5$; 3) $6a - 12a^3$;
4) $18p^3 - 12p^2$; 5) $14b^3 + 7b^4$; 6) $-25m^3 - 20m$.

23.12. Запишіть суму $6x^2y + 15x$ у вигляді добутку і знайдіть його значення, якщо $x = -0,5$, $y = 5$.

23.13. Запишіть вираз $12a^2b - 8a$ у вигляді добутку і знайдіть його значення, якщо $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$.

23.14. Винесіть за дужки спільний множник:
1) $a^4 + a^3 - a^2$; 2) $m^9 - m^2 + m^7$;
3) $b^6 + b^5 - b^9$; 4) $-y^7 - y^{12} - y^3$.

23.15. Подайте у вигляді добутку:

1) $p^7 + p^3 - p^4$; 2) $a^{10} - a^5 + a^8$;
3) $b^7 - b^5 - b^2$; 4) $-m^8 - m^2 - m^4$.

23.16. Обчисліть зручним способом:

1) $132 \cdot 27 + 132 \cdot 73$;
2) $119 \cdot 37 - 19 \cdot 37$.

23.17. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 2x = 0$; 2) $x^2 + 4x = 0$.

23.18. Знайдіть корені рівняння:

1) $x^2 + 3x = 0$; 2) $x^2 - 7x = 0$.

3

23.19. Розкладіть многочлен на множники:

1) $4a^3 + 2a^2 - 8a$; 2) $9b^3 - 3b^2 - 27b^5$;
3) $16m^2 - 24m^6 - 32m^3$; 4) $-5b^3 - 20b^2 - 25b^5$.

23.20. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $5c^8 - 5c^7 + 10c^4$; 2) $9m^4 + 27m^3 - 81m$;
3) $8p^7 - 4p^5 + 10p^3$; 4) $21b - 28b^4 - 14b^3$.

23.21. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $7m^4 - 21m^2n^2 + 14m^3$; 2) $12a^2b - 18ab^2 + 30ab^3$;
3) $8x^2y^2 - 4x^3y^5 + 12x^4y^3$; 4) $-5p^4q^2 - 10p^2q^4 + 15p^3q^3$.

23.22. Розкладіть многочлен на множники:

1) $12a - 6a^2x^2 - 9a^3$; 2) $12b^2y - 18b^3 - 30b^4y$;
3) $16bx^2 - 8b^2x^3 + 24b^3x$; 4) $60m^4n^3 - 45m^2n^4 + 30m^3n^5$.

23.23. Обчисліть зручним способом:

1) $843 \cdot 743 - 743^2$;
2) $1103^2 - 1103 \cdot 100 - 1103 \cdot 3$.

23.24. Знайдіть значення виразу:

1) $4{,}23a - a^2$, якщо $a = 5{,}23$;
2) $x^2y + x^3$, якщо $x = 2{,}51$, $y = -2{,}51$;
3) $am^5 - m^6$, якщо $m = -1$, $a = -5$;
4) $-xy - x^2$, якщо $x = 2{,}7$, $y = 7{,}3$.

23.25. Знайдіть значення виразу:

1) $9{,}11a + a^2$, якщо $a = -10{,}11$;
2) $5ax^2 + 5a^2x$, якщо $a = \frac{2}{5}$, $x = \frac{3}{5}$.

23.26. Розкладіть многочлен на множники:

1) $2p(x - y) + q(x - y)$; 2) $a(x + y) - (x + y)$;
3) $(a - 7) - b(a - 7)$; 4) $5(a + 1) + (a + 1)^2$;
5) $(x + 2)^2 - x(x + 2)$; 6) $-5m(m - 2) + 4(m - 2)^2$.

23.27. Подайте вираз у вигляді добутку:
1) $a(x-y)+b(y-x)$; 2) $p(b-5)-n(5-b)$;
3) $7x(2b-3)+5y(3-2b)$; 4) $(x-y)^2-a(y-x)$;
5) $5(x-3)^2-(3-x)$;
6) $(a+1)(2b-3)-(a+3)(3-2b)$.

23.28. Розкладіть на множники:
1) $3x(b-2)+y(b-2)$; 2) $(m^2-3)-x(m^2-3)$;
3) $a(b-9)+c(9-b)$; 4) $7(a+2)+(a+2)^2$;
5) $(c-m)^2-5(m-c)$; 6) $-(x+2y)-5(x+2y)^2$.

23.29. Знайдіть корені рівняння:
1) $4x^2-x=0$; 2) $7x^2+28x=0$;
3) $\frac{1}{9}x^2+x=0$; 4) $\frac{2}{11}x^2-\frac{3}{11}x=0$.

23.30. Розв’яжіть рівняння:
1) $12x^2+x=0$; 2) $0{,}2x^2-2x=0$;
3) $\frac{1}{14}x^2-x=0$; 4) $1\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x=0$.

23.31. Розв’яжіть рівняння:
1) $x(3x+2)-5(3x+2)=0$; 2) $2x(x-2)-5(2-x)=0$.

23.32. Розв’яжіть рівняння:
1) $x(4x+5)-7(4x+5)=0$; 2) $7(x-3)-2x(3-x)=0$.

23.33. Доведіть, що значення виразу:
1) 17^3+17^2 кратне числу 18;
2) $9^{14}-81^6$ кратне числу 80.

23.34. Доведіть, що значення виразу:
1) 39^9-39^8 ділиться на 38;
2) 49^5-7^8 ділиться на 48.

4

23.35. Винесіть за дужки спільний множник:
1) $(5m-10)^2$; 2) $(18a+27b)^2$.

23.36. Знайдіть корені рівняння:
1) $x(x-3)=7x-21$; 2) $2x(x-5)=20-4x$.

23.37. Розв’яжіть рівняння:
1) $x(x-2)=4x-8$; 2) $3x(x-4)=28-7x$.

23.38. Доведіть, що число:
1) 10^4+5^3 ділиться на 9;
2) $4^{15}-4^{14}+4^{13}$ ділиться на 13;
3) $27^3-3^7+9^3$ ділиться на 25;
4) $21^3+14^3-7^3$ ділиться на 34.

Вправи для повторення

23.39. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $-3x^2 + 7x^2 - 4x^2 + 3x^2$, якщо $x = 0{,}1$;
2) $8m + 5n - 7m + 15n$, якщо $m = 7$, $n = -1$.

23.40. Запишіть замість «зірочок» такі коефіцієнти одночленів, щоб рівність перетворилася на тотожність:

1) $2m^2 - 4mn + n^2 + (*m^2 - *mn - *n^2) = 3m^2 - 9mn - 5n^2$;
2) $7x^2 - 10y^2 - xy - (*x^2 - *xy + *y^2) = -x^2 + 3y^2 + xy$.

23.41. Довжина прямокутника втричі більша за його ширину. Якщо довжину прямокутника зменшити на 5 см, то його площа зменшиться на 40 см^2. Знайдіть довжину й ширину прямокутника.

Життєва математика

23.42. Ширина проїзної частини 16 м. Швидкість руху Марічки 1,5 м/с. Чи встигне вона перейти пішохідний перехід на зелений сигнал світлофора, який триває 25 с? Чи встигне Марічка перевести через проїзну частину бабусю, швидкість якої 0,8 м/с?

Цікаві задачі — поміркуй одначе

23.43. Відомо, що $a < b < c$. Чи можуть одночасно справджуватися нерівності $|a| > |c|$ і $|b| < |c|$?

§ 24. Множення многочлена на многочлен

Правило множення многочлена на многочлен

Помножимо многочлен $a + b$ на многочлен $x + y$. Позначимо многочлен $x + y$ буквою m. Маємо:

$$(a + b)(x + y) = (a + b)m = am + bm.$$

У виразі $am + bm$ підставимо замість m многочлен $x + y$ і знову скористаємося правилом множення одночлена на многочлен:

$$am + bm = a(x + y) + b(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Отже,

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Многочлен $ax + ay + bx + by$ є сумою всіх одночленів, які одержано множенням кожного члена многочлена $a + b$ на кожний член многочлена $x + y$.

Приходимо до *правила множення многочлена на многочлен*.

Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого многочлена й одержані добутки додати.

Процес множення многочлена на многочлен можна подати схематично:

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; 1 \quad\;\; 2 \quad\;\; 3 \quad\;\; 4$$

Застосування правила множення многочлена на многочлен до розв'язування вправ

Результатом множення многочлена на многочлен є многочлен. Якщо перший із співмножників добутку містить m членів, а другий – n членів, то, перемноживши їх, одержимо многочлен, що міститиме mn членів, а після зведення подібних доданків ця кількість може зменшитися.

Приклад 1. Виконати множення $(2x - y)(4x - 3xy + 2y)$.

Розв'язання. $(2x - y)(4x - 3xy + 2y) =$
$= 2x \cdot 4x - 2x \cdot 3xy + 2x \cdot 2y - y \cdot 4x + y \cdot 3xy - y \cdot 2y =$
$= 8x^2 - 6x^2y + \underline{4xy} - \underline{4xy} + 3xy^2 - 2y^2 =$
$= 8x^2 - 6x^2y + 3xy^2 - 2y^2.$

Відповідь: $8x^2 - 6x^2y + 3xy^2 - 2y^2$.

Приклад 2. Спростити вираз $(2x - 7)(x - 3) - 2x(x + 4)$.

Розв'язання. $(2x - 7)(x - 3) - 2x(x + 4) =$
$= 2x^2 - \underline{6x} - \underline{7x} + 21 - 2x^2 - \underline{\underline{8x}} = -21x + 21.$

Відповідь: $-21x + 21$.

Приклад 3. Довести, що значення виразу

$$n(n - 3) - (n - 2)(n - 3) + 8$$

є парним числом для всіх натуральних значень n.

Доведення. На першому етапі виконаємо множення многочленів $(n - 2)(n - 3)$ і запишемо його в дужках. Маємо:

$$n^2 - 3n - (n^2 - 2n - 3n + 6) + 8.$$

Розкриємо дужки, перед якими стоїть знак «мінус». Отримаємо:

$$n^2 - 3n - n^2 + 2n + 3n - 6 + 8 = 2n + 2 = 2(n + 1).$$

Якщо n – натуральне число, то $n + 1$ – також натуральне число. Тому значення виразу $2(n + 1)$ є парним числом для будь-якого натурального значення n. Тому і значення виразу $n(n - 3) - (n - 2)(n - 3) + 8$ є парним числом для всіх натуральних значень n. Твердження задачі доведено. ■

Якщо потрібно перемножити більше ніж два многочлени, то спочатку перемножують деякі два з них, потім отриманий результат множать на третій многочлен і так само далі.

Приклад 4. Виконати множення $(x - 2)(x + 3)(x + 1)$.

Розв'язання. Спочатку перемножимо перший і другий многочлени та отриманий результат помножимо на третій многочлен:

$(x - 2)(x + 3)(x + 1) = (x^2 + \underline{3x} - \underline{2x} - 6)(x + 1) =$
$= (x^2 + x - 6)(x + 1) = x^3 + \underline{x^2} + \underline{x^2} + \underline{\underline{x}} - \underline{\underline{6x}} - 6 =$
$= x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$

Відповідь: $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Сформулюйте правило множення многочлена на многочлен. ○ Як перемножити більше ніж два многочлени?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

24.1. (*Усно.*) Знайдіть добуток:
1) $(x + y)(a + t)$; 2) $(a - 2)(b + 1)$;
3) $(7 - p)(b - c)$; 4) $(1 - m)(2 - d)$.

24.2. Виконайте множення:
1) $(a - b)(x + m)$; 2) $(c + n)(a + y)$;
3) $(p - t)(c - y)$; 4) $(a + 3)(b - 2)$.

24.3. Перемножте двочлени:
1) $(c - 7)(x + 1)$; 2) $(a + b)(p + y)$;
3) $(b + 2)(y - 4)$; 4) $(c - b)(a - x)$.

24.4. Спростіть вираз:
1) $(a + 3)(a + 2)$; 2) $(y - 2)(y + 4)$; 3) $(2 - p)(p + 1)$;
4) $(b - 5)(2b + 1)$; 5) $(3a - 4)(2a + 1)$; 6) $(5y - 3)(1 - 2y)$.

24.5. Спростіть вираз:
1) $(y + 2)(y - 3)$; 2) $(a - 3)(a - 2)$; 3) $(4 - p)(p + 3)$;
4) $(5a - 2)(a + 3)$; 5) $(4b - 3)(2b - 1)$; 6) $(7m - 2)(1 + 2m)$.

24.6. Подайте вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:

1) $(2 + 4x)(2y - 1)$;
2) $(x^2 + a)(x - a^2)$;
3) $(4p - 2m)(3p + 5m)$;
4) $(2x^2 - 1)(3x + 1)$;
5) $(7x^2 - 4x)(3x - 2)$;
6) $(b - 2)(3b^3 - 4b^2)$;
7) $(m^2 - 2m)(3m - 7m^2)$;
8) $(n^3 - 2n^2)(n + 7)$.

24.7. Спростіть вираз:

1) $(3m^2 - p)(m^2 + p)$;
2) $(5a^2 + b)(b^2 - 4a^2)$;
3) $(12a^2 - 3)(5a - 7a^2)$;
4) $(2a^3 - 3a^2)(a + 5)$.

24.8. Виконайте множення:

1) $(m - n)(a + b - 1)$;
2) $(3 - a)(p + 5 - m)$;
3) $(a + x - 3)(n + 2)$;
4) $(c - d - 7)(x + y)$.

24.9. Перетворіть вираз на многочлен:

1) $(a + b)(m - 2 + p)$;
2) $(5 - x)(m - n - p)$;
3) $(x + y - 2)(a - m)$;
4) $(p + q + 3)(-a - x)$.

24.10. Виконайте дії:

1) $(2x + 7)(2x - 4) + 28$;
2) $5m^2 + (3 - 5m)(m + 2)$;
3) $(a + 7)(a - 2) - a(a + 5)$;
4) $(2b + 1)(3b - 1) - (6b^2 - 1)$.

24.11. Спростіть вираз:

1) $(2p - 1)(3p + 5) - 6p^2$;
2) $12 + (3m - 2)(5m + 6)$;
3) $(m + 3)(m - 5) - m(m - 2)$;
4) $(3a - 2)(4a + 1) - (12a^2 - 2)$.

24.12. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду і знайдіть його значення:

1) $(2a - 3)(3a + 5) - 6a^2$, якщо $a = 13{,}5$;
2) $(5x - 1)(1 - 2x) - 7x$, якщо $x = -2$.

24.13. Спростіть вираз і обчисліть його значення:

1) $(7x + 3)(2x - 1) - 14x^2$, якщо $x = -8$;
2) $(2a + 4)(1 - 3a) + 10a$, якщо $a = -1$.

24.14. Виконайте дії:

1) $x(x - 5) + (x + 4)(x + 2)$;
2) $(m + 3)(m - 4) - m(m - 1) + 5$;
3) $(a + 3)a - (a + 1) + (4 - a)(4 + a)$;
4) $(y + 2)(y - 3) - 2y(1 - y)$.

24.15. Спростіть вираз:

1) $(5x - 1)(4x + 7) - 4x(5x - 8)$;
2) $(a + 3)(a - 2) - a(a + 9) + 6$;
3) $2x(3x - 1) + (x - 9)(5x - 6)$;
4) $(2x + 3)(5x - 4) - 2x(x - 3) - 13(x - 1)$.

24.16. Розв'яжіть рівняння:
1) $(x - 1)(x + 2) - x^2 = -8$; 2) $(3x + 1)(5 - 2x) + 6x^2 = 5$.

24.17. Розв'яжіть рівняння:
1) $(x + 3)(2x - 1) - 2x^2 = 7$;
2) $10x^2 + (5x - 1)(4 - 2x) = -4$.

3

24.18. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:
1) $(a^2 + ab - b^2)(a - b)$; 2) $(x^2 - xy - y^2)(x + y)$;
3) $(m - n)(-m^2 - 3mn + n^2)$; 4) $(p - 2)(p^2 + 3p - 4)$;
5) $(9 - 4m - m^2)(m - 2)$; 6) $(y^2 - 3y - 7)(4y - 2)$.

24.19. Виконайте множення та спростіть одержаний вираз:
1) $(a + b)(-a^2 + ab - b^2)$; 2) $(x - y)(-x^2 - xy + y^2)$;
3) $(7a^2 + a - 1)(a + 1)$; 4) $(2m^2 - 3m - 2)(m + 5)$.

24.20. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:
1) $(3m + 2n)(9m^2 - 6mn + 4n^2)$;
2) $(4x^2 + 10xy + 25y^2)(2x - 5y)$;
3) $(-x^2 + 3xa - a^2)(x + 2a)$;
4) $(3m - x)(5mx - m^2 + x^2)$.

24.21. Подайте добуток у вигляді многочлена:
1) $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$; 2) $(9a^2 - 2ab - b^2)(3a + 2b)$.

24.22. Виконайте дії:
1) $9m^2 - (3m - 2)(3m + 7)$;
2) $18y - (3y + 1)(6y + 4)$;
3) $(a + 4)a - (a + 2)(a - 2)$;
4) $(b + 7)(b + 1) - (b + 8)(b - 1)$.

24.23. Спростіть вираз:
1) $8x - (x + 5)(x + 3)$;
2) $a(a + 8) - (a + 2)(a - 5)$;
3) $12x^2 + 5 - (4x + 7)(3x - 1)$;
4) $(x + 1)(x - 5) - (x + 3)(x - 7)$.

24.24. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:
1) $a^2(a - 2)(a + 5)$; 2) $-5m^2(m - 1)(2 - m)$;
3) $-4x^3(2x - 3)(x - x^2)$; 4) $0{,}2b^2(5b + 10)(b^2 - 2)$.

24.25. Розкрийте дужки і спростіть одержаний вираз:
1) $m^2(m - 4)(m + 2)$; 2) $-a^2(2a - 3)(3a + 7)$;
3) $-5b^3(2b + b^2)(b - 1)$; 4) $0{,}5x^2(2x - 6)(x^2 + x)$.

24.26. Доведіть тотожність:
1) $(m - 3)(m + 7) - 10 = (m + 8)(m - 4) + 1$;
2) $(2x - 1)(3x + 5) + 9x = (3x - 1)(2x + 5) + 3x$.

24.27. Доведіть, що для кожного значення змінної a:
1) значення виразу $(a - 8)(a + 3) - (a - 7)(a + 2)$ дорівнює -10;
2) значення виразу $(a^2 - 2)(a^2 + 5) - (a^2 - 4)(a^2 + 4) - 3a^2$ дорівнює 6.

24.28. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:
1) $(m - 7)(m + 1) - (m + 2)(m - 8)$;
2) $a^2(a^2 - 1) - (a^2 - 2)(a^2 + 3) + 2a^2$.

24.29. Доведіть, що для будь-якого значення змінної a значення виразу $(a + 7)(a - 3) - 4(a - 8)$ є додатним числом.

24.30. Запишіть вираз у вигляді многочлена:
1) $(x - y)^2$; 2) $(p + 2a)^2$;
3) $(4x - 3y)^2$; 4) $(7a + 2b)^2$.

24.31. Перетворіть вираз на многочлен:
1) $(2a - 3b)^2$; 2) $(4x + 5y)^2$.

24.32. Спростіть вираз і обчисліть його значення:
1) $(2x^2 - x)(3x^2 + x) - (x^2 + x)(6x^2 - 2x)$, якщо $x = -2$;
2) $(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2) - 8b^3$, якщо $a = 3$, $b = -2015$.

24.33. Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $(x - 9)(x + 9) - (x - 3)(x + 27)$, якщо $x = 1\frac{1}{8}$;
2) $8a^3 - (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$, якщо $a = -\frac{7}{8}$, $b = \frac{1}{3}$.

24.34. Знайдіть корені рівняння:
1) $4x - (x + 2)(x - 3) = (5 - x)(x + 3)$;
2) $2x(x + 1) - (x + 2)(x - 3) = x^2 + 7$.

24.35. Розв'яжіть рівняння:
1) $x(2x - 5) - x^2 = 2 - (x - 1)(2 - x)$;
2) $2x^2 - (x + 1)(x + 19) = (x + 3)(x - 2) + 8$.

24.36. Замість «зірочки» запишіть такі одночлени, щоб рівність стала тотожністю:
1) $(x - 1)(* + 3) = x^2 + * - *$;
2) $(y + 2)(y - *) = * + y - *$.

24.37. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу:
1) $(n + 2)(n + 3) - n(n - 1)$ є кратним числу 6;
2) $(n - 5)(n + 8) + (n + 1)(2n - 5) + 46$ при діленні на 3 дає в остачі 1.

24.38. Знайдіть три послідовних натуральних числа, якщо квадрат меншого з них на 44 менший від добутку двох інших.

24.39. Дано два добутки $27 \cdot 18$ і $12 \cdot 42$. На яке одне й те саме число потрібно зменшити кожен із чотирьох множників, щоб значення нових добутків стали між собою рівними?

24.40. Дано два добутки $22 \cdot 15$ і $27 \cdot 12$. На яке одне й те саме число потрібно збільшити кожен із чотирьох множників, щоб значення нових добутків стали між собою рівними?

4

24.41. Виконайте множення:
1) $(a^2 - 2a + 1)(a^2 + 3a - 7)$;
2) $(7 - 2b + 3b^2)(2b^2 - 2b - 1)$.

24.42. Виконайте множення:
1) $(x^2 - x - 1)(x^2 + 3x + 5)$; 2) $(7 - a - 2a^2)(a^2 + 3a - 1)$.

24.43. Знайдіть чотири послідовних цілих числа, якщо добуток двох більших з них на 78 більший за добуток двох менших.

24.44. Знайдіть чотири послідовних натуральних числа, якщо добуток двох менших з них на 102 менший від добутку двох більших.

24.45. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:
1) $(a + 2)(a - 1)(a + 3)$; 2) $(a - 4)(a - 7)(a + 1)$.

24.46. Виконайте множення:
1) $(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$;
2) $(b - 1)(b^4 + b^3 + b^2 + b + 1)$.

24.47. Периметр прямокутника дорівнює 60 см. Якщо його довжину збільшити на 1 см, а ширину зменшити на 3 см, то його площа зменшиться на 45 см^2. Знайдіть довжину й ширину цього прямокутника.

Вправи для повторення

24.48. Швидкість автомобіля — 70 км/год, а мотоцикла — 50 км/год. Шлях від села до міста мотоцикл долає на 2 год довше, ніж автомобіль. Знайдіть відстань від села до міста.

24.49. Знайдіть додатне число, яке після піднесення до квадрата:
1) збільшується в 4 рази; 2) зменшується в 5 разів.

24.50. У першій каністрі було втричі більше бензину, ніж у другій. Коли з першої каністри перелили 2 л у другу, виявилося, що об’єм бензину другої каністри становив $\frac{5}{7}$ від об’єму першої. Скільки бензину було в кожній каністрі спочатку?

24.51. Подайте вираз у вигляді різниці двох многочленів, один з яких містить змінну x, а другий її не містить:
1) $(5x^2 - 8b + a) - (b^2 - 5x + 1) - (2b - x^2 + 7x)$;
2) $(8mx^2 + 7mn^2 - p) - (x^2 + mx^2 + 2p) - 17x$.

Життєва математика

24.52. Заробітна плата Тетяни пропорційна кількості відпрацьованих годин. За місяць вона відпрацювала 170 год і отримала 8500 грн. Скільки годин має відпрацювати Тетяна в наступному місяці, щоб отримати 9250 грн?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

24.53. Обчисліть $2\frac{124}{125} \cdot 4\frac{2}{129} + 3\frac{1}{125} \cdot 5\frac{2}{129} - \frac{12}{129}$.

§ 25. Розкладання многочлена на множники способом групування

Спосіб групування

У § 23 ми ознайомилися з розкладанням многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки. Існують й інші способи розкладання многочленів на множники, наприклад, ***спосіб групування***.

Приклад 1. Розкласти на множники многочлен
$$ab - 5a + 2b - 10.$$

Розв'язання. У цьому випадку в усіх членів поданого многочлена немає спільного множника. Тому тут доцільно застосувати саме спосіб групування. Розіб'ємо доданки на дві групи так, *щоб доданки в кожній групі мали спільний множник*:
$$ab - 5a + 2b - 10 = (ab - 5a) + (2b - 10).$$
З кожної групи винесемо спільний множник за дужки:
$$(ab - 5a) + (2b - 10) = a(b - 5) + 2(b - 5).$$
Тепер одержаний для обох груп спільний множник $b - 5$ винесемо за дужки:
$$a\underline{(b - 5)} + 2\underline{(b - 5)} = (b - 5)(a + 2).$$
Отже, $ab - 5a + 2b - 10 = (b - 5)(a + 2)$.

Згрупувати доданки даного многочлена можна було й у інший спосіб.

А саме: $ab - 5a + 2b - 10 = (ab + 2b) + (-5a - 10) = b\underline{(a + 2)} -$ $- 5\underline{(a + 2)} = (a + 2)(b - 5)$.

Відповідь: $(b - 5)(a + 2)$.

Дійшли висновку, що для розкладання многочлена на множники способом групування варто виконувати дії в такій послідовності:

1) **розбити многочлен на групи доданків, кожна з яких містить спільний множник;**
2) **з кожної групи винести спільний множник за дужки;**
3) **спільний для всіх груп множник, що утворився, винести за дужки.**

Для перевірки правильності розкладання слід перемножити одержані множники. Добуток цих множників має дорівнювати даному многочлену.

Застосування способу групування для розкладання на множники многочленів, що містять шість або три доданки

Деякі многочлени, що містять шість або три доданки (члени многочлена), можна розкласти на множники за допомогою способу групування.

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен

$$2a + 2b - m + am + bm - 2.$$

Розв'язання. 1-й спосіб. Згрупуємо члени многочлена у три групи по два доданки так, щоб доданки в кожній групі мали спільний множник. Матимемо:

$2a + 2b - m + am + bm - 2 = (2a + am) + (2b + bm) + (-m - 2) =$ $= a\underline{(2 + m)} + b\underline{(2 + m)} - 1\underline{(2 + m)} = (2 + m)(a + b - 1)$.

2-й спосіб. Згрупуємо тепер члени многочлена у дві групи по три доданки так, щоб доданки в кожній групі мали спільний множник. Матимемо:

$2a + 2b - m + am + bm - 2 = (2a + 2b - 2) + (am + bm - m) =$ $= 2\underline{(a + b - 1)} + m\underline{(a + b - 1)} = (a + b - 1)(2 + m)$.

Відповідь: $(2 + m)(a + b - 1)$.

Приклад 3. Розкласти на множники тричлен $x^2 - 6x + 8$.

Розв'язання. Враховуючи, що $-6x = -2x + (-4x)$, можемо переписати многочлен як суму чотирьох доданків, згрупувати їх і далі розкласти на множники:
$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 2x - 4x + 8 = (x^2 - 2x) + (-4x + 8) =$
$= x\underline{(x - 2)} - 4\underline{(x - 2)} = (x - 2)(x - 4)$.

Відповідь: $(x - 2)(x - 4)$.

Якби ми подали доданок $-6x$ у вигляді суми двох якихось інших доданків, то не змогли б застосувати групування й розкласти на множники. Пропонуємо переконатися в цьому самостійно. «Секрет» у тому, що саме доданки $-2x$ і $-4x$ сприяли появі спільного множника після розбиття многочлена на групи.

Яку послідовність дій застосовують для розкладання многочлена на множники способом групування?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

25.1. (*Усно.*) У многочлені $ca - 2c + 5a - 10$ назвіть групу зі спільним множником a і групу зі спільним множником 2.

25.2. Закінчіть розкладання многочлена на множники:
$xy + yt - 2x - 2t = (xy - 2x) + (yt - 2t) = x(y - 2) + t(y - 2) = ...$

25.3. Закінчіть розкладання многочлена на множники:
$ab - cd - ad + cb = (ab - ad) + (cb - cd) = a(b - d) + c(b - d) = ...$

2

25.4. Подайте вираз у вигляді добутку многочленів:
1) $a(b + c) + 3b + 3c$; 2) $p(x - y) + 7x - 7y$;
3) $m(t - 5) + t - 5$; 4) $b(m - c) + c - m$.

25.5. Розкладіть на множники:
1) $c(x - y) + 3x - 3y$; 2) $a(c + m) + 9c + 9m$;
3) $x(c + 5) + c + 5$; 4) $y(p - 3) + 3 - p$.

25.6. Розкладіть многочлен на множники:
1) $ax + ay + 6x + 6y$; 2) $5m - 5n + pm - pn$;
3) $9p + mn + 9n + mp$; 4) $ab + ac - b - c$;
5) $1 - by - y + b$; 6) $ma + 2a - 2m - 4$.

25.7. Подайте у вигляді добутку многочленів:
1) $ab + 5a + bm + 5m$; 2) $mp - b + bp - m$;
3) $am - b + m - ab$; 4) $cm - 3dm + cp - 3dp$.

25.8. Запишіть вираз $ab - ac + 2b - 2c$ у вигляді добутку та знайдіть його значення, якщо $a = -1$, $b = 5{,}7$, $c = 6{,}7$.

25.9. Запишіть вираз $5x - 5y + xt - yt$ у вигляді добутку та знайдіть його значення, якщо $x = 7{,}2$, $y = 6{,}2$, $t = -4{,}5$.

3

25.10. Подайте вираз у вигляді добутку многочленів:

1) $a^3 + a^2 + a + 1$; 2) $b^5 - b^3 - b^2 + 1$;
3) $c^4 + 3c^3 - c - 3$; 4) $a^6 - 5a^4 - 3a^2 + 15$;
5) $m^2 - mn - 8m + 8n$; 6) $ab - 9b + b^2 - 9a$;
7) $7t - ta + 7a - t^2$; 8) $xy - ty - y^2 + xt$.

25.11. Розкладіть многочлен на множники:

1) $x^2 + bx - b^2y - bxy$;
2) $a^2b + c^2 - abc - ac$;
3) $7a^3m + 14a^2 - 6bm - 3am^2b$;
4) $21x + 8tm^3 - 24m^2 - 7xtm$.

25.12. Подайте многочлен у вигляді добутку:

1) $b^2 + xb - x^2y - xby$; 2) $m^2 + 7m - bm - 7b$;
3) $4a - ax + 4x - x^2$; 4) $ma - mb - m^2 + ab$.

25.13. Обчисліть значення виразу найзручнішим способом:

1) $157 \cdot 37 + 29 \cdot 157 + 143 \cdot 42 + 24 \cdot 143$;
2) $9\frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{2} - 16 \cdot 4{,}5 + 10\frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{2} - 16$.

25.14. Знайдіть значення виразу, попередньо розклавши вираз на множники:

1) $5m^2 - 5mn - 7m + 7n$, якщо $m = 1{,}4$, $n = -5{,}17$;
2) $3a^3 - 2b^3 - 6a^2b^2 + ab$, якщо $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$.

25.15. Знайдіть значення виразу, попередньо розклавши вираз на множники:

1) $27x^3 + x^2 + 27x + 1$, якщо $x = -\frac{1}{27}$;
2) $5p + px^2 - p^2x - 5x$, якщо $p = 2{,}5$, $x = 2{,}4$.

25.16. Запишіть вираз у вигляді добутку:

1) $45x^3y^4 - 9x^5y^3 - 15x^2y^2 + 3x^4y$;
2) $2{,}1mn^2 - 2{,}8mp^2 - 2{,}7n^3 + 3{,}6np^2$.

25.17. Розкладіть на множники:

1) $8m^2c - 6m^2x - 16cx^3 + 12x^4$;
2) $1{,}2xy^3 + 1{,}6x^3y^2 - 2x^7y - 1{,}5x^5y^2$.

4

25.18. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5x + 40 = 8x$;
2) $5y^3 + 2y^2 + 5y + 2 = 0$.

25.19. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 + 7x - 7 = x$;
2) $7y^3 + y^2 + 7y + 1 = 0$.

25.20. Розкладіть на множники:
1) $at^2 - ap + t^3 - tp - bt^2 + bp$;
2) $ax^2 + ay^2 - mx^2 - my^2 + m - a$;
3) $mb - m + 7 - 7b - 7m^2 + m^3$;
4) $6ax + 3ay - az - 6bx - 3by + bz$.

25.21. Розкладіть на множники:
1) $a^2b + a + ab^2 + b + 9ab + 9$;
2) $8ax + 4bx - 4x + 10am + 5bm - 5m$.

25.22. Розкладіть на множники тричлен:
1) $x^2 + 5x + 4$; 2) $x^2 - 5x + 4$;
3) $x^2 + x - 6$; 4) $a^2 + 4ab + 3b^2$.

25.23. Розкладіть на множники:
1) $x^2 - 6x + 5$; 2) $x^2 - x - 6$;
3) $x^2 + 2x - 15$; 4) $a^2 + 5ab + 6b^2$.

Вправи для повторення

25.24. Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $0{,}8(a - 5) - 0{,}6(2 - a)$, якщо $a = -5$;
2) $\frac{4}{7}(7x - 14y) - \frac{2}{9}(18x - 27y)$, якщо $x = 2024$, $y = -\frac{1}{2}$.

25.25. Знайдіть корінь рівняння:
1) $6x(x - 1) - 2x(3x - 5) = -8$;
2) $5(2 - x^2) - 4x(x - 1) = 3x(1 - 3x)$.

Життєва математика

25.26. Головна редакторка видавництва дала термінову роботу двом набірникам тексту. Перший набирає сторінку за 4 хв, другий – за 6 хв. У якому відношенні вони мають розподілити між собою роботу, щоб виконати її якомога швидше?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

25.27. Накресліть $\triangle ABC$, у якого $AB = 3$ см, $AC = 4$ см. Виміряйте сторону BC цього трикутника та знайдіть його периметр.

25.28. Одна сторона трикутника дорівнює 8 см, інша – 7 см. Знайдіть довжину третьої сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 20 см.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

25.29. Чи існують такі натуральні значення змінних x і y, для яких $x^5 + y^5 = 33^6$?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 5 (§§ 20–25)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Укажіть вираз, що не є многочленом.

А. $\dfrac{a}{a-5}$ **Б.** $x^2 - 2x + 7$ **В.** $-b - 19$ **Г.** $6c^2$

2. $k(n - m) = ...$

А. $kn - m$ **Б.** $n - km$ **В.** $kn + km$ **Г.** $kn - km$

3. $4c + 8 = ...$

А. $2(c + 4)$ **Б.** $4(c + 2)$ **В.** $8(c + 1)$ **Г.** $4(c - 2)$

2

4. Якому з многочленів дорівнює вираз $(x - 5)(x + 2)$?

А. $x^2 + 3x - 10$ **Б.** $x^2 - 3x - 10$
В. $x^2 + 3x + 10$ **Г.** $x^2 - 3x - 3$

5. Подайте вираз $(3m^2 - m) + (4m^2 - 5) - (7m^2 + 3)$ у вигляді многочлена стандартного вигляду.

А. $14m^2 - m - 2$ **Б.** $-m - 2$ **В.** $-m - 8$ **Г.** $8 - m$

6. Розкладіть вираз $am - an - 2m + 2n$ на множники.

А. $(m - n)(a - 2)$ **Б.** $(m - n)(a + 2)$
В. $(m + n)(a - 2)$ **Г.** $(m - a)(n - 2)$

3

7. Для якого значення x значення різниці одночлена $8x$ і многочлена $3x - 4x^2 + 2$ дорівнює значенню многочлена $3x + 4x^2 - 4$?

А. 2 **Б.** 1 **В.** –1 **Г.** 0

8. Обчисліть $297 \cdot 397 - 397^2$ найзручнішим способом.

А. 39 700 **Б.** –39 700 **В.** –29 700 **Г.** 29 700

9. Знайдіть значення виразу $(x - 5)(x + 2) - (x - 7)(x + 4)$, якщо $x = 10{,}2$.

А. 18,2 **Б.** 18 **В.** 28,2 **Г.** 7,8

10. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 7x = 2(x + 7)$.

А. -7; 2 **Б.** -7 **В.** 2 **Г.** -2; 7

11. Значення виразу $27^4 - 3^9$ є кратним числу...

А. 7 **Б.** 11 **В.** 13 **Г.** 17

12. Знайдіть найбільше із чотирьох послідовних парних чисел, якщо добуток першого і третього чисел на 44 менший від добутку двох інших.

А. 10 **Б.** 6 **В.** 18 **Г.** 14

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

13. Установіть відповідність між виразами (1–3) та многочленами, які їм тотожно дорівнюють (А–Г).

Вираз	*Многочлен*
1. $(3x^3 + x^2 - 2x) - (2x^3 - 4x^2 - 2x + 6)$	**А.** $x^3 + 5x^2$
2. $2x^2(3x - 5) - 5x(x^2 - 3x)$	**Б.** $x^3 + 5x^2 - 6$
3. $(x^2 + 6x)(x - 1)$	**В.** $x^3 + 5x^2 - 6x$
	Г. $x^3 + 5x - 6$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 20–25

1. Виконайте множення:
1) $m(a - b + 3)$; 2) $-p(x + y - 4)$.

2. Винесіть за дужки спільний множник:
1) $7a - 7b$;
2) $xm + ym$.

3. Виконайте множення:
1) $(a + 2)(x - 3)$;
2) $(b - 5)(c - m)$.

4. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:
1) $(2x^2 - x) + (3x - 5) - (x^2 - 5)$;
2) $-2xy(x^2 - 3xy + y^2)$.

5. Розкладіть многочлен на множники:
1) $9a^2 - 12ab$;
2) $7x - 7y + ax - ay$.

6. Спростіть вираз $(x + 5)(x - 2) - x(x + 3)$.

7. Розв'яжіть рівняння $(2x + 3)(3x - 7) = x(6x - 3) - 17$.

8. Розкладіть многочлен на множники:

1) $9m^3 - 3m^4 - 27m^8$; 2) $m^2 + 2n - 2m - mn$.

4 **9.** Знайдіть чотири послідовних цілих числа, добуток двох менших з яких на 90 менший від добутку двох більших.

Додаткові вправи

4 **10.** Доведіть, що сума п'яти послідовних натуральних чисел ділиться на 5.

11. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 5x = 4x - 20$.

12. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:

1) $(x^2 - 2x + 5)(x^2 + 3x - 1)$; 2) $(a + 3)(a - 5)(a - 1)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 5

До § 20

1 **1.** З даних одночленів складіть многочлен і вкажіть його степінь:

1) $5a^2$ і $4b$; 2) $-a^2$, ab і m;

3) $5c^3$ і -8; 4) $3mn^2$, $4mn$, $-5m^2n$ і -7.

2 **2.** Зведіть подібні члени многочлена:

1) $8a^2b - 7ab^2 + 5a^2b + 4b^2a$;

2) $5mn - 2mn - 8 - 3mn$;

3) $7m^3 + m^2 - 8 - m^3 + 3m^2$;

4) $2x^2y - 7xy^2 - 5xy + 3yx^2 + 7y^2x$.

3 **3.** Зведіть до стандартного вигляду многочлен

$$-\frac{1}{4}ab \cdot (-8ab^2) + 8a^2 \cdot (-1{,}5ab) + 20ab \cdot (-0{,}1ab^2) + a^2ab + 2a \cdot 6a^2b$$

і знайдіть його значення, якщо $a = 5$, $b = -\frac{1}{25}$.

4 **4.** Чи існують такі натуральні значення змінної a, за яких значення многочлена $2a^2 + 6a + 7$ є парним числом?

До § 21

2 **5.** Спростіть вираз:

1) $(3m + 5n) + (9m - 7n) - (-2n + 5m)$;

2) $(12ab - b^2) - (5ab + b^2) + (ab + 2b^2)$;

3) $(3x^2 + 2x) + (2x^2 - 3x - 4) - (17 - x^2)$;

4) $(m - n + p) + (m - p) - (m - n - p)$.

3 **6.** 1) Подайте многочлен $4x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ у вигляді суми двочленів.

2) Подайте многочлен $x^3 - 5x + 7x^2 - 9$ у вигляді різниці одночлена і тричлена.

7. Який многочлен у сумі з многочленом $2x^2 - 3x + 7$ дає:

1) 0; 2) 5;

3) $-3x + 1$; 4) $x^2 - 5x + 7$?

4 **8.** Доведіть, що сума двох послідовних непарних цілих чисел ділиться на 4.

9. Спростіть вираз

$$5xy - 8x^2y - \left(3xy - \left(4\frac{1}{4}xy^2 + 8x^2y\right) - 2{,}75xy^2\right)$$

і знайдіть його значення, якщо $x = -1$, $y = 3$.

До § 22

1 **10.** Виконайте множення:

1) $a(b + 7)$; 2) $c(2 - x)$;

3) $-a(m - 3)$; 4) $-b(a - x + y)$.

2 **11.** Перетворіть добуток на многочлен:

1) $2xa(a^2 - 3ax)$; 2) $-3mp(2m^3 - 5mp)$;

3) $4ab^2(a^2 - 2ab - b^2)$; 4) $(4m^3 - 2mn^2 - n^2)mn^2$;

5) $(-0{,}1x^3y + 0{,}2x^2y - y^3)(-5x^2y)$;

6) $-10n^3x(5nx^2 - 2n^2x + x^5)$.

3 **12.** Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $2x(x + y) - y(2x - y) - y(y + 1)$, якщо $x = -5$, $y = -10$;

2) $m^2(m^2 - 5m + 1) - 2m(m^3 - 4m^2 + m) + m^4 - 3m^3 + 2$, якщо $m = -3$.

13. За якого значення змінної значення виразу $2x(6x - 5)$ на 5 менше за відповідне значення виразу $3(4x^2 - 5)$?

4 **14.** Спростіть вираз $\frac{1}{8}x^n - \frac{5}{8}x^2(1 + x^{n-2}) + \frac{1}{2}x^3(x^{n-3} + 2)$, де $n > 3$, n – натуральне число.

15. За перший день з овочесховища продали на 3 ц більше овочів, ніж за другий, а за третій – $\frac{4}{9}$ від того, що продали за перші два дні разом. По скільки центнерів овочів продавали кожного із цих днів, якщо разом за ці дні продали 65 ц овочів?

16. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{1-\dfrac{3x}{2}}{4}+\dfrac{2-\dfrac{x}{4}}{3}=x-2.$

До § 23

17. Винесіть за дужки спільний множник:
1) $5x - 5y$; 2) $7m + 7n$; 3) $ap + ac$; 4) $bm - bk$.

18. Розкладіть на множники:
1) $7ax - 7bx$; 2) $8a + 24ac$; 3) $18p - 24p^2$;
4) $5m^3 - 10m^2$; 5) $-15a^2 - 20a^3$; 6) $a^7 - a^2 + a^5$.

19. Подайте вираз у вигляді добутку:
1) $6xy - 12x^2y + 15xy^2$;
2) $7mn^5 + 28m^2n^3 - 7m^3n^2$;
3) $a(x - 2) + 3b(x - 2) - 2(2 - x)$;
4) $8(m - 1)^2 - n(1 - m)$.

20. Розв'яжіть рівняння:
1) $x|x - 3| - 5|x - 3| = 0$; 2) $|x||x - 2| - 7|x - 2| = 0$.

21. За деякого значення x значення виразу $x^2 - 3x - 13$ дорівнює -1. Знайдіть за того самого значення x значення виразу:
1) $2x^2 - 6x - 26$; 2) $x^2(x^2 - 3x - 13) - 3x(x^2 - 3x - 13)$;
3) $3x^2 - 9x - 8$; 4) $\dfrac{5}{12}x^2 - \dfrac{5}{4}x + 3$.

До § 24

22. Виконайте множення:
1) $(m - p)(a + x)$; 2) $(2 + t)(a - 3)$;
3) $(a + b)(2 + c)$; 4) $(a - 2)(b - 3)$.

23. Подайте у вигляді многочлена:
1) $(2m - 3p)(3m + 2p)$; 2) $(2a^2 + b)(3b - 5a^2)$;
3) $(7x^2 - 2x)(3x + 1)$; 4) $(5a^3 - 4a^2)(9a^2 + 8a)$;
5) $(3a^2 + 5ba)(3b - 4a)$; 6) $(mn - n^2)(4n^3 + 2n^2m)$.

24. Спростіть вираз:
1) $(a - 8)(2a - 2) - (a + 9)(a - 3)$;
2) $(x - y)(x + 3) - (x + y)(x - 3)$;
3) $(3a - 5b)(5a + 3b) - (5a - 3b)(3a + 5b)$;
4) $(a^3 + 4m)(a^2 - 4m) - (a^2 + 4m)(a^3 - 4m)$.

25. Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 1)(2x + 6) - (2x - 2)(3x + 1) = -24$;

2) $(3x + 9)(x - 5) - (x - 7)(3x - 1) = 12 + 8x$.

4 **26.** Доведіть, що значення виразу

$2(10x - 5)(x + 0,6) + (4x^2 - 1)(2x - 5) - (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

не залежить від значення змінної.

27. Доведіть, що $(x + 1)(y + 1) - (x - 1)(y - 1) = 8$, якщо $x + y = 4$.

* **28.** Два акваріуми мають форму прямокутного паралелепіпеда. Довжина першого – на 10 см більша за його ширину. Довжина другого акваріума на 20 см більша за довжину першого, а ширина – на 10 см більша за ширину першого. Якщо обидва акваріуми заповнити водою на висоту 25 см, то води у другому буде на 37,5 л більше, ніж у першому. Знайдіть довжину та ширину першого акваріума.

До § 25

1 **29.** Закінчіть розкладання многочлена на множники:

$$ab - 7b + 3a - 21 = (ab - 7b) + (3a - 21) = \ldots$$

2 **30.** Розкладіть на множники:

1) $m(a - b) + 3a - 3b$;
2) $a(b + c) + b + c$;
3) $3a - 3c + xa - xc$;
4) $ab - ac - 4b + 4c$.

3 **31.** Подайте многочлен у вигляді добутку:

1) $12x^2c - 8x^2y - 9cy^3 + 6y^4$;

2) $1,6mn^2 - 2,4mp^2 - n^3 + 1,5np^2$.

4 **32.** Розв'яжіть рівняння $x^2 + 5x - 6 = 0$, застосувавши розкладання многочлена на множники.

Головне в темі 5

МНОГОЧЛЕН

Многочленом називають суму одночленів.

Подібні доданки многочлена називають ***подібними членами многочлена***, а зведення подібних доданків у многочлені – ***зведенням подібних членів многочлена***.

Многочлен, що є сумою одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних доданків, називають ***многочленом стандартного вигляду***.

ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

Додавання і віднімання многочленів виконують, використовуючи правила розкриття дужок і зведення подібних доданків.

МНОЖЕННЯ ОДНОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно помножити цей одночлен на кожний член многочлена і знайдені добутки додати.

РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

Розкласти многочлен на множники означає подати його у вигляді добутку одночлена на многочлен або добутку кількох многочленів так, щоб цей добуток був тотожно рівним даному многочлену.

МНОЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член одного многочлена помножити на кожний член іншого многочлена та одержані добутки додати.

ТЕМА 6

ТРИКУТНИКИ. ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

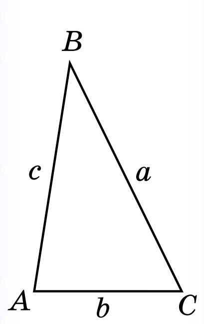
- **пригадаєте** поняття трикутника і його основних елементів; види трикутників;
- **дізнаєтеся** про висоту, медіану та бісектрису трикутника;
- **навчитеся** доводити рівність трикутників на основі ознак; застосовувати властивості рівнобедреного трикутника до розв’язування задач.

§ 26. Трикутник і його елементи

Трикутник

Позначимо три точки A, B і C, які не лежать на одній прямій, і сполучимо їх відрізками (див. мал.).

Трикутником **називають фігуру, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки.**



Точки A, B і C – *вершини трикутника*. Відрізки AB, BC і CA – *сторони трикутника*. Кути BAC, ABC і BCA – *кути трикутника*.

Трикутник ABC записують: $\triangle ABC$ та читають: «Трикутник ABC». Назва трикутника складається з букв, якими позначають його вершини, і записувати їх можна в будь-якому порядку: $\triangle ACB$, $\triangle BCA$, $\triangle CAB$ тощо.

Якщо з вершини трикутника не проведено жодних інших ліній, окрім його сторін, то кути трикутника можна називати однією буквою – їхньою вершиною: $\angle A$, $\angle B$ і $\angle C$. Сторони трикутника також можна позначати малими буквами латинського алфавіту a, b і c відповідно до позначення протилежних їм вершин.

! Кожний трикутник має три вершини, три сторони і три кути, які ще називають *елементами трикутника*.

Периметр трикутника

Суму довжин усіх сторін трикутника називають його ***периметром***. Периметр позначають буквою P, наприклад, $P_{\triangle ABC}$ – периметр трикутника ABC:

$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + CA.$$

Приклад. Одна зі сторін трикутника на 7 см менша від другої та вдвічі менша від третьої. Знайти сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 47 см.

Розв'язання. 1) Нехай довжина найменшої сторони трикутника дорівнює x см, тоді довжина другої – $(x + 7)$ см, а третьої – $2x$ см.

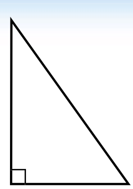
2) Оскільки $P_{\triangle} = 47$ см, маємо рівняння: $x + (x + 7) + 2x = 47$. Розв'язавши це рівняння, отримаємо $x = 10$ (см).

3) Отже, довжина однієї сторони трикутника дорівнює 10 см, другої – 17 см, третьої – 20 см.

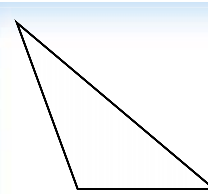
Відповідь: 10 см, 17 см, 20 см.

Класифікація трикутників за кутами

Гострокутний трикутник – трикутник, у якого всі кути гострі.



Прямокутний трикутник – трикутник, у якого один кут прямий.



Тупокутний трикутник – трикутник, у якого один кут тупий.

А ще раніше...

Трикутник уважався найпростішою замкненою прямолінійною фігурою. Властивості цієї фігури людство вивчало та використовувало у практичній діяльності з давніх-давен. Так, наприклад, у будівництві здавна використовують властивість жорсткості трикутника для укріплення різноманітних будівель, конструкцій тощо.

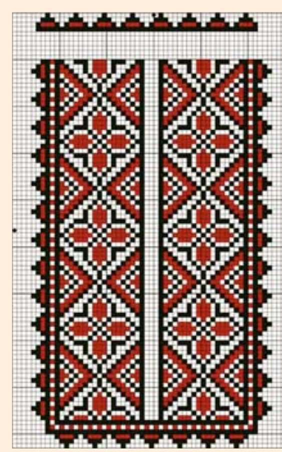
Зображення трикутників і задач, пов'язаних із трикутниками, дослідники знаходили в єгипетських папірусах, стародавніх індійських книгах, інших документах давнини.

У Давній Греції ще в VII ст. до н. е. були відомі деякі важливі факти, пов'язані з трикутником. Так, наприклад, Фалес довів, що трикутник можна однозначно задати стороною і двома прилеглими до неї кутами.

Найповніше вчення про трикутники виклав Евклід у першій книжці «Начал».

* * *

В Україні трикутник – один з десяти головних символів, які наші предки споконвіку вишивали на своїх сорочках.



У давніх віруваннях трикутник – це символ брами у вічне життя та єдності трьох світів: земного, підземного й небесного. Це й три рівні буття, тривимірність світу. А ще – це три стихії: вода, вогонь і повітря.

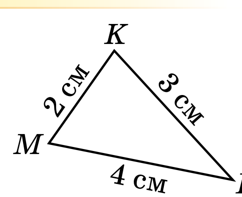
Трикутник вершиною догори – це чоловічий символ, знак вогню, духу, а вершиною донизу символізує жіноче начало, матерію. Трикутники, що торкаються вершинами один до одного, ніби «пісковий годинник», символізують Світ та Антисвіт. А місце їхнього дотику може бути своєрідним місцем переходу з одного світу до іншого.

Яку фігуру називають трикутником? ○ Що називають вершинами трикутника, сторонами трикутника, кутами трикутника? ○ Що називають периметром трикутника? ○ Які види трикутників розрізняють залежно від кутів?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

26.1. (*Усно.*) За малюнком 26.1 знайдіть периметр трикутника KLM.

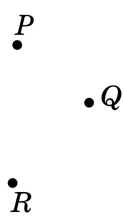


Мал. 26.1

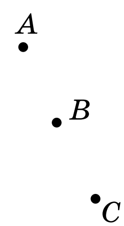
26.2. Накресліть $\triangle PKL$. Запишіть вершини, сторони та кути цього трикутника.

26.3. Накресліть трикутник і позначте його вершини буквами A, M і N. Назвіть сторони й кути цього трикутника. Виконайте відповідні записи.

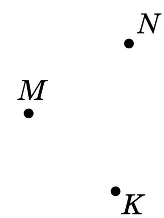
26.4. (*Усно.*) На якому з малюнків 26.2–26.4 три точки можуть бути вершинами трикутника, а на якому – ні?



Мал. 26.2



Мал. 26.3



Мал. 26.4

2

26.5. Знайдіть периметр трикутника зі сторонами 25 мм, 3,2 см, 0,4 дм.

26.6. Знайдіть периметр трикутника, сторони якого дорівнюють 4,3 см, 29 мм, 0,3 дм.

26.7. Накресліть гострокутний $\triangle ABC$. Виміряйте його сторони та знайдіть його периметр.

26.8. Накресліть тупокутний трикутник, вершинами якого є точки P, L і K. Виміряйте сторони цього трикутника та знайдіть його периметр.

3

26.9. Одна сторона трикутника втричі менша від другої та на 7 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 32 см.

26.10. Одна сторона трикутника на 2 дм більша за другу і в 1,5 раза менша від третьої сторони. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 40 дм.

26.11. Використовуючи лінійку з поділками та транспортир, побудуйте $\triangle ABC$, у якого $\angle A = 60°$, $AB = 3$ см, $AC = 7$ см.

26.12. Побудуйте за допомогою лінійки з поділками та косинця $\triangle PKL$, у якого $\angle P = 90°$, $PK = 3$ см, $PL = 4$ см. Як називають такий трикутник? Виміряйте довжину сторони KL.

26.13. Знайдіть сторони трикутника, якщо вони пропорційні числам 3, 4 і 6, а периметр трикутника дорівнює 52 дм.

26.14. Периметр трикутника дорівнює 72 см. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3 і 4.

4

26.15. Укажіть, скількома способами можна назвати трикутник з вершинами в точках M, N і K. Запишіть усі ці назви.

26.16. Сума першої та другої сторін трикутника дорівнює 11 см, другої та третьої – 14 см, а першої та третьої – 13 см. Знайдіть периметр трикутника.

Вправи для повторення

26.17. Накресліть відрізок AB завдовжки 2 см 7 мм. Накресліть відрізок PL, що дорівнює відрізку AB.

26.18. Який кут утворює бісектриса кута 78° з променем, що є доповняльним до однієї з його сторін?

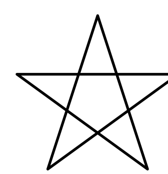
Життєва математика

26.19. Відомо, що 1 га лісу очищує за рік 18 млн м³ повітря. Скільки м³ повітря очистить за рік ліс площею:

1) 3 га; 2) 2 км²?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

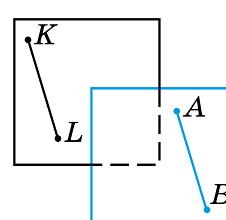
26.20. Скільки чотирикутників у п'ятикутній зірці?



§ 27. Рівність геометричних фігур

Загальне означення рівних фігур

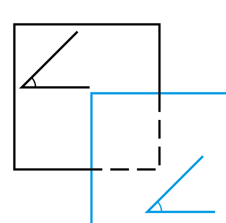
Два відрізки називають *рівними між собою*, якщо вони мають однакову довжину; два кути називають *рівними між собою*, якщо вони мають однакову градусну міру.



Мал. 27.1

Розглянемо два рівних відрізки AB та KL, довжина кожного з яких по 2 см (мал. 27.1). Уявімо, наприклад, що відрізок AB накреслено на прозорій плівці. Переміщуючи плівку, відрізок AB можна сумістити з відрізком KL. Отже, рівні відрізки AB і KL можна *сумістити накладанням*.

Так само можна сумістити накладанням два рівних кути (мал. 27.2).


Мал. 27.2

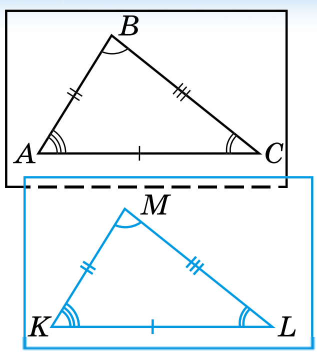
Таким чином, приходимо до загального означення рівних фігур:

геометричні фігури називають *рівними між собою*, якщо їх можна сумістити накладанням.

Зауважимо, що це означення не суперечить означенням рівних відрізків і рівних кутів, які ви вже знаєте.

Рівність трикутників

Тепер розглянемо питання рівності трикутників.



Трикутник ABC рівний трикутнику KML, бо кожен з них можна накласти на інший так, що вони збігатимуться.

Усі елементи трикутника ABC рівні елементам трикутника KML:

$$AB = KM,$$
$$AC = KL,$$
$$BC = ML,$$
$$\angle A = \angle K,$$
$$\angle B = \angle M,$$
$$\angle C = \angle L.$$

Записують:

$\triangle ABC = \triangle KML$.

Ті сторони й ті кути, які суміщаються при накладанні трикутників, будемо називати *відповідними сторонами* і *відповідними кутами*.

Має значення порядок запису вершин рівних між собою трикутників, який установлюється рівністю відповідних кутів цих трикутників.

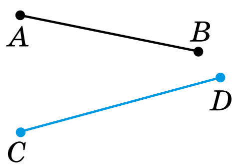
Запис $\triangle ABC = \triangle KLM$ означає, що $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle L$, $\angle C = \angle M$, а запис $\triangle ABC = \triangle LKM$ – інше: $\angle A = \angle L$, $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle M$.

- Які геометричні фігури називають рівними?
- Рівність яких елементів трикутника можна встановити з огляду на те, що $\triangle ABC = \triangle KLM$?

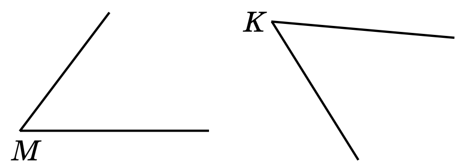
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

27.1. 1) Виміряйте довжини відрізків AB і CD на малюнку 27.3 та встановіть, чи рівні вони.

2) Виміряйте кути M і K на малюнку 27.4 та встановіть, чи рівні вони.



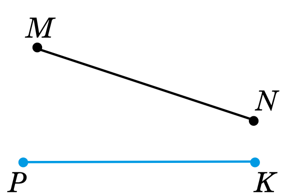
Мал. 27.3



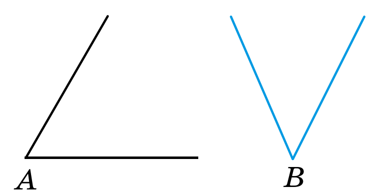
Мал. 27.4

27.2. 1) Виміряйте довжини відрізків MN і PK на малюнку 27.5 та встановіть, чи рівні вони.

2) Виміряйте кути A і B на малюнку 27.6 та встановіть, чи рівні вони.



Мал. 27.5



Мал. 27.6

27.3. (*Усно.*) 1) Чи можна сумістити накладанням відрізки AK і MF, якщо $AK = 1{,}7$ см, а $MF = 17$ мм?

2) Чи можна сумістити накладанням кути, градусні міри яких дорівнюють $27°$ і $31°$?

27.4. Дано: $\triangle ABC = \triangle MPL$. Доповніть записи:

1) $\angle A = \ldots$; 2) $\angle B = \ldots$;

3) $\angle C = \ldots$.

27.5. Дано: $\triangle MPT = \triangle DCK$. Доповніть записи:

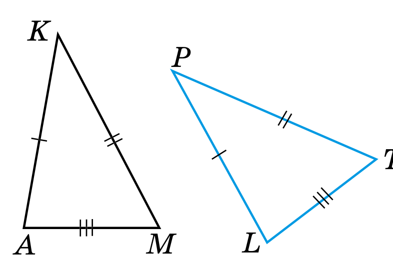
1) $MP = \ldots$; 2) $PT = \ldots$;

3) $MT = \ldots$.

27.6. На малюнку 27.7 зображено рівні трикутники. Доповніть записи рівності трикутників:

1) $\triangle AKM = \ldots$;

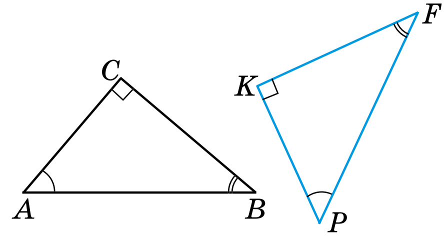
2) $\triangle MAK = \ldots$.



Мал. 27.7

27.7. На малюнку 27.8 зображено рівні трикутники. Доповніть записи рівності трикутників:

1) $\triangle ABC = \ldots$;
2) $\triangle CAB = \ldots$.



Мал. 27.8

27.8. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle KLP$, $AB = 6$ см, $LP = 8$ см, $AC = 10$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутників ABC і KLP.

27.9. Відомо, що $\triangle PMT = \triangle DCF$, $\angle P = 41°$, $\angle C = 92°$, $\angle T = 47°$. Знайдіть невідомі кути трикутників PMT і DCF.

3

27.10. 1) Периметри двох трикутників рівні. Чи можна стверджувати, що ці трикутники рівні?

2) Периметр одного трикутника більший за периметр іншого. Чи можуть ці трикутники бути рівними?

27.11. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle CBA$. Чи є у трикутника ABC рівні сторони? Якщо так, назвіть їх.

27.12. Відомо, що $\triangle MNK = \triangle MKN$. Чи є у трикутника MNK рівні кути? Якщо так, назвіть їх.

4

27.13. Дано: $\triangle ABC = \triangle BCA$. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $AB = 7$ см.

27.14. Дано: $\triangle PKL = \triangle KLP$. Знайдіть PK, якщо периметр трикутника PKL дорівнює 27 см.

Вправи для повторення

27.15. На прямій позначено вісім точок так, що відстань між кожними двома сусідніми точками – однакова. Відстань між крайніми точками дорівнює 112 см. Знайдіть відстань між двома сусідніми точками.

27.16. Розгорнутий кут поділили променями на три кути, один з яких удвічі менший за другий і втричі менший за третій. Знайдіть градусні міри цих трьох кутів.

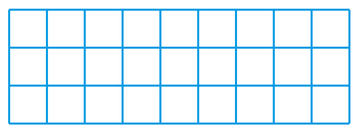
Життєва математика

27.17. 1) Скільки цегли й розчину потрібно для спорудження стіни завдовжки 20 м, завтовшки 50 см і заввишки 2,5 м, якщо на 1 м^3 кладки потрібно 400 цеглин, а витрати розчину становлять 20 % від обсягу кладки?

2) Скільки коштуватимуть матеріали, якщо вартість однієї цеглини дорівнює 4,2 грн, а 1 м^3 розчину – 1520 грн?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

27.18. Розріжте прямокутник, одна сторона якого дорівнює 3 клітинки, а друга – 9 клітинок, на вісім квадратів так, щоб розрізи проходили по сторонах клітинок.



§ 28. Перша та друга ознаки рівності трикутників

Ознаки рівності трикутників

Рівність двох трикутників можна встановити, не накладаючи один трикутник на інший, а порівнюючи лише деякі їхні елементи. Це важливо для практики, наприклад, для встановлення рівності двох земельних ділянок трикутної форми, які не можна накласти одна на одну.

Під час розв'язування багатьох теоретичних і практичних задач зручно використовувати *ознаки рівності трикутників*.

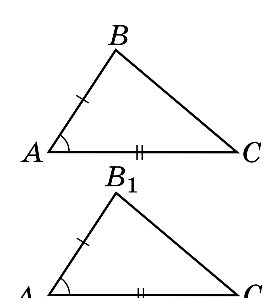
Перша ознака рівності трикутників

Розглянемо *першу ознаку рівності трикутників*.

Теорема 1 (перша ознака рівності трикутників). **Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.**

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ і $\angle A = \angle A_1$ (мал. 28.1).

Оскільки $\angle A = \angle A_1$, то трикутник ABC можна накласти на трикутник $A_1B_1C_1$ так, що вершина A суміститься з вершиною A_1, сторона AB накладеться на промінь A_1B_1, а сторона AC – на промінь A_1C_1. Оскільки $AB = A_1B_1$ і $AC = A_1C_1$, то сумістяться точки B і B_1, C і C_1. У результаті три вершини три-



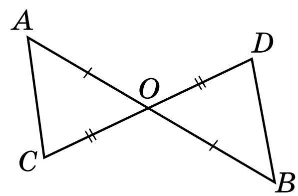
Мал. 28.1

кутника ABC сумістяться з відповідними вершинами трикутника $A_1B_1C_1$. Отже, після накладання трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ збігатимуться. Тому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Теорему доведено. ■

Цю ознаку рівності трикутників ще називають *ознакою рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними*.

Приклад 1. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що точка O є серединою кожного з них. Довести, що $\triangle AOC = \triangle BOD$.

Доведення. Розглянемо малюнок 28.2. За умовою $AO = OB$ і $CO = OD$. Окрім того, $\angle AOC = \angle BOD$ (як вертикальні). Тому за першою ознакою рівності трикутників $\triangle AOC = \triangle BOD$. ■

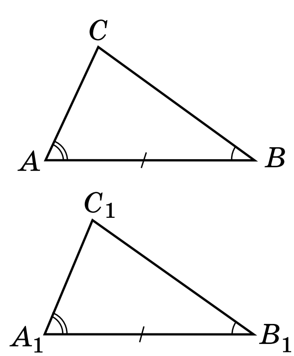


Мал. 28.2

Друга ознака рівності трикутників

Теорема 2 (друга ознака рівності трикутників). **Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.**

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$ (мал. 28.3).



Мал. 28.3

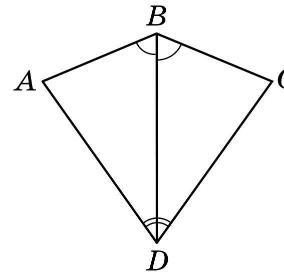
Оскільки $AB = A_1B_1$, то $\triangle ABC$ можна накласти на $\triangle A_1B_1C_1$ так, що вершина A збігатиметься з вершиною A_1, вершина B – з вершиною B_1, а вершини C і C_1 лежатимуть по один бік від прямої A_1B_1. Але $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$, тому при накладанні промінь AC накладеться на промінь A_1C_1, а промінь BC – на промінь B_1C_1. Тоді точка C – спільна точка променів AC і BC – збігатиметься з точкою C_1 – спільною точкою променів A_1C_1 і B_1C_1. Отже, три вершини трикутника ABC сумістяться з відповідними вершинами трикутника $A_1B_1C_1$; трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ повністю сумістилися. Тому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Теорему доведено. ■

Цю ознаку рівності трикутників ще називають *ознакою рівності трикутників за стороною і двома прилеглими кутами*.

Приклад 2. Довести рівність кутів A і C (мал. 28.4), якщо $\angle ADB = \angle CDB$ і $\angle ABD = \angle CBD$.

Доведення. 1) Сторона BD спільна для трикутників ABD і CBD. За умовою $\angle ADB = \angle CDB$ і $\angle ABD = \angle CBD$. Тому, за другою ознакою рівності трикутників, $\triangle ABD = \triangle CBD$.

2) Рівними є всі відповідні елементи цих трикутників. Отже, $\angle A = \angle C$. ■



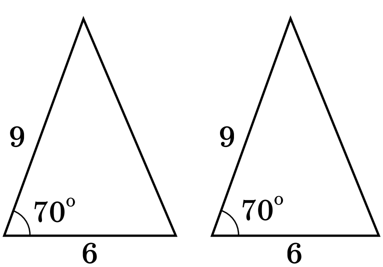
Мал. 28.4

- Сформулюйте та доведіть першу ознаку рівності трикутників.
- Сформулюйте та доведіть другу ознаку рівності трикутників.

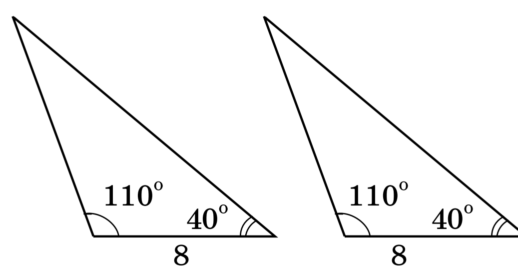
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

28.1. (*Усно.*) Трикутники на малюнках 28.5 і 28.6 рівні між собою. За якою ознакою?

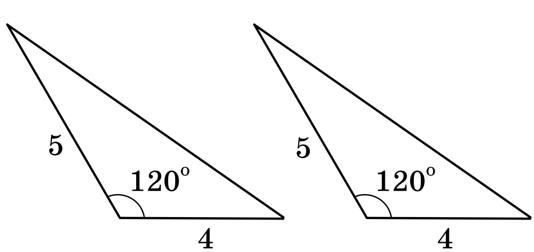


Мал. 28.5

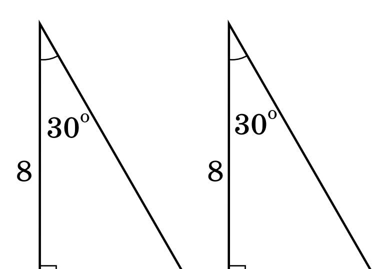


Мал. 28.6

28.2. Трикутники на малюнках 28.7 і 28.8 рівні між собою. За якою ознакою?

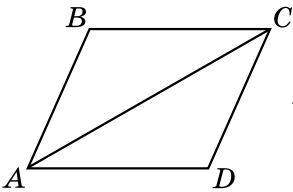


Мал. 28.7

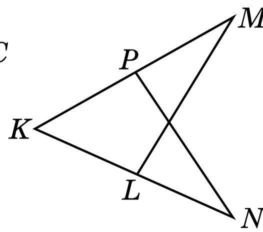


Мал. 28.8

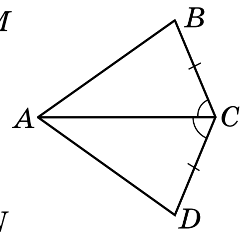
28.3. Назвіть спільний елемент трикутників ABC і CDA (мал. 28.9) та трикутників KML і KNP (мал. 28.10).



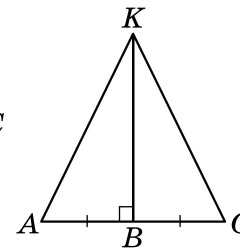
Мал. 28.9



Мал. 28.10



Мал. 28.11

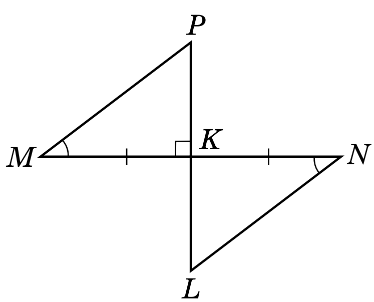


Мал. 28.12

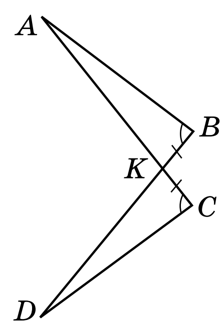
2 **28.4.** Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle ADC$ (мал. 28.11), якщо $BC = CD$ і $\angle ACB = \angle ACD$.

28.5. Дано: $AB = BC$, $BK \perp AC$ (мал. 28.12). Доведіть: $\triangle ABK = \triangle CBK$.

28.6. Дано: $MK = KN$, $\angle M = \angle N$, $PL \perp MN$ (мал. 28.13). Доведіть: $\triangle MKP = \triangle NKL$.



Мал. 28.13

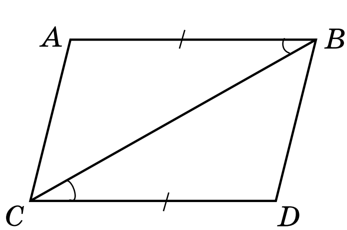


Мал. 28.14

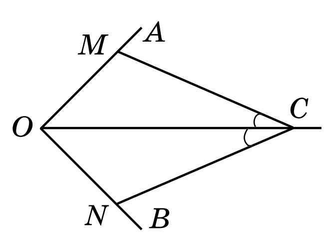
28.7. Доведіть, що $\triangle ABK = \triangle DCK$ (мал. 28.14), якщо $KB = KC$ і $\angle ABK = \angle DCK$.

28.8. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DCB$ (мал. 28.15), якщо $AB = CD$ і $\angle ABC = \angle BCD$.

28.9. Промінь OC є бісектрисою кута AOB (мал. 28.16), $\angle OCM = \angle OCN$. Доведіть, що $\triangle OMC = \triangle ONC$.

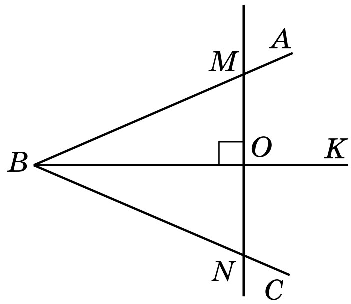


Мал. 28.15

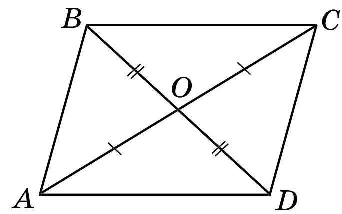


Мал. 28.16

28.10. Промінь BK є бісектрисою кута ABC (мал. 28.17), $MN \perp BK$. Доведіть, що $MO = ON$.



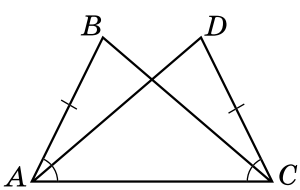
Мал. 28.17



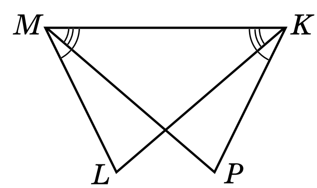
Мал. 28.18

28.11. Дано: $AO = OC$, $BO = OD$ (мал. 28.18).
Доведіть: $AB = CD$, $BC = AD$.

28.12. Дано: $AB = CD$, $\angle BAC = \angle DCA$ (мал. 28.19).
Доведіть: $\triangle ABC = \triangle CDA$.



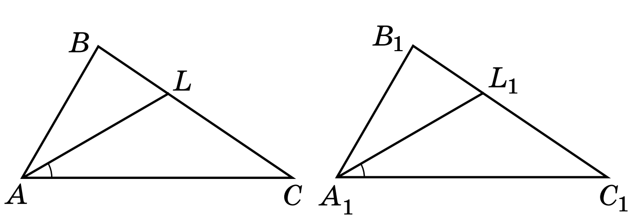
Мал. 28.19



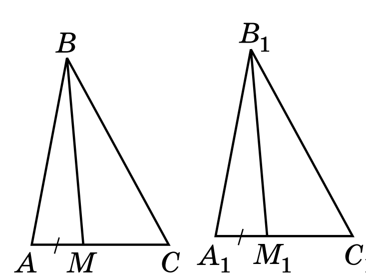
Мал. 28.20

28.13. Доведіть рівність трикутників MKL і KMP, зображених на малюнку 28.20, якщо $\angle LMK = \angle PKM$ і $\angle LKM = \angle PMK$.

28.14. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. На сторонах BC і B_1C_1 позначено відповідно точки L і L_1 такі, що $\angle LAC = \angle L_1A_1C_1$ (мал. 28.21). Доведіть, що $\triangle ALC = \triangle A_1L_1C_1$.



Мал. 28.21



Мал. 28.22

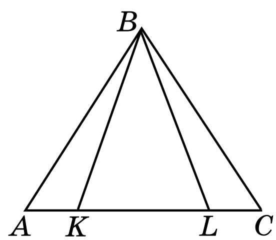
28.15. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. На сторонах AC і A_1C_1 позначено відповідно точки M і M_1 такі, що $AM = A_1M_1$ (мал. 28.22). Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$.

28.16. Чи можна стверджувати, що коли дві сторони і кут одного трикутника дорівнюють двом сторонам і куту іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою? Обґрунтуйте, подавши схематичні малюнки.

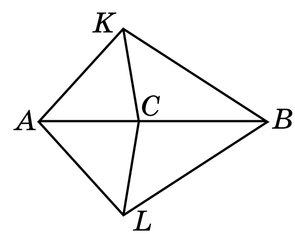
28.17. Чи можна стверджувати, що коли сторона і два кути одного трикутника дорівнюють стороні і двом кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою? Обґрунтуйте, подавши схематичні малюнки.

28.18. $\triangle ABK = \triangle CBL$ (мал. 28.23). Доведіть, що $\triangle ABL = \triangle CBK$.

28.19. $\triangle AKC = \triangle ALC$ (мал. 28.24). Доведіть, що $\triangle BKC = \triangle BLC$.



Мал. 28.23



Мал. 28.24

28.20. На бісектрисі кута A позначили точку B, а на його сторонах такі точки M і N, що $\angle ABM = \angle ABN$. Доведіть, що $MN \perp AB$.

Вправи для повторення

28.21. Одна зі сторін трикутника дорівнює 4 дм, що на 12 см менше від другої сторони та вдвічі більше за третю. Знайдіть периметр трикутника.

28.22. Сума трьох з восьми кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих a і b січною c, дорівнює 270°. Чи перпендикулярні прямі a і c; b і c?

Життєва математика

28.23. Підлогу кімнати, що має форму прямокутника зі сторонами 3,5 м і 6 м, потрібно вкрити ламінатом з прямокутних дощечок зі сторонами 7 см і 40 см. Скільки потрібно таких дощечок?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

28.24. Знайдіть периметр трикутника, дві сторони якого дорівнюють по 6 см, а третя сторона – 8 см.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

28.25. Як з прямокутників, що мають розміри 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, ..., 1×100, скласти прямокутник, кожна сторона якого більша за 1?

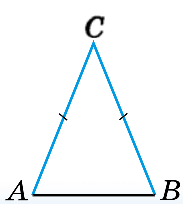
§ 29. Рівнобедрений трикутник

Класифікація трикутників за сторонами

Ви вже вмієте класифікувати трикутники за кутами. Розглянемо класифікацію трикутників залежно від їхніх сторін.

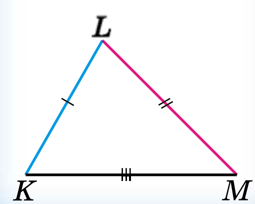
Трикутник, у якого дві сторони рівні, –

рівнобедрений трикутник



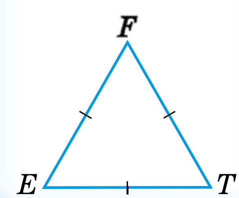
Трикутник, усі сторони якого різні завдовжки, –

різносторонній трикутник



Трикутник, усі сторони якого рівні, –

рівносторонній трикутник



Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами*, а його третю сторону – *основою*.

У рівнобедреному трикутнику ABC: AB – основа, AC і BC – бічні сторони.

Властивість рівнобедреного трикутника

Розглянемо важливу властивість кутів рівнобедреного трикутника.

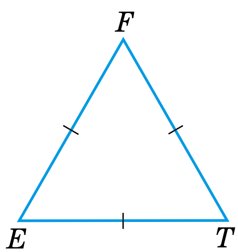
Теорема 1 (властивість кутів рівнобедреного трикутника). У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

Доведення. Нехай ABC – рівнобедрений трикутник з основою AB (див. мал. вище). Доведемо, що в нього $\angle A = \angle B$.

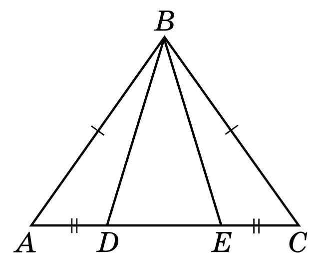
Оскільки $AC = BC$, $CB = CA$ і $\angle C$ – спільний для трикутників ACB і BCA, то $\triangle ACB = \triangle BCA$ (за першою ознакою). З рівності трикутників випливає, що $\angle A = \angle B$. Теорему доведено. ■

Н **Наслідок. У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.**

Доведення. Розглянемо рівносторонній $\triangle EFT$ (мал. 29.1), у якого $EF = FT = ET$. Оскільки $EF = FT$, то його можна вважати рівнобедреним з основою ET. Тому $\angle E = \angle T$. Аналогічно (вважаючи основою FT) маємо, що $\angle F = \angle T$. Отже, $\angle E = \angle T = \angle F$. ■



Мал. 29.1



Мал. 29.2

Приклад 1. На малюнку 29.2 $AB = BC$, $AD = EC$. Довести, що $\angle BDE = \angle BED$.

Доведення. 1) Оскільки $AB = BC$, то $\triangle ABC$ – рівнобедрений з основою AC. Тому $\angle A = \angle C$.

2) $\triangle BAD = \triangle BCE$ (за першою ознакою). Тому $BD = BE$.

3) Отже, $\triangle BDE$ – рівнобедрений з основою DE. Тому $\angle BDE = \angle BED$, що й потрібно було довести. ■

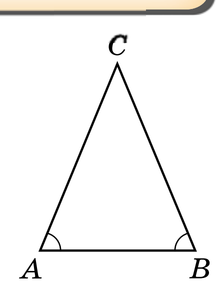
Ознака рівнобедреного трикутника

Розглянемо ознаку рівнобедреного трикутника.

Т Теорема 2 (ознака рівнобедреного трикутника). **Якщо у трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.**

Доведення. Нехай ABC – трикутник, у якого $\angle A = \angle B$ (мал. 29.3). Доведемо, що він рівнобедрений з основою AB.

Оскільки $\angle A = \angle B$, $\angle B = \angle A$ і AB – спільна сторона для трикутників ACB і BCA, то $\triangle ACB = \triangle BCA$ (за другою ознакою). З рівності трикутників випливає, що $AC = BC$. Тому $\triangle ABC$ – рівнобедрений з основою AB. Теорему доведено. ■



Мал. 29.3

Зауважимо, що розглянута теорема є оберненою до теореми про властивість кутів рівнобедреного трикутника.

Наслідок. Якщо у трикутнику всі кути рівні, то він рівносторонній.

Доведення. Нехай $\triangle ABC$ такий, що $\angle A = \angle B = \angle C$. Оскільки $\angle A = \angle B$, то $AC = BC$. Оскільки $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$. Отже, $AC = BC = AB$, тобто $\triangle ABC$ – рівносторонній. ■

Приклад 2. Дано: $\angle 1 = \angle 2$ (мал. 29.4).

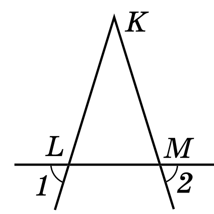
Довести: $\triangle KLM$ – рівнобедрений.

Доведення.

1) $\angle KLM = \angle 1$ (як вертикальні), $\angle KML = \angle 2$ (як вертикальні).

2) $\angle 1 = \angle 2$ (за умовою). Тому $\angle KLM = \angle KML$.

3) Отже, $\triangle KLM$ – рівнобедрений (за ознакою рівнобедреного трикутника). ■

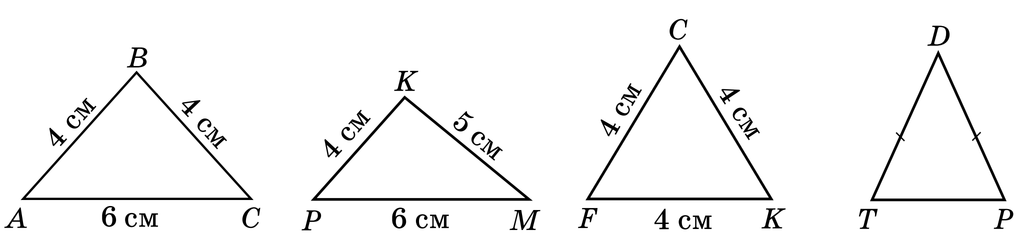


Мал. 29.4

Який трикутник називають рівнобедреним; різностороннім; рівностороннім? ○ Сформулюйте та доведіть теорему про властивість кутів рівнобедреного трикутника та наслідок з неї. ○ Сформулюйте та доведіть ознаку рівнобедреного трикутника та наслідок з неї.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

29.1. (*Усно.*) Який з трикутників, зображених на малюнку 29.5, є рівнобедреним, який – рівностороннім, а який – різностороннім? Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, зображеного на цьому малюнку.



Мал. 29.5

Мал. 29.6

29.2. Укажіть основу та бічні сторони трикутника DTP (мал. 29.6). Що можна сказати про кути T і P цього трикутника?

29.3. Один з кутів при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. Знайдіть другий кут при основі цього трикутника.

29.4. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 9 см, ще одна сторона – 6 см. Яка довжина третьої сторони?

29.5. $\triangle ABC$ – рівносторонній, $AB = 12$ см. Знайдіть його периметр.

29.6. Периметр рівностороннього трикутника ABC дорівнює 18 см. Знайдіть довжину сторони BC цього трикутника.

2

29.7. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 7 см, а основа на 2 см менша від бічної сторони.

29.8. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 8 см, а бічна сторона на 4 см більша за основу.

29.9. (*Усно.*) Чи може бути рівнобедреним трикутник, усі кути якого різні? Відповідь обґрунтуйте.

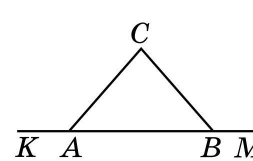
29.10. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а бічна сторона – 7 см. Знайдіть основу трикутника.

29.11. Периметр рівнобедреного трикутника AMN з основою MN дорівнює 18 дм. Знайдіть довжину основи MN, якщо $AM = 7$ дм.

29.12. Периметр рівнобедреного трикутника ACD з бічними сторонами AC і AD дорівнює 30 дм. Знайдіть довжину бічної сторони, якщо $CD = 12$ дм.

29.13. Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 17 см, а основа – 5 см.

29.14. $\triangle ABC$ – рівнобедрений з основою AB (мал. 29.7). Доведіть, що $\angle KAC = \angle MBC$.



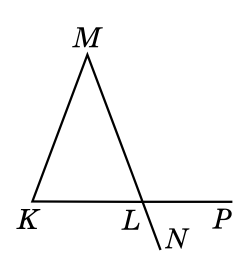
Мал. 29.7

29.15. $\triangle KLM$ – рівнобедрений з основою KL (мал. 29.8). Доведіть, що $\angle MKL = \angle PLN$.

29.16. Чи правильні твердження:

1) будь-який рівносторонній трикутник є рівнобедреним;

2) будь-який рівнобедрений трикутник є рівностороннім?



Мал. 29.8

3

29.17. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 14 см і він більший за суму двох бічних сторін на 6 см.

29.18. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр 44 см, а бічна сторона на 4 см більша за основу.

29.19. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 35 дм, а основа вдвічі менша від бічної сторони.

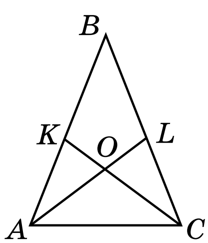
29.20. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначено точки K і L так, що $AK = LC$ (мал. 29.9). Доведіть, що $AL = KC$.

29.21. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначено точки K і L так, що $\angle KCA = \angle LAC$ (мал. 29.9). Доведіть, що відрізки AK і CL рівні.

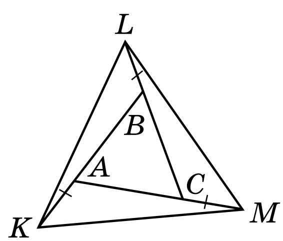
4

29.22. Сторони рівностороннього трикутника ABC продовжено на рівні відрізки AK, BL і CM (мал. 29.10). Доведіть, що $\triangle KLM$ – рівносторонній.

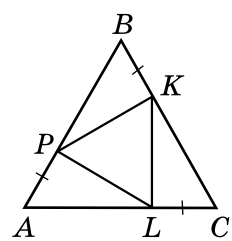
29.23. На сторонах рівностороннього трикутника ABC відкладено рівні відрізки AP, BK і CL (мал. 29.11). Доведіть, що $\triangle PKL$ – рівносторонній.



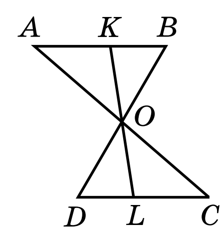
Мал. 29.9



Мал. 29.10



Мал. 29.11



Мал. 29.12

Вправи для повторення

29.24. Доведіть, що з двох суміжних кутів хоча б один не більший за 90°.

29.25. Відрізки AC і BD перетинаються в точці O так, що $\triangle AOB = \triangle COD$ (мал. 29.12). Точка K належить відрізку AB, а точка L – відрізку DC, причому KL проходить через точку O. Доведіть, що $KO = OL$ і $KB = DL$.

29.26. На відрізку $AB = 48$ см позначено точку K так, що $5AK = 7BK$. Знайдіть довжини відрізків AK і BK.

Життєва математика

29.27. Одне дерево очищає за рік зону у формі прямокутного паралелепіпеда 100 м завдовжки, 12 м завширшки, 10 м заввишки. Обчисліть, скільки кубічних метрів повітря очистять від автомобільних вихлопних газів 200 каштанів, посаджених уздовж дороги.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

29.28. Знайдіть по два розв'язки кожної з анаграм (одна з анаграм є геометричним терміном, який ви знаєте з попередніх класів): 1) НОСУК; 2) ТСОРЕК.

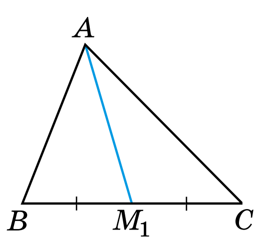
§ 30. Медіана, бісектриса і висота трикутника. Властивість бісектриси рівнобедреного трикутника

У кожному трикутнику можна провести кілька відрізків, які мають спеціальні назви.

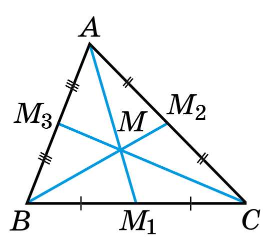
Медіана трикутника

Медіаною трикутника **називають відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.**

На малюнку 30.1 відрізок AM_1 – медіана трикутника ABC. Точку M_1 називають основою медіани AM_1. Будь-який трикутник має три медіани. На малюнку 30.2 відрізки AM_1, BM_2, CM_3 – медіани трикутника ABC. Медіани трикутника мають цікаву властивість.



Мал. 30.1



Мал. 30.2

У будь-якому трикутнику медіани перетинаються в одній точці (її називають *центроїдом* трикутника) і діляться цією точкою у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини.

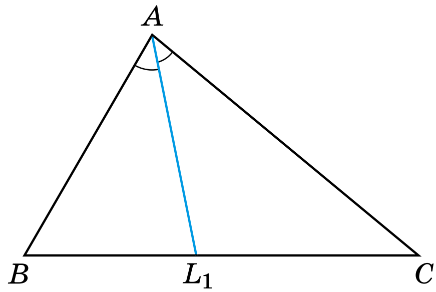
На малюнку 30.2 точка M – центроїд трикутника ABC.

Цю властивість буде доведено у старших класах.

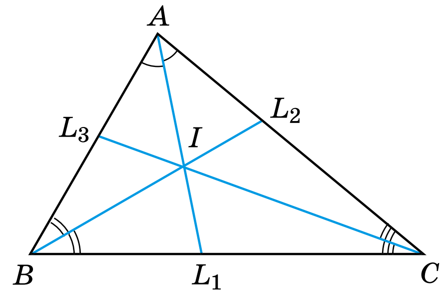
Бісектриса трикутника

Бісектрисою трикутника **називають відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.**

На малюнку 30.3 відрізок AL_1 – бісектриса трикутника ABC. Точку L_1 називають основою бісектриси AL_1. Будь-який трикутник має три бісектриси. На малюнку 30.4 відрізки AL_1, BL_2, CL_3 – бісектриси трикутника ABC.



Мал. 30.3



Мал. 30.4

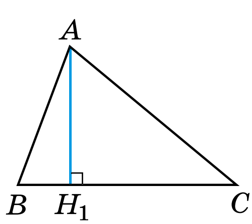
У § 47 доведемо, що *в будь-якому трикутнику бісектриси перетинаються в одній точці* (її називають ***інцентром***).

На малюнку 30.4 точка I – інцентр трикутника ABC.

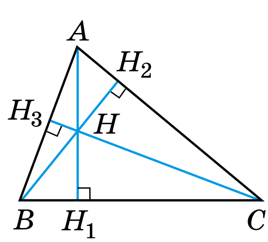
Висота трикутника

Висотою трикутника **називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.**

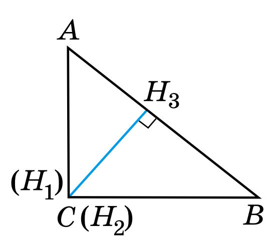
На малюнку 30.5 відрізок AH_1 – висота трикутника ABC. Точку H_1 називають основою висоти AH_1. Будь-який трикутник має три висоти. На малюнку 30.6 відрізки AH_1, BH_2, CH_3 – висоти гострокутного трикутника ABC, на малюнку 30.7 ці відрізки – висоти прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C, а на малюнку 30.8 ці відрізки – висоти тупокутного трикутника ABC з тупим кутом A.



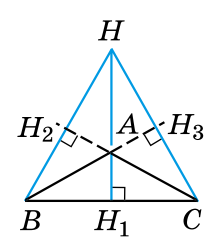
Мал. 30.5



Мал. 30.6



Мал. 30.7



Мал. 30.8

У старших класах буде доведено, що *в будь-якому трикутнику три висоти або їхні продовження перетинаються в одній точці* (її називають ***ортоцентром*** трикутника). На малюнках 30.6 і 30.8 точка H – ортоцентр трикутника ABC, на малюнку 30.7 ортоцентр трикутника збігається з точкою C – вершиною прямого кута трикутника ABC.

Властивість бісектриси рівнобедреного трикутника

Розглянемо ще одну важливу властивість рівнобедреного трикутника.

Т **Теорема (властивість бісектриси рівнобедреного трикутника). *У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.***

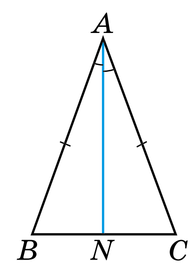
Доведення. Нехай ABC – рівнобедрений трикутник з основою BC, AN – його бісектриса (мал. 30.9). Доведемо, що AN є також медіаною і висотою.

1) Оскільки $AB = AC$, $\angle BAN = \angle CAN$ (за умовою), а відрізок AN є спільною стороною трикутників BAN і CAN, то $\triangle BAN = \triangle CAN$ (за першою ознакою).

2) Тому $BN = NC$. Отже, AN – медіана трикутника.

3) Також маємо $\angle BNA = \angle CNA$. Оскільки ці кути суміжні й рівні, то $\angle BNA = \angle CNA = 90°$. Отже, AN є також висотою.

Теорему доведено. ■



Мал. 30.9

Оскільки бісектриса, медіана і висота рівнобедреного трикутника, проведені до основи, збігаються, то справджуються такі наслідки з теореми.

Н **Наслідок 1. Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є висотою і бісектрисою.**
Наслідок 2. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є медіаною і бісектрисою.

Приклад. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC проведено бісектрису AN (мал. 30.9); $AN = 12$ см. Знайти периметр трикутника ANB, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 36 см.

Розв'язання. 1) Оскільки трикутник ABC рівнобедрений, а AN – бісектриса, що проведена до основи цього трикутника, то AN є також і медіаною. Тому $BN = NC$.

2) Позначимо $P_{\triangle ABC}$ – периметр трикутника ABC, $P_{\triangle ANB}$ — периметр трикутника ANB, який потрібно знайти.

$P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC = AB + AC + BN + NC$.

За умовою $AB = AC$, крім того $BN = NC$. Тому $P_{\triangle ABC} = AB + AB + BN + BN = 2(AB + BN)$. За умовою $P_{\triangle ABC} = 36$ (см). Тому $2(AB + BN) = 36$, $AB + BN = 18$ (см).

3) $P_{\triangle ANB} = AN + AB + BN = AN + (AB + BN) = 12 + 18 = 30$ (см).

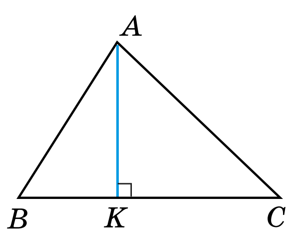
Відповідь: 30 см.

Який відрізок називають медіаною трикутника? Скільки медіан має трикутник? Який відрізок називають бісектрисою трикутника? Скільки бісектрис має трикутник? Який відрізок називають висотою трикутника? Скільки висот має трикутник? Сформулюйте та доведіть теорему про властивість бісектриси рівнобедреного трикутника. Сформулюйте наслідки із цієї теореми.

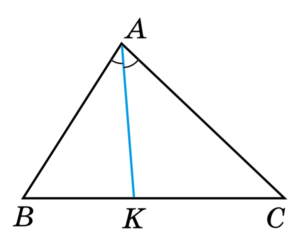
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

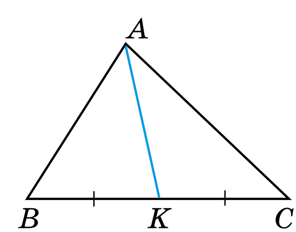
30.1. (*Усно.*) Як називають відрізок AK у трикутнику ABC (мал. 30.10–30.12)?



Мал. 30.10



Мал. 30.11

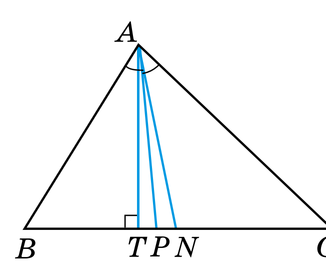


Мал. 30.12

30.2. 1) Як у трикутнику ABC називають відрізок AT (мал. 30.13), якщо він є перпендикуляром до прямої BC?

2) Як у трикутнику ABC (мал. 30.13) називають відрізок AN, якщо $BN = NC$?

3) Як у трикутнику ABC (мал. 30.13) називають відрізок AP, якщо $\angle BAP = \angle PAC$?



Мал. 30.13

30.3. У трикутнику ABC відрізок AK – висота (мал. 30.10). Знайдіть градусні міри кутів BKA і CKA.

30.4. У трикутнику ABC відрізок AK – бісектриса (мал. 30.11), $\angle BAK = 40°$. Знайдіть градусну міру кута BAC.

30.5. У трикутнику ABC відрізок AK – медіана (мал. 30.12), $BC = 12$ см. Знайдіть довжини відрізків BK і KC.

30.6. Накресліть трикутник. За допомогою лінійки з поділками проведіть його медіани.

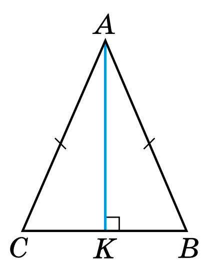
30.7. Накресліть трикутник. За допомогою транспортира і лінійки проведіть його бісектриси.

30.8. Накресліть тупокутний трикутник. За допомогою креслярського косинця проведіть його висоти.

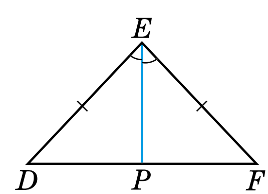
30.9. Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою креслярського косинця проведіть його висоти.

30.10. На малюнку 30.14 відрізок AK – висота рівнобедреного трикутника ABC з основою BC. Запишіть три пари рівних кутів і дві пари рівних відрізків, що є на цьому малюнку.

30.11. На малюнку 30.15 відрізок EP – бісектриса рівнобедреного трикутника DEF з основою DF. Запишіть три пари рівних кутів і дві пари рівних відрізків, що є на цьому малюнку.



Мал. 30.14



Мал. 30.15

30.12. (*Усно.*) Чому не можна стверджувати, що три висоти трикутника завжди перетинаються в одній точці?

30.13. У трикутнику ABC $\angle B = \angle C$. Бісектриса, проведена до якої зі сторін, є одночасно і медіаною, і висотою?

30.14. (*Усно.*) Які елементи трикутника або їхні частини сумістяться, якщо його зігнути по:

1) бісектрисі; 2) висоті?

30.15. Доведіть, що коли бісектриса трикутника є його висотою, то трикутник – рівнобедрений.

30.16. Доведіть, що коли медіана трикутника є його висотою, то трикутник – рівнобедрений.

Примітка. Твердження задач 30.15 і 30.16 можна вважати ознаками рівнобедреного трикутника.

30.17. AD і A_1D_1 – відповідно бісектриси рівних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Доведіть, що $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$.

30.18. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, – рівні.

30.19. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені до бічних сторін, – рівні.

30.20. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено висоту BD. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $BD = 10$ см, а периметр трикутника ABD дорівнює 40 см.

30.21. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB проведено медіану CK. Знайдіть її довжину, якщо периметр трикутника ACK дорівнює 12 см, а периметр трикутника ABC – 16 см.

30.22. Доведіть, що коли медіана трикутника є його бісектрисою, то трикутник – рівнобедрений.

Примітка. Твердження задачі 30.22 можна вважати ознакою рівнобедреного трикутника.

Вправи для повторення

30.23. Два з восьми кутів, що утворилися при перетині прямих a і b січною c, дорівнюють 30° і 140°. Чи можуть прямі a і b бути паралельними?

30.24. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. На його стороні побудували рівнобедрений трикутник так, що сторона даного трикутника є основою рівнобедреного. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр – 18 см.

30.25. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, периметр якого – 69 см, а його основа складає 30 % від бічної сторони.

Життєва математика

30.26. Визначте суму грошей, яку потрібно сплатити за фарбування тренажерного залу, ширина, довжина і висота якого – 9,4 м, 6,5 м, 3,2 м. Фарбування одного квадратного метра коштує 25 грн. Вікна та двері складають 9 % від загальної площі стін. Округліть до десятків гривень.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

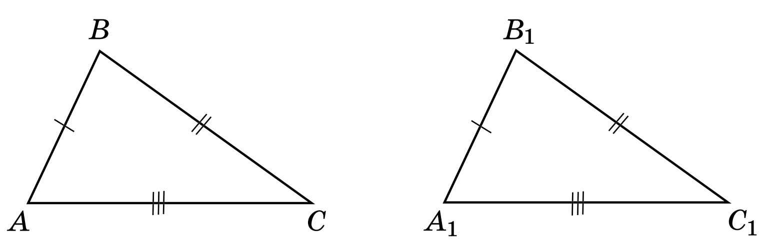
30.27. Олесь придбав акваріум у формі куба, що вміщує 125 л води. Він наповнив акваріум, не доливши до краю 6 см. Скільки літрів води Олесь налив у акваріум?

§ 31. Третя ознака рівності трикутників

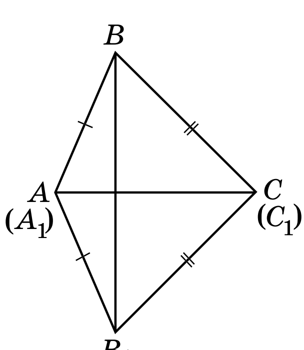
Ви вже знаєте дві ознаки рівності трикутників (за двома сторонами і кутом між ними та за стороною і двома прилеглими кутами). Розглянемо ще одну ознаку рівності трикутників – за трьома сторонами.

Теорема (третя ознака рівності трикутників).
Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.

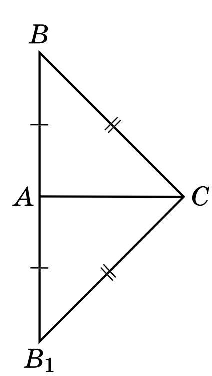
Доведення. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ – два трикутники, у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ (мал. 31.1). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Прикладемо трикутник $A_1B_1C_1$ до трикутника ABC так, щоб вершина A_1 сумістилася з вершиною A, вершина C_1 – з вершиною C, а вершини B_1 і B були по різні боки від прямої AC. Можливі три випадки: промінь BB_1 проходить усередині кута ABC (мал. 31.2), промінь BB_1 збігається з однією зі сторін цього кута (мал. 31.3), промінь BB_1 проходить поза кутом ABC (мал. 31.4).



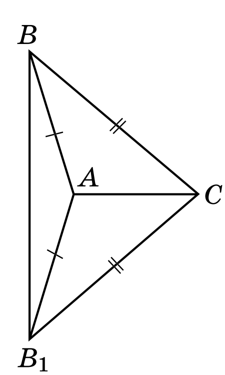
Мал. 31.1



Мал. 31.2



Мал. 31.3



Мал. 31.4

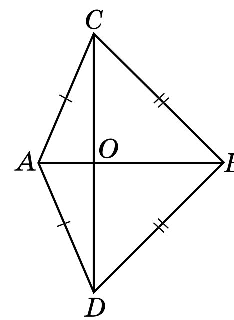
Розглянемо перший випадок (інші випадки розгляньте самостійно). Оскільки за умовою $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$, то трикутники ABB_1 і CBB_1 – рівнобедрені з основою BB_1. Тоді $\angle ABB_1 = \angle AB_1B$ і $\angle CBB_1 = \angle CB_1B$. Тому $\angle ABC = \angle AB_1C$.

Отже, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Тому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за першою ознакою рівності трикутників).

Теорему доведено. ■

Приклад. Д а н о: $AC = AD$, $BC = BD$ (мал. 31.5).

Д о в е с т и: $CO = OD$.



Мал. 31.5

Доведення. 1) Розглянемо $\triangle ABC$ і $\triangle ABD$. $AC = AD$, $BC = BD$ (за умовою), AB – спільна сторона. Тоді $\triangle ABC = \triangle ABD$ (за третьою ознакою рівності трикутників).

2) $\angle CAB = \angle DAB$ (як відповідні кути рівних трикутників), а тому AB – бісектриса кута CAD.

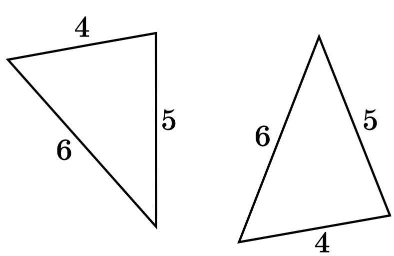
3) Тоді AO – бісектриса рівнобедреного трикутника ACD, проведена до основи, отже, за властивістю рівнобедреного трикутника, AO є також і медіаною. Оскільки AO – медіана трикутника ACD, то $CO = OD$, що й потрібно було довести. ■

Сформулюйте та доведіть третю ознаку рівності трикутників.

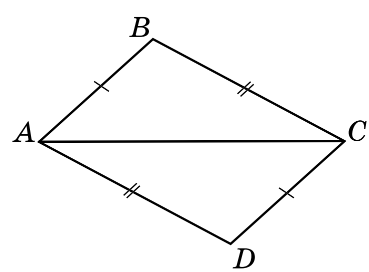
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **31.1.** (*Усно.*) Чи є трикутники, зображені на малюнку 31.6, рівними між собою? За якою ознакою?

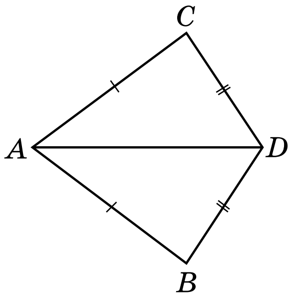
2 **31.2.** Доведіть рівність трикутників ABC і CDA, зображених на малюнку 31.7, якщо $AB = DC$ і $BC = AD$.



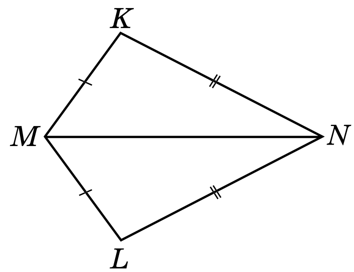
Мал. 31.6



Мал. 31.7



Мал. 31.8

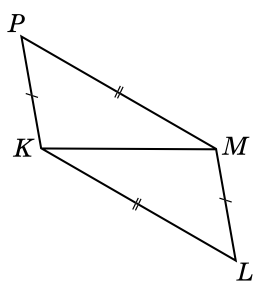


Мал. 31.9

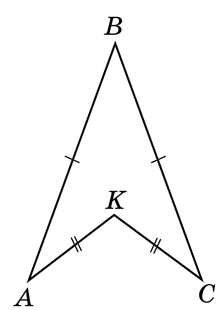
31.3. Доведіть, що $\triangle ACD = \triangle ABD$ (мал. 31.8), якщо $AC = AB$ і $DC = DB$.

31.4. На малюнку 31.9 $MK = ML$, $KN = NL$. Доведіть, що $\angle K = \angle L$.

31.5. На малюнку 31.10 $PK = ML$, $PM = KL$. Доведіть, що $\angle PKM = \angle LMK$.



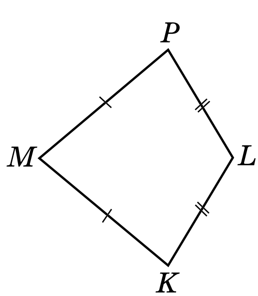
Мал. 31.10



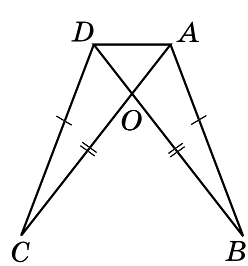
Мал. 31.11

31.6. На малюнку 31.11 $AB = BC$, $AK = KC$. Доведіть, що BK – бісектриса кута ABC.

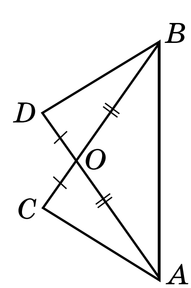
31.7. На малюнку 31.12 $MP = MK$, $PL = KL$. Доведіть, що ML – бісектриса кута PMK.



Мал. 31.12



Мал. 31.13



Мал. 31.14

31.8. Дано: $AB = CD$, $AC = BD$ (мал. 31.13). Доведіть: $\triangle AOD$ – рівнобедрений.

31.9. Дано: $AO = OB$, $CO = OD$ (мал. 31.14).
Доведіть: $\triangle ABC = \triangle BAD$.

31.10. Про трикутники ABC і MNP відомо, що $AB \neq MN$, $BC \neq NP$, $AC \neq MP$. Чи можуть бути рівними такі трикутники?

31.11. Трикутники ABC і MNP – рівнобедрені. Відомо, що $AB = MN = 6$ см, а $BC = NP = 8$ см. Чи можна стверджувати, що ці трикутники рівні?

4 **31.12.** Усередині рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) взято точку K так, що $BK = KC$. Доведіть, що пряма AK перпендикулярна до BC.

31.13. Усередині рівнобедреного трикутника DMN ($DM = DN$) взято точку P так, що $MP = PN$. Доведіть, що пряма DP ділить навпіл сторону MN.

Вправи для повторення

31.14. Як, використовуючи шаблон кута, градусна міра якого $10°$, побудувати перпендикулярні прямі?

31.15. Промінь AK проходить між сторонами кута BAC, $\angle BAC = 126°$. Відомо, що $4\angle BAK = 5\angle KAC$. Знайдіть градусні міри кутів BAK і KAC.

Життєва математика

31.16. *Практичне завдання.* Інженери полюбляють трикутник за жорсткість форми: якщо сторони, що утворюють його, з'єднати у вершинах, то форму трикутника неможливо змінити, на відміну від інших геометричних фігур. Властивість жорсткості трикутника широко використовують на практиці. Так, щоб закріпити стовп у вертикальному положенні, до нього ставлять підпорку. Наведіть інші приклади використання цієї властивості, підготуйте презентацію (доповідь або реферат) на цю тему та презентуйте її класу.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

31.17. Подайте вираз у вигляді многочлена:

1) $(x + 3)(x + 3)$; 2) $(y - 2)(y - 2)$;
3) $(7 - m)(7 - m)$; 4) $(5 + a)(5 + a)$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

31.18. Накресліть прямокутник розміром 4×6 клітинок. Покажіть, як «замостити» (покрити без накладань і вільних клітинок) його куточками, кожний з яких складається з трьох клітинок, так, щоб жодні два з них не утворювали прямокутника.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 6 (§§26–31)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Дано $\triangle KLM$, у якого $KM = 4$ см, $ML = 7$ см, $KL = 10$ см. Знайдіть його периметр.

А. 20 см **Б.** 21 см **В.** 22 см **Г.** 23 см

2. $\triangle PTK$ – різносторонній, $\triangle ABC = \triangle PTK$. Тоді буде правильною рівність $\angle B = ...$

А. $\angle P$ **Б.** $\angle T$

В. $\angle K$ **Г.** Жодному з кутів трикутника PTK

3. Дано $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$, де $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Тоді...

А. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за першою ознакою)

Б. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за другою ознакою)

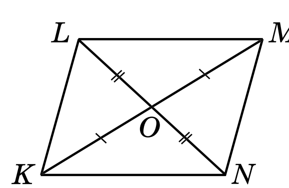
В. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за третьою ознакою)

Г. Не можна встановити рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$

4. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см, а його основа – 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

А. 12 см **Б.** 10 см

В. 8 см **Г.** 6 см



5. На малюнку $LO = ON$, $KO = OM$, $\angle KOL \neq \angle LOM$. Укажіть правильну рівність.

А. $\triangle KOL = \triangle LOM$ **Б.** $\triangle KOL = \triangle OMN$

В. $\triangle KOL = \triangle MON$ **Г.** $\triangle KOL = \triangle NOM$

6. AM, BN і CL – медіани трикутника ABC. Яка з них є ще й бісектрисою, і висотою трикутника, якщо $\angle A = \angle B$, а $\angle B \neq \angle C$?

А. AM **Б.** BN **В.** CL **Г.** Жодна

3 **7.** Одна зі сторін трикутника вдвічі менша від другої і на 2 см менша від третьої. Знайдіть найбільшу сторону трикутника, якщо його периметр дорівнює 22 см.

А. 5 см **Б.** 7 см **В.** 9 см **Г.** 10 см

8. Відомо, що $\triangle KLM = \triangle MLK$. Знайдіть периметр трикутника KLM, якщо $KL = 6$ см, $KM = 5$ см.

А. 17 см **Б.** 16 см
В. 18 см **Г.** Знайти неможливо

9. BK – висота трикутника ABC, $AB = BC$. Укажіть неправильне твердження.

А. $\angle ABC = \angle BKA$ **Б.** $\angle BAC = \angle BCA$
В. $\triangle BAK = \triangle BCK$ **Г.** $\angle ABK = \angle CBK$

4 **10.** Дано: $\triangle ABC = \triangle BCA$, $AB = 5$ см. Знайдіть: BC, CA.

А. $BC = 6$ см, $CA = 7$ см **Б.** $BC = 4$ см, $CA = 3$ см
В. $BC = 4$ см, $CA = 4$ см **Г.** $BC = 5$ см, $CA = 5$ см

11. AB – основа рівнобедреного трикутника ABC, CK – його бісектриса. Знайдіть довжину цієї бісектриси, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 36 см, а периметр трикутника ACK дорівнює 30 см.

А. 6 см **Б.** 8 см **В.** 10 см **Г.** 12 см

12. У трикутнику ABC $AB = AC$. Точка M така, що $BM = MC$. Укажіть неправильне твердження.

А. $\angle MBC = \angle MCB$ **Б.** $\angle MBA > \angle MCA$
В. $\angle BMA = \angle CMA$ **Г.** $\angle BAM = \angle CAM$

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами.

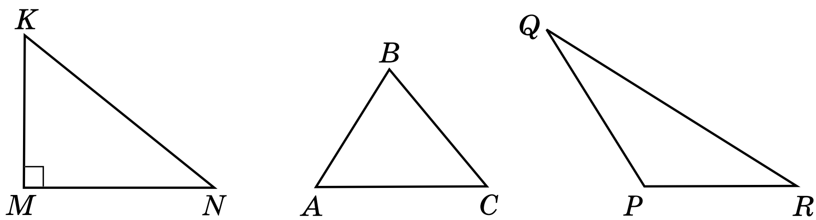
3 **13.** Периметр трикутника ABC дорівнює 37 см, $AB : BC = 2 : 3$, $AC - AB = 2$ см. Установіть відповідність між сторонами трикутника (1–3) та їхніми довжинами (А–Г).

Сторони трикутника	*Довжини сторін трикутника*
1. AB	**А.** 10 см
2. BC	**Б.** 12 см
3. CA	**В.** 15 см
	Г. 16 см

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 26–31

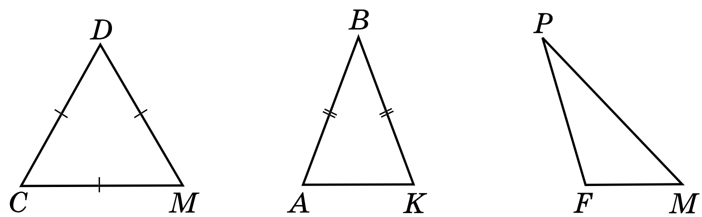
1 **1.** Накресліть $\triangle MNK$. Запишіть назви його вершин, сторін і кутів.

2. Який із зображених на малюнку 1 трикутників гострокутний, який – прямокутний, а який – тупокутний?



Мал. 1

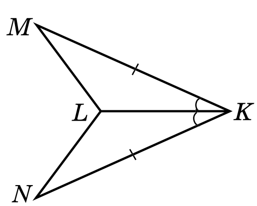
3. Який із зображених на малюнку 2 трикутників рівнобедрений, який – рівносторонній, а який – різносторонній?



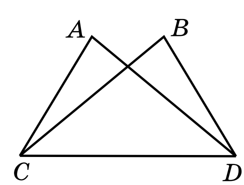
Мал. 2

4. $\triangle ABC = \triangle KMF$. Відомо, що $AB = 5$ см, $BC = 4$ см, $KF = 7$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутників ABC і KMF.

5. На малюнку 3 $MK = KN$, $\angle LKM = \angle LKN$. Доведіть, що $\triangle MKL = \triangle NKL$.



Мал. 3



Мал. 4

6. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника з основою 12 см завдовжки, бічна сторона якого на 3 см більша за основу.

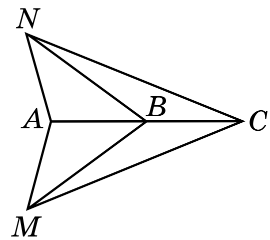
7. На малюнку 4 $AC = BD$, $BC = AD$. Доведіть, що $\angle BCD = \angle ADC$.

8. Перша сторона трикутника вдвічі менша від другої і на 3 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 23 см.

9. У рівнобедреному трикутнику KML з основою KL проведено медіану MP. Знайдіть периметр трикутника KML, якщо $MP = 8$ дм, а периметр трикутника MKP дорівнює 24 дм.

Додаткові вправи

4 **10.** На малюнку 5 $\triangle ANB = \triangle AMB$. Доведіть, що $NC = MC$.



Мал. 5

11. Відомо, що $\triangle MKL = \triangle KLM$. Знайдіть периметр трикутника MKL, якщо він на 10 см більший за сторону MK.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 6

До § 26

1 **1.** Накресліть прямокутний $\triangle KLP$. Запишіть назви вершин, сторін і кутів цього трикутника.

2 **2.** Перша сторона трикутника дорівнює 18 см, друга сторона на 6 см більша за першу, а третя сторона вдвічі менша від другої. Знайдіть периметр трикутника.

3 **3.** За допомогою транспортира та лінійки з поділками накресліть $\triangle MLP$, у якого $ML = 5$ см, $\angle M = 40°$, $\angle L = 80°$.

4 **4.** Перша сторона трикутника вдвічі менша від другої, а третя становить 80 % від другої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 46 см.

* **5.** Знайдіть сторони трикутника ABC, якщо $AB + AC = 12$ см, $AC + CB = 15$ см, $AB + BC = 13$ см.

До § 27

1 **6.** 1) Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 7 см і 8 см. Знайдіть сторони рівного йому трикутника.
2) Кути трикутника дорівнюють 40°, 60° і 80°. Знайдіть кути рівного йому трикутника.

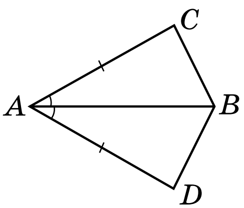
2 **7.** Чи можна сумістити накладанням вертикальні кути?

3 **8.** Чи можуть бути рівними трикутники, найбільші сторони яких не є рівними?

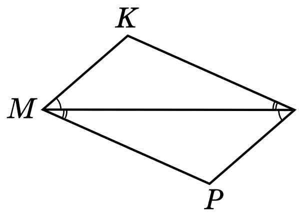
4 **9.** Дано: $\triangle ABC = \triangle ACB$, $AB = 7$ см, $BC = 4$ см. Знайдіть: P_{ABC}.

До § 28

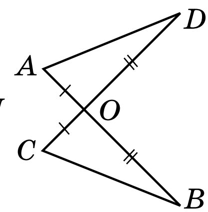
10. Назвіть спільний елемент трикутників, зображених на малюнках 1 та 2, і ознаку, за якою ці трикутники рівні.



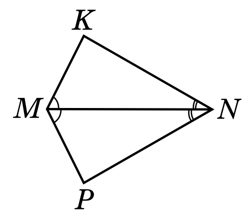
Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4

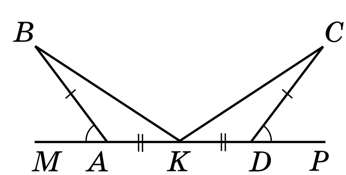
11. Доведіть, що $\triangle AOD = \triangle COB$ (мал. 3), якщо $AO = CO$, $DO = OB$.

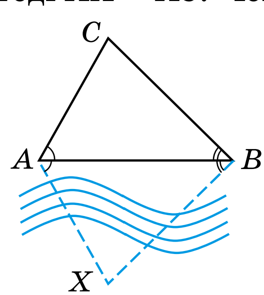
12. Доведіть, що $\triangle MKN = \triangle MPN$ (мал. 4), якщо $\angle KMN = \angle PMN$ і $\angle KNM = \angle PNM$.

13. На малюнку 5 $\angle MAB = \angle PDC$, $BA = CD$, $AK = KD$. Доведіть, що $BK = KC$.

14. Щоб знайти відстань від пункту A до недосяжного пункту X (мал. 6), на березі позначають точки B і C так, щоб $\angle XAB = \angle CAB$ і $\angle XBA = \angle CBA$. Тоді $AX = AC$. Чому?

Мал. 5



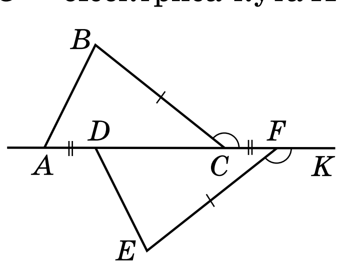


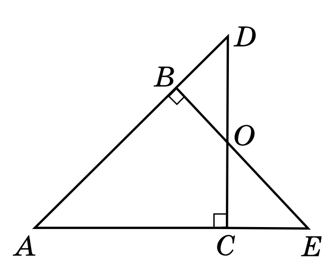
Мал. 6

15. На малюнку 7 зображено фігуру, у якої $BC = EF$, $AD = CF$, $\angle BCF = \angle EFK$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DEF$.

16. На сторонах кута A позначено точки B і C так, що $AB = AC$. $DC \perp AE$, $BE \perp AD$ (мал. 8). Доведіть, що: 1) $BD = CE$; 2) AO – бісектриса кута A.

Мал. 7





Мал. 8

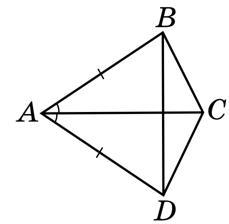
До § 29

17. AK – основа рівнобедреного трикутника AKP.

1) $AP = 5$ см. Знайдіть PK.

2) $\angle A = 70°$. Знайдіть $\angle K$.

18. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 5 см, а бічна сторона – 4 см. Знайдіть периметр трикутника.



Мал. 9

19. На малюнку 9 $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$. Доведіть, що $\triangle BCD$ – рівнобедрений.

20. Основа та прилеглий до неї кут одного рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють основі та прилеглому до неї куту іншого рівнобедреного трикутника. Чи будуть рівними між собою ці трикутники?

21. Основа та бічна сторона рівнобедреного трикутника відносяться як 3 : 4. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо його периметр дорівнює 88 см.

22. $\triangle ABC$ і $\triangle ABD$ рівнобедрені зі спільною основою AB. Точки C і D лежать по різні боки від прямої AB. Доведіть, що $\triangle ACD = \triangle BCD$.

До § 30

23. Як називають у трикутнику:

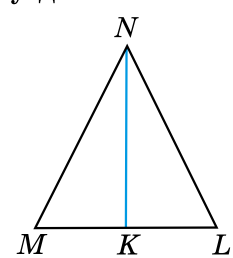
1) відрізок, що сполучає його вершину із серединою протилежної сторони;

2) перпендикуляр, проведений з його вершини до прямої, що містить протилежну сторону;

3) відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони?

24. Бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 5 см. Знайдіть висоту цього трикутника, проведену до основи; медіану цього трикутника, проведену до основи.

25. На малюнку 10 відрізок NK – медіана рівнобедреного трикутника MNL з основою ML. Запишіть три пари рівних кутів і дві пари рівних відрізків, що є на цьому малюнку.

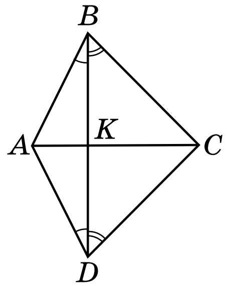


Мал. 10

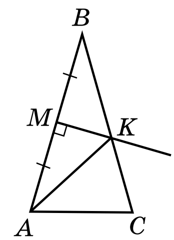
26. AM і A_1M_1 – відповідно медіани рівних між собою трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$.

27. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику будь-яка точка проведеної до основи висоти рівновіддалена від кінців основи трикутника.

4 **28.** На малюнку 11 $\angle ABD = \angle ADB$, $\angle CBD = \angle CDB$. Доведіть, що $BD \perp AC$.



Мал. 11

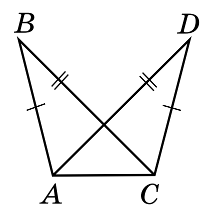


Мал. 12

29. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = BC = a$ см. З точки M – середини AB – проведено перпендикуляр до AB, який перетинає BC в точці K (мал. 12). Знайдіть довжину сторони AC та периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника AKC дорівнює b см ($b > a$).

До § 31

2 **30.** Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 13), якщо $AB = CD$, $BC = AD$.



Мал. 13

3 **31.** Сторона одного рівностороннього трикутника дорівнює стороні іншого рівностороннього трикутника. Чи можна стверджувати, що трикутники рівні між собою?

4 **32.** Доведіть рівність трикутників за двома сторонами та медіаною, проведеною до однієї з них.

Головне в темі 6

- ✓ **Трикутник** – фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки.
- ✓ Геометричні фігури ***рівні між собою***, якщо їх можна сумістити накладанням.

Перша ознака рівності трикутників. **Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.**

Друга ознака рівності трикутників. **Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.**

Третя ознака рівності трикутників. **Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.**

- ✓ Трикутник **рівнобедрений**, якщо в нього дві сторони рівні.
- ✓ Трикутник, усі сторони якого мають різні довжини, – **різносторонній**.
- ✓ Трикутник **рівносторонній**, якщо в нього всі сторони рівні.

ВЛАСТИВІСТЬ КУТІВ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

ОЗНАКА РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

Якщо у трикутнику два кути між собою рівні, то він рівнобедрений.

- ✓ **Медіана** трикутника – відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.
- ✓ **Бісектриса** трикутника – відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.
- ✓ **Висота** трикутника – перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.

ВЛАСТИВІСТЬ БІСЕКТРИСИ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ ДО ВПРАВ

Узагальнення та систематизація знань за курс математики 5–6 класів

11. 1834 р. **12.** 1816 р. **13.** 1) 9; 2) 2; 3) 6. **14.** 1) 9; 2) 2; 3) 2. **15.** 10 086; 99 876. **16.** 1014; 9984. **24.** 1) 29,384; 2) 4,855. **25.** 1) 3,026; 2) 0,6505. **41.** 250 грн. **42.** 50 кг. **43.** Збільшилася на 2 %. **44.** Зменшилася на 8 %. **53.** 1) 4,75; 2) 0,1. **54.** 1) 0,75; 2) 0,8. **55.** 1) На 25 %; 2) на 20 %. **56.** 1) Зменшилася на 10 %; 2) збільшилася на 5 %. **57.** 7,2 %. **58.** 25 %. **71.** 1) −0,5; 2) −2. **72.** 1) −23; 2) 1,35. **73.** VI ст. **74.** 1108 р. **75.** $a + 22b$; −36. **76.** $30y - x$; −35. **77.** $-2\frac{14}{65}$. **78.** 28,09. **79.** −0,512. **80.** 20. **81.** 12.

Тема 1

§ 1

1.14. 1), 2), 4), 6), 7) Так; 3), 5), 8) ні. **1.17.** Через 16 місяців. **1.20.** 999.

§ 2

2.19. 1) −5; 2) −2; 3) −4,75; 4) −10. **2.20.** 1) 1; 2) −3; 3) −2,5; 4) −5. **2.21.** 1875 р. **2.22.** 1804 р. **2.23.** 1) 0; 2) $\frac{c-b}{2}$; 3) $-2m$; 4) $b - 3a$. **2.24.** 1) 0; 2) $\frac{2m-a}{2}$; 3) $2b$; 4) $2a - p$. **2.25.** 1), 5), 6) Так; 2), 3), 4) ні. **2.26.** 1) 4; 2) 1,6. **2.27.** 1) 1,2; 2) −1,8. **2.29.** 1) −4; 4; 2), 6) рівняння не має розв'язків; 3) −3; 3; 4) −5; 5) 6; 8; 7) 3; −4; 8) −6; 6; 9) −3; 5. **2.30.** 1) −9; 9; 2) рівняння не має розв'язків; 3) −8; 8; 4) 0,5; 5) 2; 5; 6) −4; 4. **2.31.** 1) 2; 2) $1\frac{5}{7}$; 3) −9. **2.32.** 1) 2; 2) 10. **2.33.** 1) Немає розв'язків; 2) x – будь-яке число. **2.34.** 1) x – будь-яке число; 2) немає розв'язків. **2.35.** 1) 5; 2) 3; 3) −5; 4) −1; 5) немає розв'язків; 6) x – будь-яке число. **2.36.** 1) 1; 2) 3; 3) 0,2; 4) x – будь-яке число. **2.37.** 1) $b = 11$; 2) $b = 4{,}5$. **2.38.** 1) $a = 24$; 2) $a = 3{,}5$. **2.39.** −4; −2; −1; 1; 2; 4. **2.40.** −6, −3, −2, −1. **2.41.** 1) 1; 2) −3; 3) немає таких значень a. **2.42.** 1) −1; 2) 3; 3) немає таких значень b. **2.43.** 1) 1; 2) −2; 3) немає таких значень m. **2.44.** 1) −2; 2) немає таких значень a; 3) 4. **2.45.** 1) Якщо $b = -1$, то рівняння не має розв'язків; якщо $b \neq -1$, то $x = \frac{7}{b+1}$; 2) якщо $b = 5$, то x – будь-яке число;

якщо $b \neq 5$, то $x = -1$; 3) якщо $b = 2$, то рівняння не має розв'язків; якщо $b = -2$, то x – будь-яке число; якщо $b \neq 2$, $b \neq -2$, то $x = \frac{b+2}{|b|-2}$. **2.46.** 1) 3; 2) –3; 4. **2.51.** 1) 250 мг; 2) 5 добових доз. **2.55.** $x = 6$, $y = 7$ або $x = 7$, $y = 6$.

§ 3

3.10. 48. **3.20.** 60 вареників; 63 вареники. **3.21.** 11 200 грн. **3.22.** 45 км/год; 18 км/год. **3.23.** 15 кг; 12 кг. **3.24.** 12 км. **3.25.** 7 см; 11 см; 77 см^2. **3.26.** 48 оповід., 24 оповід. **3.27.** 27 грн; 9 грн. **3.28.** 125, 137, 168 наборів. **3.29.** 24 см, 33 см, 48 см. **3.30.** Ні. **3.31.** Ні. **3.32.** Через 4 роки. **3.33.** 36 кущів; 12 кущів. **3.34.** По 40 відпочивальників. **3.35.** 24 кг. **3.36.** 15 зошитів; 10 зошитів. **3.37.** 7 коробок, 5 коробок. **3.38.** 28 учнів. **3.39.** 50 кг. **3.40.** 48 і 18. **3.41.** 90 і 120. **3.42.** 18 км/год. **3.43.** 2 км/год. **3.44.** 6,5 год; 78 км. **3.45.** 2,5 год. **3.46.** 5 кг; 10 кг; 15 кг. **3.47.** 7 задач; 10 задач; 14 задач. **3.51.** 1) $a < 0$; 2) $a > 0$. **3.52.** Ні.

Вправи для повторення теми 1

4. Ні. **7.** 1) x – будь-яке число; 2) немає розв'язків; 3) 2; 4) 0,4. **8.** 1) 0; 2) –3. **9.** Якщо $a = 1$, то розв'язків немає; якщо $a \neq 1$, то $x = \frac{8}{a-1}$. **12.** 3 грн 60 коп. **13.** 6 кг; 24 кг. **14.** 2 км/год. **15.** 60 км/год. **16.** 24 вареники; 48 вареників. **17.** 8 робітників; 90 000 грн. **18.** 5 днів. **19.** 45 г; 135 г.

Тема 2

§ 4

4.9. 2) 6; 3) 16. **4.10.** 2) 3; 3) 7. **4.15.** 6069.

§ 5

5.14. 17 см. **5.15.** 6 см. **5.16.** Харків. **5.17.** Стус. **5.18.** 10,1 см або 0,3 см; два розв'язки. **5.19.** 9,7 см або 4,7 см; два розв'язки.

§ 6

6.17. 1) 180°; 2) 90°; 3) 30°; 4) 120°. **6.18.** 1) 90°; 2) 180°; 3) 150°; 4) 60°. **6.19.** 20°. **6.20.** 112°. **6.21.** 76°. **6.22.** 131°. **6.23.** Кравчук. **6.24.** Варшава. **6.25.** 60°. **6.26.** 60°.

§ 8

8.14. 1) 81° і 99°; 2) 54° і 126°. **8.15.** 1) 45° і 135°; 2) 36° і 144°. **8.16.** 40° і 100°. **8.17.** $\angle A = 100°$; $\angle B = 75°$. **8.18.** 90°. **8.19.** 40° і 80°. **8.20.** 80° і 60°. **8.21.** 72° і 108° або 60° і 120°. **8.25.** 1) Кут; 2) пряма; 3) Евклід; 4) геометрія.

§ 9

9.9. 62°. **9.13.** 1) Усі по 90°; 2) 89°; 91°; 89°; 91°. **9.14.** 1) 8°; 172°; 8°; 172°; 2) усі по 90°. **9.15.** 1) 81°; 2) 67°; 3) 80°. **9.16.** 1) 60°; 2) 30°. **9.17.** 100°. **9.18.** 50°. **9.19.** 180°. **9.21.** 18 см.

Вправи для повторення теми 2

9. 1) Два, або три, або чотири. 2) Від двох до $n + 1$ частин. **11.** 8 см. **13.** $\frac{a}{2}$ см. **18.** 1) 90°; 42°; 138°; 2) 30′; 3°; 20°. **19.** 1) 30°; 2) 148°. **20.** 1) 70°; 2) 146°. **21.** $\angle AOM = 72°$; $\angle MOB = 96°$. **25.** 54° і 126°. **26.** 30° і 150°. **27.** 80° і 100°. **28.** 144°. **33.** 66°. **34.** 120°. **35.** 1) 36°; 144°; 36°; 144°; 2) 50°; 130°; 50°; 130°. **36.** 40°.

Тема 3

§ 10

10.21. 1996 р. **10.22.** 1615 р. **10.24.** 1) 9; 2) −2,25; 3) $-\frac{4}{9}$; 4) $-\frac{3}{4}$. **10.25.** 1) 4; 2) $-\frac{4}{7}$; 3) $-1\frac{3}{4}$; 4) $-1\frac{1}{4}$. **10.26.** 1) $x^2 - y^2$; 2) $ab - mn$; 3) $d^2 - (d - a)(d - b)$, або $ad + b(d - a)$, або $bd + a(d - b)$. **10.29.** 84 км. **10.30.** 27 600 грн. **10.33.** 1) Так; 2) ні.

§ 11

11.20. 1) $2x - 3$; 2) $6m - 4n$; 3) $2p - 1$; 4) $2x - y$; 5) $3\frac{1}{4}a + 5\frac{3}{4}b$; 6) $2n - m$. **11.21.** 1) $3a - 1$; 2) $13m - 13a$; 3) $1 - 2y$; 4) $-0{,}6b$. **11.29.** 1) 5 %; 2) 0,25 %. **11.30.** 16 км/год. **11.31.** 120 км; 80 км.

§ 12

12.28. 1) 1; 2) 3; 3) −5. **12.29.** 1) 2; 2) 1; 3) 5. **12.31.** 1) $5\frac{2}{15}$; 2) $-2\frac{11}{25}$. **12.32.** Так. **12.33.** 1) 36 г.

§ 13

13.36. 1) 1000; 2) 25; 3) 1; 4) 128; 5) 2; 6) $\frac{4}{9}$. **13.37.** 1) 1; 2) 32; 3) $\frac{8}{9}$; 4) $\frac{4}{9}$. **13.38.** 1) 27; 2) 32; 3) 243; 4) 25. **13.39.** 1) 7; 2) 12; 3) 324; 4) $\frac{3}{16}$. **13.40.** 1) 7; 2) 12; 3) 20; 4) $\frac{81}{256}$. **13.41.** 1) $6^{10} = 36^5$; 2) $10^{20} > 20^{10}$; 3) $5^{14} < 26^7$; 4) $2^{3000} < 3^{2000}$. **13.43.** 1) 68 грн; 2) 74,8 грн; 3) зменшилася на 5,2 грн; 4) зменшилася на 6,5 %. **13.44.** 1) 7; 2) 9; 3) −1,5; 4) −26. **13.45.** $3{,}54a - 8{,}6b$; 103,7. **13.46.** 15 троянд. **13.48.** Лише одним способом.

§ 14

14.11. 1), 3), 4) Ні; 2) так. **14.12.** $18x^3$ см^3. **14.13.** $3b^2$ дм^2. **14.16.** Олена отримала прибуток на 14,14 грн більше, ніж Леонід. **14.18.** 666 сторінок.

§ 15

15.13. 1) $2m^3$ або $-2m^3$; 2) $0{,}6p^4q^5$ або $-0{,}6p^4q^5$; 3) $-2c^3$; 4) $10c^2m^4$; 5) $2ab^2$ або $-2ab^2$; 6) c^3p^9. **15.14.** 1) $3m^5n^{11}$; 2) $\frac{1}{5}ab^6$; 3) $-12mp$; 4) $-\frac{1}{9}a$; 5) −1; 6) $-\frac{1}{64}n^7$. **15.15.** 1) $5mn^5$; 2) $-3x^6$; 3) $-\frac{1}{3}a^3b$; 4) $-\frac{1}{24}$. **15.16.** 1) $240m^8$; 2) $-8m^{17}$; 3) $-a^{13}b^{19}$; 4) $-5\frac{1}{3}a^8c^{13}$. **15.17.** 1) $24a^{13}$; 2) $-100a^{25}$; 3) $-2a^{31}b^9$; 4) $-12\frac{4}{5}m^7n^{13}$. **15.19.** 1) $8a^{11}b^9$; 2) $6\frac{3}{4}m^{20}n^{24}$; 3) $-49m^{14}n^{14}$; 4) $-32x^{20}c^{50}$. **15.20.** 1) $2700m^7n^8$; 2) $-2a^{13}b^9$; 3) $-27a^{26}m^{10}$; 4) $x^{28}y^{28}$. **15.23.** 1) $-0{,}1a^{2n+3}b^{2n+5}$; 2) $72a^{6n+6}b^{15+6n}$; 3) $a^{8n+10}b^{18n+3}$; 4) $x^{13n-5}y^{12n+5}$. **15.24.** 1) $2\frac{1}{3}$; 2) $11\frac{2}{3}$; 3) −49; 4) 343. **15.25.** 1) $1\frac{4}{5}$; 2) $12\frac{3}{5}$; 3) −81; 4) 729. **15.27.** 1) b^4; 2) $-m^8$; 3) a^7; 4) $-n^8$. **15.28.** 98. **15.29.** 3500 кг.

Вправи для повторення теми 3

4. 1) 5; 2) 17; 3) −6; 4) −1,2; 5) 11; 6) 2,4. **9.** 1), 4) Ні; 2), 3) так. **13.** 1) 5; 2) 1; 3) 6; 4) 2. **14.** 1) Так; 2) ні. **18.** 1) a^{25-3n};

2) a^{5n+3}. **19.** 1) 6; 2) 7. **25.** 1) $3m^2n$; 2) $-7p$. **27.** 1), 3), 4) Так; 2) ні. **28.** 3.

Тема 4

§ 16

16.13. 1) 65°; 2) 60°. **16.14.** 1) 50°; 2) 127°. **16.17.** 140°. **16.18.** 110°. **16.23.** 72° і 108°.

§ 17

17.9. 3) 60°. **17.10.** 3) 50°. **17.16.** 36°. **17.18.** Ні.

§ 18

18.11. $a \parallel b$. **18.12.** $b \parallel c$. **18.19.** 1) 190°; 2) 170°; 3) 170°. **18.20.** 1) 200°; 2) 160°; 3) 200°. **18.21.** Ні. **18.22.** Так. **18.23.** Ні. **18.24.** Ні. **18.28.** 100°. **18.30.** Так.

§ 19

19.15. 1) 82° і 98°; 2) 45° і 135°; 3) 75° і 105°. **19.16.** 1) 36° і 144°; 2) 86° і 94°; 3) 100° і 80°. **19.17.** x = 70° (мал. 19.13); x = 65° (мал. 19.14); x = 129° (мал. 19.15). **19.18.** x = 50° (мал. 19.16); x = 110° (мал. 19.17). **19.19.** Ні. **19.20.** Чотири кути по 40° і чотири кути по 140°. **19.21.** Чотири кути по 32° і чотири кути по 148°. **19.22.** 130°. **19.23.** 100°. **19.27.** Франко.

Вправи для повторення теми 4

6. 1), 2) Так. **16.** Ні. **17.** Так. **20.** 80° і 100°. **22.** 90°. **23.** 70°.

Тема 5

§ 20

20.19. 1) $-5a^2b^4 - 12a^2b + 2a^2b^2$, шостого степеня; 2) $7x^4y^3 - 10x^4y^2 + 21x^2y^4$, сьомого степеня. **20.20.** 1) $4a^2b^3 - a^4$, п'ятого степеня; 2) $2xy^3 + 15x^3y - 7xy^2$, четвертого степеня. **20.21.** $2xy^3 - 2x^3y + 748{,}75$; 748 км. **20.27.** 1), 6) Додатні; 3), 4) від'ємні. **20.31.** 1) 300 кВт. **20.33.** 37; 38.

§ 21

21.13. 1) 3; 2) 3. **21.14.** 1) 0; 2) 3. **21.17.** 1) 1,2; 2) −7. **21.18.** 1) 6; 2) 2,25. **21.30.** 1) −9; 2) 101. **21.31.** 1) −11; 2) 4. **21.33.** 1) $2m^2 + 7mn$; 2) $12m^2 + 3mn - 2n^2$. **21.34.** *Порада*. Після спрощення різниці многочленів одержимо вираз $0{,}2x^4 + 0{,}5x^2 + 4$. Найменше значення цього виразу дорівнює 4, якщо $x = 0$. **21.37.** 1) $100x +$

$+ 10y + z$; 2) $100z + 10y + x$; 3) $100x + 11y + 11z$; 4) $90y + 9x + z$. **21.40.** 1) 4^{30}; 2) 8^{20}; 3) 16^{15}; 4) 32^{12}. **21.41.** 1) 0,3 л. **21.43.** *Порада*. Натуральне число є кратним числу 36 тоді і тільки тоді, коли воно є кратним числам 4 і 9. Далі використати ознаки подільності на 4 (задача № 12.34) та на 9.

§ 22

22.24. 1) $2a$; -7; 2) $11 - 27x$; 12; 3) $3a^2 - 3b^2$; 0; 4) $2xy^3$; -2. **22.25.** 1) $13a^2$; $\frac{1}{13}$; 2) $8x^2 - 8y^2$; 0. **22.26.** 1) 2; 2) -27; 3) -1; 4) 0,25; 5) x – будь-яке число; 6) немає розв'язків. **22.27.** 1) $-0,75$; 2) -32; 3) $-0,25$; 4) 0,75; 5) немає розв'язків; x – будь-яке число. **22.28.** 1) $1\frac{2}{3}$; 2) $-1,5$. **22.29.** 16 г. **22.30.** 12 грн 50 коп.; 30 грн; 45 грн. **22.31.** 18 котушок; 12 котушок. **22.32.** 18 км/год. **22.35.** 1) $-x^{n+4}$; 2) $-y^{2n}$; 3) $-3z^n$. **22.37.** 1) $\frac{1}{3}a^7b^{12}$; 2) $-10m^8n^{23}$. **22.38.** 1) 8; 2) 87,5. **22.39.** 1) $t_F = \frac{5}{9}(t_C - 32)$. **22.41.** *Порада*. Розгляньте суму $(6a + b) + (6b + a)$ та доведіть, що при натуральних a і b вона є кратною числу 7.

§ 23

23.23. 1) 74 300; 2) 1 103 000. **23.24.** 1) $-5,23$; 2) 0; 3) 4; 4) -27. **23.25.** 1) 10,11; 2) $1\frac{1}{5}$. **23.29.** 1) 0; $\frac{1}{4}$; 2) 0; -4; 3) 0; -9; 4) 0; 1,5. **23.30.** 1) 0; $-\frac{1}{12}$; 2) 0; 10; 3) 0; 14; 4) 0; $-\frac{1}{2}$. **23.31.** 1) $-\frac{2}{3}$; 5; 2) $-2,5$; 2. **23.32.** 1) $-1,25$; 7; 2) 3; $-3,5$. **23.35.** 1) $25(m - 2)^2$; 2) $81(2a + 3b)^2$. **23.36.** 1) 3; 7; 2) -2; 5. **23.37.** 1) 2; 4; 2) $-2\frac{1}{3}$; 4. **23.41.** 24 см і 8 см. **23.43.** Так, наприклад, $a = -2$; $b = 0$; $c = 1$.

§ 24

24.16. 1) -6; 2) 0. **24.17.** 1) 2; 2) 0. **24.20.** 1) $27m^3 + 8n^3$; 2) $8x^3 - 125y^3$; 3) $-x^3 + x^2a + 5xa^2 - 2a^3$; 4) $-3m^3 + 16m^2x - 2mx^2 - x^3$. **24.21.** 1) $27x^3 - y^3$; 2) $27a^3 + 12a^2b - 7ab^2 - 2b^3$. **24.22.** 1) $14 - 15m$; 2) $-18y^2 - 4$; 3) $4a + 4$; 4) $b + 15$. **24.23.** 1) $-x^2 - 15$; 2) $11a + 10$; 3) $12 - 17x$; 4) 16. **24.32.** 1) $x^2 - 5x^3$; 44; 2) a^3; 27. **24.33.** 1) $-24x$; -27; 2) $27b^3$; 1. **24.34.** 1) 3;

2) $\frac{1}{3}$. **24.35.** 1) −2; 2) −1. **24.38.** 14; 15; 16. **24.39.** На 2. **24.40.** На 3. **24.43.** 18; 19; 20; 21. **24.44.** 24; 25; 26; 27. **24.47.** 18 см; 12 см. **24.48.** 350 км. **24.49.** 1) 4; 2) $\frac{1}{5}$. **24.52.** 185 год. **24.53.** $27\frac{1}{125}$. *Порада*. Позначте $a = \frac{1}{125}$; $b = \frac{2}{129}$; тоді одержите вираз $(3 - a) \times (4 + b) + (3 + a)(5 + b) - 6b$, який далі потрібно спростити.

§ 25

25.14. 1) 0; 2) $-\frac{5}{9}$. **25.15.** 1) 0; 2) −0,1. **25.16.** 1) $3x^2y(3xy^2 - 1) \times (5y - x^2)$; 2) $(0{,}7m - 0{,}9n)(3n^2 - 4p^2)$. **25.17.** 1) $2(m^2 - 2x^3) \times (4c - 3x)$; 2) $xy(3y + 4x^2)(0{,}4y - 0{,}5x^4)$. **25.18.** 1) 5; 8; 2) −0,4. **25.19.** 1) −7; 1; 2) $-\frac{1}{7}$. **25.20.** 1) $(t^2 - p)(a + t - b)$; 2) $(a - m) \times (x^2 + y^2 - 1)$; 3) $(m - 7)(b - 1 + m^2)$; 4) $(a - b)(6x + 3y - z)$. **25.21.** 1) $(ab + 1)(a + b + 9)$; 2) $(4x + 5m)(2a + b - 1)$. **25.22.** 1) $(x + 1) \times (x + 4)$; 2) $(x - 1)(x - 4)$; 3) $(x - 2)(x + 3)$; 4) $(a + b)(a + 3b)$. **25.23.** 1) $(x - 1)(x - 5)$; 2) $(x - 3)(x + 2)$; 3) $(x - 3)(x + 5)$; 4) $(a + 2b)(a + 3b)$. **25.25.** 1) −2; 2) −10. **25.26.** 3 : 2. **25.29.** Так, наприклад, $x = 66$; $y = 33$. *Порада*. Слід врахувати, що $33^6 = 33 \times 33^5 = 32 \cdot 33^5 + 1 \cdot 33^5 = 2^5 \cdot 33^5 + 33^5 = 66^5 + 33^5$.

Вправи для повторення теми 5

3. a^3b; −5. **4.** Ні. **9.** $2xy + 7xy^2$; −69. **13.** $x = 2$. **14.** $x^3 - \frac{5}{8}x^2$. **15.** 24 ц; 21 ц; 20 ц. **16.** 2. **20.** 1) 5; 3; 2) 2; 7; −7. **21.** 1) −2; 2) −12; 3) 28; 4) 8. **25.** 1) −1; 2) 8. **28.** 50 см; 40 см. **31.** 1) $(3c - 2y) \times (4x^2 - 3y^3)$; 2) $(0{,}8m - 0{,}5n)(2n^2 - 3p^2)$. **32.** 1; −6.

Тема 6

§ 26

26.9. 5 см; 15 см; 12 см. **26.10.** 12 дм; 10 дм; 18 дм. **26.13.** 12 дм; 16 дм; 24 дм. **26.14.** 16 см; 24 см; 32 см. **26.16.** 19 см. **26.18.** 141°. **26.20.** 5 чотирикутників.

§ 27

27.10. 1), 2) Ні. **27.11.** Так, $AB = BC$. **27.12.** Так, $\angle N = \angle K$. **27.13.** 21 см. **27.14.** 9 см. **27.15.** 16 см. **27.16.** 30°; 60°; 90°.

§ 28

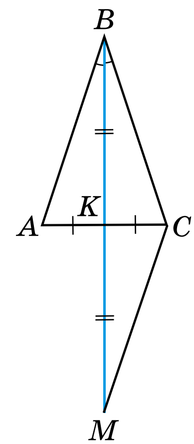
28.20. *Порада.* Нехай точка O – точка перетину AB і MN. Доведіть, що $\triangle AOM = \triangle AON$.

§ 29

29.17. 4 см; 4 см; 6 см. **29.18.** 12 см; 16 см; 16 см. **29.19.** 7 дм; 14 дм; 14 дм. **29.26.** AK = 28 см; BK = 20 см. **29.28.** 1) Конус, сукно; 2) сектор, корсет.

§ 30

30.20. 60 см. **30.21.** 4 см. **30.22.** *Порада.* Нехай BK – бісектриса і медіана трикутника ABC (див. мал.). Продовжте BK за точку K на довжину відрізка BK ($BK = KM$). Доведіть рівність трикутників ABK і CMK. **30.24.** 4 см; 7 см; 7 см. **30.25.** 9 см; 30 см; 30 см. **30.27.** 110 л.



§ 31

31.15. $\angle KAC = 56°$; $\angle BAK = 70°$.

Вправи для повторення теми 6

4. 10 см; 20 см; 16 см. **5.** AB = 5 см; BC = 8 см; AC = 7 см. **8.** Ні. **9.** 18 см. **20.** Так. **21.** 24 см; 32 см; 32 см. **29.** $AC = b - a$, $P = a + b$.

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

№ завдання / № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	В	Г	Б	А	В	Г	В	Б	Г	В	Б	Г	1–Г; 2–Б; 3–А
2	В	А	Б	Б	Г	Г	А	В	Г	В	А	Г	1–Г; 2–А; 3–Б
3	В	Г	А	Б	В	Б	В	Г	В	А	Б	В	1–В; 2–Г; 3–А
4	Г	Б	Г	Б	А	В	В	Б	А	В	Б	Г	1–В; 2–А; 3–Б
5	А	Г	Б	Б	В	А	В	Б	Б	А	В	Г	1–Б; 2–А; 3–В
6	Б	Б	Б	Г	В	В	Г	А	А	Г	Г	Б	1–А; 2–В; 3–Б

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК (АЛГЕБРА)

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК (ГЕОМЕТРІЯ)

ЗМІСТ

Авторські відеоуроки з алгебри відповідно до тем цього підручника можна переглянути за посиланням *https://cutt.ly/0w8DhUM4* або QR-кодом.

Авторські відеоуроки з геометрії відповідно до тем цього підручника можна переглянути за посиланням *https://cutt.ly/jw8Dhib3* або QR-кодом.

Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім'я учня / учениці	Клас	Навчальний рік	Оцінка	
				на початку року	в кінці року
1					
2					
3					
4					
5					

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

МАТЕМАТИКА
(інтегрований курс)

Підручник для 7 класу
закладів загальної середньої освіти

у 2-х частинах

Частина 1

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

У підручнику використано ілюстративний матеріал з відкритих джерел інтернету, зокрема сайтів *vecteezy.com*, *depositphotos.com*. Усі матеріали в підручнику використано з навчальною метою відповідно до законодавства України про авторське право і суміжні права.

Редактор *Наталія Дашко*
Обкладинка *Олександра Павленка*
Макет, художнє оформлення *Олександра Павленка*
Комп'ютерна верстка *Юрія Лебедєва*
Коректори *Інна Борік, Олена Симонова*

Формат 70×100/16.
Ум. друк. арк. 20,80. Обл.-вид. арк. 18,02.
Тираж 14748 пр. Вид. № 0037.
Зам. № 24-04-0805.

ТОВ «Генеза»,
вул. Генерала Алмазова, 18/7 (літ. В), офіс 404, м. Київ, 01133, Україна.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 7692 від 24.10.2022.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ»,
вул. Максиміліанівська, 17, м. Харків, 61024, Україна.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 6847 від 19.07.2019.