М. І. Бурда
Н. А. Тарасенкова

Оріон

Геометрія

9

УДК 514(075.3)
Б91

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(*наказ Міністерства освіти і науки України*
від 20.03.2017 р. № 417)

ВИДАНО ЗА РАХУНОК ДЕРЖАВНИХ КОШТІВ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Експерти, які здійснювали експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Л. І. Маєвська, Навчально-виховний комплекс «Інформатико-математичний ліцей — загальноосвітня школа I–II ступенів» Торецької міської ради Донецької області, вчитель, вчитель-методист;
Л. В. Микуляк, Снятинський районний методичний кабінет відділу освіти Снятинської районної ради Івано-Франківської області, методист, старший вчитель;
О. П. Вашуленко, Національна академія педагогічних наук України, старший науковий співробітник науково-організаційного відділу, кандидат педагогічних наук.

Бурда М. І.
Б91 Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. — К. : УОВЦ «Оріон», 2017. — 224 с. : іл.

ISBN 978-617-7485-16-1.

УДК 514(075.3)

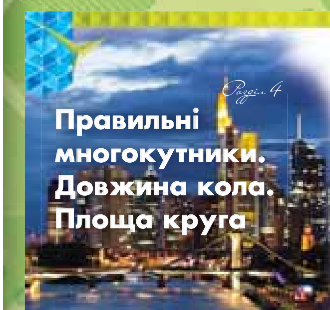
ISBN 978-617-7485-16-1

ЗМІСТ


Розділ 1
Метод координат на площині


Розділ 2
Вектори на площині


Розділ 3
Розв’язування трикутників


Розділ 4
Правильні многокутники. Довжина кола. Площа круга


Розділ 5
Геометричні перетворення

Дорогі учні!

У 8 класі ви ознайомилися з властивостями й ознаками чотирикутників та подібних трикутників, навчилися знаходити площі трикутників і чотирикутників, ознайомилися з новими способами обчислення сторін і кутів прямокутних трикутників та виробили вміння застосовувати ці способи на практиці.

У цьому році ви дізнаєтеся, як застосовувати теореми синусів і косинусів для знаходження невідомих сторін і кутів трикутника. Вивчете нові формули для знаходження площі трикутника. Одержите знання про правильні многокутники, геометричні перетворення, вектори на площині.

Як успішно вивчати геометрію за цим підручником? Увесь матеріал поділено на п'ять розділів, а розділи — на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на текст, виділений жирним шрифтом. Це — найважливіші означення і властивості геометричних фігур. Їх потрібно зрозуміти, запам'ятати й уміти застосовувати під час розв'язування задач. Курсивом виділено терміни (наукові назви) понять.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Пригадайте головне», які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання й тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Ознайомтеся з порадами до розв'язування задач, із розв'язаною типовою задачею.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечком (°) позначають задачі середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв'язувати, щоб мати змогу вивчати геометрію далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочкою (*) позначено задачі високого рівня. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння та наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

Розв'язавши задачі, виділені жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», ви зможете поглибити свої знання.

У підручнику використано спеціальні позначки (піктограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

Поміркуйте

Типова задача

Як діяти

Домашнє завдання

Як записати

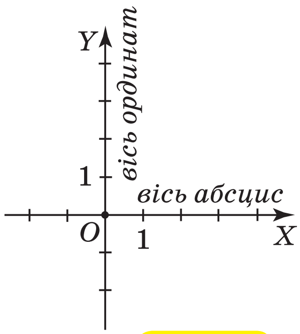
Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового й задоволення від навчання!

Розділ 1

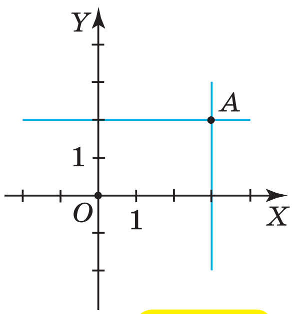
Метод координат на площині

У розділі дізнаєтеся:

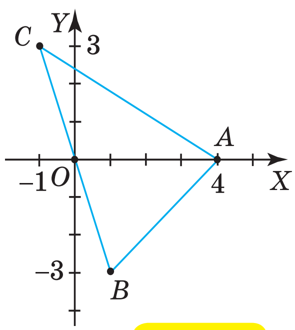
- що таке прямокутна декартова система координат і як у ній визначають координати точки;
- як знайти довжину відрізка за координатами його кінців та координати середини відрізка;
- як визначити синус, косинус і тангенс для будь-якого кута від 0° до 180°;
- про основні тотожності, що пов'язують синус, косинус і тангенс кута;
- що таке рівняння фігури;
- яке рівняння задає коло;
- які є види рівняння прямої;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці



Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3

§ 1. ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

1. ЯК ЗАДАЮТЬ ТОЧКИ НА КООРДИНАТНІЙ ПЛОЩИНІ

Із курсу алгебри ви знаєте, як увести *прямокутну декартову систему координат XOY* на площині (мал. 1). Площину з уведеною на ній системою координат називають *координатною площиною*.

Кожній точці на координатній площині можна поставити у відповідність єдину пару чисел, узятих у певному порядку, і, навпаки, кожній парі чисел відповідає єдина точка координатної площини. Таку впорядковану пару чисел називають *координатами точки в даній системі координат*. Нагадаємо, щоб визначити координати точки, потрібно: через дану точку провести дві прямі, паралельні осям координат; на координатних осях відмітити числа, які відповідають точкам перетину цих прямих з осями; з одержаних чисел утворити впорядковану пару. На малюнку 2 точка A має координати: $A\,(3;\,2)$.

Задача 1. Дано три точки: $A\,(4;\,0)$, $B\,(1;\,-3)$ і $C\,(-1;\,3)$. Чи існує трикутник з вершинами в даних точках?

Розв'язання. Задамо прямокутну декартову систему координат і побудуємо в ній дані точки за їхніми координатами (мал. 3). Очевидно, що точки A, B і C не лежать на одній прямій. Тому трикутник ABC існує.

Щоб довести існування фігури, достатньо її побудувати.

2. ЯК ЗНАХОДЯТЬ ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ НА КООРДИНАТНІЙ ПЛОЩИНІ

Під час розв'язування задачі з попереднього пункту у вас могло виникнути запитання: *Чи можна по-іншому обґрунтувати існування трикутника із заданими координатами вершин?* Так. Наприклад, скориставшись нерівністю трикутника. Але для цього потрібно знати, як знаходити відстань між двома точками за їхніми координатами.

ТЕОРЕМА **(про відстань між двома точками із заданими координатами).**

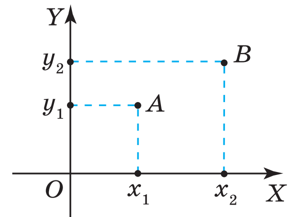
Відстань між двома точками дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць їх відповідних координат:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

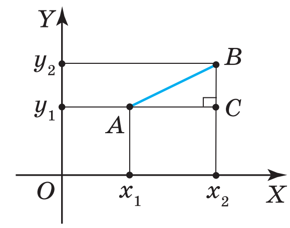
Дано: XOY — прямокутна декартова система координат $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

Довести: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Доведення. Нехай точки A і B містяться в першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 < y_2$ (мал. 4). З'єднаємо точки A і B відрізком та проведемо через них прямі, паралельні осям координат (мал. 5). Нехай C — точка перетину цих прямих. Утворився прямокутний трикутник ABC, у якому кут C — прямий, катет $AC = x_2 - x_1$, катет $BC = y_2 - y_1$, довжина гіпотенузи AB є шуканою відстанню між точками A і B. За теоремою Піфагора, $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$. Звідси $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Інші випадки розміщення точок A і B розгляньте самостійно.



Мал. 4



Мал. 5

Чи залежить формула довжини відрізка від розміщення його кінців у системі координат? Не залежить.

Задача 2. Відстань від початку координат O до точки $A(4; y)$ дорівнює 5 одиниць. Які координати має точка A?

Розв'язання. За умовою задачі, $OA = 5$, $O(0; 0)$, $A(4; y)$. За теоремою про відстань між двома точками, $OA=\sqrt{(4-0)^2+(y-0)^2}$. Оскільки довжина відрізка є числом додатним, то, за властивістю арифметичного квадратного кореня, $OA^2=(4-0)^2+(y-0)^2$. Складемо та розв'яжемо рівняння:

$$5^2=(4-0)^2+(y-0)^2,$$

$$25=16+y^2,$$

$$y^2=9,$$

$$y=\pm 3.$$

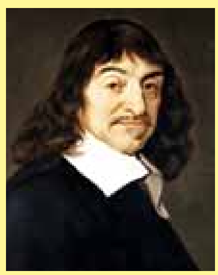
Обидва корені задовольняють умову задачі, тому точка A має ординату або 3, або –3. Це означає, що на координатній площині існує дві точки, які є шуканими: $A_1(4; 3)$ і $A_2(4; -3)$.

Складаючи рівняння на основі формули відстані між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, можна відразу скористатися рівністю:

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

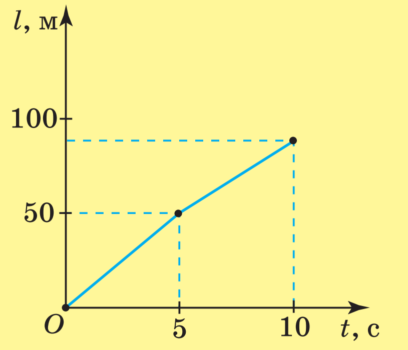
Дізнайтеся більше

1. Прямокутна декартова система координат названа на честь видатного французького вченого Рене Декарта (1596–1650), відомого значними досягненнями в галузі філософії, математики, фізики, фізіології. Математичні дослідження Декарта тісно пов'язані з його роботами з фізики й філософії. У «Геометрії» (1637) Декарт уперше ввів поняття змінної та функції, їх теперішнє позначення — малими латинськими буквами x, y. Установлений ним зв'язок між відрізками й числами зумовив взаємне проникнення геометрії та алгебри, зародження нового розділу математичної науки — *аналітичної геометрії*. Її методи використовують у багатьох галузях сучасних математичних досліджень.


Рене Декарт

Дізнайтеся більше

2. Прямокутну систему координат широко застосовують у науці, техніці, на практиці. Наприклад, з курсу фізики ви знаєте, що в такій системі координат зображають графік руху (мал. 6), графік залежності кількості теплоти, що виділяється під час згоряння свіжої деревини, від маси палива (мал. 7) та ін. Загальнішим є випадок, коли осі координат не перпендикулярні й шкали на них не рівнозначні, тобто одиничні відрізки мають різну довжину (мал. 8). Таку систему координат називають *афінною* (загальною косокутною).



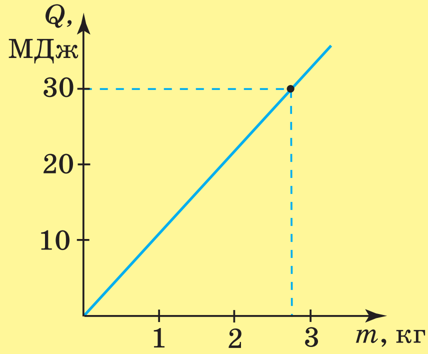
Мал. 6

3. Історія свідчить, що Р. Декарт використовував косокутну систему координат з рівнозначними шкалами (мал. 9), причому лише її першу чверть. У такій системі координат також можна знаходити довжини відрізків. Але при цьому треба враховувати координатний кут φ (мал. 9). Відстань від точки $A\,(x_1;\,y_1)$ до початку координат можна обчислити за формулою:

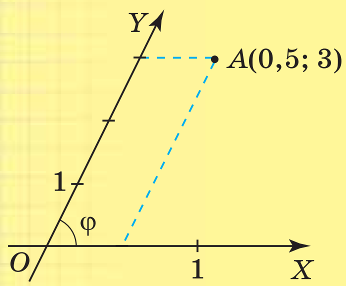
$$AO = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2xy\cos\varphi},$$

а відстань між точками $A\,(x_1;\,y_1)$ і $B\,(x_2;\,y_2)$ — за формулою:

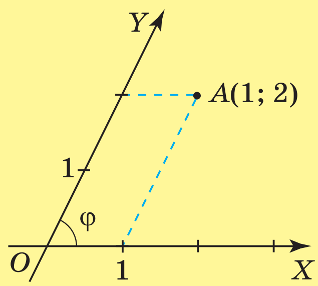
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\varphi}.$$



Мал. 7



Мал. 8



Мал. 9

Пригадайте головне

1. Поясніть, як побудувати прямокутну декартову систему координат на площині.
2. Що називають координатною площиною?
3. Поясніть, як визначити координати точки.
4. Сформулюйте та доведіть теорему про відстань між двома точками із заданими координатами.

Розв'яжіть задачі

1'. Чи правильно, що в прямокутній декартовій системі координат осі координат:
1) паралельні;
2) перетинаються під гострим кутом;
3) перетинаються під прямим кутом?

2'. Чи правильно, що на координатній площині:
1) кожній точці відповідає кілька упорядкованих пар чисел;
2) кожній точці відповідає єдина упорядкована пара чисел;
3) кожна упорядкована пара чисел задає єдину точку;
4) кожна упорядкована пара чисел задає безліч точок?

3'. Чи правильно, що в точки $A\ (x;\ y)$:
1) x — це ордината, значення якої знаходять за віссю OX;
2) x — це абсциса, значення якої знаходять за віссю OY;
3) x — це абсциса, значення якої знаходять за віссю OX;
4) y — це ордината, значення якої знаходять за віссю OX;
5) y — це абсциса, значення якої знаходять за віссю OY;
6) y — це ордината, значення якої знаходять за віссю OY?

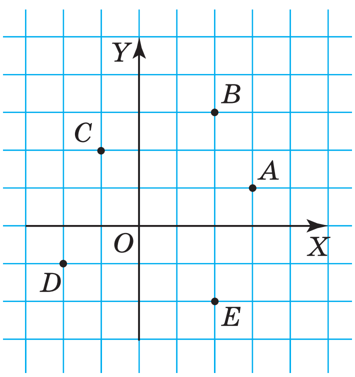
4'. Дано точки $A\ (x_1;\ y_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2)$. Чи правильно, що:
1) $AB = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - (y_2 + y_1)^2}$;
2) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$;
3) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$?

5°. За даними на малюнках 10, 11 визначте координати позначених точок.

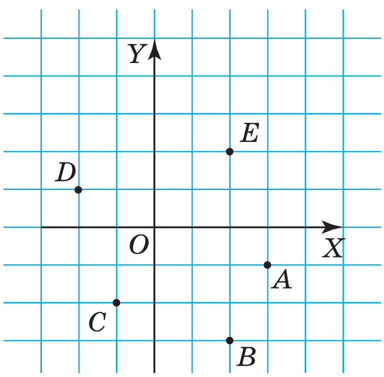
6°. За даними на малюнку 12 визначте координати позначених точок.

7°. Задайте прямокутну декартову систему координат на площині та побудуйте в ній точки: $A\ (1;\ 1)$, $B\ (1;\ -1)$, $C\ (-1;\ -1)$, $D\ (-1;\ 1)$.

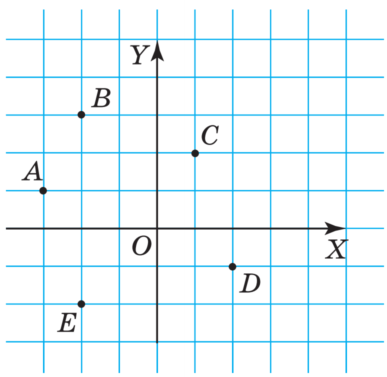
8°. Задайте прямокутну декартову систему координат на площині та побудуйте в ній точки: $K\ (-2;\ 2)$, $L\ (2;\ -2)$, $M\ (-2;\ -2)$, $N\ (2;\ 2)$.



Мал. 10



Мал. 11



Мал. 12

9°. Які знаки мають координати точок у координатних чвертях? Перемалюйте в зошит таблицю 1 і заповніть її.

Таблиця 1

	I чверть	II чверть	III чверть	IV чверть
Знак абсциси				
Знак ординати				

10°. Не виконуючи побудови, з'ясуйте, у якій координатній чверті лежить точка: $A(-145; 200)$, $B(358; -422)$, $C(218; 3390)$, $D(-139; -247)$, $E(-371; 2108)$.

11°. Не виконуючи побудови, з'ясуйте, у якій координатній чверті лежить точка: $F(792; 6203)$, $K(953; -712)$, $L(-37401; -47732)$.

12°. Запишіть координати точки B, якщо з точкою $A(-2; 1)$ вона має:
1) рівні абсциси, але протилежні ординати;
2) рівні ординати, але протилежні абсциси;
3) протилежні абсциси й протилежні ординати;
4) рівні абсциси й рівні ординати.

13°. Запишіть координати точки A, якщо з точкою $B(3; 4)$ вона має:
1) рівні абсциси, але протилежні ординати;
2) рівні ординати, але протилежні абсциси;
3) протилежні абсциси й протилежні ординати;
4) рівні абсциси й рівні ординати.

14°. Через точку $A(3; 2)$ проведіть пряму, паралельну осі:
1) абсцис; 2) ординат.
З'ясуйте, чи лежать на цій прямій точки $B(-3; 2)$, $C(2; 3)$ і $D(3; -2)$.

15°. Точки A і B мають координати:
1) $A(-5; -2)$, $B(-1; -4)$; 2) $A(2; 4)$, $B(2; -4)$.
Чи перетинає відрізок AB осі координат? Відповідь поясніть.

16°. Чи перетинає осі координат відрізок CD, кінці якого мають координати: $C(3; 1)$ і $D(-3; 1)$? Відповідь поясніть.

17°. **Знаючи координати точки, знайдіть відстань від цієї точки до вказаної осі координат.** Перемалюйте в зошит і заповніть таблицю 2.

Таблиця 2

Координати точки	(5; −1)	(−5; −1)	(5; 1)	(−5; 1)	(−2; −4)	(−2; 4)	(2; −4)	(2; 4)
Відстань до осі абсцис								
Відстань до осі ординат								

18°. Визначте відстань між точками:
1) $A(0; 0)$ і $B(3; 4)$;
2) $A(-5; -7)$ і $B(3; 8)$;
3) $A(5; -1)$ і $B(-3; 8)$;

19°. Визначте відстань між точками $A(-6; 3)$ і $B(4; -2)$.

20°. Знайдіть довжину діаметра кола за координатами його кінців:
1) (3; 4) і (2; −1); 2) (−6; 3) і (0; −5).
Який радіус даного кола?

21°. Знайдіть довжину радіуса кола за координатами його кінців: (5; 2) і (1; −1). Який діаметр даного кола?

22°. Знайдіть довжини сторін трикутника ABC, вершини якого мають координати:
1) A (0; 0), B (2; 0) і C (−1; 3);   2) A (1; 2), B (8; 26) і C (19; 26).

23°. Знайдіть довжини сторін трикутника KLM, вершини якого мають координати: K (−2; −1), L (0; 1) і M (0; −3).

24°. Відстань від початку координат O до точки A дорівнює n. Знайдіть невідомі координати точки A, якщо:
1) A (12; y), $n = 13$;   3) A (x; −6), $n = 10$;
2) A (−7; y), $n = 25$;   4) A (x; 15), $n = 17$.

25°. Відстань від початку координат O до точки B дорівнює m. Знайдіть невідомі координати точки B, якщо:
1) B (6; y), $m = 10$;   2) B (x; −3), $m = 5$.

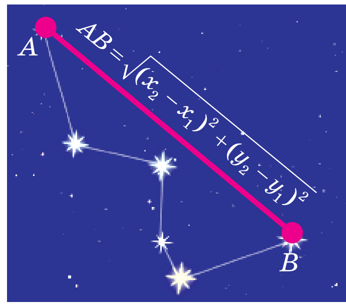
26. Дві вершини квадрата мають координати:
1) (0; 0) і (1; 2);   2) (−1; −1) і (2; 0).
Які координати можуть мати дві інші його вершини?

27. Доведіть, що трикутник ABC є рівнобедреним, якщо:
1) A (−3; 3), B (6; 6), C (3; −3);   2) A (2; −3), B (3; 0), C (−1; −2).

28. Доведіть, що трикутник MPT є рівнобедреним, якщо M (−1; 1), P (2; 3), T (2; −1).

29. Доведіть, що трикутник ABC є прямокутним, якщо:
1) A (0; 0), B (1; 2), C (3; 1);   2) A (5; 1), B (7; 2), C (9; −2).

30. Доведіть, що трикутник PMT є прямокутним, якщо P (−2; −1), M (0; 1), T (0; −3).



31. Відстань між точками A і B дорівнює d. Знайдіть x, якщо:
1) A (2; 3), B (x; 1), $d = 2$;   2) A (−1; x), B (3; $2x$), $d = 5$.

32. Відстань між точками P (5; x) і T (2; 4) дорівнює 3. Чому дорівнює x?

33. На осях координат знайдіть точки, рівновіддалені від двох даних точок:
1) (−1; 1) і (3; 5);   2) (2; −1) і (−2; 1).

34. Визначте довжини сторін трикутника за координатами середин його сторін:
1) (5; 1), (9; 4), (9; −2);   2) (1; 1), (−1; −1), (1; −2).

35. Дві вершини прямокутного трикутника мають координати:
1) A (2; 5), B (3; 2);   2) A (1; 4), B (9; 6).
Чи може третя його вершина міститися в точці: C (8; 8), D (9; 4), O (4; −1), M (8; 7)?

36. Знайдіть площу квадрата, знаючи координати двох сусідніх його вершин:
1) (3; 2), (8; 7);   2) (4; −1), (1; 2).

37. Знайдіть площу квадрата, знаючи координати двох протилежних його вершин:
1) (3; 5), (1; −3);   2) (−2; 2), (10; −3).

38*. Який кут утворює відрізок AB з додатною піввіссю абсцис, якщо:
1) A (0; 2), B (−2; 4);
2) A (−1; −3), B (4; 2)?

39*. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A\ (5; -1)$, $B\ (-7; -6)$, $C\ (-12; 6)$ і $D\ (0; 11)$ є:
1) паралелограмом; 2) ромбом; 3) квадратом.

40*. Який вид чотирикутника $ABCD$, якщо:
1) $A\ (-1; -2)$, $B\ (-2; -4)$, $C\ (-6; -2)$, $D\ (-5; 0)$;
2) $A\ (0; 8)$, $B\ (-6; 0)$, $C\ (2; -6)$, $D\ (8; 2)$?

Проявіть компетентність

41. Як на папері в клітинку побудувати відрізок $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{5}$, якщо a — довжина сторони: 1) однієї клітинки; 2) двох клітинок?

42. Як на папері в клітинку побудувати прямокутний трикутник з вершинами у вузлах сітки й гіпотенузою, що лежить на горизонтальній лінії, якщо даний трикутник:
1) рівнобедрений; 2) не рівнобедрений?

43. Основу драбини завдовжки 6 м відсунуто від стіни на 1 м. На скільки знизиться верхній кінець драбини, якщо основу відсунути від стіни ще на 0,5 м? Розв'яжіть задачу, скориставшись системою координат.

§ 2. КООРДИНАТИ СЕРЕДИНИ ВІДРІЗКА

Знаючи координати кінців відрізка, можна знаходити не тільки його довжину, а й координати його середини.

ТЕОРЕМА (про координати середини відрізка).

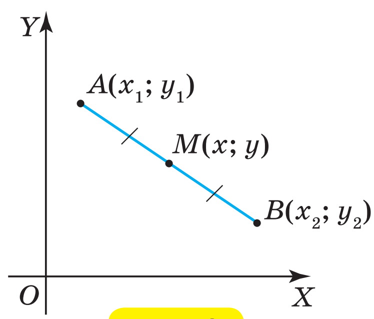
Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Д а н о: XOY — прямокутна декартова система координат (мал. 13), $A\ (x_1; y_1)$, $B\ (x_2; y_2)$, точка $M\ (x; y)$ — середина відрізка AB.

Д о в е с т и: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

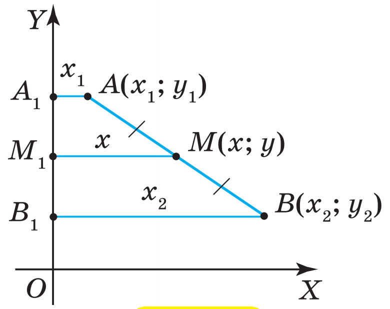
Д о в е д е н н я. Нехай кінці відрізка AB містяться в першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 > y_2$ (мал. 13). Через точки A, B і M проведемо прямі, пара-



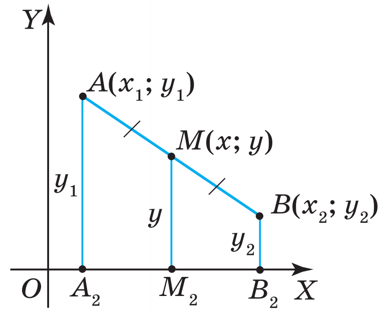
Мал. 13

лельні осі OX (мал. 14). Точки їх перетину з віссю OY позначимо відповідно A_1, B_1 і M_1. Чотирикутник AA_1B_1B — трапеція з основами $AA_1 = x_1$, $BB_1 = x_2$. За побудовою, $MM_1 = x$. Оскільки $AM = MB$ (за умовою) і $MM_1 \parallel AA_1 \parallel BB_1$ (за побудовою), то MM_1 — середня лінія трапеції AA_1B_1B. Тому $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Аналогічно доводимо, що $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Для цього через точки A, B і M проведемо прямі, паралельні осі OY (мал. 15). Точки їх перетину з віссю OX позначимо відповідно A_2, B_2 і M_2. Чотирикутник AA_2B_2B — трапеція з основами $AA_2 = y_1$, $BB_2 = y_2$. За побудовою, $MM_2 = y$. Оскільки $AM = MB$ (за умовою) і $MM_2 \parallel AA_2 \parallel BB_2$ (за побудовою), то MM_2 — середня лінія трапеції AA_2B_2B. Тому $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Інші випадки розміщення точок A і B в системі координат XOY розгляньте самостійно.



Мал. 14



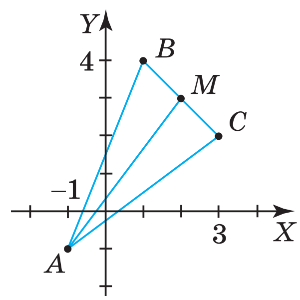
Мал. 15

? Чи залежать формули координат середини відрізка від розміщення його кінців у системі координат? Не залежать.

Задача. Знайдіть довжину медіани AM трикутника з вершинами в точках: A (–1; –1), B (1; 4), C (3; 2).

Розв'язання. Точка M є серединою сторони BC (мал. 16), тому вона має координати: $x = \frac{1+3}{2} = 2$, $y = \frac{4+2}{2} = 3$. Довжина медіани AM дорівнює відстані між точками A і M.

Отже, $AM = \sqrt{(2-(-1))^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.



Мал. 16

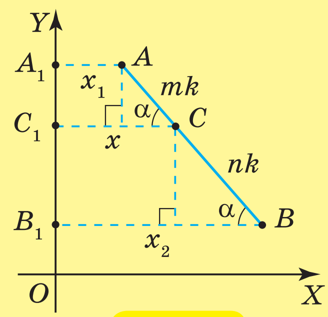
Щоб знайти довжину медіани трикутника, знаючи координати його вершин, визначте координати основи медіани та знайдіть відстань від цієї точки до протилежної вершини трикутника.

Дізнайтеся більше

1. У вас могло виникнути запитання: *Як визначити координати точки, що ділить даний відрізок у заданому відношенні?* Дослідимо це. Нехай кінці відрізка AB і точка C, що ділить його у відношенні $m : n$, мають координати: $A\ (x_1; y_1)$, $B\ (x_2; y_2)$, $C\ (x; y)$ (мал. 17). Уведемо коефіцієнт пропорційності k. Тоді $AC = mk$, $BC = nk$. Проведемо прямі AA_1, BB_1 і CC_1 паралельно осі OX. З точок A і C проведемо перпендикуляри до прямих CC_1 і BB_1 відповідно. Нехай $\angle ABB_1 = \alpha$, тоді $\angle ACC_1 = \alpha$ (доведіть це самостійно).

Далі одержуємо: $x = x_1 + mk \cos\alpha$, $x_2 = x + nk \cos\alpha$. Із другої рівності виразимо косинус α, підставимо цей вираз у першу рівність і знайдемо x:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x}{nk};\quad x = x_1 + mk \cdot \frac{x_2 - x}{nk} \text{ або } x = x_1 + m \cdot \frac{x_2 - x}{n}.$$



Мал. 17

Звідси $nx = nx_1 + mx_2 - mx$ або $(m + n)x = nx_1 + mx_2$. Отже, $x = \frac{n}{m+n}x_1 + \frac{m}{m+n}x_2$.

Аналогічно одержимо, що $y = \frac{n}{m+n}y_1 + \frac{m}{m+n}y_2$.

2. Формули координат точки, що ділить відрізок у заданому відношенні, зокрема координат середини відрізка, справедливі не лише в прямокутній декартовій системі координат, а й в афінній системі координат.

Пригадайте головне

1. За якими формулами визначають координати середини відрізка?
2. Сформулюйте та доведіть теорему про координати середини відрізка.
3. Поясніть, як знайти довжину медіани трикутника, знаючи координати його вершин.

Розв'яжіть задачі

44'. Чи правильно записано формули координат середини відрізка з кінцями в точках $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$:

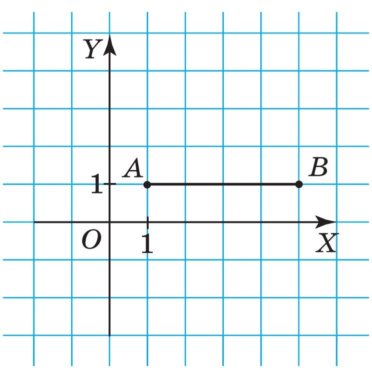
1) $x = \frac{x_1 + x_2}{3}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{3}$; 3) $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$?

2) $x = \frac{x_1 + x_1}{2}$, $y = \frac{y_2 + y_2}{2}$;

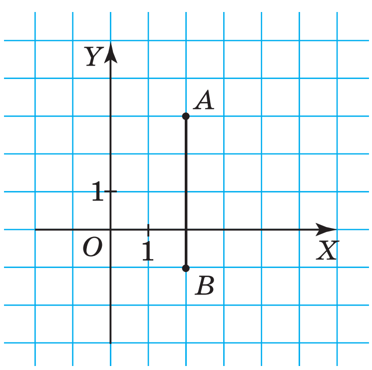
45'. Чи є правильним твердження: 1) координати середини відрізка дорівнюють півсумі ординат його кінців; 2) абсциса середини відрізка дорівнює півсумі ординат його кінців; 3) абсциса середини відрізка дорівнює півсумі абсцис, а ордината — півсумі ординат кінців відрізка?

46°. Які координати мають кінці відрізка AB і його середина (мал. 18, 19)?

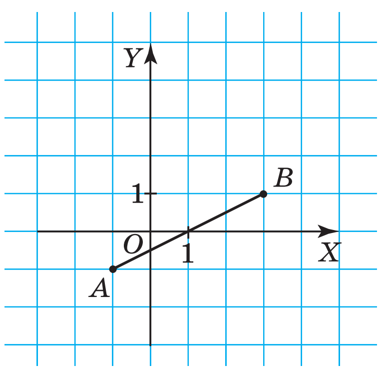
47°. За малюнком 20 визначте, які координати мають кінці відрізка AB і його середина.



Мал. 18



Мал. 19



Мал. 20

48°. Знайдіть координати середини відрізка з кінцями в точках:
1) A (3; –1) і B (–1; 1);
2) A (5; 4) і B (2; 1).

49°. Які координати має середина відрізка з кінцями в точках A (5; 7) і B (11; 17)?

50°. За координатами одного з кінців відрізка HP та його середини M знайдіть координати другого кінця цього відрізка, якщо:
1) H (1; –1), M (3; 3);
2) P (–1; –2), M (–2; –3).

51°. Точка C (7; 9) є серединою відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо інший кінець даного відрізка має координати (2; 5).

52°. Точка O є серединою відрізка AB. За координатами двох даних точок знайдіть координати третьої точки. Перемалюйте в зошит та заповніть таблицю 3.

Таблиця 3

Точка A	(1; 4)	(4; –6)		(5; –2)	(3; 7)	
Точка O	(–2; –1)		(–6; 8)		(–4; 0)	(–1; 4)
Точка B		(–4; 6)	(3; –3)	(2; 0)		(1; –4)

53°. Знайдіть координати середин сторін трикутника ABC, якщо:
1) A (–3; 3), B (6; 6), C (3; –3);
2) A (2; –3), B (3; 0), C (–1; –2).
Яка довжина медіани BM даного трикутника?

54°. Знайдіть координати середин сторін трикутника TOP, якщо: T (2; 3), O (–1; 0), P (2; –3).
Яка довжина медіани OM даного трикутника?

55°. Побудуйте паралелограм з вершинами в даних точках:
1) A (–4; 1), B (0; 5), C (3; 0), D (–1; –4);
2) A (–2; 4), B (–6; 12), C (–2; 16), D (2; 8).
Які координати має точка перетину діагоналей паралелограма?

56°. Побудуйте паралелограм з вершинами в даних точках: A (1; –2), B (–4; –1), C (2; 1), D (–1; 0).
Які координати має точка перетину діагоналей паралелограма?

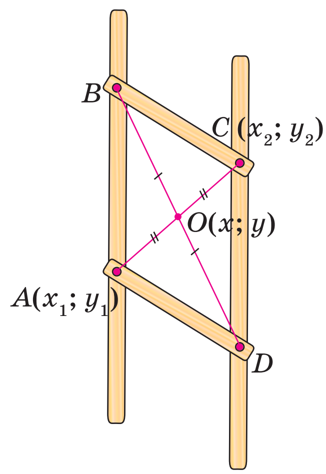
57°. Пряма a проходить через центр кола й перетинає його в точках A і B. Знайдіть координати центра кола, якщо:
1) A (–5; 2), B (1; –4); 2) A (5; –2), B (–1; 4).

58°. Пряма p проходить через центр кола й перетинає його в точках C (5; 2) і T (–1; –4). Знайдіть координати центра кола.

59. Точки P, Q і T ділять відрізок AB на чотири рівні частини. Знайдіть координати цих точок, якщо:
1) A (–5; 2), B (–3; –6); 2) A (1; 3), B (9; –7).

60. Знайдіть довжини медіан трикутника з вершинами в точках:
1) A (2; –1), B (–1; 3) і C (–3; 1); 2) K (0; 0), L (6; 4) і M (10; 26).

61. **Координати точки перетину діагоналей паралелограма дорівнюють середнім арифметичним відповідних координат вершин паралелограма.** Доведіть.



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

62. Знайдіть координати точки перетину діагоналей і четвертої вершини паралелограма $ABCD$, якщо відомі координати трьох його вершин:
1) $A(-2; -3)$, $B(3; 1)$, $C(-1; 2)$;
2) $A(-2; 4)$, $B(-6; 12)$, $D(2; 8)$.

63. Знайдіть координати четвертої вершини паралелограма за координатами трьох його вершин:
1) $A(2; 5)$, $B(8; 13)$, $C(16; 9)$;
2) $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, $C(3; 1)$.

64. Які координати має четверта вершина прямокутника, якщо три його вершини, взяті послідовно, мають координати:
1) $(8; 7)$, $(2; 5)$, $(3; 2)$;
2) $(4; -1)$, $(1; 2)$, $(-1; 0)$?

65. Яку довжину має середня лінія трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) з вершинами в точках:
1) $A(-5; 0)$, $B(0; 5)$, $C(3; 0)$ і $D(-1; -4)$;
2) $A(1; -4)$, $B(-1; -2)$, $C(2; 1)$ і $D(5; -2)$?

66. Знайдіть координати центра кола, описаного навколо трикутника з вершинами в точках:
1) $A(1; 1)$, $B(2; 3)$ і $C(5; -1)$;
2) $A(-1; 6)$, $B(-5; 3)$ і $D(-2; -1)$.

67*. Середини сторін трикутника ABC містяться в точках:
1) $A_1(0; 0)$, $B_1(2; 0)$ і $C_1(-1; 3)$;
2) $A_1(1; 2)$, $B_1(8; 26)$ і $C_1(19; 26)$;
3) $A_1(-2; -1)$, $B_1(0; 1)$ і $C_1(0; -3)$;
4) $A_1(3; 4)$, $B_1(2; -1)$ і $C_1(0; 2)$.
Які координати мають вершини трикутника?

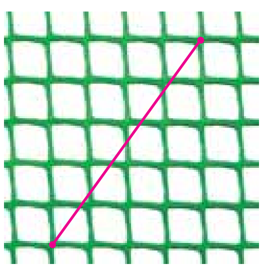
68*. Доведіть, що сума абсцис (ординат) середин сторін трикутника дорівнює сумі абсцис (ординат) його вершин.

69*. Чи можна однозначно задати прямокутник координатами двох його вершин і точки перетину діагоналей, якщо дані вершини є:
1) протилежними;
2) сусідніми?
Відповідь обґрунтуйте.

70*. Якщо протилежні вершини чотирикутника мають координати, такі що сума абсцис і сума ординат однієї пари вершин дорівнює відповідним сумам другої пари вершин, то такий чотирикутник — паралелограм. Доведіть.

71*. Середини бічних сторін трапеції мають рівні ординати (абсциси). Чи паралельні її основи осі абсцис (ординат)? Відповідь поясніть.

Проявіть компетентність



72. На папері в клітинку дано відрізок з кінцями у вузлах сітки. Чи завжди його середина буде міститися у вузлі сітки?

73. Як потрібно розмістити відрізок з кінцями у вузлах сітки, щоб можна було знайти його середину, не виконуючи вимірювань і додаткових побудов?

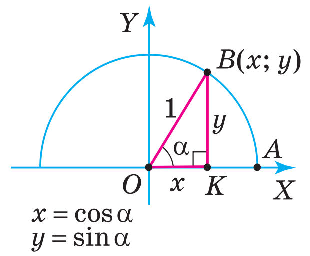
74. Вершини трикутника містяться у вузлах сітки. Проведіть його медіани, не виконуючи вимірювань. Чи завжди точка перетину медіан буде міститися у вузлі сітки? Відповідь поясніть.

75. Два туристи, які перебували на відстані 100 м один від одного, одночасно почули вигук керівника групи. На якій найменшій відстані від кожного з них міг бути керівник у момент вигуку, якщо точно посередині між туристами стоїть дерево, яке в обхваті має 2,5 м?

§ 3. СИНУС, КОСИНУС І ТАНГЕНС КУТІВ ВІД 0° ДО 180°

Досі ми розглядали синус, косинус і тангенс гострого кута як відношення відповідних сторін прямокутного трикутника. Дамо їм означення для будь-якого кута від 0° до 180°. Для цього використаємо систему координат XOY.

У I і II чвертях системи координат XOY проведемо півколо із центром у початку координат і радіусом $R = 1$ (мал. 21). Таке півколо називають *одиничним*. Будемо відкладати кути від додатної півосі OX проти руху годинникової стрілки. Нехай $\angle AOB = \alpha$ — гострий і точка B (кінець радіуса OB) має координати x і y. Проведемо $BK \perp OX$ (мал. 21).

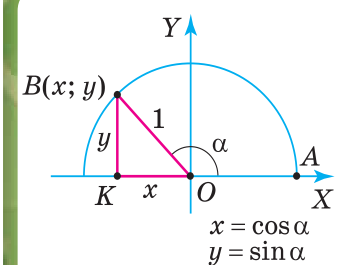


Мал. 21

У прямокутному трикутнику OBK гіпотенуза $OB = 1$, а катети дорівнюють координатам x і y точки B. Значення sin α, cos α і tg α виразимо через координати точки B:

$$\sin\alpha = \frac{y}{1} = y, \quad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$

За цими формулами можна визначити синус, косинус і тангенс тупого кута (мал. 22).

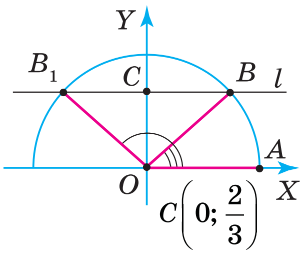


Мал. 22

Якщо радіус одиничного півкола утворює з додатною піввіссю OX кут α, то:
sin α дорівнює ординаті кінця цього радіуса;
cos α дорівнює абсцисі кінця цього радіуса;
tg α дорівнює відношенню ординати й абсциси кінця цього радіуса.

? Чому синуси тупих кутів додатні, а косинуси й тангенси — від'ємні? Тому що ординати в другій чверті додатні, а абсциси — від'ємні.

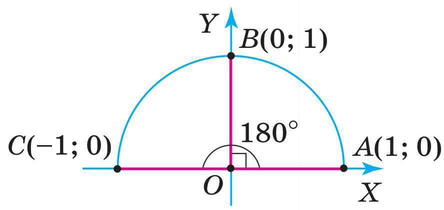
Задача 1. Скориставшись одиничним півколом, побудуйте кут, синус якого дорівнює $\frac{2}{3}$.



Мал. 23

Розв'язання. Проведемо одиничне півколо із центром у початку координат (мал. 23). Позначимо на осі OY точку $C\left(0; \frac{2}{3}\right)$. Через точку C проведемо пряму $l \parallel OX$. Вона перетне одиничне півколо в точках B і B_1, ординати яких дорівнюють $\frac{2}{3}$. Сполучивши точки B і B_1 з початком координат, одержимо два кути, синуси яких дорівнюють $\frac{2}{3}$: гострий — $\angle AOB$ і тупий — $\angle AOB_1$.

Знайдемо значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ для кутів 0°, 90° і 180°. Проведемо радіуси OA, OB і OC, які утворюють ці кути з додатною піввіссю OX (мал. 24). Точки A, B і C мають такі координати:



Мал. 24

$A(1; 0)$, з іншого боку $A(\cos 0°; \sin 0°)$,
$B(0; 1)$, з іншого боку $B(\cos 90°; \sin 90°)$,
$C(-1; 0)$, з іншого боку $C(\cos 180°; \sin 180°)$.

Тоді $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = \frac{0}{1} = 0$,
$\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$,
$\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\operatorname{tg} 180° = \frac{0}{-1} = 0$.

Для кута $\alpha = 90°$ $\operatorname{tg}\alpha$ не існує, оскільки $\operatorname{tg} 90° = \frac{1}{0}$, а на нуль ділити не можна.

Слід запам'ятати дані таблиці 4.

Таблиця 4

α	0°	90°	180°
sin α	0	1	0
cos α	1	0	−1
tg α	0	не існує	0

Задача 2. Доведіть, що для будь-якого кута α від 0° до 180° виконуються нерівності:

$$0 \le \sin\alpha \le 1, \quad -1 \le \cos\alpha \le 1.$$

Розв'язання. Координати x і y точок одиничного півкола змінюються в межах: $0 \le y \le 1$, $-1 \le x \le 1$. Оскільки $y = \sin\alpha$, $x = \cos\alpha$, то $0 \le \sin\alpha \le 1$, $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

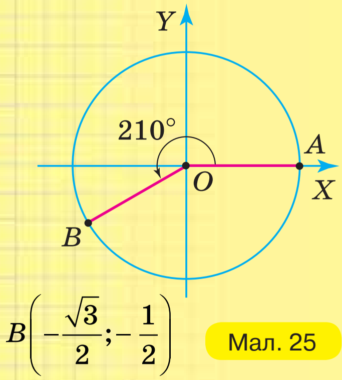
Дізнайтеся більше

У вас може виникнути кілька запитань.

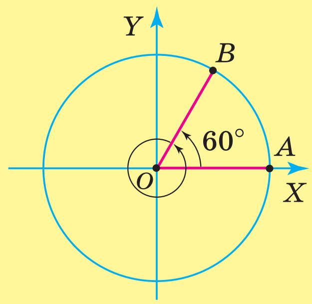
1. *Чи існують кути від 180° до 360° та їх значення синуса, косинуса й тангенса?* Так. Кут можна розглядати як результат обертання радіуса кола. Нехай коло радіуса $R = 1$ із центром у початку координат перетинає вісь OX у точці A (мал. 25). Вважатимемо, що $\angle AOB = 210°$ утворено обертанням радіуса OB проти руху годинникової стрілки. Точка B має координати $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$. Тоді $\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 210° = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Повний оберт радіуса OB утворить кут 360°.

2. *Чи можуть кути бути більшими за 360°*? Поміркуємо. Нехай радіус OB, що утворює кут 60° (мал. 26), продовжуючи свій рух проти годинникової стрілки, зробив один повний оберт. Тоді $\angle AOB = 360° + 60° = 420°$.

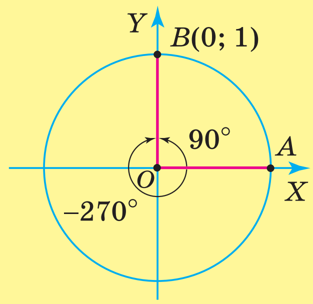
3. *Чи можуть градусні міри кутів бути від'ємними*? Так. Кут вважають від'ємним, якщо його утворено обертанням радіуса кола за годинниковою стрілкою. На малюнку 27 зображено два кути зі спільними початковою стороною OA і кінцевою стороною OB. Один кут дорівнює –270°, а другий дорівнює 90°.



Мал. 25



Мал. 26



Мал. 27

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке синус, косинус і тангенс для довільного кута від 0° до 180°.
2. Для якого кута тангенс не існує й чому?
3. Чому синуси тупих кутів додатні, а косинуси й тангенси — від'ємні?
4. Назвіть значення синуса й косинуса для кутів 0°, 90°, 180°.
5. Назвіть значення тангенса для кутів 0° і 180°.

Розв'яжіть задачі

76'. 1) Чи може абсциса точки одиничного півкола дорівнювати: 2; 0,5; –1?
2) Чи може ордината точки одиничного півкола дорівнювати: 0,8; 1,4; 1?

77'. Радіус одиничного півкола утворює з додатною піввіссю OX кут α. Чи правильно, що $\sin \alpha$ дорівнює:
1) абсцисі кінця радіуса;
2) ординаті кінця радіуса;
3) відношенню ординати й абсциси кінця радіуса?

78'. Радіус одиничного півкола утворює з додатною піввіссю OX кут α. Чи правильно, що $\cos \alpha$ дорівнює:
1) абсцисі кінця радіуса;
2) ординаті кінця радіуса;
3) відношенню ординати й абсциси кінця радіуса?

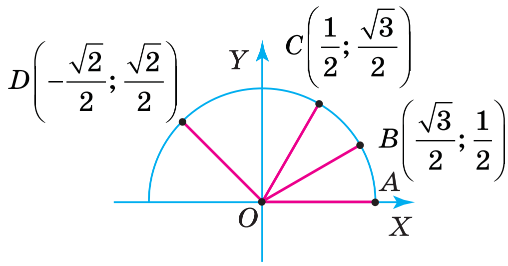
$\sin\alpha = \dfrac{y}{1} = y$

$\cos\alpha = \dfrac{x}{1} = x$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$

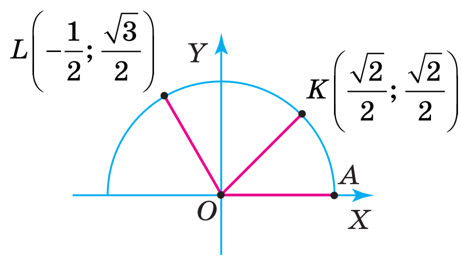
79'. Радіус одиничного півкола утворює з додатною піввіссю OX кут α. Чи правильно, що $\operatorname{tg}\alpha$ дорівнює:
1) абсцисі кінця радіуса;
2) ординаті кінця радіуса;
3) відношенню ординати й абсциси кінця радіуса?

80°. На малюнку 28 зображено одиничне півколо.
1) Назвіть абсциси й ординати точок B, C і D.
2) Дайте назви (α, β, γ) кутам, які утворюють з додатною піввіссю OX радіуси OB, OC і OD.
3) Виразіть значення синуса, косинуса й тангенса цих кутів через координати точок B, C і D.



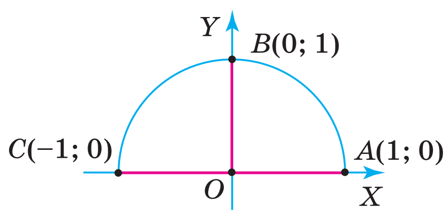
Мал. 28

81°. На малюнку 29 зображено одиничне півколо.
1) Назвіть абсциси й ординати точок K і L.
2) Дайте назви (α, β) кутам, які утворюють з додатною піввіссю OX радіуси OK і OL.
3) Виразіть значення синуса, косинуса й тангенса цих кутів через координати точок K і L.



Мал. 29

82°. 1) Назвіть радіус одиничного півкола (мал. 30), який утворює з додатною піввіссю OX кут: $0°$, $90°$, $180°$.
2) Запишіть значення: а) $\sin 0°$, $\sin 90°$, $\sin 180°$; б) $\operatorname{tg} 0°$, $\operatorname{tg} 180°$.



Мал. 30

83°. 1) Назвіть радіус одиничного півкола (мал. 30), який утворює з додатною піввіссю OX кут: $0°$, $90°$, $180°$.
2) Запишіть значення: $\cos 0°$, $\cos 90°$, $\cos 180°$.

84°. Накресліть систему координат, узявши за одиницю довжини відрізок завдовжки 5 см. Проведіть у I і II чвертях одиничне півколо із центром у початку координат.

1) За допомогою транспортира позначте на одиничному півколі точки A, B, C, D, E так, щоб кути між радіусами OA, OB, OC, OD, OE і додатною піввіссю OX дорівнювали відповідно 35°, 70°, 115°, 130° і 165°.
2) За допомогою лінійки знайдіть координати точок A, B, C, D і E.
3) Знайдіть наближене значення синуса, косинуса й тангенса для кутів 35°, 70°, 115°, 130° і 165°. Накресліть у зошиті та заповніть таблицю 5.

Таблиця 5

α	35°	70°	115°	130°	165°
sin α					
cos α					
tg α					

85°. Який знак мають sin α, cos α і tg α, якщо $0° < \alpha < 90°$? Відповідь поясніть.

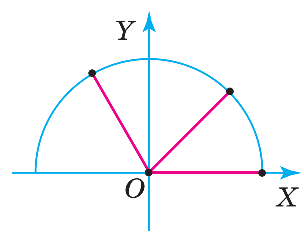
86°. Який знак мають sin α, cos α і tg α, якщо $90° < \alpha < 180°$? Відповідь поясніть.

87°. Накресліть у зошиті таблицю 6. У таблиці поставте знак «+», якщо sin α, cos α або tg α — додатний, і знак «–», якщо від'ємний.

Таблиця 6

α	$0° < \alpha < 90°$	$90° < \alpha < 180°$
sin α		
cos α		
tg α		

88°. **Гострим чи тупим є кут α, якщо:**
1) його косинус від'ємний;
2) його косинус додатний;
3) його тангенс від'ємний? Відповідь поясніть.



89°. Гострим чи тупим є кут α, якщо: 1) його тангенс додатний; 2) його косинус від'ємний? Відповідь поясніть.

90°. Обчисліть:
1) $3 \cos 0° - 2 \sin 90°$;
2) $4 \sin 0° - 5 \cos 180°$;
3) $6 \sin 90° - 3 \operatorname{tg} 180°$.

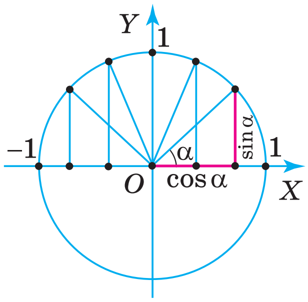
91°. Обчисліть: $8 \sin 180° + 2 \cos 90°$.

92°. Знайдіть sin α, якщо:
1) $\cos \alpha = -1$;
2) $\cos \alpha = 0$;
3) $\cos \alpha = 1$.

$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

93°. Знайдіть cos α, якщо:
1) $\sin \alpha = 1$;
2) $\sin \alpha = 0$.

94. **Чи можуть синус або косинус кута дорівнювати:**
1) –0,6;
2) 0,8;
3) 3?
Відповідь поясніть.



Мал. 31

95. **Чи може тангенс кута дорівнювати:**
1) 8;
2) 0,01;
3) 200?
Відповідь поясніть.

96. α — кут трикутника. Які з величин $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ можуть бути від'ємними та за яких умов?

97. Скориставшись малюнком 31, обґрунтуйте твердження:
1) якщо кут α зростає від $0°$ до $90°$, то синус цього кута зростає від 0 до 1, а косинус — спадає від 1 до 0;
2) якщо кут α зростає від $90°$ до $180°$, то синус цього кута спадає від 1 до 0, а косинус — спадає від 0 до -1.

98. Якщо α, β, γ — кути трикутника, то який знак має сума:
1) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$;
2) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$?
Відповідь поясніть.

99. Якщо α, β, γ — кути трикутника, то який знак має сума:
$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$?
Відповідь поясніть.

100. Гострий чи тупий кут α, якщо:
1) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$;
2) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$?
Відповідь поясніть.

101. Гострий чи тупий кут α, якщо $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha < 0$? Відповідь поясніть.

102. **Який з кутів (α чи β) більший, якщо:**
1) $\cos \alpha = 0{,}8$, $\cos \beta = 0{,}2$;
2) $\cos \alpha = -0{,}3$, $\cos \beta = -0{,}6$?

103. Який з кутів (α чи β) більший, якщо $\sin \alpha = 0{,}4$, $\sin \beta = 0{,}7$?

104. Яких значень може набувати сума:
1) $\sin \alpha + 1$;
2) $\cos \alpha + 0{,}5$?

105. Яких значень може набувати сума $\sin \alpha + 0{,}2$?

106. Запишіть у порядку зростання:
1) $\sin 66°$, $\sin 20°$, $\sin 75°$, $\sin 15°$, $\sin 5°$;
2) $\cos 9°$, $\cos 80°$, $\cos 46°$, $\cos 75°$, $\cos 16°$.

107. Запишіть у порядку спадання:
1) $\sin 176°$, $\sin 92°$, $\sin 101°$, $\sin 125°$, $\sin 150°$;
2) $\cos 97°$, $\cos 175°$, $\cos 165°$, $\cos 102°$, $\cos 91°$.

108. Визначте знак різниці:
1) $\sin 145° - \sin 169°$;
2) $\cos 178° - \cos 153°$;
3) $\operatorname{tg} 163° - \operatorname{tg} 121°$.

109. Який знак має добуток:
1) $\cos 10° \cdot \sin 120° \cdot \operatorname{tg} 105°$;
2) $\sin 40° \cdot \cos 153° \cdot \operatorname{tg} 15°$?

110. Який знак має добуток: tg 110° · tg 160° · sin 150°?

111. Обчисліть:

1) $\dfrac{6\sin 90^\circ \sin 30^\circ \cos 0^\circ}{\cos 180^\circ}$;

2) $a^2 \sin 90^\circ - b^2 \cos 0^\circ - c^2 \cos 180^\circ$, якщо $a = 4$, $b = 3$, $c = -5$.

112. Обчисліть: $8 \cos 60^\circ + 2\sin 90^\circ - 10\cos 180^\circ$.

113. Знайдіть tg α, якщо:

1) $\cos\alpha = -1$;

2) $\sin\alpha = 1$;

3) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$; $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$.

114. **Побудуйте кут α, якщо:**

1) $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$;

2) $\sin\alpha = 0{,}5$.

Скільки розв'язків має задача?

115. Побудуйте кут α, якщо:

1) $\cos\alpha = 0{,}4$;

2) $\cos\alpha = -0{,}5$.

116*. Доведіть, що коли $\sin\alpha = \sin\beta$, то або $\alpha = \beta$, або $\alpha = 180^\circ - \beta$.

117*. Чи існує кут α, для якого:

1) $\sin\alpha = \cos\alpha$;

2) $\sin\alpha = -\cos\alpha$?

118*. Користуючись одиничним півколом, доведіть:

1) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$;

2) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.

119*. Доведіть нерівність $|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \le 1$.

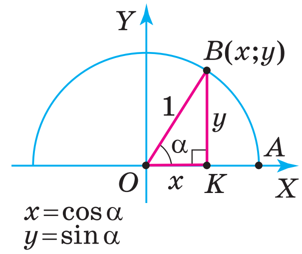
120*. Які з рівностей можливі:

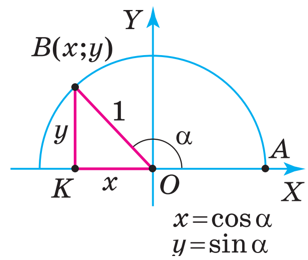
1) $\cos\alpha = m + \dfrac{1}{m}$;

2) $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{mn}}{m+n}$;

3) $\cos\alpha = \dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m}$?

121*. У прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза AB дорівнює 1. З вершини C проведено висоту CD. Знайдіть AC, BC, AD, BD і CD, якщо $\angle BAC = \alpha$.

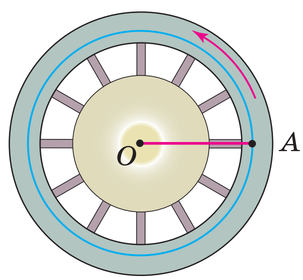




Проявіть компетентність

122. Визначте, який кут утворюється внаслідок обертання хвилинної стрілки протягом 25 хв.

123. Маховик дизеля робить 40 обертів за хвилину. Який кут опише його спиця OA (мал. 32) через 0,5 секунди?



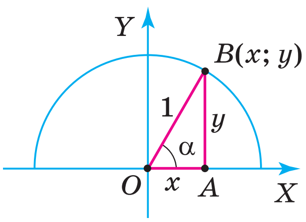
Мал. 32

§ 4. ОСНОВНІ ТОТОЖНОСТІ ДЛЯ sin α, cos α і tg α

1. ОСНОВНІ ТОТОЖНОСТІ, ЩО ПОВ'ЯЗУЮТЬ sin α, cos α І tg α

Ви знаєте, що за означенням $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, а $y = \sin\alpha$, $x = \cos\alpha$.

Звідси одержимо тотожність: $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.}$



Мал. 33

Нехай x і y — координати точки B одиничного півкола (мал. 33). З прямокутного трикутника AOB одержимо: $y^2 + x^2 = 1$. Оскільки $y = \sin\alpha$, $x = \cos\alpha$, то

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.}$$

Задача 1. Обчисліть значення cos α і tg α, якщо $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ і $90° < \alpha < 180°$.

Розв'язання. Оскільки $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. У формулі для cos α беремо знак «–», бо за умовою кут α — тупий, а косинуси тупих кутів — від'ємні.
Одержимо:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}.$$

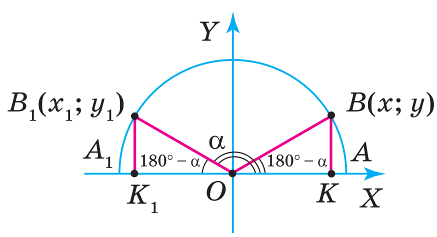
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{13} : \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{5}{12}.$$

1) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ для будь-якого кута α від 0° до 180°;
2) $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, якщо кут α — гострий;
3) $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, якщо кут α — тупий.

2. ОСНОВНІ ТОТОЖНОСТІ ДЛЯ ЗВЕДЕННЯ СИНУСІВ, КОСИНУСІВ І ТАНГЕНСІВ ОКРЕМИХ КУТІВ

Доведемо тотожності, які дають змогу синуси, косинуси й тангенси тупих кутів виразити через синуси, косинуси й тангенси гострих кутів.

Подивіться на малюнок 34.



Мал. 34

Нехай $\angle AOB_1 = \alpha$ — тупий, тоді $\angle A_1OB_1 = 180° - \alpha$ — гострий. Відкладемо від додатної півосі OX $\angle AOB = \angle A_1OB_1 = 180° - \alpha$. Проведемо $BK \perp OX$ і $B_1K_1 \perp OX$. Прямокутні трикутники OBK і OB_1K_1 рівні за гіпотенузою й гострим кутом. Із рівності трикутників випливає, що $OK = OK_1$, $BK = B_1K_1$, тобто $x = -x_1$, $y = y_1$.

Тоді, оскільки $\sin(180° - \alpha) = y$, $\sin\alpha = y_1$, то: $\boldsymbol{\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha.}$ (1)

Оскільки $\cos(180° - \alpha) = x$, $\cos\alpha = x_1$, то: $\boldsymbol{\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.}$ (2)

Поділивши почленно рівності (1) і (2), одержимо: $\boldsymbol{\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha.}$ (3)

Одержані тотожності можна застосовувати як зліва направо, так і справа наліво.

Задача 2. Обчисліть: 1) sin 120°; 2) cos 135°; 3) tg 150°.

Розв'язання. Застосуємо тотожності для зведення синусів, косинусів і тангенсів тупих кутів до синусів, косинусів і тангенсів гострих кутів. Маємо:

1) $\sin 120° = \sin(180° - 120°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos 135° = -\cos(180° - 135°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\mathrm{tg}\,150° = -\mathrm{tg}(180° - 150°) = -\mathrm{tg}\,30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Щоб знайти синус, косинус і тангенс тупого кута, зведіть їх до синуса, косинуса й тангенса гострого кута, скориставшись тотожностями:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha, \quad \mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha.$$

? Як синус і косинус гострого кута, більшого за 45°, виразити через синус і косинус кута, меншого від 45°? Потрібно скористатися відомими вам формулами:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha.$$

Наприклад:
$\sin 80° = \cos(90° - 80°) = \cos 10°$; $\cos 75° = \sin(90° - 75°) = \sin 15°$.
Основні тотожності, розглянуті в цьому параграфі, наведено в таблиці 7.

Таблиця 7

Тотожності	Застосування
$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,	Знаходимо за однією з величин — $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ чи $\mathrm{tg}\,\alpha$, дві інші величини. Спрощуємо вирази.
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$	Знаходимо синус, косинус і тангенс тупого кута. Спрощуємо вирази.
$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$	Будуємо таблицю синусів і косинусів (значення синусів кутів від 0° до 45° є значеннями косинусів відповідних кутів від 90° до 45°). Спрощуємо вирази.

Дізнайтеся більше

1. Крім синуса, косинуса й тангенса кута α, є ще *котангенс* кута α. Позначають: ctg α. Це відношення $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, тобто **ctg α** = $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$**.** Зверніть увагу: ctg 0° і ctg 180° не існують, оскільки ctg 0° = $\frac{1}{0}$ і ctg 180° = $\frac{-1}{0}$, а на нуль ділити не можна.
Вживають спеціальні назви й позначення для величин, обернених до синуса й косинуса. *Косекансом* називають величину, обернену до синуса: cosec α = $\frac{1}{\sin\alpha}$, а *секансом* — величину, обернену до косинуса: sec α = $\frac{1}{\cos\alpha}$.
Зрозуміло, що знаки косеканса й секанса збігаються відповідно зі знаками синуса й косинуса. cosec 0° і cosec 180° не існують, оскільки cosec 0° = $\frac{1}{0}$, cosec 180° = $\frac{1}{0}$. Так само не існує sec 90°, оскільки sec 90° = $\frac{1}{0}$.
2. **Дубинчук Олена Степанівна** (1919–1994) — одна з визначних педагогів-математиків України. Народилася на Вінничині, у м. Ямполі, закінчила механіко-математичний факультет Київського державного університету ім.Тараса Шевченка. З 1951 р. й до останку Олена Степанівна працювала в Науково-дослідному інституті педагогіки України (нині — Інститут педагогіки Національної академії педагогічних наук України). Автор численних підручників, методик і технологій навчання математики. Її педагогічне кредо — навчання має бути практикоорієнтованим, доступним і цікавим для учнів, ураховувати їхні інтереси, потреби та запити.

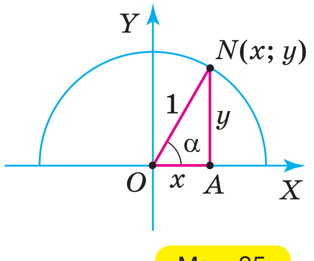

О. С. Дубинчук

Пригадайте головне

1. Поясніть тотожність: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
2. Поясніть, чому для будь-якого кута α від 0° до 180° sin (180° – α) = sin α, cos (180° – α) = –cos α, tg (180° – α) = –tg α.
3. Поясніть, як виразити синус і косинус гострого кута, більшого за 45°, через косинус і синус кута, меншого від 45°.

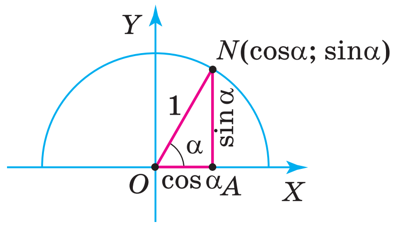
Розв'яжіть задачі

124'. Розгляньте малюнок 35. Чи правильно, що:
1) $x = \sin\alpha$;
2) $x = \cos\alpha$;
3) $y = \sin\alpha$;
4) $y = \cos\alpha$;
5) $\frac{x}{y} = \text{tg}\alpha$;
6) $\frac{y}{x} = \text{tg}\alpha$?



Мал. 35

125'. Розгляньте малюнок 36. Чи правильно, що:
1) $\text{tg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
2) $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
3) $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$;
4) $\sin\alpha - \cos\alpha = 1$;
5) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
6) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$?



Мал. 36

126'. Чи правильно, що:

1) $\sin(180° - \alpha) = \cos\alpha$;
2) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$;
3) $\cos(180° - \alpha) = \cos\alpha$;
4) $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$;
5) $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$;
6) $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$?

127'. Чи правильно, що:

1) $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$;
2) $\sin(90° - \alpha) = \sin\alpha$;
3) $\cos(90° - \alpha) = \cos\alpha$;
4) $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$?

128°. Обчисліть:

1) $\sin^2 9° + \cos^2 9°$;
2) $\sin^2 109° + \cos^2 109°$;
3) $\sin^2 22° + \cos^2 22°$;
4) $\sin^2 172° + \cos^2 172°$;
5) $-(\sin^2 15° + \cos^2 15°)$;
6) $-(\sin^2 115° + \cos^2 115°)$;
7) $-\sin^2 92° - \cos^2 92°$;
8) $-\sin^2 45° - \cos^2 45°$.

129°. Обчисліть:

1) $\sin^2 20° + \cos^2 20°$;
2) $-\sin^2 100° - \cos^2 100°$.

130°. Спростіть вираз:

1) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;
2) $1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;
3) $1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;
4) $-1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;
5) $1 - \sin^2\alpha$;
6) $1 - \cos^2\alpha$;
7) $-1 + \sin^2\alpha$;
8) $-1 + \cos^2\alpha$;
9) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - 1}$;
10) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - 1}$.

131°. Спростіть вираз:

1) $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;
2) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 1$;
3) $\sin^2\alpha - 1$;
4) $\cos^2\alpha - 1$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

132°. Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha + \sin\alpha = 2\sin\alpha$;
2) $(1 - \sin^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha = \sin^2\alpha$;
3) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;
4) $(1 - \cos^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \operatorname{tg}^2\alpha$.

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

133°. Доведіть тотожність:

1) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha = 1$;
2) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = \sin^2\alpha$.

134°. Спростіть:

1) $\sin(180° - \alpha)$;
2) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$;
3) $\cos(180° - \alpha) + \cos\alpha$;
4) $\cos(90° - \alpha)$;
5) $\cos(90° - \alpha) - \sin\alpha$;
6) $\sin(90° - \alpha) + \cos\alpha$.

135°. Спростіть:
1) $\cos(180° - \alpha)$;
2) $\sin(90° - \alpha)$;
3) $\cos(90° - \alpha) - \sin(180° - \alpha)$.

136°. Виразіть синуси кутів 110°, 125°, 150°, 165°, 176° через синуси гострих кутів.

137°. Виразіть синуси кутів 91°, 92°, 93° через синуси гострих кутів.

138°. Виразіть косинуси кутів 105°, 120°, 122°, 145°, 160° через косинуси гострих кутів.

139°. Виразіть косинуси кутів 93°, 94°, 95° через косинуси гострих кутів.

140°. Обчисліть синус, косинус і тангенс кута: 1) 120°; 2) 135°.

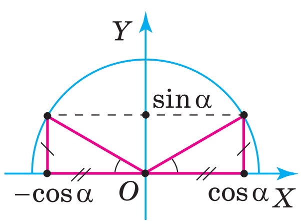
141°. Обчисліть синус, косинус і тангенс кута 150°.

142°. Знайдіть значення виразу:
1) $2\sin 30° + \sqrt{3}\cos 150°$;
2) $\operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 120° \cdot \operatorname{tg} 150°$;
3) $2\cos 120° + 2\sin 150°$.

143°. Знайдіть значення виразу: $\operatorname{tg} 135° \cdot \sin 135° \cdot \cos 135°$.

144°. Спростіть вираз:
1) $3\sin(180° - \alpha) - 2\sin(180° - \alpha)$;
2) $\operatorname{tg}(180° - \alpha) \cdot \sin(90° - \alpha)$;
3) $\sin(180° - \alpha) + \cos(90° - \alpha)$.

145°. Спростіть вираз: $\sin(90° - \alpha) + \cos(180° - \alpha)$.



146°. Доведіть тотожність:
1) $\cos(90° - \alpha) \cdot \sin(180° - \alpha) = \sin^2 \alpha$;
2) $\dfrac{\cos(90° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = -\operatorname{tg}\alpha$;
3) $\dfrac{\cos(90° - \alpha) \cdot \cos\alpha}{\sin(90° - \alpha) \cdot \sin\alpha} = 1$.

147°. Доведіть тотожність: $\cos(180° - \alpha) \cdot \sin(90° - \alpha) = -\cos^2 \alpha$.

148. **За якого значення α тотожність $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ не справджується?** Відповідь поясніть.

149. Спростіть вираз:
1) $1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$;
2) $(1 + \sin\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha \cdot (1 - \sin\alpha)$;
3) $\sin\alpha - \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$;
4) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha$.

150. Спростіть вираз:
1) $2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;
2) $\operatorname{tg}^2\alpha \cdot (2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1)$.

151. Доведіть тотожність:
1) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^4\alpha + \sin^2\alpha = 1$;
2) $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1$;
3) $(\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha) \cdot \cos^2\alpha = 1$.

152. Доведіть тотожність: $(\cos\alpha - \sin\alpha) \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$.

153. Чи існує кут α, для якого:

1) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ і $\cos\alpha = \frac{1}{4}$;

2) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ і $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

154. Чи існує кут α, для якого $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ і $\cos\alpha = \frac{4}{5}$?

155. Обчисліть $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + \sin\alpha$, якщо:

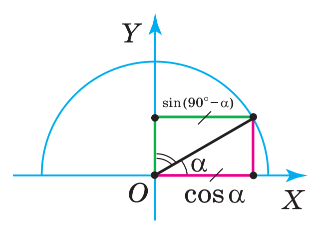
1) $\sin\alpha = 0{,}5$; 2) $\sin\alpha = 0{,}1$; 3) $\sin\alpha = 0{,}2$.

156. Знайдіть cos α і tg α, якщо:

1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ і $0° < \alpha < 90°$;

2) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ і $90° < \alpha < 180°$;

3) $\sin\alpha = 0{,}8$ і $0° < \alpha < 90°$.



157. Знайдіть sin α і tg α, якщо:

1) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$;

2) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$;

3) $\cos\alpha = -0{,}6$.

158. Знайдіть sin α і cos α, якщо:

1) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$;

2) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{11}{60}$.

159. Обчисліть $3\sin(180° - \alpha) + 2\cos(90° - \alpha)$, якщо:

1) $\sin\alpha = 0{,}6$;

2) $\sin\alpha = 0{,}4$;

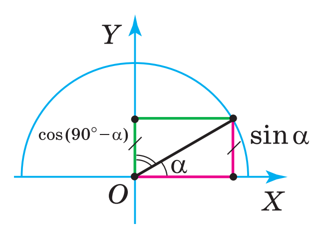
3) $\sin\alpha = 0{,}2$.

160. Спростіть вираз:

1) $\frac{2\cos(90° - \alpha) - 2\sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha}$;

2) $\frac{2\sin^2(180° - \alpha) + 2\cos(90° - \alpha)\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

3) $\frac{\sin^2(90° - \alpha) - \sin(180° - \alpha)\cos(90° - \alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha}$.



161. Спростіть вираз: $\frac{\cos(180° - \alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\sin(90° - \alpha)\cdot\operatorname{tg}(180° - \alpha)}$.

162. Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin(90° - \alpha)}{1 - \sin\alpha} - \frac{\sin(90° - \alpha)}{1 + \sin\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha$;

2) $\frac{1 - \cos^2(90° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)\cos\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha = 1$;

3) $\left(\frac{1}{\cos^2(90° - \alpha)} - 1\right)\cdot\operatorname{tg}^2(180° - \alpha) = 1$.

163. Доведіть тотожність: $\frac{\sin^2\alpha-1}{\sin^2\alpha}\cdot \mathrm{tg}^2(180^\circ-\alpha)=-1.$

164*. Спростіть вираз:

1) $\frac{2\cos^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;

2) $\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}+\mathrm{tg}^2\alpha$;

3) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{(1+\mathrm{tg}\,\alpha)^2-(1-\mathrm{tg}\,\alpha)^2}$;

4) $\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$.

165*. Обчисліть $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, якщо:

1) $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$;
2) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$;
3) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$.

166*. Обчисліть $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, якщо:

1) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$;
2) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$;
3) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{5}{2}$.

167*. Знайдіть $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha+\cos\alpha=m$.

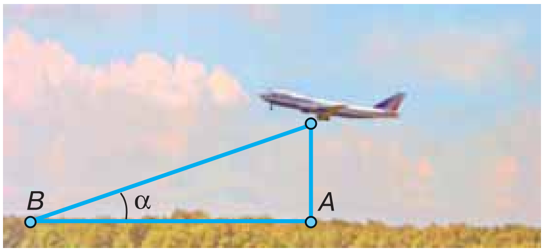
168*. Спростіть вираз:

1) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2(180^\circ-\alpha)\sin^2(90^\circ-\alpha)$;
2) $\sin^2\alpha\cdot\sin^2(90^\circ-\alpha)-\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$;
3) $\cos^2\alpha\cdot\cos^2(90^\circ-\alpha)-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$.

Проявіть компетентність

169. Дві прямі дороги перетинаються під кутом 47°. На одній із цих доріг на відстані 6,5 км від перехрестя розташована автобусна зупинка. Потрібно прокласти найкоротший шлях від цієї зупинки до другої дороги. Знайдіть довжину цього шляху.

170. Пасажирський літак, який перебував на висоті 400 м над пунктом *A*, почав посадку на злітну смугу аеродрому (мал. 37). Знайдіть кут α приземлення літака, якщо аеродром розміщений на відстані 1,2 км від пункту *A*.



Мал. 37

§ 5. ПОНЯТТЯ РІВНЯННЯ ФІГУРИ. РІВНЯННЯ КОЛА

1. ЩО ТАКЕ РІВНЯННЯ ФІГУРИ

Ви знаєте, що геометричну фігуру ми уявляємо складеною з точок, а кожну точку можна задати її координатами в прямокутній декартовій системі координат. Установивши залежність між абсцисами й ординатами точок фігури, одержимо *рівняння фігури*. Якщо для фігури F відомо її рівняння в деякій системі координат, то говорять: *фігура F задана рівнянням* у даній системі координат.

? Чи кожне рівняння з двома змінними задає певну фігуру? Ні.

Рівняння з двома змінними x і y є *рівнянням фігури в заданій системі координат*, якщо виконуються дві умови: 1) координати будь-якої точки фігури задовольняють дане рівняння; 2) будь-які два числа, що задовольняють це рівняння, є координатами деякої точки фігури.

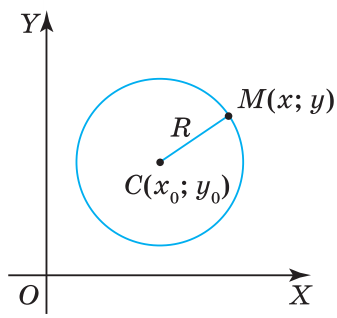
Щоб установити, що в даній системі координат фігуру F задано певним рівнянням, потрібно довести два взаємно обернені твердження:
1) якщо точка належить фігурі F, то її координати задовольняють рівняння фігури F;
2) якщо координати деякої точки задовольняють рівняння фігури F, то ця точка належить фігурі F.

2. РІВНЯННЯ КОЛА

ТЕОРЕМА **(про рівняння кола).**

Коло із центром $C(x_0; y_0)$ і радіусом R задає рівняння:
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Дано: XOY — прямокутна декартова система координат (мал. 38), коло із центром $C(x_0; y_0)$ і радіусом R.
Довести: дане коло задає рівняння $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.
Доведення. Візьмемо довільну точку $M(x; y)$ на колі. За означенням кола, $CM = R$ або $CM^2 = R^2$. Виразивши CM^2 через координати точок C і M, одержимо:
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (1)$$
Оскільки точка M — довільна точка кола, то можна стверджувати, що координати будь-якої точки кола задовольняють рівняння (1).
Навпаки, нехай координати деякої точки $M_1(x_1; y_1)$ задовольняють рівняння (1). Тоді справджується рівність $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2$



Мал. 38

або $R=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$. Остання рівність показує, що точка $M_1\,(x_1; y_1)$ віддалена від центра кола — точки $C\,(x_0;\,y_0)$ на відстань R, тобто точка $M_1\,(x_1; y_1)$ належить цьому колу.

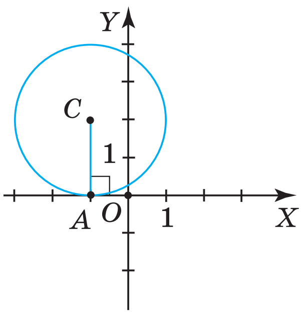
НАСЛІДОК. **Якщо центр кола міститься в початку координат, то рівняння кола має вигляд: $x^2+y^2=R^2$.**

Справді, початок координат O має координати (0; 0), тому $x_0=0$, $y_0=0$ і рівняння (1) набуває вигляду: $x^2+y^2=R^2$.

Відомості про особливості рівняння кола наведено в таблиці 8.

Таблиця 8

Радіус кола	Центр кола	Рівняння кола
R	$C\,(x_0;\,y_0)$	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$
	$C\,(0;\,0)$	$x^2+y^2=R^2$



Мал. 39

Задача. Коло, яке задано рівнянням $(x+1)^2+(y-2)^2=R^2$, дотикається до осі OX. Який радіус даного кола?

Розв'язання. Нехай C — центр кола. За рівнянням кола визначимо координати його центра: $C\,(-1;\,2)$. За властивістю дотичної до кола, радіус, проведений у точку дотику, перпендикулярний до цієї дотичної. Тому перпендикуляр CA до осі OX є радіусом даного кола (мал. 39). Оскільки $CA \parallel OY$, то довжина перпендикуляра CA дорівнює ординаті центра кола C. Тому $R=2$.

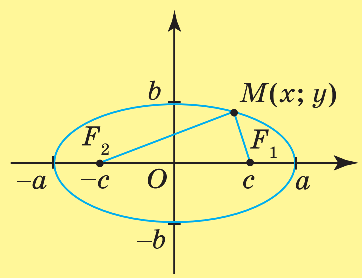
Дізнайтеся більше

1. Ви вже знаєте, що коло є геометричним місцем точок, рівновіддалених від заданої точки. Раніше ви дізналися, що коло є окремим випадком еліпса.

Еліпс визначають як геометричне місце точок, сума відстаней від кожної з яких до двох заданих точок (фокусів еліпса F_1 і F_2) є сталою й дорівнює $2a$, де $2a > F_1F_2 = 2c$ (мал. 40).

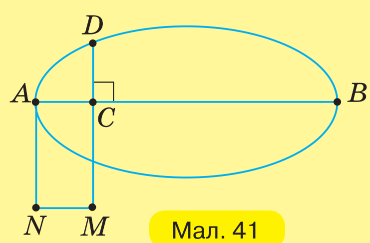
Канонічне (найпростіше) *рівняння еліпса*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Числа a і b є довжинами півосей еліпса (мал. 40). Якщо $a=b$, то еліпс є колом. Справді, якщо $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ і $b=a$, то $x^2+y^2=a^2$.

Одержали рівняння кола із центром у початку координат і радіусом $R=a$.



Мал. 40

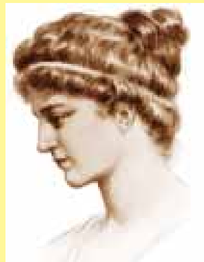
2. Стародавні греки для обчислення площі еліпса використовували складні розрахунки. Вони досліджували площу квадрата, побудованого на відрізку CD (довжина цього відрізка залежить від положення точки C на відрізку AO, де O — середина AB). Площу квадрата



Мал. 41

порівнювали з площею прямокутника $ACMN$ (мал. 41): $CD^2 = AN \cdot AC - \frac{AN}{AB} \cdot AC^2$. Оскільки в обчисленнях для еліпса площа прямокутника $ACMN$ використовується з недостачею (у формулі для CD^2 другий доданок береться зі знаком «–»), то еліпс так і назвали — ἔλλειψις, що в перекладі з грецької означає «недостача». Цікавим є те, що назви гіперболи й параболи мають таке саме походження: ὑπερβολή — перевищення, надлишок (у формулі для CD^2 другий доданок береться зі знаком «+»); παραβολή — зіставлення площ, порівняння (у формулі для CD^2 другий доданок дорівнює нулю).

3. **Гіпатія** (370–415) — дочка відомого грецького вченого Теона. Вона народилася й жила в Александрії, була однією з найбільш ерудованих у математиці й астрономії людей у світі. Її легендарне знання, скромність, красномовство розквітло в період знаменитої Александрійської Бібліотеки. Вона була настільки всебічно освіченою, що на її думку зважали всі вчені того часу. Гіпатія зробила певний внесок у геометрію й астрометрію, зіграла важливу роль у створенні астролябії, написала коментарі до праць Діофанта й Аполлонія. Але, на жаль, наукові праці Гіпатії не збереглися. Після смерті Гіпатії Александрійської протягом 1000 років в історії математики ми не зустрічаємо імен жінок.


Гіпатія

Пригадайте головне

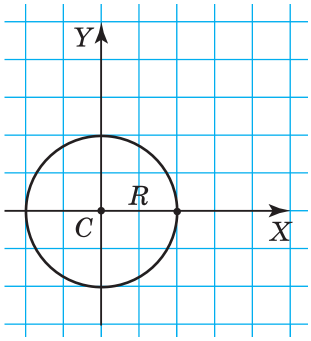
1. Поясніть, що таке рівняння фігури.
2. Як установити, що фігура в даній системі координат задається певним рівнянням?
3. Яке рівняння задає коло в прямокутній декартовій системі координат?
4. Яким є рівняння кола із центром у початку координат?

Розв'яжіть задачі

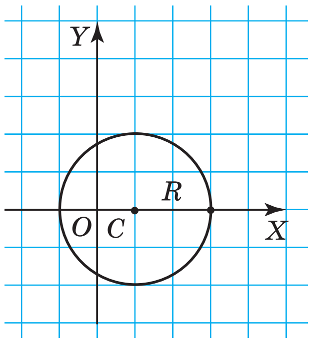
171'. Чи правильно, що рівнянням фігури в даній системі координат є:
1) рівняння з однією змінною x;
2) рівняння з однією змінною y;
3) рівняння з двома змінними x і y, яке задовольняють координати будь-якої точки координатної площини;
4) рівняння з двома змінними x і y, яке задовольняють координати кожної точки даної фігури й не задовольняють координати будь-якої іншої точки?

172'. Чи правильно, що коло із центром C $(x_0;\ y_0)$ і радіусом R задає рівняння:
1) $(x - x_0) + (y - y_0) = R$;
2) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R$;
3) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$?

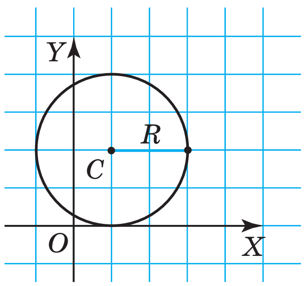
173'. Чи правильно, що коло із центром O (0; 0) і радіусом R задає рівняння:
1) $x + y = R$;
2) $x^2 + y^2 = R$;
3) $x^2 + y^2 = R^2$?



Мал. 42



Мал. 43



Мал. 44

174°. За даними на малюнках 42, 43 визначте координати центра C і радіус R кола.

175°. Визначте координати центра C і радіус R кола на малюнку 44?

176°. Побудуйте коло з даним центром C і радіусом R:
1) $C(-1; 1)$, $R = 3$;
2) $C(2; -1)$, $R = 1$.

177°. Побудуйте коло із центром $C(-2; -3)$ і радіусом 4.

178°. Визначте координати центра й радіус кола, заданого рівнянням:
1) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$;
2) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 3$;
3) $x^2 + (y-3)^2 = 2$;
4) $(x+1)^2 + y^2 = 49$.

179°. Визначте координати центра й радіус кола, заданого рівнянням:
1) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 5$;
2) $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 25$.

180°. Чи лежать дані точки $A(-1; 2)$, $B(2; -3)$, $C(-6; -4)$, $D(-5; 0)$ на колі:
1) $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$;
2) $x^2 + (y-3)^2 = 2$;
3) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 36$?

181°. Чи лежать точки $O(0; 0)$ і $T(-2; 5)$ на колі $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$?

182°. **Складіть рівняння кола з радіусом R і центром у точці C, якщо:**
1) $R = 5$, $C(2; 1)$;
2) $R = \sqrt{5}$, $C(-2; -1)$.

183°. Складіть рівняння кола з радіусом 4 і центром у точці $C(2; -2)$.

184°. Накресліть у зошиті та заповніть таблицю 9.

Таблиця 9

Координати кінців діаметра кола	Координати центра кола	Радіус кола	Рівняння кола
$(5; -1)$ і $(-5; -1)$			
$(6; 0)$ і $(0; 8)$			
$(6; 8)$ і $(0; 0)$			
$(-6; 0)$ і $(2; -8)$			
$(-1; 6)$ і $(7; -2)$			

185°. Коло проходить через точки A і B, а його центр лежить на прямій AB. Складіть рівняння кола, якщо:
1) $A(-5; 2)$, $B(1; -4)$;
2) $A(5; -2)$, $B(-1; 4)$.

186°. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(5; 2)$ і $B(-1; -4)$, якщо його центр лежить на прямій AB.

187°. Коло дотикається до осі абсцис, а його центр має координати:
1) (2; –1);
2) (–3; 2).
Чи перетинає дане коло вісь ординат? Відповідь поясніть.

188°. Коло дотикається до осі абсцис, а його центр має координати (4; 5). Чи перетинає дане коло вісь ординат? Відповідь поясніть.

189°. Коло із центром у точці C перетинає вісь ординат у точці A. Складіть рівняння кола, якщо:
1) C (2; 3), A (0; 4);
2) C (–3; –2), A (0; 2).

190°. Складіть рівняння кола із центром у точці C (–4; 2), яке перетинає вісь ординат у точці A(0; 5).

191°. Коло із центром у точці C перетинає вісь абсцис у точці B. Складіть рівняння кола, якщо:
1) C (3; 2), B (4; 0);
2) C (–2; –3), B (2; 0).

192°. Складіть рівняння кола із центром у точці C(2; –4), яке перетинає вісь абсцис у точці B(5; 0).

193. Коло із центром у точці (–2; 3) проходить через точку з координатами:
1) (0; 3);
2) (–2; 4).
Чи проходить дане коло через точки A (–4; 3), B (–2; 4), C (1; 3)?

194. **Складіть рівняння кола із центром на прямій $y = 4$, що дотикається до осі абсцис у точці:**
1) (–1; 0);
2) (2; 0).

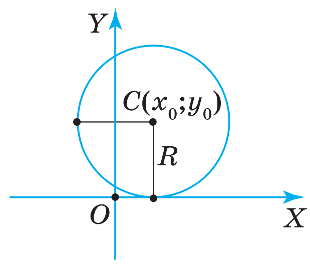
195. Поясніть, чому прямі $x = -5$ і $y = 5$ не перетинають коло:
1) $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 25$;
2) $x^2 + (y + 2)^2 = 16$.

196. Відстань від центра кола, заданого рівнянням $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$, до прямої a дорівнює:
1) 1;
2) 3.
Що можна сказати про взаємне розміщення прямої та кола?

197. **Коло з діаметром AB задано рівнянням $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Знайдіть координати точки B, якщо:**
1) A (2; 2);
2) A (–2; 6).

198. Складіть рівняння кола, що проходить через точки A (2; 3) і B (–2; 3), якщо його радіус дорівнює:
1) $2\sqrt{2}$;
2) $\sqrt{13}$.

199. Дано коло $x^2 + y^2 = 25$ і дві точки:
1) A (3; 4) і B (4; – 3);
2) A $(2\sqrt{5}; -\sqrt{5})$ і B $(-1; 2\sqrt{6})$.
Доведіть, що AB — хорда даного кола.



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

200. Складіть рівняння геометричного місця точок, віддалених на 5 одиниць від центра кола:
1) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$;
2) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 36$.

201. Складіть рівняння кола, що дотикається до осей координат і прямої:
1) $x = 2$;
2) $y = 5$.

202. Складіть рівняння кола, що проходить через точку (3; 3) і дотикається до осі абсцис та прямої:
1) $y = 6$;
2) $x = -3$.

203*. Складіть рівняння кола, що проходить через початок координат і точки:
1) (8; 0) і (0; 6);
2) (0; 16) і (12; 0).

204*. Складіть рівняння кола, що проходить через точки:
1) (4; 0), (0; 2), (4; 2);
2) (−1; 5), (−2; −2), (5; 5).

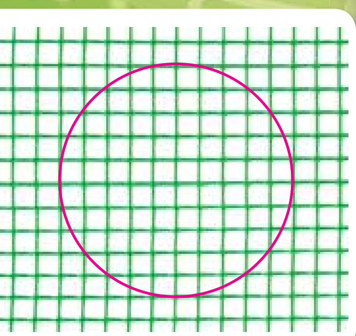
205*. **Будь-яка пряма, що проходить через центр кола, перетинає його у двох точках.** Доведіть.

206*. Визначте довжини хорд кола з кінцями на осях координат, якщо коло задано рівнянням:
1) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$;
2) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

207*. Яке рівняння задає коло, описане навколо прямокутника з вершинами в точках:
1) (0; 0), (24; 0), (24; 10) і (0; 10);
2) (0; 5), (8; 5), (8; −2) і (0; −2)?

208*. У коло $x^2 + y^2 = 16$ вписано рівносторонній трикутник. Знайдіть координати його вершин, якщо одна з них лежить у точці:
1) (0; 4);
2) (−4; 0).

209*. Знайдіть радіус і центр кола:
1) $x^2 + 8x + y^2 - 10y - 41 = 0$;
2) $x^2 - 10x + y^2 + 6y = 0$;
3) $x^2 - 4x + y^2 + 4y = 16$;
4) $y^2 = (x - 2)(6 - x)$.



Проявіть компетентність

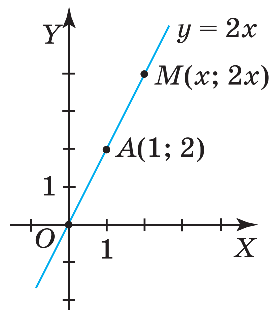
210. Доведіть, що коло із центром у вузлі сітки й радіусом 5 клітинок проходить через 12 вузлів сітки.

211. Через яку кількість вузлів сітки проходить коло, центр якого міститься в її вузлі, а радіус дорівнює 25 клітинкам?

212. Де на подвір'ї потрібно розмістити ліхтар, щоб хвіртка, криниця та вхід до будинку освітлювалися однаково?

§ 6. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

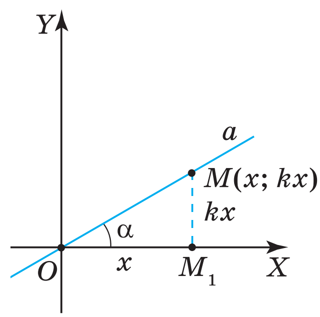
Із курсу алгебри ви знаєте, що графіком функції $y = 2x$ є пряма (мал. 45). Координати кожної точки цієї прямої, наприклад O (0; 0) і A (1; 2), задовольняють її рівняння. І навпаки, яку б точку M з координатами (x; $2x$) ми не взяли, вона лежатиме на даній прямій. Це означає, що дану пряму задає рівняння $y = 2x$.



Мал. 45

Узагалі, пряма, що проходить через початок координат (мал. 46), **задається рівнянням $y = kx$**. Коефіцієнт k в цьому рівнянні називають *кутовим коефіцієнтом прямої*. На малюнку 46 ви бачите, що пряма a нахилена до додатної півосі OX під кутом α. Із прямокутного трикутника OM_1M ($\angle M_1 = 90°$) одержуємо: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{MM_1}{OM_1} = \dfrac{kx}{x} = k$. Отже, кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсу кута між даною прямою й додатною піввіссю OX:

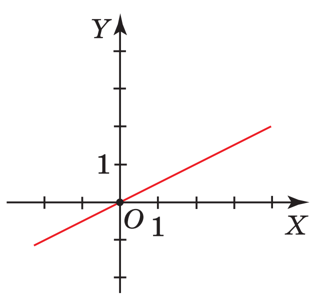
$$k = \operatorname{tg}\alpha.$$



Мал. 46

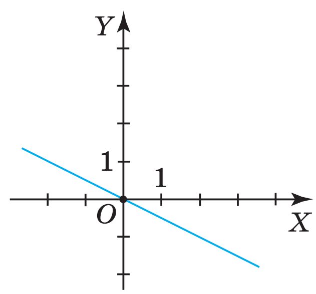
? Як розміщується пряма $y = kx$ у системі координат залежно від знака кутового коефіцієнта? Поміркуємо.

Подивіться на малюнки 47 і 48. Ви бачите пряму $y = 0{,}5x$ (мал. 47) і пряму $y = -0{,}5x$ (мал. 48). Перша пряма утворює з додатною піввіссю осі OX гострий кут, а друга — тупий. Рівняння, що задають ці прямі, відрізняються лише знаком коефіцієнта k: у першої прямої $k > 0$, а в другої — $k < 0$. Отже, якщо $k > 0$, то пряма розміщується в першій і третій координатних чвертях, а якщо $k < 0$ — то в другій і четвертій. Якщо ж $k = 0$, то рівняння прямої $y = kx$ набуває вигляду: $y = 0 \cdot x$, тобто $y = 0$. А це — рівняння осі OX. Отже, дана пряма збігається з віссю OX (мал. 49).



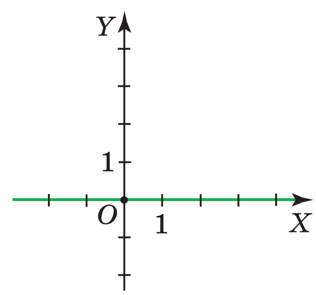
$y = 0{,}5x$

Мал. 47



$y = -0{,}5x$

Мал. 48

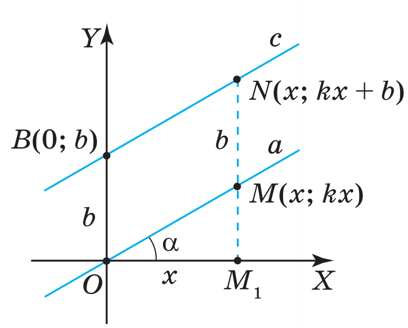


$y = 0$

Мал. 49

Пряма $y = kx$ проходить через початок координат і розміщується:
- **у I і III координатних чвертях, якщо $k > 0$;**
- **у II і IV координатних чвертях, якщо $k < 0$;**
- **збігається з віссю OX, якщо $k = 0$.**

Як задати пряму, що не проходить через початок координат і має кутовий коефіцієнт k? Дослідимо це.

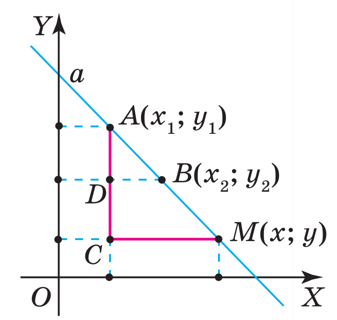


Мал. 50

Нехай пряма c (мал. 50) перетинає вісь OY у точці B $(0; b)$ і має кутовий коефіцієнт k. Позначимо на прямій c довільну точку N з абсцисою x та знайдемо її ординату y. Для цього через початок координат проведемо пряму $a \parallel c$. Вона має той самий кутовий коефіцієнт k, тому задається рівнянням $y = kx$. Нехай пряма, що проходить через точку N паралельно осі OY, перетинає пряму a в точці M, а вісь OX — у точці M_1. Тоді одержимо: $MM_1 = kx$ (оскільки $M \in a$), $NM = OB = b$ (оскільки чотирикутник $NMOB$ — паралелограм за означенням), $NM_1 = kx + b$. Отже, ордината точки N виражається через її абсцису так: $y = kx + b$. Оскільки точка N — довільна точка прямої c, то можна стверджувати, що координати будь-якої точки цієї прямої задовольняють рівняння $y = kx + b$. Обернене твердження доведіть самостійно.

Рівняння $\boldsymbol{y = kx + b}$ називають *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*.

Як задати пряму, що проходить через дві точки? Дослідимо це.



$CM = x - x_1$ $CA = y_1 - y$
$DB = x_2 - x_2$ $DA = y_1 - y_2$

Мал. 51

Нехай точки A і B містяться в першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 > y_2$ (мал. 51). Через ці точки проведемо пряму a і позначимо на ній довільну точку M $(x; y)$. Через точки B і M проведемо прямі, паралельні осі OX, через точку A — пряму, паралельну осі OY. Точки їх перетину позначимо C і D. Одержали два подібні трикутники ACM і ADB (у них кут A — спільний і $\angle ABD = \angle AMC$). З подібності трикутників випливає:

$$\frac{CM}{DB} = \frac{CA}{DA}.$$

Виразимо довжини цих відрізків:

$$CM = x - x_1,\ DB = x_2 - x_1,\ CA = y_1 - y,\ DA = y_1 - y_2.$$

Підставивши їх у пропорцію, одержимо рівність: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y}{y_1 - y_2}$ або $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Оскільки точка M — довільна точка прямої a, то можна стверджувати, що координати будь-якої точки цієї прямої задовольняють рівняння $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Обернене твердження доведіть самостійно.

Інші випадки розміщення точок A і B в системі координат розгляньте самостійно.

Рівняння $\boldsymbol{\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$ називають *рівнянням прямої, що проходить через дві точки*.

Одержане рівняння можна звести до вигляду:

$$(y_2 - y_1)\,x + (x_1 - x_2)\,y + (y_1x_2 - x_1y_2) = 0.$$

Позначивши $y_2 - y_1 = a$, $x_1 - x_2 = b$, $y_1x_2 - x_1y_2 = c$, одержимо *загальне рівняння прямої*:

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0.}$$

Відомості про види рівнянь прямої наведено в таблиці 10.

Таблиця 10

Назва виду рівняння прямої	Рівняння прямої	Особливості рівняння прямої
Загальне рівняння прямої	$ax + by + c = 0$	a, b і c — числа, які одночасно не дорівнюють нулю
Рівняння прямої, що проходить через дві точки	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ — точки, через які проходить пряма
Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$y = kx + b$	k — кутовий коефіцієнт, b — відрізок на осі OY
Рівняння прямої, що проходить через початок координат	$y = kx$	k — кутовий коефіцієнт

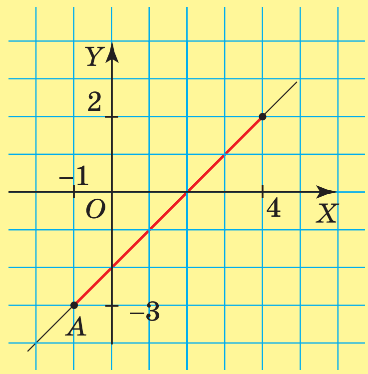
Дізнайтеся більше

1. У вас могло виникнути запитання: *Як аналітично задати відрізок; трикутник; квадрат?* Розглянемо приклади.

Нехай потрібно задати відрізок AB прямої $y = x - 2$ (мал. 52). Зрозуміло, що координати кожної точки відрізка AB задовольняють рівняння даної прямої. Але не кожна точка цієї прямої належить відрізку AB. Кінці відрізка мають координати: $A(-1; -3)$, $B(4; 2)$. Тому абсциси точок відрізка набувають значень від –1 до 4, а ординати — від –3 до 2.

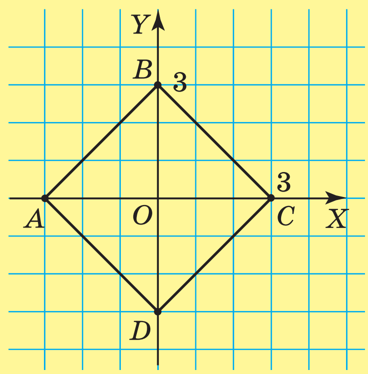
Отже, даний відрізок AB задають системою:

$$\begin{cases} y = x - 2, \\ -1 \le x \le 4, \\ -3 \le y \le 2. \end{cases}$$



Мал. 52

Трикутник і квадрат можна задати аналітично, відповідно — трьома та чотирма системами, що визначають їхні сторони. Особливим рівнянням задається квадрат, у якого вершини лежать на осях координат: $|x| + |y| = a$, де a — половина довжини діагоналі квадрата (дослідіть це самостійно). На малюнку 53 ви бачите квадрат $ABCD$, рівняння якого $|x| + |y| = 3$.



Мал. 53

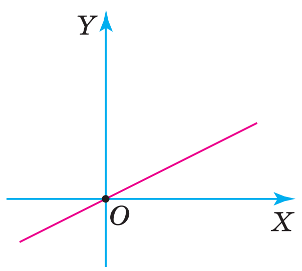

П'єр Ферма

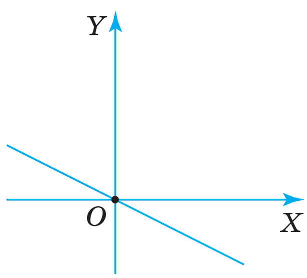
2. Метод координат встановлює зв'язки між алгеброю та геометрією, надає допомогу й тій, і другій науці. Його основоположниками вважають французьких учених — Рене Декарта (1596–1650) і П'єра Ферма (1601–1655), які працювали незалежно один від одного. Однак наукові роботи П. Ферма стали широко відомими лише після смерті вченого, коли в 1669 р. його син опублікував збірник «Різні твори». П. Ферма вивів рівняння прямої, а також еліпса, гіперболи, параболи та інших ліній, що задаються рівняннями другого степеня.

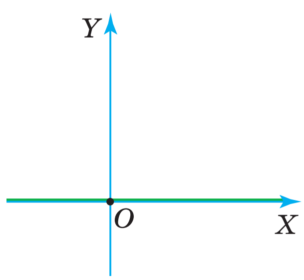
Пригадайте головне

1. Яке рівняння задає пряму, що проходить через початок координат?
2. Що таке кутовий коефіцієнт прямої?
3. Як розміщується в системі координат пряма $y = kx$?
4. Запишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
5. Яким є рівняння прямої, що проходить через дві точки?
6. Який вигляд має загальне рівняння прямої?

Розв'яжіть задачі







213'. Чи правильно, що дана пряма проходить через початок координат:
1) $y = x + 1$; 3) $y = \sqrt{3}x$;
2) $y = -2x$; 4) $y = \sqrt{2}x - 3$?

214'. Нехай α — кут, який утворює пряма з додатною піввіссю осі OX. Чи правильно, що кутовий коефіцієнт прямої дорівнює:
1) $\cos\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$?
2) $\sin\alpha$;

215'. Чи є дане рівняння рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом:
1) $y = kx + b$; 3) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$?
2) $ax + by + c = 0$;

216'. Чи є дане рівняння рівнянням прямої, що проходить через дві точки:
1) $y = kx + b$; 3) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$?
2) $ax + by + c = 0$;

217'. Чи є дане рівняння загальним рівнянням прямої:
1) $y = kx + b$; 3) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$?
2) $ax + by + c = 0$;

218°. Який кут — тупий чи гострий — утворює з додатною піввіссю осі OX пряма:
1) $y = 3x$; 3) $y = -0{,}6x$;
2) $y = -7x$; 4) $y = 1{,}5x$?

219°. Який кут — тупий чи гострий — утворює з додатною піввіссю осі OX пряма:
1) $y = -2x$; 2) $y = 3{,}2x$?

220°. Як розміщується в системі координат пряма:
1) $y = 0{,}33x$; 3) $y = -6x$;
2) $y = -7{,}5x$; 4) $y = 5{,}1x$?

221°. Як розміщується в системі координат пряма:
1) $y = -0{,}2x$; 2) $y = 2{,}3x$?

222°. Назвіть кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої:
1) $y = x$; 3) $y = -\sqrt{3}x$;
2) $y = -2x$; 4) $y = \sqrt{2}x$.

223°. Назвіть кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої:
1) $y = 3x$; 2) $y = -3x$.

224°. **Яке рівняння:**
1) осі абсцис;
2) осі ординат;
3) бісектриси першого й третього координатних кутів?

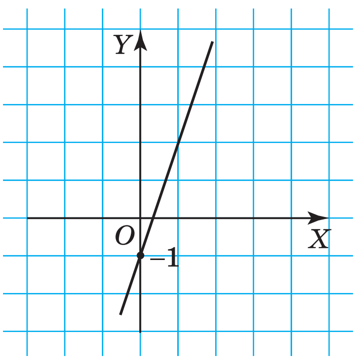
225°. **Яке рівняння бісектриси другого й четвертого координатних кутів?**

226°. Запишіть координати:
1) точки A, що лежить на осі абсцис;
2) точки B, що лежить на осі ординат;
3) точки C, що лежить на бісектрисі першого й третього координатних кутів.

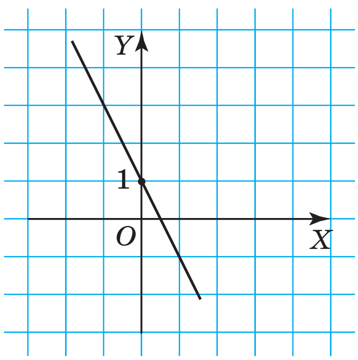
227°. Запишіть координати точки A, що лежить на бісектрисі другого й четвертого координатних кутів.

228°. На якому з малюнків (54 чи 55) зображено пряму:
1) $y = 3x - 1$;
2) $y = -2x + 1$?
Який відрізок на осі ординат відтинає задана пряма? Який у неї кутовий коефіцієнт?

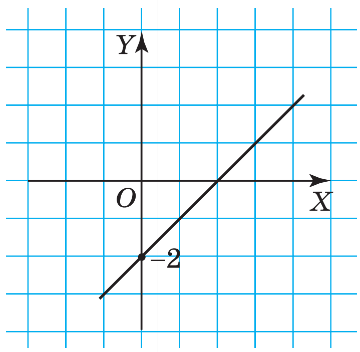
229°. На малюнку 56 зображено пряму $y = x - 2$. Який відрізок на осі ординат відтинає задана пряма? Який у неї кутовий коефіцієнт?



Мал. 54



Мал. 55



Мал. 56

230°. Складіть рівняння прямих a і b, що проходять через точку A паралельно вказаній осі координат. Накресліть у зошиті та заповніть таблицю 11 за зразком, наведеним у другому стовпчику.

Таблиця 11

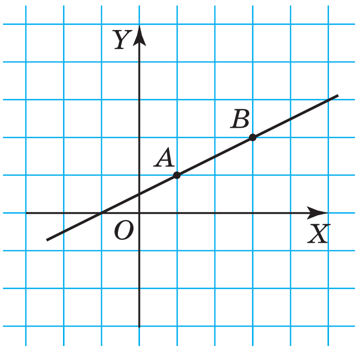
	A (1; 2)	A (−1; 2)	A (−1; −2)	A (4; 2)	A (−4; 2)	A (4; −2)
$a \parallel OX$	$y = 2$					
$b \parallel OY$	$x = 1$					

231°. Побудуйте прямокутник, сторони якого лежать на прямих:
1) $x = 2$, $x = 5$, $y = -2$, $y = 1$;
2) $x = -2$, $x = 6$, $y = 7$, $y = -1$.
Знайдіть периметр і площу даного прямокутника.

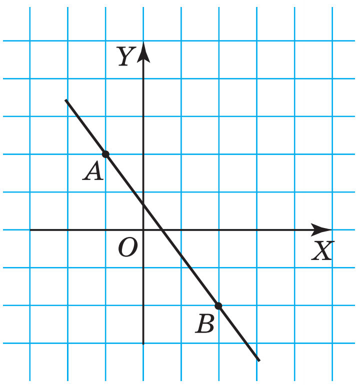
232°. Побудуйте прямокутник, сторони якого лежать на прямих: $x = -9$, $x = 4$, $y = 2$, $y = 8$. Знайдіть периметр і площу даного прямокутника.

233'. Назвіть координати точок A і B (мал. 57, 58). Яке з наведених рівнянь (1 чи 2) задає пряму AB:

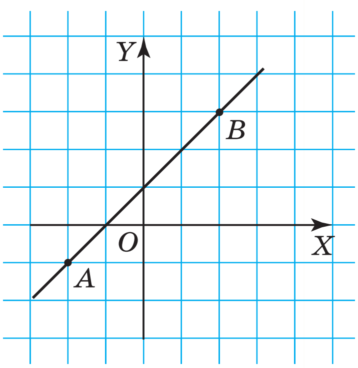
1) $\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-2}{-2-2}$; 2) $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{2-1}$?



Мал. 57



Мал. 58



Мал. 59

234°. Назвіть координати точок A і B на малюнку 59. Чи правильно записано рівняння, яке задає пряму AB: $\frac{x+2}{2+2} = \frac{y+1}{3+1}$?

235°. Запишіть координати двох точок, через які проходить пряма:
1) $\frac{x-4}{2-4} = \frac{y-1}{3-1}$; 2) $\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-3}{2-3}$.
Побудуйте дану пряму.

236°. Запишіть координати двох точок, через які проходить пряма $\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-2}{-4-2}$. Побудуйте дану пряму.

237°. Складіть рівняння прямої, що проходить через точки:
1) $(-1; 2)$ і $(2; -1)$; 2) $(-3; 1)$ і $(2; -2)$.

238°. Складіть рівняння прямої, що проходить через точки $(2; -4)$ і $(3; -1)$.

239°. Запишіть рівняння прямих, що містять сторони трикутника з вершинами в точках:
1) $A\ (2; -3)$, $B\ (-2; 3)$ і $C\ (6; -3)$;
2) $A\ (1; -2)$, $B\ (-1; 2)$ і $C\ (5; 10)$.

240°. Запишіть рівняння прямих, що містять сторони трикутника з вершинами в точках: $M\ (-3; 5)$, $P\ (1; -3)$ і $T\ (2; 0)$.

241°. Чи лежать на одній прямій точки A, B і C, якщо:
1) $A\ (-3; 2)$, $B\ (2; 2)$, $C\ (2; 14)$; 2) $A\ (1; -2)$, $B\ (5; -8)$, $C\ (3; -5)$?

242°. Чи лежать на одній прямій точки A, B і C, якщо: $A\ (4; 2)$, $B\ (0; -6)$, $C\ (-4; -2)$?

243°. Зведіть дане рівняння прямої до іншого вигляду:
1) $6x - 2y + 3 = 0$; 2) $y = -2x - 1$; 3) $y = \frac{1}{2}x - 4$.

244°. Зведіть рівняння прямої $4x + 2y - 8 = 0$ до іншого вигляду.

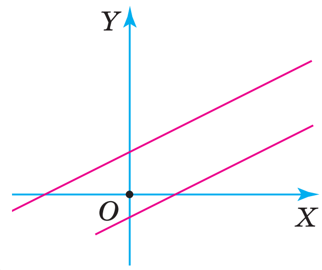
245°. Знайдіть точку перетину прямих, заданих рівняннями:
1) $4x - 2y - 3 = 0$ і $3x + 2y - 9 = 0$;
2) $3x - y - 5 = 0$ і $3x + 4y + 7 = 0$.

246°. Знайдіть точку перетину прямих, заданих рівняннями: $x - 7y - 3 = 0$ і $x - y + 5 = 0$.

247. Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і нахилена до осі абсцис під кутом:
1) $45°$; 2) $30°$.

248. Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і нахилена до осі абсцис під кутом 60°.

249. Доведіть, що прямі $y = kx$ і $y = kx + b$ — паралельні або збігаються.



250. **Якщо дві прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти — рівні, і навпаки**. Доведіть.

251. Яке рівняння задає пряму, що відтинає на осі ординат відрізок 5 одиниць і проходить паралельно прямій:
1) $y = 5x + 2$; 2) $y = -x - 15$?

252. Складіть рівняння прямої, що відтинає на осі ординат відрізок 2 одиниці й проходить паралельно прямій: $y = 3x - 1$.

253. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку (−2; 1) й утворює з віссю абсцис кут:
1) 45°; 2) 60°.

254. Яке рівняння задає пряму, що проходить через точку $\left(3; -\sqrt{3}\right)$ та утворює з віссю абсцис кут 30°?

255. Складіть рівняння прямих, що містять середні лінії трикутника ABC, якщо:
1) A (2; −3), B (−2; 3), C (6; −3);
2) A (1; −2), B (−1; 2), C (5; 10).

256. Складіть рівняння сторін рівнобедреного трикутника ABC, у якого:
1) A (−1; 2), B (3; 2), $\angle BAC = \angle ABC = 45°$;
2) A (−2; −3), B (6; −3), $\angle ACB = 120°$.

257. **Складіть рівняння сторін квадрата, діагоналі якого лежать на осях координат і дорівнюють $2a$.**

258. Які кути утворює з осями координат пряма:
1) $3x - 3y + 1 = 0$; 2) $2x + 2y - 5 = 0$?

259. Знайдіть довжину відрізка AB, який відтинають осі координат від прямої:
1) $5x - 12y + 3 = 0$; 2) $4x + 3y - 6 = 0$.

260. Знайдіть довжину відрізка BC, який відтинають осі координат від прямої $4x - 2y - 3 = 0$.

261. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо:
1) A (−2; −3), B (3; 1), C (−1; 2);
2) A (2; 3), B (−3; −1), C (4; 2).

262. Яку площу має трикутник, сторони якого лежать на осях координат і прямій $3x + y - 2 = 0$?

263. Знайдіть площу трикутника, сторони якого лежать на осях координат і прямій $5x - 12y + 24 = 0$.

264*. Доведіть, що прямі $3x + 4y - 2 = 0$ і $3x + 4y - 3 - m^2 = 0$ не мають спільних точок.

265*. **Дві прямі взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли добуток їхніх кутових коефіцієнтів дорівнює −1**. Доведіть.

266*. Вершини трикутника мають координати A (0; 13), B (2; −1) і C (10; 3). Доведіть, що його медіани, проведені з вершин B і C, взаємно перпендикулярні.

267*. Яка умова перпендикулярності відрізків AB і CD, якщо відомі координати їхніх кінців: $A\,(a_1;\,a_2)$, $B\,(b_1;\,b_2)$, $C\,(c_1;\,c_2)$, $D\,(d_1;\,d_2)$?

268*. Складіть рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох даних точок:
1) $(0;\,0)$ і $(a_1;\,a_2)$;
2) $(a_1;\,a_2)$ і $(b_1;\,b_2)$.

269*. Які рівняння мають дотичні до кола $x^2 + y^2 = R^2$, що паралельні осі: 1) абсцис; 2) ординат?

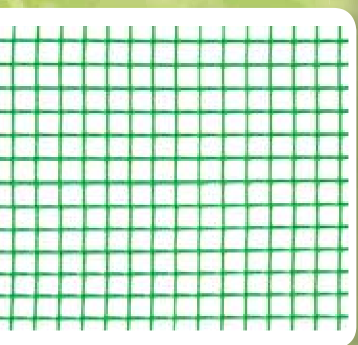
270*. Складіть рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = R^2$ в точці $M\,(x_0;\,y_0)$.

271*. Пряма a, яку задано рівнянням $4x + 3y - 6 = 0$, перетинає пряму b, паралельну осі ординат, у точці $M\,(-1{,}5;\,4)$. Знайдіть периметр трикутника, сторони якого лежать на прямих a, b й осі абсцис.

272*. На якій відстані від початку координат проходить пряма:
1) $y = kx + b$;
2) $ax + by + c = 0$?

273*. Як знайти відстань від точки $M\,(x_0;\,y_0)$ до прямої, заданої рівнянням:
1) $y = kx + b$;
2) $ax + by + c = 0$?

Проявіть компетентність

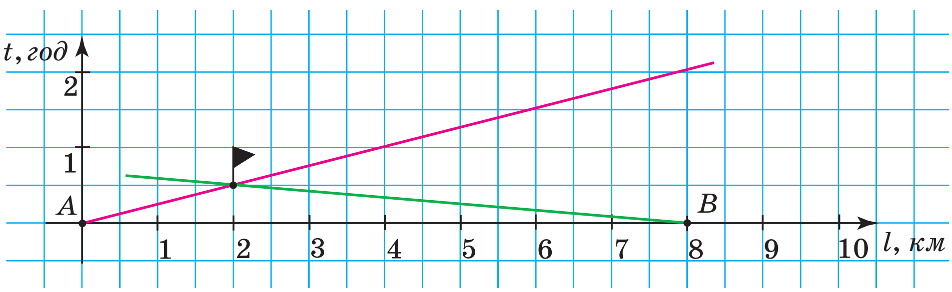


274. Через заданий вузол сітки проведіть пряму, яка паралельна даній прямій і проходить через два дані вузли сітки.

275. Як через даний вузол сітки провести прямі з кутовими коефіцієнтами $\frac{1}{2}$ і $\frac{2}{3}$ відносно горизонтальної лінії сітки? А відносно вертикальної?

276. Яка лінія є графіком рівномірного прямолінійного руху, що визначається рівнянням $s = s_0 + vt$?

277. Населені пункти A і B розташовані на відстані 8 км один від одного. З пункту A вийшов пішохід зі швидкістю 4 км/год, а назустріч йому з пункту B виїхав велосипедист зі швидкістю 12 км/год. За малюнком 60 поясніть:
1) як дізнатися про те, який час до зустрічі були в дорозі пішохід і велосипедист;
2) на якій відстані від пункту A пішохід і велосипедист зустрілися.



Мал. 60

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, що таке прямокутна декартова система координат та як її ввести на площині.
2. Як визначити координати точки на координатній площині?
3. Сформулюйте та доведіть теорему про відстань між двома точками із заданими координатами.
4. За якими формулами знаходять координати середини відрізка? Виведіть ці формули.
5. Поясніть, що таке синус, косинус і тангенс кута від 0° до 180°.
6. Назвіть значення синуса й косинуса для кутів 0°, 90°, 180°.
7. Запишіть основні тотожності для $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$.
8. Поясніть, що таке рівняння фігури.
9. Яке рівняння задає коло?
10. Які є види рівняння прямої?

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

1° Знайдіть відстань між точками $A(1; 2)$ і $B(2; 1)$.

А. 2.
Б. 6.
В. $\sqrt{2}$.
Г. $\sqrt{3}$.

2° Які координати має середина відрізка MH, якщо $M(-3; 0)$, $H(5; 6)$?

А. $(-3; 6)$.
Б. $(0; 5)$.
В. $(-4; 3)$.
Г. $(1; 3)$.

3° Обчисліть: $\sin 150° + \cos 120°$.

А. 0.
Б. $\frac{1}{2}$.
В. 1.
Г. 2.

4 Який кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через точки $P(-3; 1)$ і $T(2; -4)$?

А. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Б. -1.
В. 1.
Г. $\sqrt{3}$.

5* Обчисліть $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0{,}5$.

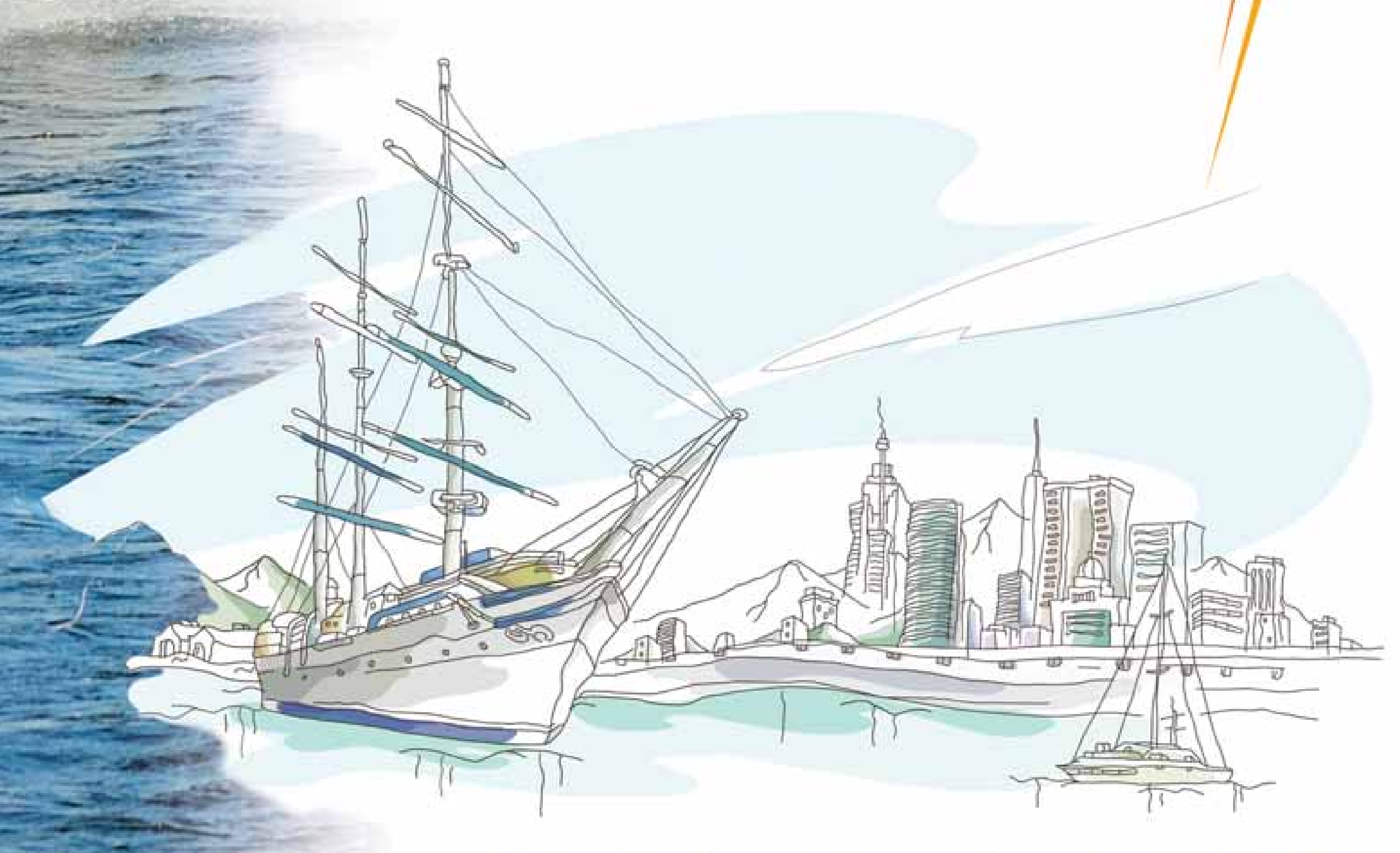
А. 2,5.
Б. 25.
В. 0,2.
Г. 0,25.

Розділ 2

Вектори на площині

У розділі дізнаєтеся:

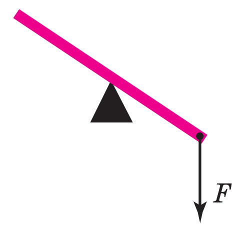
- що таке вектор; колінеарні, рівні вектори;
- як виконувати дії над векторами та які властивості цих дій;
- як знайти координати вектора за координатами його кінців і як побудувати цей вектор у даній системі координат;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці



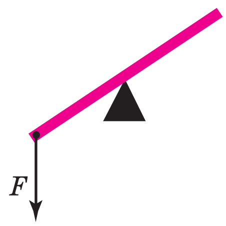
§ 7. ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА

1. ЩО ТАКЕ ВЕКТОР

Із курсу геометрії та фізики ви знаєте, що довжина, площа, температура, маса і т. п. характеризуються лише їх *числовими значеннями*. Такі величини називають *скалярними*, або коротко — *скалярами*. Але багато фізичних величин характеризуються не лише своїми числовими значеннями. Наприклад, щоб схарактеризувати силу, потрібно вказати ще й напрям, у якому вона діє, а також точку прикладання (мал. 61, 62).



Мал. 61

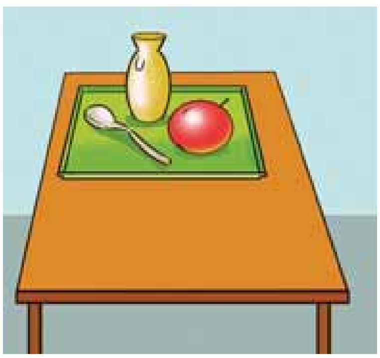


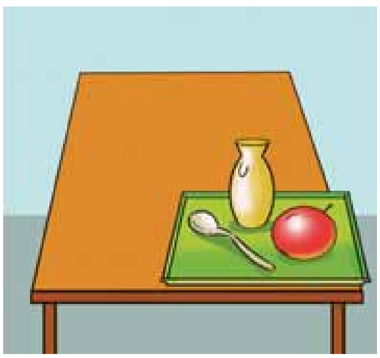
Мал. 62

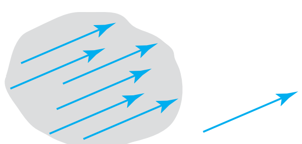
Сила є прикладом *векторної величини*. Ви знаєте, що силу зображають *напрямленим відрізком*.

На малюнку 63 ви бачите на столі тацю з деякими предметами. Якщо тацю переставити в інше місце на столі (мал. 64), то для опису цієї зміни розміщення таці на столі ми вкажемо її напрям (наприклад, пересунути праворуч) і відстань (наприклад, до правого краю стола). Тим самим ми задамо вектор, на який потрібно перемістити тацю. При цьому кожний предмет, що є на таці, переміститься на той самий вектор.

Міркуючи геометрично, можна сказати, що при переміщенні площини на задану відстань і в указаному напрямі переміщуються всі точки площини. А їх безліч. Тому в геометрії абстрагуються від точки прикладання як характеристики векторної величини й називають таку векторну величину *геометричним вектором*. Надалі будемо коротко говорити — *вектором*.


Мал. 63


Мал. 64

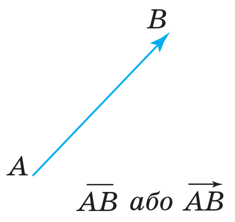

Мал. 65

Зображенням вектора на площині є всі напрямлені відрізки, які мають ту саму довжину й однаковий напрям. Але на аркуші паперу не можна побудувати повне зображення вектора, як і зображення всієї прямої чи площини. Тому в геометрії **вектор зображають лише одним напрямленим відрізком** (мал. 65). Його початок і кінець задають довжину та напрям решти відповідних напрямлених відрізків. Узагалі будь-яка впорядкована пара точок визначає вектор.

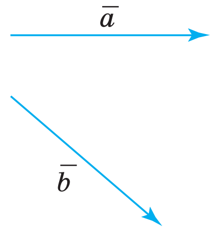
Щоб задати вектор, достатньо вказати його початок і кінець.

На малюнку 66 ви бачите вектор з початком у точці A й кінцем у точці B.

Коротко записуємо: $\overline{AB}$ або $\overrightarrow{AB}$. Риска або стрілка над назвою відрізка замінює слово «вектор». Вектори можна позначати й малими латинськими буквами: $\overline{a}$ або $\vec{a}$, $\overline{b}$ або $\vec{b}$ (мал. 67).



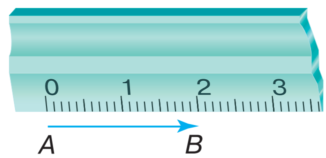
Мал. 66



Мал. 67

Вектор, у якого початок і кінець збігаються, називають *нуль-вектором* і позначають: $\overline{0}$ або $\vec{0}$. Із нуль-вектором не пов'язують жодного напряму.

Довжиною, або *модулем*, *вектора* називають відстань між його початком і кінцем. На малюнку 68 вектор $\overline{AB}$ має довжину 2 см.



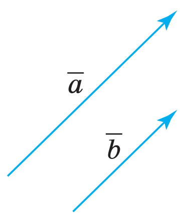
Мал. 68

Коротко записуємо: $\left|\overline{AB}\right|$ = 2 см, і говоримо: довжина (модуль) вектора AB дорівнює двом сантиметрам.

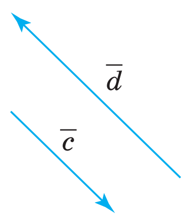
Довжина нуль-вектора дорівнює нулю. Вектор, який має довжину 1, називають *одиничним вектором*. Його позначають так: $\overline{e}$. За означенням, $\left|\overline{e}\right| = 1$.

2. КОЛІНЕАРНІ ВЕКТОРИ. РІВНІ ВЕКТОРИ

Два ненульові вектори називають *колінеарними*, якщо вони паралельні одній прямій. На малюнку 69 ви бачите два колінеарні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Можемо записати: $\overline{a} \parallel \overline{b}$. Колінеарні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, зображені на малюнку 69, мають однаковий напрям. Їх називають *співнапрямленими* й записують: $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$. На малюнку 70 вектори $\overline{c}$ і $\overline{d}$ також є колінеарними, але *протилежно напрямленими*. Їх позначають так: $\overline{c} \uparrow\downarrow \overline{d}$.



Мал. 69

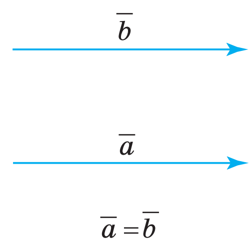


Мал. 70

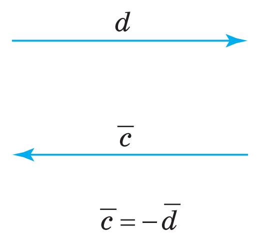
Вектори називаються рівними, якщо вони співнапрямлені й мають рівні довжини.

На малюнку 71 ви бачите рівні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

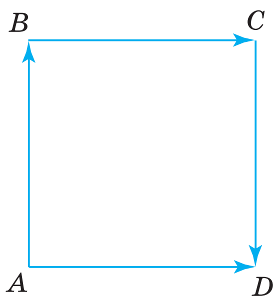
Коротко записуємо: $\overline{a} = \overline{b}$, і говоримо: вектор $\overline{a}$ дорівнює вектору $\overline{b}$.



Мал. 71



Мал. 72



Мал. 73

Якщо два вектори мають рівні модулі, але протилежні напрями, то їх називають *протилежними векторами*. На малюнку 72 вектори $\overline{c}$ і $\overline{d}$ є протилежними. Можемо записати: $\overline{c} = -\overline{d}$.

Задача. На сторонах квадрата $ABCD$ задано вектори $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ і $\overline{AD}$ (мал. 73).

Доведіть векторні рівності: $\overline{AD} = \overline{BC}$ і $\overline{AB} = -\overline{CD}$.

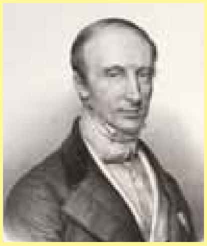
Розв'язання. Оскільки $ABCD$ — квадрат, то дані вектори мають рівні довжини: $|\overline{AD}| = |\overline{BC}|$ і $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$. За умовою, $\overline{AD} \uparrow\uparrow \overline{BC}$, але $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$. Тому $\overline{AD} = \overline{BC}$ за означенням рівних векторів, а $\overline{AB} = -\overline{CD}$ за означенням протилежних векторів.

Чи рівні вектори $\overline{AD}$ і $\overline{AB}$ в розглянутій задачі? Ні, бо ці вектори неколінеарні.

Щоб установити рівність векторів, перевірте виконання двох вимог:
1) дані вектори є співнапрямленими;
2) дані вектори мають рівні довжини.

Дізнайтеся більше

1. Назву «вектор» (*vector* у перекладі з латинської — той, що несе) запровадив ірландський математик У. Гамільтон (1805–1865). Позначення $\overline{AB}$ для напрямленого відрізка вперше в 1806 р. використав швейцарський математик Ж. Арган (1768–1822). Починаючи з 1853 р., вектор стали позначати й однією буквою $\overline{r}$, як це робив французький математик О. Коші (1789–1857). Позначення $\overline{AB}$ почали застосовувати лише у XX ст.



Огюстен-Луї Коші

2. Термін «модуль» походить від латинського слова *modulus* — міра. Його вперше став використовувати англійський математик Р. Котес (1682–1716). Знак модуля числа $|x|$ у 1841 р. увів видатний німецький математик К. Вейєрштрасс (1815–1897).
3. Термін «колінеарний» походить від латинського сполучення: *co* (*cum*) — разом, спільно, *lineo* — лінія.

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке вектор. Як його зображають; позначають?
2. Як задати вектор?
3. Що таке довжина, або модуль, вектора?
4. Який вектор називають нуль-вектором; одиничним вектором?
5. Які вектори називають колінеарними; співнапрямленими; протилежно напрямленими? Як їх позначають?
6. Сформулюйте означення рівних векторів.
7. Які вектори називають протилежними?

Розв'яжіть задачі

278'. Чи правильно, що вектор зображають:
1) точкою;
2) відрізком;
3) напрямленим відрізком?

279'. Чи правильно, що вектор задають:
1) його початком;
2) його кінцем;
3) його початком і кінцем?

280'. Чи правильно, що модуль вектора — це:
1) точка;
2) відрізок;
3) число, що дорівнює відстані між початком і кінцем вектора?

281'. Чи правильно, що в нуль-вектора початок і кінець:
1) не збігаються;
2) збігаються?

282'. Чи правильно, що в одиничного вектора довжина:
1) менша від 1;
2) дорівнює 1;
3) більша за 1?

283'. Чи правильно, що колінеарні вектори:
1) не паралельні одній прямій;
2) паралельні одній прямій?

284'. Чи правильно, що вектори є рівними, якщо:
1) їх довжини — рівні;
2) вони є колінеарними;
3) вони мають рівні довжини і є співнапрямленими?

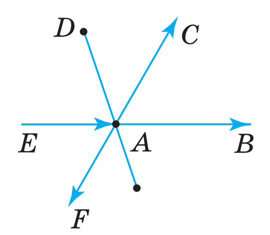
285°. На малюнках 74 і 75 назвіть:
1) усі зображені вектори;
2) вектори з початком у точці A.
Зробіть відповідні записи.

286°. На малюнку 76 назвіть:
1) усі зображені вектори;
2) вектори з початком у точці D.
Зробіть відповідні записи.

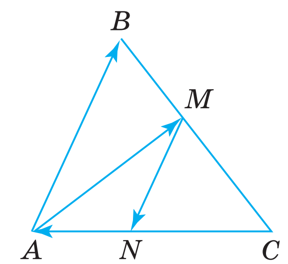
287°. Вектор задано впорядкованою парою точок:
1) A і C;
2) C і A;
3) H і P;
4) P і H.
Побудуйте вказаний вектор. Зробіть відповідний запис.

288°. Вектор задано впорядкованою парою точок:
1) O і T;
2) T і O.
Побудуйте вказаний вектор. Зробіть відповідний запис.

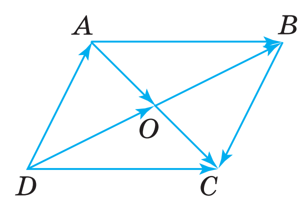
289°. Як записати, що вектор $\overline{AB}$ має довжину:
1) 5 см;
2) 3 мм;
3) 0,027 дм?



Мал. 74



Мал. 75



Мал. 76

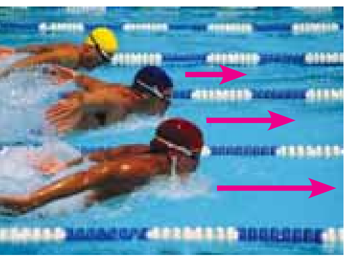
290°. Вектор $\overline{CD}$ має довжину 3 см. Зробіть відповідний запис.

291°. Чому дорівнюють модулі векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ і $\overline{d}$ на малюнку 77, якщо за одиницю довжини взято:

1) одну клітинку;
2) дві клітинки;
3) чотири клітинки?

Чи є серед даних векторів одиничні вектори?

292°. На малюнку 77 за одиницю довжини взято дві клітинки. Чи є серед даних векторів одиничні вектори?

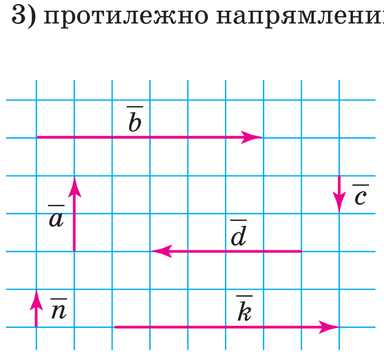


293°. На малюнку 77 назвіть вектори, що є:

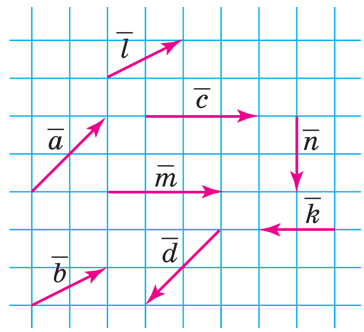
1) колінеарними;
2) співнапрямленими;
3) протилежно напрямленими;
4) рівними;
5) протилежними.

294°. На малюнку 78 назвіть вектори, що є:

1) колінеарними;
2) співнапрямленими;
3) протилежно напрямленими;
4) рівними;
5) протилежними.



Мал. 77



Мал. 78

295°. Побудуйте вектори $\overline{MN}$ і $\overline{PQ}$ так, щоб:

1) $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$;

2) $\left|\overline{MN}\right| = 3$ см, $\left|\overline{PQ}\right| = 3$ см;

3) $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ і $\left|\overline{MN}\right| = 3$ см, $\left|\overline{PQ}\right| = 3$ см.

Чи можна стверджувати, що $\overline{MN} = \overline{PQ}$?

296°. Накресліть паралелограм $ABCD$. На його сторонах і діагоналях позначте два вектори так, щоб вони були:

1) колінеарними;
2) співнапрямленими;
3) протилежно напрямленими;
4) рівними;
5) протилежними.

297°. Накресліть квадрат $ABCD$. На його сторонах і діагоналях позначте два вектори так, щоб вони були:

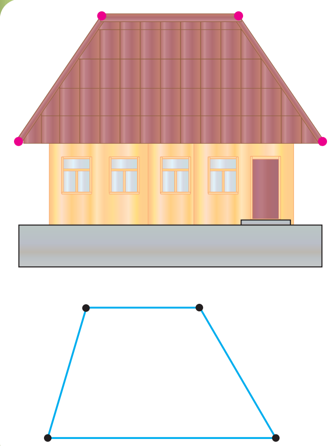
1) колінеарними;
2) співнапрямленими;
3) протилежно напрямленими;
4) рівними;
5) протилежними.

298°. Чи можна задати рівні вектори, що визначаються вершинами рівностороннього трикутника? А колінеарні вектори? А рівні за модулем вектори?

299°. Накресліть рівносторонній трикутник ABC та його середні лінії. Чи можна позначити два вектори так, щоб вони були:
1) колінеарними;
2) співнапрямленими;
3) протилежно напрямленими;
4) рівними;
5) протилежними?

300°. Дано трапецію з основами:
1) AC і BD;
2) AB і CD.
Чи правильно, що $\overline{AB} = \overline{CD}$? Відповідь обґрунтуйте.

301°. Дано трапецію з основами AD і CB. Чи правильно, що $\overline{AB} = \overline{CD}$? Відповідь обґрунтуйте.



302°. $ABCD$ — ромб. Точка M — середина AB. $AB = 4$. Знайдіть довжину векторів $\overline{CD}$, $\overline{BA}$, $\overline{MB}$, $\overline{AM}$, $\overline{BC}$, $\overline{DA}$.

303°. $ABCD$ — квадрат. Точка O — середина AC. $AC = 6$. Знайдіть довжину векторів $\overline{AO}$, $\overline{AD}$, $\overline{BO}$, $\overline{AB}$.

304. $ABCD$ — трапеція. Точка M — точка перетину її діагоналей. Скільки ненульових векторів можна задати на сторонах, діагоналях і середній лінії трапеції, що мають початок:
1) у вершинах трапеції;
2) у точці M;
3) у серединах сторін трапеції?

305. ABC — трикутник, у якому проведено середні лінії. Точки M, P і T — середини сторін трикутника. Скільки ненульових векторів можна задати на сторонах і середніх лініях трикутника, що мають початок:
1) у вершинах трикутника;
2) у кожній із середин сторін трикутника?

306. Дано чотири точки. Скільки ненульових векторів з кінцями в цих точках можна побудувати? Розгляньте різні випадки розміщення даних точок на площині.

307. Дано три точки. Скільки ненульових векторів з кінцями в цих точках можна побудувати? Розгляньте різні випадки розміщення даних точок на площині.

308. Точка B лежить між точками A і C. Точка M лежить між точками B і A. Серед векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AM}$, $\overline{BA}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$ і $\overline{MA}$ назвіть:
1) співнапрямлені вектори;
2) протилежно напрямлені вектори.

309. Побудуйте вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо їх довжини відповідно дорівнюють 4 см і 2 см та відомо, що ці вектори:
1) протилежно напрямлені;
2) співнапрямлені.
Скільки розв'язків має задача?

310. Побудуйте вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо їх довжини дорівнюють по 1 см і дані вектори колінеарні. Скільки розв'язків має задача?

311. Дано шестикутник, у якого кожна сторона має довжину 2 см, а кожний кут дорівнює $120°$. Яку довжину має вектор, що визначається:
1) двома сусідніми вершинами;
2) кінцями більшої діагоналі;
3) кінцями меншої діагоналі;
4) вершиною й точкою перетину діагоналей?

312. $ABCDEF$ — шестикутник, у якого всі сторони рівні й усі кути рівні. Скільки пар рівних векторів з кінцями в його вершинах можна побудувати?

313*. Знайдіть геометричне місце кінців одиничних векторів, початки яких містяться в точці M.

314*. Знайдіть геометричне місце початків одиничних векторів, кінці яких містяться в точці H.

315*. Знайдіть геометричне місце кінців колінеарних одиничних векторів, початки яких містяться на прямій AB.

316*. Яке геометричне місце точок визначає:
1) початок вектора $\overline{a}$; 2) кінець вектора $\overline{a}$?

317*. За допомогою точки та вектора задайте пряму.

Проявіть компетентність

318. Північний вітер змінився на:
1) північно-східний;
2) північно-західний;
3) східний.
Покажіть початковий і кінцевий напрямок вітру та напрямок його зміни.

319. Вулиця проходить за напрямком з північного сходу на південний захід. У якому напрямку проходить паралельна їй вулиця? А перпендикулярна? Зробіть малюнки, уважаючи вертикальний край аркуша в зошиті напрямком на північ.

320. Туристи пройшли від базового табору в напрямку на північ 4 км й повернули на схід. Пройшовши за цим напрямком 1 км, вони пройшли на північ ще 2,5 км. Побудуйте напрямки їхнього руху на плані в масштабі 1 км в 1 см.

321. За допомогою векторів покажіть зміну середньодобової температури:
1) за два дні; 2) за тиждень.

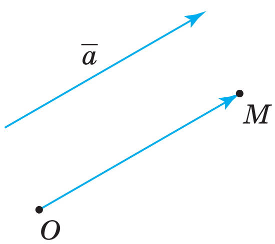
§ 8. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

Вектори можна додавати, віднімати та множити на число. Дії над векторами виконують за особливими правилами. Розглянемо їх.

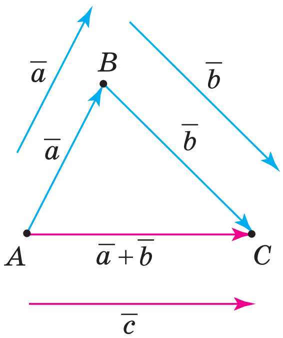
1. ДОДАВАННЯ ВЕКТОРІВ

1.1. Правило трикутника

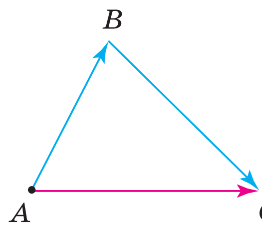
Для будь-якого вектора $\overline{a}$ та деякої точки O існує лише одна точка M, така, що $\overline{OM} = \overline{a}$ (мал. 79). Побудову точки M називають *відкладанням вектора* $\overline{a}$ *від точки* O.



Мал. 79

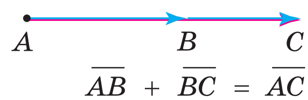


Мал. 80

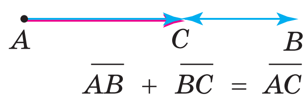


Мал. 81

Нехай дано два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Від довільної точки A відкладемо вектор $\overline{AB} = \overline{a}$, потім від точки B — вектор $\overline{BC} = \overline{b}$ (мал. 80). Початок вектора $\overline{AB}$ і кінець вектора $\overline{BC}$ задають вектор $\overline{AC} = \overline{c}$. Вектор $\overline{c}$ називають *сумою векторів* $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$. Можемо записати: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.



Мал. 82



Мал. 83

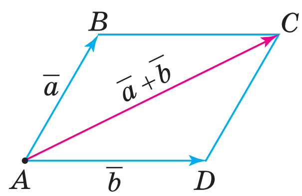
Якщо будувати суму $\overline{AC}$ неколінеарних векторів $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$, спираючись на означення, то утвориться трикутник ABC (мал. 81). Тому цей спосіб знаходження суми називають *правилом трикутника*. Його можна застосувати до будь-яких двох векторів, зокрема колінеарних. На малюнках 82 і 83 ви бачите, як знаходять суму співнапрямлених векторів (мал. 82) і протилежно напрямлених векторів (мал. 83).

Узагалі, **для будь-яких трьох точок A, B і C справджується рівність:**

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

1.2. Правило паралелограма

Суму двох неколінеарних векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ можна знайти інакше — за *правилом паралелограма*. Для цього від довільної точки A потрібно відкласти вектори $\overline{AB} = \overline{a}$ і $\overline{AD} = \overline{b}$, а потім побудувати паралелограм $ABCD$ (мал. 84). Тоді вектор $\overline{AC}$ дорівнює $\overline{a} + \overline{b}$.

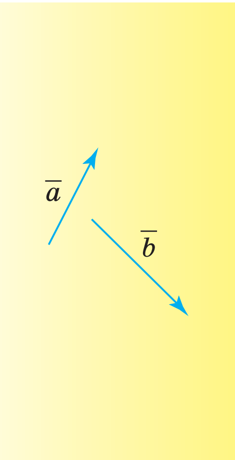
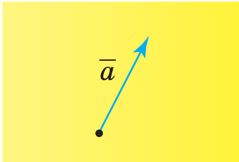
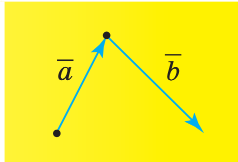
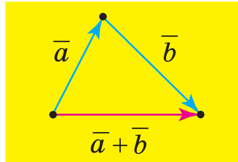
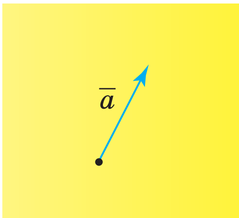
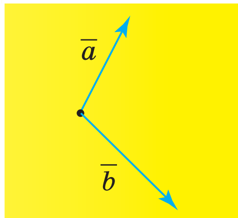
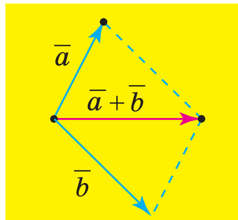
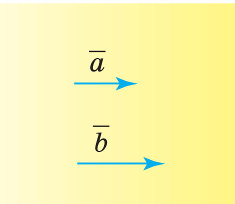
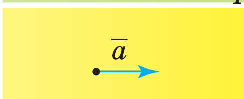
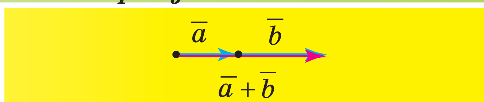


Мал. 84

? Чи можна правило паралелограма застосувати до колінеарних векторів?
Ні, оскільки на таких векторах не можна побудувати паралелограм.

Відмінності в застосуванні двох правил додавання векторів ви бачите в таблиці 12.

Таблиця 12

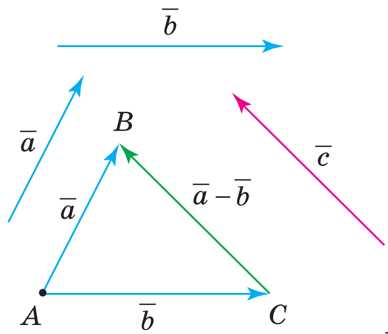
Дано	Побудова		
	***правило трикутника***		
			
	правило паралелограма		
			
	***правило трикутника***		
			
	правило паралелограма		

2. ВІДНІМАННЯ ВЕКТОРІВ

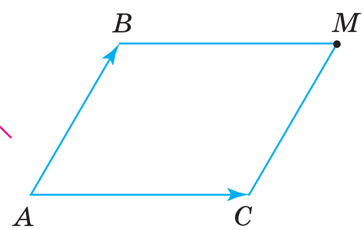
Різницею векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають такий вектор $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$, який при додаванні до вектора $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$. Іншими словами, з рівності $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$ випливає рівність $\overline{c} + \overline{b} = \overline{a}$. Звідси, щоб побудувати вектор $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$, потрібно від довільної точки A відкласти вектори $\overline{AB} = \overline{a}$ і $\overline{AC} = \overline{b}$, (мал. 85). Тоді вектор $\overline{CB} = \overline{c}$ є різницею $\overline{a} - \overline{b}$.

Узагалі, **для будь-яких трьох точок A, B і C справджується рівність:**

$$\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}.$$



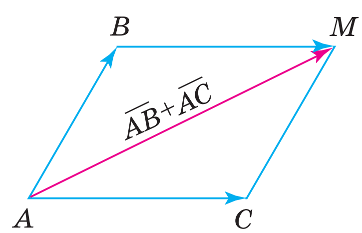
Мал. 85



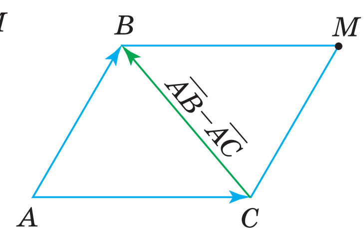
Мал. 86

Задача. На сторонах паралелограма $ABMC$ задано вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ (мал. 86). Виразіть через дані вектори діагоналі паралелограма.

Розв'язання. 1) У паралелограмі $ABMC$ проведемо діагональ AM (мал. 87). За правилом паралелограма: $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$.



Мал. 87



Мал. 88

2) У паралелограмі $ABMC$ проведемо діагональ CB (мал. 88). Вектор $\overline{CB}$ дорівнює різниці векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ за означенням. Отже, $\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC}$.

Щоб знайти суму й різницю неколінеарних векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, які відкладено від спільного початку A, побудуйте паралелограм $ABMC$. Тоді:

1) $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$ (мал. 87);

2) $\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC}$ (мал. 88).

3. МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Добутком ненульового вектора $\overline{a}$ *на число* $k \neq 0$ називають вектор $\overline{d}$, довжина якого дорівнює добутку довжини вектора $\overline{a}$ на модуль числа k, а напрям збігається з напрямом вектора $\overline{a}$, якщо $k > 0$, і протилежний напряму вектора $\overline{a}$, якщо $k < 0$.

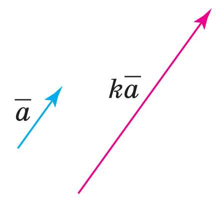
Коротко записуємо: $\overline{d} = k \cdot \overline{a}$.

За означенням добутку вектора на число:

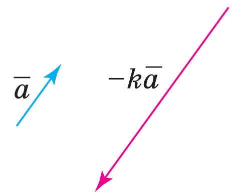
1) $|\overline{d}| = |k| \cdot |\overline{a}|$;

2) $\overline{d} \uparrow\uparrow \overline{a}$, якщо $k > 0$ (мал. 89);

3) $\overline{d} \uparrow\downarrow \overline{a}$, якщо $k < 0$ (мал. 90).



Мал. 89



Мал. 90

Добуток нуль-вектора на число та вектора на число 0 є нуль-вектором:

$$k \cdot \overline{0} = 0 \cdot \overline{a} = \overline{0}.$$

Властивості додавання векторів і множення вектора на число наведено в таблиці 13.

Таблиця 13

ВЛАСТИВОСТІ	
ДОДАВАННЯ ВЕКТОРІВ	**МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО**
$\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$	$1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$
Переставний закон	
$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$	$k \cdot \overline{a} = \overline{a} \cdot k$
Сполучний закон	
$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$	$k \cdot (m \cdot \overline{a}) = (k \cdot m) \cdot \overline{a}$
Перший розподільний закон	
$k \cdot \overline{a} + m \cdot \overline{a} = (k + m) \cdot \overline{a}$	
Другий розподільний закон	
$k \cdot \overline{a} + k \cdot \overline{b} = k \cdot (\overline{a} + \overline{b})$	
$\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$	$-1 \cdot \overline{a} = -\overline{a}$
	$k \cdot \overline{0} = 0 \cdot \overline{a} = \overline{0}$

Дізнайтеся більше

1. У вас могло виникнути запитання: *Як доводять векторні рівності?* Розглянемо приклад.

Щоб довести векторну рівність $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$, потрібно:

1) побудувати вектор $\overline{a} + \overline{b}$;

2) побудувати вектор $\overline{b} + \overline{a}$;

3) довести, що побудовані вектори рівні.

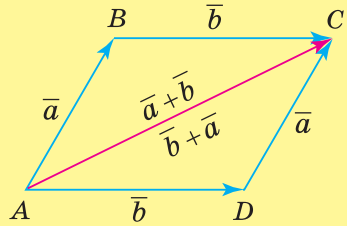
Нехай дано неколінеарні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (випадок колінеарності векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ розгляньте самостійно). Від довільної точки A відкладемо вектор $\overline{AB} = \overline{a}$, а від точки B — вектор $\overline{BC} = \overline{b}$ (мал. 91). Тоді маємо:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{a} + \overline{b}. \qquad (1)$$

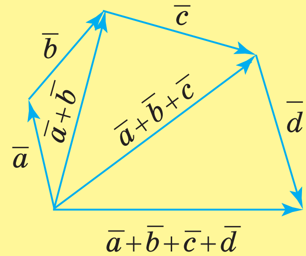
Доповнимо трикутник ABC до паралелограма $ABCD$ так, щоб сторона AC цього трикутника була діагоналлю паралелограма. Тоді

$$\overline{DC} = \overline{AB} = \overline{a},\ \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{b} \text{ і } \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{b} + \overline{a}. \qquad (2)$$

З рівностей (1) і (2) випливає, що $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.



Мал. 91



Мал. 92

2. Щоб побудувати суму кількох векторів, застосовують *правило многокутника*.

Якщо вектори побудовано так, що початок другого вектора збігається з кінцем першого вектора, початок третього — з кінцем другого і т. д., то сума дорівнює вектору, початок якого збігається з початком першого, а кінець — з кінцем останнього вектора. На малюнку 92 ви бачите, як знайшли суму векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ і $\overline{d}$.

Пригадайте головне

1. Що називають сумою двох векторів?
2. Поясніть, як додати два вектори за правилом трикутника.
3. Поясніть, як додати два вектори за правилом паралелограма.
4. Що називають різницею двох векторів?
5. Що таке добуток вектора на число?
6. Які властивості має додавання векторів?
7. Назвіть властивості множення вектора на число.

Розв'яжіть задачі

322'. Чи правильно, що сумою двох векторів є:
1) число;
2) відрізок;
3) вектор?

323'. Чи правильно, що для знаходження суми двох векторів за правилом трикутника початок другого вектора суміщають:
1) з початком першого вектора;
2) з кінцем першого вектора?

324'. Чи правильно, що для знаходження суми двох векторів за правилом паралелограма початок другого вектора суміщають:
1) з початком першого вектора;
2) з кінцем першого вектора?

325'. Чи можна застосувати правило паралелограма для знаходження суми двох колінеарних векторів? Відповідь поясніть.

326'. Чи правильно, що різницею двох векторів є:
1) число; 2) відрізок; 3) вектор?

327'. Чи правильно, що для знаходження різниці двох векторів початок другого вектора суміщають:
1) з початком першого вектора;
2) з кінцем першого вектора?

328'. Чи правильно, що в паралелограмі, побудованому на двох векторах зі спільним початком:
1) обидві діагоналі дорівнюють сумі цих векторів;
2) обидві діагоналі дорівнюють різниці цих векторів;
3) одна з діагоналей дорівнює сумі цих векторів, а друга — їхній різниці?

329'. Чи правильно, що добутком вектора на число є:
1) число; 2) відрізок; 3) вектор?

330'. Чи правильно, що, будуючи добуток вектора на додатне число, відмінне від 1, змінюють:
1) напрям вектора; 2) модуль вектора?

331'. Чи правильно, що, будуючи добуток вектора на від'ємне число, відмінне від -1, змінюють:
1) напрям вектора; 2) модуль вектора?

332°. На малюнках 93, 94 назвіть вектор, що є сумою двох даних векторів.

333°. Який вектор на малюнку 95 є сумою двох даних векторів?

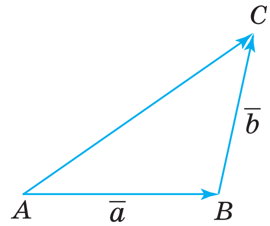
334°. Чи правильно застосували правило трикутника до векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (мал. 96–98)?

335°. Який вектор дорівнює сумі векторів:
1) $\overline{AM}+\overline{MN}$; 3) $\overline{BK}+\overline{KN}$?
2) $\overline{AB}+\overline{BC}$;

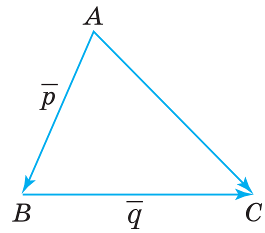
336°. Який вектор дорівнює сумі векторів:
1) $\overline{PO}+\overline{OM}$;
2) $\overline{AC}+\overline{CB}$?

337°. ABC — трикутник. Побудуйте суму векторів:
1) $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$; 3) $\overline{BC}$ і $\overline{CA}$.
2) $\overline{AC}$ і $\overline{CB}$;

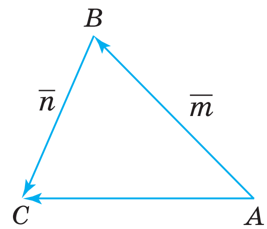
338°. Точки A, B і C не лежать на одній прямій. Знайдіть суму векторів:
1) $\overline{AB}+\overline{BC}$;
2) $\overline{AB}+\overline{BA}$;
3) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$.



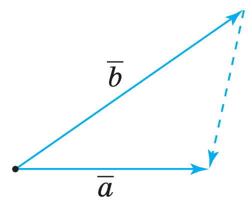
Мал. 93



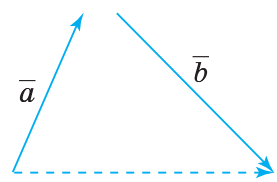
Мал. 94



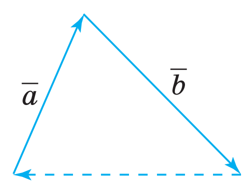
Мал. 95



Мал. 96

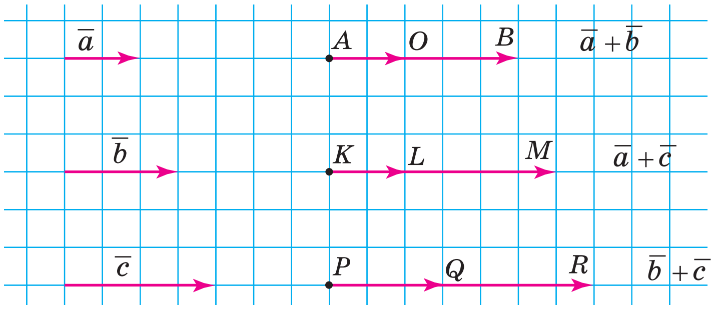


Мал. 97

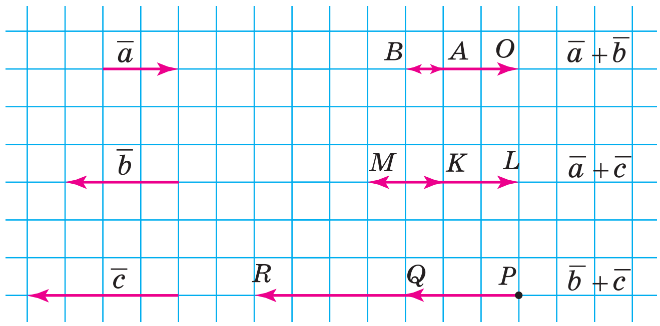


Мал. 98

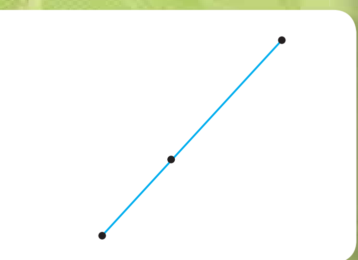
339°. На малюнках 99 і 100 для даних векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ побудовано їх суми: $\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a}+\overline{c}$ і $\overline{b}+\overline{c}$. Поясніть за малюнком:
1) від якої точки відкладали перший доданок;
2) від якої точки відкладали другий доданок;
3) який вектор дорівнює сумі двох доданків.



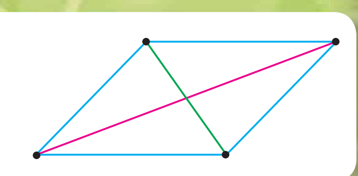
Мал. 99



Мал. 100



340°. Точки A, B і C лежать на одній прямій. Знайдіть суму векторів:
1) $\overline{AB}+\overline{BC}$;
2) $\overline{AB}+\overline{BA}$;
3) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$.



341°. Побудуйте паралелограм $ABKL$ та знайдіть суму векторів:
1) $\overline{KL}+\overline{KB}$;
2) $\overline{BA}+\overline{BK}$;
3) $\overline{AB}+\overline{KL}$.

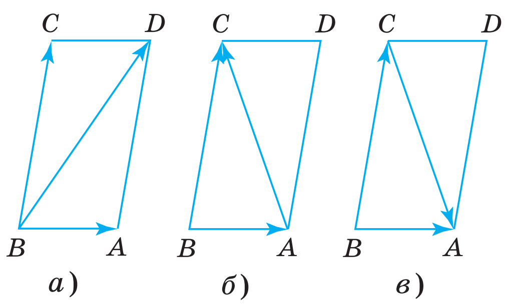
342°. Побудуйте паралелограм $BKLM$ та знайдіть суму векторів:
1) $\overline{KL}+\overline{KB}$;
2) $\overline{LM}+\overline{LK}$.

343°. Задайте два неколінеарні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ та побудуйте їх суму за правилом:
1) паралелограма;
2) трикутника.

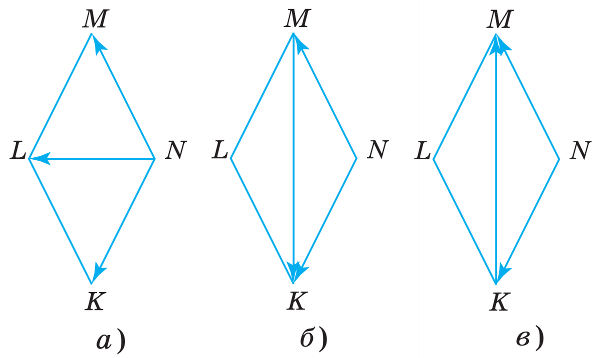
344°. Задайте два неколінеарні вектори $\overline{a}$ і $\overline{c}$ та побудуйте їх суму за правилом:
1) паралелограма;
2) трикутника.

345°. На сусідніх сторонах паралелограма задано два вектори (мал. 101). Чому дорівнює третій із зображених векторів?

346°. На сусідніх сторонах паралелограма задано два вектори (мал. 102). Чому дорівнює третій із зображених векторів?



Мал. 101



Мал. 102

347°. ABC — трикутник. Побудуйте різницю векторів:

1) $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$;

2) $\overline{AC}$ і $\overline{CB}$.

348°. KLM — трикутник. Побудуйте різницю векторів $\overline{LM}$ і $\overline{MK}$.

349°. ABC — рівносторонній трикутник зі стороною 1. Яка довжина вектора:

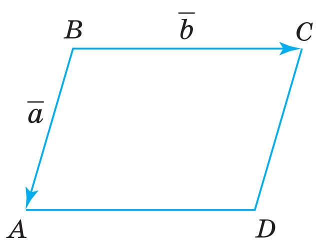
1) $\overline{AB}+\overline{BC}$;

2) $\overline{AB}-\overline{AC}$;

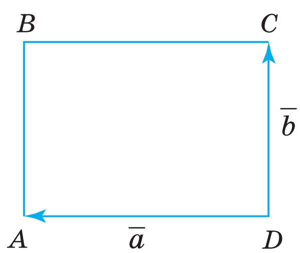
3) $\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{CA}$?

350°. На сторонах паралелограма $ABCD$ задано вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (мал. 103–105). Побудуйте вектор:

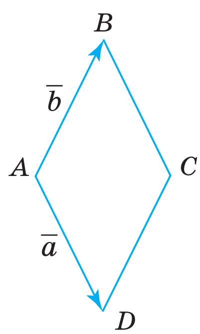
1) $\overline{a}+\overline{b}$; 2) $\overline{a}-\overline{b}$; 3) $\overline{b}-\overline{a}$.



Мал. 103



Мал. 104



Мал. 105

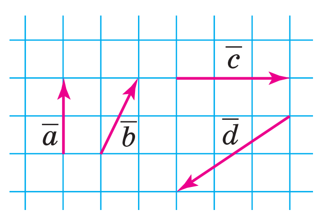
351°. На малюнку 106 дано вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, $\overline{c}$ і $\overline{d}$. Побудуйте суму й різницю кожної пари векторів.

352°. $ABCD$ — квадрат зі стороною 1. Яка довжина вектора:

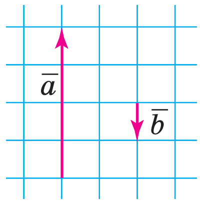
1) $\overline{AB}+\overline{AD}$;

2) $\overline{AB}-\overline{AD}$;

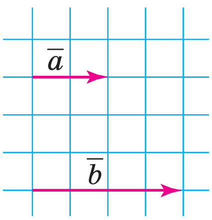
3) $\overline{AB}-\overline{AD}-\overline{DC}$?



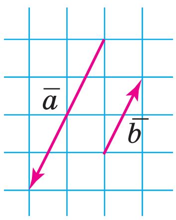
Мал. 106



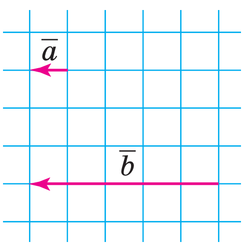
Мал. 107



Мал. 108



Мал. 109



Мал. 110

353°. За малюнками 107–110 установіть значення k в рівностях:
1) $\overline{a} = k \cdot \overline{b}$; 2) $\overline{b} = k \cdot \overline{a}$.

354°. Накресліть таблицю 14 і в її клітинках поставте знак «+», якщо вектори відповідають указаній вимозі за даного значення k.

Таблиця 14

Вектори $\overline{a}$ і $k \cdot \overline{a}$	$k=2$	$k=-0,5$	$k=1$	$k=-1$	$k=0,5$	$k=-2$
співнапрямлені						
протилежно напрямлені						
протилежні						
мають рівні довжини						
рівні						

355°. Задайте вектор $\overline{a}$ та побудуйте вектор:
1) $2\overline{a}$; 2) $-\frac{1}{3}\overline{a}$; 3) $\frac{2}{3}\overline{a}$.

356°. Задайте вектор $\overline{a}$ та побудуйте вектор:
1) $4\overline{a}$; 2) $-4\overline{a}$; 3) $0,25\overline{a}$.

357°. Порівняйте напрями й довжини векторів:
1) $6\overline{a}$ і $-6\overline{a}$; 2) $-3\overline{a}$ і $\frac{1}{3}\overline{a}$; 3) $\frac{1}{2}\overline{a}$ і $-2\overline{a}$.

358°. Порівняйте напрями й довжини векторів:
1) $2\overline{a}$ і $-2\overline{a}$; 2) $-0,25\overline{a}$ і $\overline{a}$.

359. Знайдіть суму векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{CB}$, де A, B і C — три задані точки. Розгляньте два випадки.

360. Доведіть, що для векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ й $\overline{AC}$ справджується нерівність: $|\overline{AC}| \le |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$.

361. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Чи рівні суми векторів:
1) $\overline{AB} + \overline{BC}$ і $\overline{DC} + \overline{DA}$;
2) $\overline{AB} + \overline{BD}$ і $\overline{AC} + \overline{CD}$?

362. Чотирикутник $ABCD$ — ромб із гострим кутом A. Порівняйте суми модулів векторів:
1) $|\overline{AB}| + |\overline{BC}|$ і $|\overline{DC}| + |\overline{AD}|$;
2) $|\overline{AB}| + |\overline{BD}|$ і $|\overline{AC}| + |\overline{CD}|$.

363. $ABCKFP$ — шестикутник, кожна сторона якого дорівнює 2. Знайдіть довжину вектора:
1) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CP}$; 2) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AP} + \overline{FP} + \overline{KF} + \overline{KC}$.

364. Спростіть вираз:
1) $\overline{BA} - \overline{BC} + 2\overline{AC}$; 2) $2\overline{CD} - \overline{DA} - \overline{DC} + \overline{CA}$.

365. Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює a. Знайдіть:
1) $\left|\overline{AB}\right|-\left|\overline{AC}\right|$; 2) $\left|\overline{AB}\right|+\left|\overline{AC}\right|$; 3) $\left|\overline{AB}-\overline{CB}\right|$.

366. За якого значення k виконується рівність:
$\overline{AB}+\overline{BC}=k\left(\overline{CB}-\overline{AB}\right)$?

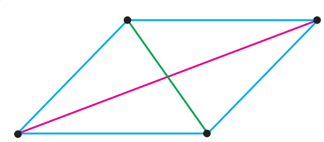
367. **Дано вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$. За якої умови вектори $\overline{a}+\overline{b}$ і $\overline{a}-\overline{b}$ колінеарні?**

368. Для яких ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ виконується нерівність:
1) $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\left|\overline{a}-\overline{b}\right|$;
2) $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\left|\overline{a}\right|+\left|\overline{b}\right|$?

369. У трикутнику ABC $\overline{AB}=\overline{c}$, $\overline{AC}=\overline{b}$, $\overline{BC}=\overline{a}$. Побудуйте вектор:
1) $\dfrac{a+b}{2}$; 2) $\dfrac{c+b}{2}$.

370. Побудуйте вектор $\overline{a}$. Збільшіть його довжину спочатку в 5 разів, а потім вектор, що одержали, — у 2 рази. Скільки розв'язків має задача?

371. $ABCD$ — паралелограм. Доведіть, що $\overline{AC}+\overline{BD}=2\overline{BC}$.



372. **AP — медіана трикутника ABC. Доведіть, що $\overline{AP}=\dfrac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)$.**

373. O — точка перетину медіан трикутника ABC. Доведіть, що $\overline{AO}=\dfrac{1}{3}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)$.

374*. **Якщо в трикутнику ABC проведено медіани AA_1, BB_1 і CC_1, то $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=\overline{0}$.** Доведіть.

375*. **Щоб точка Q була точкою перетину медіан трикутника ABC, необхідно й достатньо, щоб виконувалася рівність $\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}=\overline{0}$.** Доведіть.

376*. Якщо M — точка перетину медіан трикутника ABC, то для будь-якої точки O справджується рівність: $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=3\overline{OM}$. Доведіть.

377*. Медіани трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ перетинаються відповідно в точках O і O_1. Доведіть, що $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=3\overline{OO_1}$.

378*. На колі з центром у точці O позначено точки A, B і C так, що $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{0}$. Доведіть, що трикутник ABC — рівносторонній.

379*. Дано: чотирикутник $ABCD$, $\overline{AD}=\overline{AC}-\overline{AB}$. Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.

380*. Дано точки A, B і C. Побудуйте точку D так, щоб виконувалася рівність:
1) $\overline{DA}-2\overline{DB}-\overline{DC}=\overline{0}$;
2) $\overline{AB}+3\overline{BD}=\overline{BC}$.

381*. Доведіть тотожність:
1) $-\overline{DB}+\overline{BD}-\overline{CD}=2\overline{BC}+\overline{CD}$;
2) $\overline{BA}+\overline{DC}+\overline{CD}+\overline{BM}+\overline{MA}+2\overline{AB}=\overline{0}$.

382*. Задайте вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ та побудуйте вектор:

1) $4\overline{a}+6(\overline{b}-3\overline{c}+\overline{a})$;

2) $-(\overline{a}-8\overline{b})+4(2\overline{b}+\overline{a})$.

383*. Дано точки A, B, C і D. Точки M і N — середини відрізків AC і BD. Доведіть, що $\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{CB})$.

384*. Дано три точки A, B і C такі, що $\overline{AC}=k\cdot\overline{CB}$. Доведіть, що для будь-якої точки O справджується рівність: $\overline{OC}=\frac{\overline{OA}+k\cdot\overline{OB}}{1+k}$.

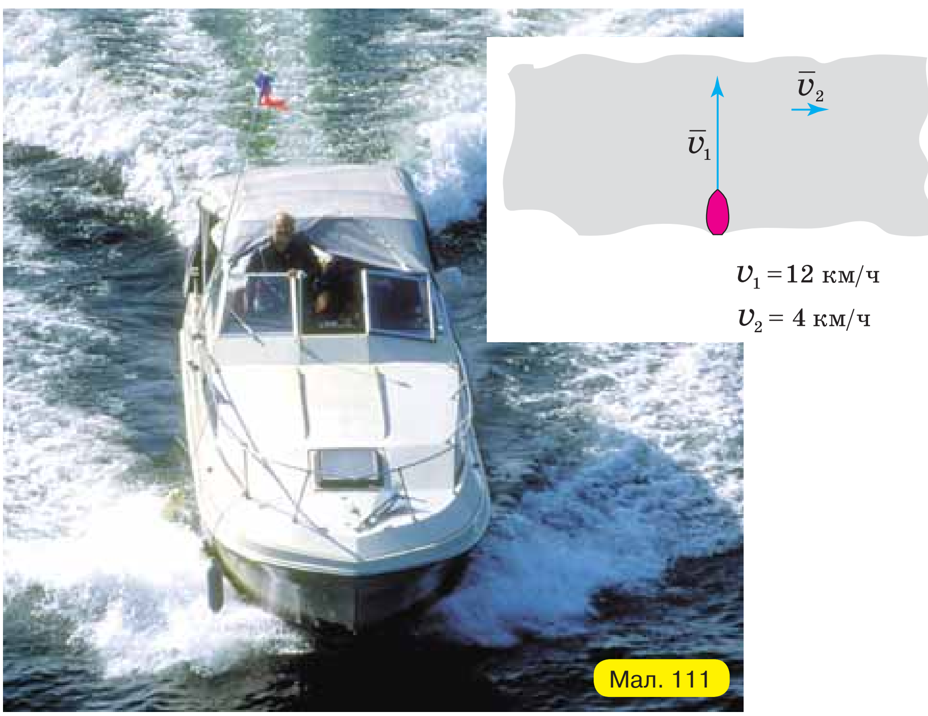
385*. Доведіть, що точка M лежить на прямій AB тоді і тільки тоді, коли для довільної точки O справджується рівність:
$\overline{OM}=k\cdot\overline{OA}+(1-k)\overline{OB}$, де k — будь-яке дійсне число.

Проявіть компетентність

386. Модуль рівнодійної двох сил дорівнює модулю кожної з них. Який кут між двома даними силами?

387. Двоє учнів витягують човен на берег, тримаючи його за трос. Яка сила діє на човен, якщо один учень прикладає силу 100 Н, а другий — 120 Н?

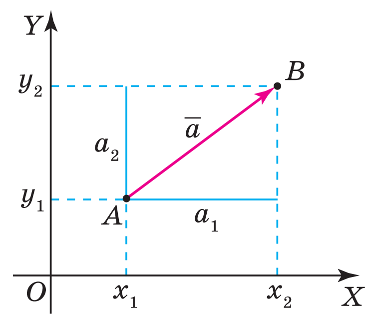
388. Моторний човен відчалює від берега річки з власною швидкістю $v_1 = 12$ км/год, а течія річки має швидкість $v_2 = 4$ км/год (мал. 111).
1) З якою швидкістю човен віддаляється від берега?
2) За який час човен опиниться посередині річки й на якій відстані від причалу, якщо ширина річки становить 6 км?
Виконайте відповідні малюнки.



Мал. 111

§ 9. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА

Ви вже знаєте, що впорядкована пара точок A і B визначає вектор $\overline{AB}$. Нехай точки A і B мають координати: $A\,(x_1;\,y_1)$, $B\,(x_2;\,y_2)$ (мал. 112). Числа $a_1 = x_2 - x_1$ і $a_2 = y_2 - y_1$ називають *координатами вектора* $\overline{a}$ *в даній системі координат*.



$\overline{a}(a_1;\,a_2) = \overline{AB}(x_2 - x_1;\,y_2 - y_1)$

$a_1 = x_2 - x_1$

$a_2 = y_2 - y_1$

Мал. 112

Коротко записуємо: $\overline{a}\ (a_1;\,a_2)$, і говоримо: вектор $\overline{a}$ з координатами a_1 і a_2.

Зрозуміло, що координати нуль-вектора дорівнюють нулю: $\overline{0}\ (0;\,0)$.

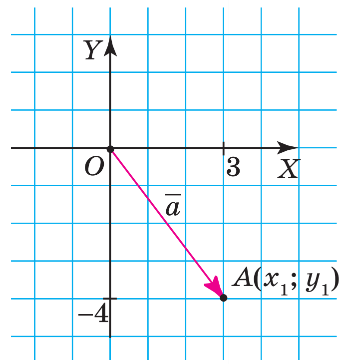
Оскільки довжина вектора $\overline{a}\ (a_1;\,a_2)$ дорівнює відстані між його початком і кінцем, то її можна обчислити за формулою:

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,.$$

Доведіть це самостійно.

Задача 1. Побудуйте вектор $\overline{a}$ (3; –4).

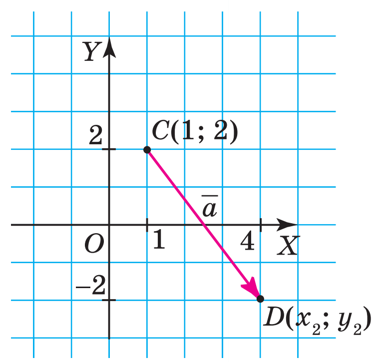
Розв'язання. Щоб побудувати вектор $\overline{a}$, потрібно задати його початок і кінець у даній системі координат. Нехай початок вектора $\overline{a}$ (мал. 113) міститься в початку координат $O(0;\,0)$, а його кінець — у точці $A(x_1;\,y_1)$.
Тоді, за означенням координат вектора, $3 = x_1 - 0$, $-4 = y_1 - 0$. Звідси $x_1 = 3$, $y_1 = -4$. Отже, точка A має координати (3; –4). Вектор $\overline{OA} = \overline{a}$ — шуканий.



Мал. 113

Як побудувати вектор $\overline{a}$, якщо його початок розмістити в іншій точці координатної площини? Поміркуємо.

На малюнку 114 початок вектора $\overline{a}$ (3; –4) міститься в точці $C\,(1;\,2)$, а кінець — у точці $D\,(x_2;\,y_2)$. За означенням координат вектора, $3 = x_2 - 1$, $-4 = y_2 - 2$. Звідси $x_2 = 4$, $y_2 = -2$. Отже, кінець вектора $\overline{a}$ міститься в точці $D\,(4;\,-2)$. Вектор $\overline{CD} = \overline{a}$ — шуканий.

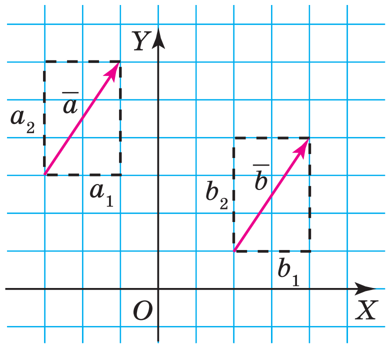


Мал. 114

Довжина та напрям вектора не залежать від розміщення його початку в системі координат.

Наведемо без доведення інші важливі твердження.

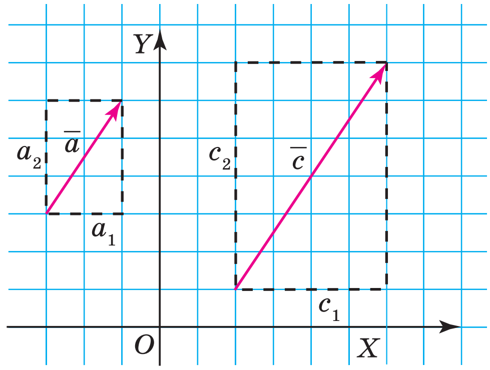
1. Вектори рівні тоді й тільки тоді, коли їх відповідні координати рівні (мал. 115).



$\bar{a}(a_1; a_2) = \bar{b}(b_1; b_2)$

$a_1 = b_1$ і $a_2 = b_2$

Мал. 115



$\bar{a}(a_1; a_2) \parallel \bar{c}(c_1; c_2)$ $\quad \dfrac{a_1}{c_1} = \dfrac{a_2}{c_2}$

Мал. 116

2. Вектори колінеарні тоді й тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні (мал. 116).

3. Щоб додати (відняти) вектори, їх відповідні координати додають (віднімають).

$$\bar{a}\,(a_1; a_2) + \bar{b}\,(b_1; b_2) = \bar{c}\,(a_1 + b_1; a_2 + b_2);$$
$$\bar{a}\,(a_1; a_2) - \bar{b}\,(b_1; b_2) = \bar{c}\,(a_1 - b_1; a_2 - b_2).$$

4. Щоб помножити вектор на число, його координати множать на це число.

$$k\bar{a}\,(a_1; a_2) = \bar{c}\,(ka_1; ka_2)$$

Задача 2. Знайдіть модуль вектора $2\bar{a} - 3\bar{b}$, якщо $\bar{a}\,(2; -1)$, $\bar{b}\,(4; 0)$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектора $2\bar{a} - 3\bar{b}$.

$$2\bar{a} - 3\bar{b} = 2\left(\overline{2; -1}\right) - 3 \cdot \left(\overline{4; 0}\right) = \left(\overline{4; -2}\right) - \left(\overline{12; 0}\right) = \left(\overline{-8; -2}\right).$$

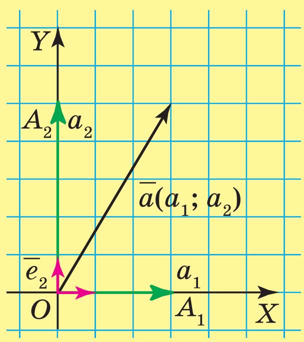
Обчислимо модуль одержаного вектора.

$$\left|2\bar{a} - 3\bar{b}\right| = \sqrt{(-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} = \sqrt{4 \cdot 17} = 2\sqrt{17}.$$

Дізнайтеся більше

1. Нехай вектор $\bar{a}\,(a_1; a_2)$ відкладено від початку координат (мал. 117). Відкладемо на осях координат одиничні вектори $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$ (їх ще називають *координатними векторами*), а також вектори $\overline{OA_1}$ і $\overline{OA_2}$, що мають довжини відповідно a_1 і a_2. Виразимо вектори $\overline{OA_1}$ і $\overline{OA_2}$ через відповідні одиничні вектори: $\overline{OA_1} = a_1 \cdot \bar{e}_1$, $\overline{OA_2} = a_2 \cdot \bar{e}_2$. Вектор $\bar{a}$ дорівнює сумі векторів $\overline{OA_1}$ і $\overline{OA_2}$. Звідси одержимо:

$$\bar{a} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} = a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2.$$

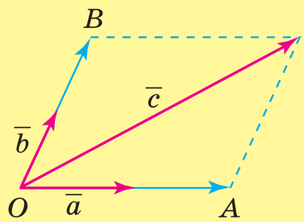


Мал. 117

Рівність $\overline{a} = a_1 \cdot \overline{e_1} + a_2 \cdot \overline{e_2}$ називають *розкладом вектора* $\overline{a}$ *за двома координатними векторами*, а числа a_1 і a_2 — *коефіцієнтами розкладу*. Узагалі, **розклад вектора за двома неколінеарними векторами — єдиний**. Отже, координатами вектора в певній системі координат є коефіцієнти розкладу даного вектора за координатними векторами.

2. Будь-який вектор можна розкласти не лише за координатними векторами, а за будь-якими двома ненульовими неколінеарними векторами. Розглянемо приклад.

Нехай дано два ненульові неколінеарні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ та довільний вектор $\overline{c}$. Відкладемо дані вектори від спільного початку O (мал. 118). Вектор $\overline{c}$ дорівнює сумі векторів $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$, колінеарних із векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ відповідно.



Мал. 118

Тоді $\overline{OA} = m \cdot \overline{a}$, $\overline{OB} = n \cdot \overline{b}$, де m і n — деякі числа, що одночасно не дорівнюють нулю.

Тоді $\overline{c} = \overline{OA} + \overline{OB} = m \cdot \overline{a} + n \cdot \overline{b}$.

Отже, одержали розклад вектора $\overline{c}$ за векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

3. **Елена Лукреція Корнаро Піскопія** (1646–1684) — італійський філософ, математик, перша жінка у світі, яка була студенткою, перша жінка у світі, яка здобула докторський ступінь. Піскопія була дочкою прокуратора Венеції. Здобула добру освіту, зокрема, опанувала декілька сучасних і класичних мов та «вільні мистецтва». Вона зневажала фривольність венеціанського суспільства й ще замолоду пішла в черниці до бенедиктинок. Піскопія із часом вирішила повністю присвятити себе науці. У 1677 р. вона провела свій перший публічний диспут у Падуанському університеті. Згодом Піскопія добилася дозволу захистити докторську дисертацію. Це сталося 25 червня 1678 р. Проте її науковий доробок був опублікований у Пармі лише після смерті (1688 р.). У Падуанському університеті встановлено її скульптурний пам'ятник.

Пригадайте головне

1. Що називають координатами вектора?
2. Як знайти довжину вектора, заданого своїми координатами?
3. Поясніть, як побудувати вектор за його координатами.
4. Які координати мають рівні вектори? Колінеарні вектори?
5. Як знайти суму векторів, заданих своїми координатами; їх різницю?
6. Як помножити на число вектор, заданий своїми координатами?

Розв'яжіть задачі

389'. Чи правильно, що координатами вектора $\overline{a}(3;\ 4)$ є впорядкована пара чисел:
1) 3 і 3; 2) 4 і 4; 3) 4 і 3; 4) 3 і 4?

390'. Чи правильно, що довжину вектора $\overline{a}(3;\ 4)$ можна знайти, обчисливши значення виразу:
1) $\pm\sqrt{3^2+4^2}$; 2) $-\sqrt{3^2+4^2}$; 3) $\sqrt{3^2+4^2}$?

391'. Чи правильно, що в рівних векторів відповідні координати:
1) нерівні;
2) рівні?

392'. Чи правильно, що в колінеарних векторів відповідні координати:
1) непропорційні;
2) пропорційні?

393'. Чи правильно, що координати суми векторів дорівнюють:
1) сумі координат векторів-доданків;
2) сумам відповідних координат векторів-доданків?

394'. Чи правильно, що координати добутку вектора на число дорівнюють:
1) добутку координат вектора;
2) добутку відповідних координат вектора на дане число?

395°. За малюнками 119 і 120 знайдіть координати початку й кінця заданих векторів.

396°. Які координати початку й кінця вектора на малюнку 121?

397°. Які координати має вектор:
1) $\overline{OA}$ (мал. 119); 2) $\overline{BC}$ (мал. 120)?

398°. Які координати має вектор $\overline{HT}$ (мал. 121)?

399°. Яку довжину має вектор:
1) $\overline{b}\,(b_1; b_2)$; 2) $\overline{c}\,(c_1; c_2)$; 3) $\overline{d}\,(d_1; d_2)$?

400°. Складіть вираз для обчислення довжини вектора:
1) $\overline{p}\,(p_1; p_2)$; 2) $\overline{t}\,(t_1; t_2)$.

401°. Чи є рівними вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:
1) $\overline{a}\,(2; -4)$ і $\overline{b}\,(2; 4)$; 3) $\overline{a}\,(2; -4)$ і $\overline{b}\,(-2; -4)$;
2) $\overline{a}\,(2; -4)$ і $\overline{b}\,(-2; 4)$; 4) $\overline{a}\,(2; -4)$ і $\overline{b}\,(2; -4)$?
Відповідь поясніть.

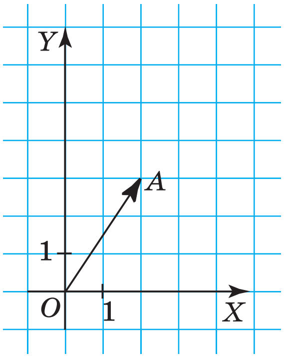
402°. Чи є рівними вектори $\overline{c}$ і $\overline{d}$, якщо:
1) $\overline{c}\,(-3; 1)$ і $\overline{d}\,(3; -1)$; 2) $\overline{c}\,(-3; 1)$ і $\overline{d}\,(-3; 1)$?
Відповідь поясніть.

403°. Чи є колінеарними вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:
1) $\overline{a}\,(2; -4)$ і $\overline{b}\,(2; 4)$; 3) $\overline{a}\,(2; -4)$ і $\overline{b}\,(-2; -4)$;
2) $\overline{a}\,(2; -4)$ і $\overline{b}\,(-2; 4)$; 4) $\overline{a}\,(2; -4)$ і $\overline{b}\,(2; -4)$?
Чи є дані вектори рівними; протилежними? Відповідь поясніть.

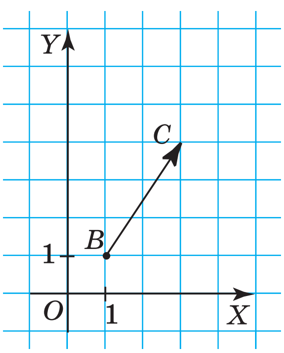
404°. Серед даних векторів знайдіть колінеарні вектори: $\overline{a}\,(3; 2)$, $\overline{b}\,(6; 4)$, $\overline{c}\,(2; 3)$, $\overline{d}\,(-6; -4)$, $\overline{h}\,(1{,}5; 1)$, $\overline{k}\,(-3; 4)$, $\overline{p}\,(15; 10)$, $\overline{t}\,(-9; -6)$.

405°. Чи є колінеарними вектори $\overline{c}$ і $\overline{d}$, якщо:
1) $\overline{c}\,(-3; 1)$ і $\overline{d}\,(3; -1)$; 2) $\overline{c}\,(-3; 1)$ і $\overline{d}\,(-3; 1)$?
Відповідь поясніть.

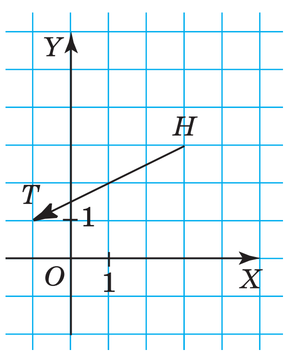
406°. Знайдіть координати вектора $\overline{AB}$, якщо:
1) $A\,(-1; 5)$, $B\,(2; 5)$;
2) $A\,(-4; 6)$, $B\,(1; 0)$;
3) $A\,(1; 1)$, $B\,(3; -9)$.
Побудуйте даний вектор.



Мал. 119



Мал. 120



Мал. 121

407°. Накресліть у зошиті таблицю 15 і заповніть її.

Таблиця 15

A	(1; 4)		(5; 2)	(6; −6)		(5; 7)
B	(0; −3)	(2; −2)			(2; 1)	(11; 9)
$\overline{AB}$		$\overline{AB}$ (8; 5)	$\overline{AB}$ (4; 3)	$\overline{AB}$ (−3; 5)	$\overline{AB}$ (3; 0)	

408°. Знайдіть координати вектора $\overline{AB}$, якщо:
1) A (0; 3), B (1; −1); 2) A (−3; −3), B (2; 2).
Побудуйте даний вектор.

409°. Знайдіть довжину вектора $\overline{a}$:
1) $\overline{a}$ (1; 1); 2) $\overline{a}$ (4; 3); 3) $\overline{a}$ (12; −5).

410°. Знайдіть довжину вектора $\overline{AB}$, якщо відомі координати точок A і B:
1) A (10; 3), B (0; 5); 2) A (2; −1), B (5; 2); 3) A (−1; −2), B (1; 2).

411°. Знайдіть довжину вектора $\overline{b}$ (−6; −8).

412°. Чи є одиничним вектор:
1) $\overline{a}$ (1; 0); 2) $\overline{b}\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$?

413°. Доведіть, що вектор $\overline{d}$ (1; 1) не є одиничним.

414°. Знайдіть координати суми та різниці векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:
1) $\overline{a}$ (1; 2), $\overline{b}$ (3; 4); 2) $\overline{a}$ (−3; 1), $\overline{b}$ (2; −4); 3) $\overline{a}$ (−6; −2), $\overline{b}$ (6; 2).

415°. Знайдіть координати суми та різниці векторів $\overline{c}$ і $\overline{d}$, якщо:
1) $\overline{c}$ (2; 1), $\overline{d}$ (4; 3); 2) $\overline{c}$ (1; −3), $\overline{d}$ (−4; 2).

416°. Знайдіть координати суми векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (мал. 122).

417°. Який вектор потрібно додати до вектора $\overline{a}$ (4; 3), щоб одержати нуль-вектор?

418°. Чи є вектор $\overline{c}$ (5; 2) сумою векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (мал. 123)?

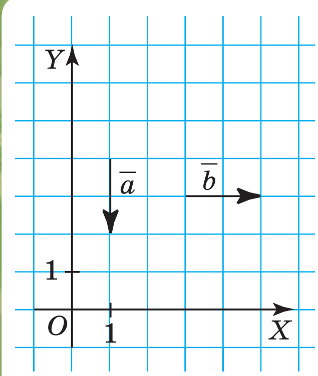
419°. Дано вектор $\overline{a}$ (1; 4). Знайдіть координати вектора:
1) $5\overline{a}$; 3) $\frac{1}{2}\overline{a}$;
2) $-3\overline{a}$; 4) $-\overline{a}$.

420°. Дано вектор $\overline{c}$ (4; −2). Знайдіть координати вектора:
1) $0,5\overline{c}$; 2) $-2\overline{c}$.

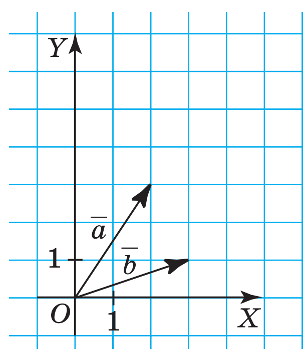
421°. Дано: $\overline{b}$ (1; 2), $\overline{c}$ (−5; 8). Знайдіть координати вектора $\overline{a}$, якщо:
1) $\overline{a} = \overline{c} - \overline{b}$; 2) $\overline{a} = \overline{b} + 0,5\overline{c}$; 3) $4\overline{a} = \overline{b} + \overline{c}$.

422°. Знайдіть модуль вектора $2\overline{a} - \overline{b}$, якщо:
1) $\overline{a}$ (2; 4), $\overline{b}$ (−1; 8); 2) $\overline{a}$ (0; −4), $\overline{b}$ (2; 3).

423°. Знайдіть модуль вектора $\overline{a} + 2\overline{b}$, якщо $\overline{a}$ (4; 2), $\overline{b}$ (−8; 1).



Мал. 122



Мал. 123

424. Серед векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{DA}$, $\overline{BD}$ знайдіть колінеарні вектори, якщо:
1) $A\ (2;\ 3)$, $B\ (2;\ -1)$, $C\ (1;\ -1)$, $D\ (1;\ 13)$;
2) $A\ (-1;\ 2)$, $B\ (0;\ -6)$, $C\ (1;\ -4)$, $D\ (-3;\ 6)$.

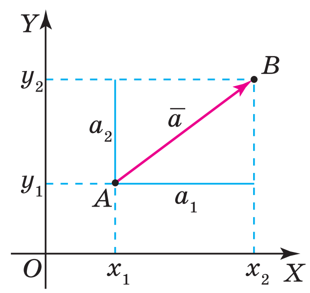
425. За якого значення λ вектори $\overline{a}\ (3;\ 6)$ і $\overline{b}\ (1;\ \lambda)$ колінеарні?

426. Знайдіть координати вектора, протилежного до вектора $\overline{AB}$, якщо:
1) $A\ (10;\ 9)$, $B\ (1;\ 1)$; 2) $A\ (4;\ -7)$, $B\ (0;\ 6)$.

427. За якого значення λ вектор $\overline{a}\ (1;\ \lambda)$:
1) є одиничним; 2) має довжину 3?

428. Модуль вектора $\lambda\overline{a}$ дорівнює 8. Знайдіть λ, якщо:
1) $\overline{a}\ (-1;\ 1)$; 2) $\overline{a}\ (0;\ -4)$.

429. Побудуйте суму векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо $A\ (-1;\ 2)$, $B\ (2;\ -1)$, $C\ (1;\ -3)$ і $D\ (-5;\ 3)$. Розв'яжіть задачу двома способами.



430. Знайдіть координати векторів: $\overline{a}+\overline{b}$; $-3\overline{a}+\overline{b}-7\overline{c}+\overline{d}$; $5\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}-\overline{d}$ та побудуйте їх, якщо:
1) $\overline{a}\ (2;\ 0)$, $\overline{b}\ (1;\ 4)$, $\overline{c}\ (-1;\ 1)$, $\overline{d}\ (0;\ 2)$;
2) $\overline{a}\ (0;\ -5)$, $\overline{b}\ (2;\ -3)$, $\overline{c}\ (3;\ 7)$, $\overline{d}\ (5;\ 4)$.

431. Побудуйте паралелограм на векторах $\overline{OA}\ (2;\ 1)$ і $\overline{OB}\ (1;\ 4)$. Визначте довжини його діагоналей.

432. Відомі координати вершин трикутника ABC: $A\ (6;\ 2)$, $B\ (1;\ 1)$, $C\ (-5;\ 9)$. Знайдіть координати вектора $\overline{AM}$, якщо AM — медіана даного трикутника.

433. Чи рівні вектори $\overline{b}+3\overline{c}$ та $\overline{a}-\overline{c}$, якщо: $\overline{a}\ (1;\ 3)$, $\overline{b}\ (-7;\ -5)$, $\overline{c}\ (2;\ 2)$?

434*. Доведіть, що точки $A\ (-1;\ 2)$, $B\ (2;\ -1)$, $C\ (1;\ -3)$ і $D\ (-5;\ 3)$ є вершинами трапеції.

435*. Побудуйте вектор $\overline{AB}+\overline{AC}+2\overline{CA}$, якщо $A\ (3;\ 3)$, $B\ (-8;\ 1)$, $C\ (4;\ -1)$. Розв'яжіть задачу двома способами.

436*. Побудуйте вектор $2\overline{a}+5\overline{c}$, якщо $\overline{a}\ (2;\ 5)$, $\overline{c}\ (-1;\ -1)$. Розв'яжіть задачу двома способами.

437*. На сторонах трикутника ABC задано вектори $\overline{AB}\ (2;\ 10)$ і $\overline{AC}\ (6;\ -2)$. Які координати мають вектори $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ і $\overline{CP}$, що визначаються медіанами даного трикутника? Знайдіть довжини його медіан.

438*. Знайдіть координати вершин трикутника ABC та координати вектора $\overline{CA}$, якщо:
1) $A\ (1;\ -4)$, $\overline{AB}\ (0;\ 6)$, $\overline{BC}\ (2;\ -1)$; 2) $A\ (2;\ -5)$, $\overline{AB}\ (0;\ 2)$, $\overline{BC}\ (4;\ 2)$.

439*. Знайдіть координати вектора $\overline{b}$, колінеарного з вектором $\overline{a}$, якщо $|\overline{b}|=10$ і $\overline{a}\ (4;\ 3)$.

440*. Визначте координати вектора $\overline{d}$, якщо $\overline{d}\uparrow\downarrow\overline{c}$ і:
1) $\overline{c}\ (1;\ -2)$, $|\overline{d}|=5$; 2) $\overline{c}\ (12;\ 5)$, $|\overline{d}|=75$.

441*. Дано: $\overline{AB}=\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{BC}=-4\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{CD}=-5\overline{a}-3\overline{b}$. Доведіть, що $ABCD$ — трапеція.

Проявіть компетентність

442. На тіло діють сили $\overline{F_1}$ (1; 5) і $\overline{F_2}$ (−4; 7). Знайдіть вектор рівнодійної сили.

443. Дано вектор рівнодійної сили $\overline{F}$ (6; 13). Знайдіть вектори сил, що мають напрями осей координат і для яких дана сила є рівнодійною.

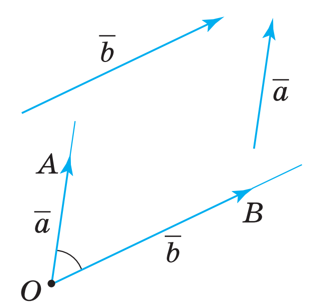
444. Щоб зважити брусок вагою 10 Н за допомогою двох динамометрів, розрахованих на вимірювання сили 5 Н, діють так. Обидва динамометри укріплюють поряд на одному рівні, а брусок підвішують одразу до обох гачків динамометрів. Поясніть, чому так можна зважити брусок.

§ 10. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

1. ДІЯ СКАЛЯРНОГО МНОЖЕННЯ ВЕКТОРІВ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Ви вже знаєте дві дії над векторами — додавання та множення вектора на число. Розглянемо нову дію над векторами — *скалярне множення*. Спочатку введемо поняття кута між векторами.

На малюнку 124 ви бачите два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Відкладемо від точки O вектори $\overline{OA} = \overline{a}$ і $\overline{OB} = \overline{b}$. Промені OA і OB утворюють кут AOB, який називають *кутом між векторами* $\overline{a}$ і $\overline{b}$.



Мал. 124

Коротко записуємо: $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)$, і читаємо: кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ співнапрямлені, то $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right) = 0°$, а якщо протилежно напрямлені, то $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right) = 180°$.

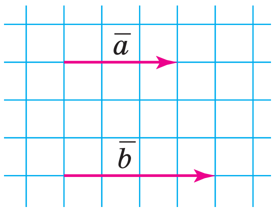
Скалярним добутком двох ненульових векторів називається число, що дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними.

Назва скалярного добутку зумовлена тим, що результатом цієї дії є число.

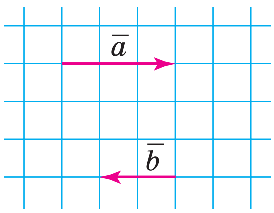
Скалярний добуток записують так: $\overline{a}\ \overline{b}$.

Отже, за означенням:

$$\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right).$$



Мал. 125



Мал. 126

Якщо $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$ (мал. 125), то $\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos 0^\circ = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot 1 = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$.

Якщо $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$ (мал. 126), то $\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos 180^\circ = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot(-1) = -|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$.

Якщо $\overline{a}\perp\overline{b}$, то $\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos 90^\circ = 0$.

Якщо $\overline{a}=\overline{b}$, то $\overline{a}\,\overline{a} = |\overline{a}|\cdot|\overline{a}|\cdot\cos 0^\circ = |\overline{a}|^2$.

Добуток $\overline{a}\,\overline{a}$ називають *скалярним квадратом* вектора $\overline{a}$ і позначають $\overline{a}^2$. Отже, $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$, тобто **скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини.**

Властивості скалярного множення векторів наведено в таблиці 16.

Таблиця 16

Переставний закон	$\overline{a}\,\overline{b} = \overline{b}\,\overline{a}$
Сполучний закон (відносно скалярного множника)	$(k\cdot\overline{a})\overline{b} = k\cdot\overline{a}\,\overline{b}$
Розподільний закон	$(\overline{a}+\overline{b})\overline{c} = \overline{a}\,\overline{c}+\overline{b}\,\overline{c}$

2. СКАЛЯРНЕ МНОЖЕННЯ ВЕКТОРІВ, ЗАДАНИХ СВОЇМИ КООРДИНАТАМИ

Якщо вектори задано своїми координатами: $\overline{a}\,(a_1;\,a_2)$ і $\overline{b}\,(b_1;\,b_2)$, то їх **скалярний добуток дорівнює сумі добутків відповідних координат даних векторів:**

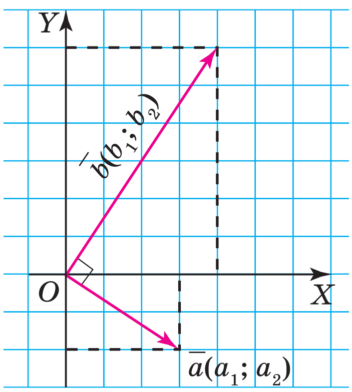
$$\overline{a}\,\overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Звідси одержимо такі факти:

1) *умова перпендикулярності векторів* $\overline{a}\,(a_1;\,a_2)$ і $\overline{b}\,(b_1;\,b_2)$ (мал. 127):
$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0;$$

2) *формула для обчислення кута між векторами* $\overline{a}\,(a_1;\,a_2)$ і $\overline{b}\,(b_1;\,b_2)$:

$$\cos\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right) = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$



Мал. 127

Дізнайтеся більше

1. У вас могло виникнути запитання: *Як вивести формулу скалярного добутку двох векторів, заданих своїми координатами?*

Нехай дано вектори $\overline{a}\,(a_1;\,a_2)$ і $\overline{b}\,(b_1;\,b_2)$. Розкладемо їх за координатними векторами $\overline{e_1}$ і $\overline{e_2}$: $\overline{a} = a_1\cdot\overline{e_1} + a_2\cdot\overline{e_2}$, $\overline{b} = b_1\cdot\overline{e_1} + b_2\cdot\overline{e_2}$. Застосовуючи відповідні властивості скалярного добутку, одержимо: $\overline{a}\,\overline{b} = (a_1\cdot\overline{e_1}+a_2\cdot\overline{e_2})(b_1\cdot\overline{e_1}+b_2\cdot\overline{e_2}) = (a_1b_1)\overline{e_1}^2 + (a_1b_2)\overline{e_1}\,\overline{e_2} + (a_2b_1)\overline{e_2}\,\overline{e_1} + (a_2b_2)\overline{e_2}^2$.

Ураховуючи, що $\overline{e_1}^2 = \overline{e_2}^2 = 1$, $\overline{e_1}\,\overline{e_2} = \overline{e_2}\,\overline{e_1} = 0$, маємо: $\overline{a}\,\overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

2. Термін «скалярний» походить від латинського слова *scalaris*, що означає — східчастий. Уперше його став уживати У. Гамільтон.
3. **Осиповський Тимофій Федорович** (1766–1832) — відомий математик, професор, був одним із засновників Харківського університету, а згодом став його ректором. Навчався у Володимирівській та Санкт-Петербурзькій учительських семінаріях. Наукові праці вченого є окрасою нашої математичної літератури початку XIX ст., а його «Курс математики» може займати достойне місце серед найкращих іноземних посібників того часу.

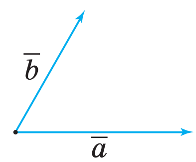

Т. Ф. Осиповський

Пригадайте головне

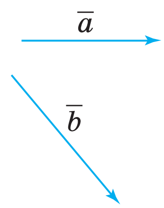
1. Поясніть, що таке кут між двома векторами.
2. Сформулюйте означення скалярного добутку двох векторів.
3. Чим зумовлена назва скалярного множення?
4. Які властивості скалярного множення?
5. Чому дорівнює скалярний квадрат вектора?
6. Як знайти скалярний добуток векторів за їхніми координатами?
7. Яка умова перпендикулярності двох векторів?
8. За якою формулою знаходять кут між векторами?

Розв'яжіть задачі

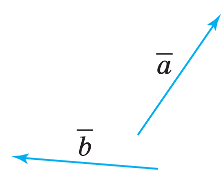
445'. За допомогою транспортира з'ясуйте, який кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ на малюнках 128–130.



Мал. 128



Мал. 129



Мал. 130

446'. За наведеним записом сформулюйте твердження для даних векторів:

1) $\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)$;

2) $\overline{c}\,\overline{d} = |\overline{c}| \cdot |\overline{d}| \cdot \cos\left(\widehat{\overline{c};\overline{d}}\right)$;

3) $\overline{p}\,\overline{q} = |\overline{p}| \cdot |\overline{q}| \cdot \cos\left(\widehat{\overline{p};\overline{q}}\right)$.

447'. Чи правильно, що скалярним добутком двох векторів є:
1) вектор;
2) скаляр (число)?

448'. Прочитайте формулу:

1) $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$;

2) $\overline{b}^2 = |\overline{b}|^2$;

3) $\overline{c}^2 = |\overline{c}|^2$.

449'. Чи правильно підставлено координати векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ у формулу їх скалярного добутку:

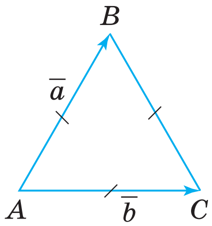
1) $\overline{a}\,(2;\,3),\ \overline{b}\,(4;\,5),\ \overline{a}\,\overline{b} = 2\cdot 4 + 3\cdot 5;$

2) $\overline{a}\,(-3;\,-4),\ \overline{b}\,(2;\,5),\ \overline{a}\,\overline{b} = (-3)\cdot(-4) + 2\cdot 5;$

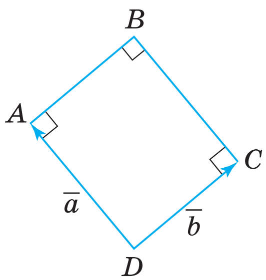
3) $\overline{a}\,(1;\,-3),\ \overline{b}\,(-4;\,5),\ \overline{a}\,\overline{b} = 1\cdot(-4) + (-3)\cdot 5?$

450'. Чи правильно, що два вектори є взаємно перпендикулярними, якщо їхній скалярний добуток дорівнює:

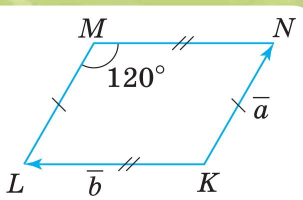
1) 1;
2) -1;
3) 0?



Мал. 131



Мал. 132



Мал. 133

451°. За даними на малюнках 131, 132 назвіть кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Яка його градусна міра?

452°. За даними на малюнку 133 назвіть кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Яка його градусна міра?

453°. Обчисліть скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:

1) $|\overline{a}| = 3,\ |\overline{b}| = 5,\ \widehat{(\overline{a};\overline{b})} = 45°;$

2) $|\overline{a}| = 3,\ |\overline{b}| = 5,\ \widehat{(\overline{a};\overline{b})} = 135°;$

3) $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 6,\ \widehat{(\overline{a};\overline{b})} = 60°;$

4) $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 6,\ \widehat{(\overline{a};\overline{b})} = 120°;$

5) $|\overline{a}| = 5,\ |\overline{b}| = 6,\ \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b};$

6) $|\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 3,\ \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b};$

7) $|\overline{a}| = 5,\ |\overline{b}| = 6,\ \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b};$

8) $|\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 3,\ \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}.$

454°. Обчисліть скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:

1) $|\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 1,\ \widehat{(\overline{a};\overline{b})} = 30°;$

2) $|\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 1,\ \widehat{(\overline{a};\overline{b})} = 150°.$

455°. Чому дорівнює скалярний квадрат вектора, якщо вектор має довжину:

1) $|\overline{a}| = 2;$

2) $|\overline{b}| = 3;$

3) $|\overline{c}| = 5?$

Зробіть відповідний запис.

456°. Знайдіть скалярний квадрат вектора, якщо:

1) $|\overline{p}| = 4;$

2) $|\overline{m}| = 7.$

Зробіть відповідний запис.

457°. Знайдіть кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:

1) $\overline{a}\,\overline{b} = \sqrt{2},\ |\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 1;$

2) $\overline{a}\,\overline{b} = -12,\ |\overline{a}| = 3,\ |\overline{b}| = 4.$

$\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)$

$\overline{a}\,\overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

458°. Знайдіть кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо $\overline{a}\,\overline{b} = 3\sqrt{3}$, $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 3$.

459°. Знайдіть довжину вектора $\overline{b}$, якщо:

1) $\overline{a}\,\overline{b} = 12$, $|\overline{a}| = 2$, $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right) = 30°$;

2) $\overline{a}\,\overline{b} = 2$, $|\overline{a}| = 2$, $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right) = 45°$.

460°. Знайдіть довжину вектора $\overline{b}$, якщо $\overline{a}\,\overline{b} = -6$, $|\overline{a}| = 3$, $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right) = 120°$.

461°. Яка довжина вектора $\overline{a}$, якщо його скалярний квадрат дорівнює:
1) 2;
2) 8;
3) 9;
4) 12?
Відповідь поясніть.

462°. Яка довжина вектора $\overline{c}$, якщо його скалярний квадрат дорівнює:
1) 3; 2) 4?
Відповідь поясніть.

463°. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:
1) $\overline{a}\,(5; -1)$, $\overline{b}\,(1; 8)$;
2) $\overline{a}\,(1; -3)$, $\overline{b}\,(-1; 7)$;
3) $\overline{a}\,(-1; 2)$, $\overline{b}\,(2; -1)$;
4) $\overline{a}\,(0; 1)$, $\overline{b}\,(-1; -1)$.

464°. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:
1) $\overline{a}\,(-5; 1)$, $\overline{b}\,(-1; -8)$;
2) $\overline{a}\,(-1; 3)$, $\overline{b}\,(1; -7)$.

465°. Доведіть, що вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ взаємно перпендикулярні:
1) $\overline{a}\,(-2; 2)$, $\overline{b}\,(1; 1)$;
2) $\overline{a}\,(-1; -2)$, $\overline{b}\,(4; -2)$;
3) $\overline{a}\,(3; 2)$, $\overline{b}\,(4; -6)$;
4) $\overline{a}\,(4; 2)$, $\overline{b}\,(-1; 2)$.

466°. Що можна стверджувати про дані вектори, якщо:
1) $\overline{a}\,\overline{b} = 0$;
2) $\overline{a} \perp \overline{b}$;
3) $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right) = 90°$?
Зробіть відповідний запис.

467°. Що можна стверджувати про дані вектори, якщо:
1) $\overline{p}\,\overline{q} = 0$;
2) $\overline{p} \perp \overline{q}$;
3) $\left(\widehat{\overline{p};\overline{q}}\right) = 90°$?
Зробіть відповідний запис.

$$\cos\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

468°. Знайдіть кут між даними векторами:

1) $\bar{a}\,(2;\,0)$, $\bar{b}\,(0;\,-1)$;
2) $\bar{a}\,(2;\,2\sqrt{3})$, $\bar{b}\,(1{,}5;\,0)$;
3) $\bar{a}\,(6;\,-8)$, $\bar{b}\,(12;\,9)$;
4) $\bar{a}\,(-1;\,1)$, $\bar{b}\,(2;\,-2)$.

469°. Знайдіть кут між даними векторами:

1) $\bar{a}\,(0;\,2)$, $\bar{b}\,(-1;\,0)$;
2) $\bar{a}\,(2\sqrt{3};\,2)$, $\bar{b}\,(0;\,1{,}5)$.

470°. Знайдіть кут A трикутника ABC, якщо $A\,(1;\,1)$, $B\,(5;\,3)$, $C\,(1;\,7)$.

471°. Знайдіть кут A трикутника ABC, якщо $A\,(1;\,2)$, $B\,(-1;\,3)$, $C\,(0;\,0)$.

472. Побудуйте вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, скалярний добуток яких обчислюється за формулою:

1) $\bar{a}\bar{b} = 3\cdot 2\cdot\cos 30°$;
2) $\bar{a}\bar{b} = 1\cdot 3\cdot\cos 120°$;
3) $\bar{a}\bar{b} = 2\cdot 4\cdot\cos 90°$;
4) $\bar{a}\bar{b} = 3\cdot 5\cdot\cos 180°$.

Скільки розв'язків має задача?

473. Яка особливість розміщення векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо:

1) $\bar{a}\bar{b} > 0$;
2) $\bar{a}\bar{b} < 0$;
3) $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$;
4) $\bar{a}\bar{b} = -|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$?

474. Дано квадрат $ABCD$ зі стороною 1. Знайдіть:

1) $\overline{AB}\cdot\overline{AD}$;
2) $\overline{BA}\cdot\overline{BC}$;
3) $\overline{AB}\cdot\overline{DA}$;
4) $\overline{AC}\cdot\overline{BD}$;
5) $\overline{AB}\cdot\overline{DC}$;
6) $\overline{DA}\cdot\overline{BC}$.

475. На двох сусідніх сторонах паралелограма задано вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Знайдіть довжини його діагоналей, якщо:

1) $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, $\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = 120°$;
2) $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, $\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = 60°$.

476. Знайдіть $|\bar{a}+\bar{b}|$ і $|\bar{a}-\bar{b}|$, якщо:

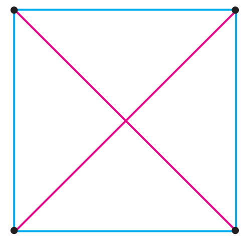
1) $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 8$, $\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = 60°$;
2) $|\bar{a}| = 12$, $|\bar{b}| = 5$, $\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right) = 90°$.

477. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ взаємно перпендикулярні. Знайдіть $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|$ і $\left|\overline{a}-\overline{b}\right|$, якщо:

1) $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=4$;

2) $\left|\overline{a}\right|=12$, $\left|\overline{b}\right|=5$.

478. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — квадрат, якщо:
1) $A\,(1;\,2)$, $B\,(4;\,5)$, $C\,(7;\,2)$, $D\,(4;\,-1)$;
2) $A\,(3;\,-2)$, $B\,(1;\,1)$, $C\,(4;\,3)$, $D\,(6;\,0)$.



479. Виконайте обчислення в заданому виразі та з'ясуйте, які координати мають дані вектори, яка їхня довжина, який кут між ними:

1) $\cos\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)=\dfrac{3\cdot(-2)+3\cdot 2}{\sqrt{3^2+3^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2}}$;

2) $\cos\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)=\dfrac{(-1)\cdot 1+1\cdot(-2)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2}}$.

480*. Знайдіть кут між векторами $\overline{a}+\overline{b}$ і $\overline{a}-\overline{b}$:
1) $\overline{a}\,(2;\,4)$, $\overline{b}\,(3;\,-1)$;
2) $\overline{a}\,(1;\,3)$, $\overline{b}\,(-5;\,1)$.

481*. За відомими модулями векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ та кутом між ними знайдіть скалярний добуток векторів $\overline{a}-3\overline{b}$ і $2\overline{a}+\overline{b}$, якщо:

1) $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=4$, $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)=60^\circ$;

2) $\left|\overline{a}\right|=2$, $\left|\overline{b}\right|=3$, $\left(\widehat{\overline{a};\overline{b}}\right)=90^\circ$.

482*. Обчисліть скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо $\overline{a}=3\overline{p}-2\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+4\overline{q}$, де $\overline{p}$, $\overline{q}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

483*. Який кут утворюють одиничні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо вектори $\overline{p}=\overline{a}+2\overline{b}$ і $\overline{q}=5\overline{a}-4\overline{b}$ взаємно перпендикулярні?

484*. Яким є кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (гострим, прямим чи тупим), якщо:

1) $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\left|\overline{a}-\overline{b}\right|$;

2) $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\left|\overline{a}\right|+\left|\overline{b}\right|$;

3) $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|\geq\left|\overline{a}-\overline{b}\right|$;

4) $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|\leq\left|\overline{a}\right|+\left|\overline{b}\right|$?

485*. Доведіть нерівність $-\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\leq\overline{a}\,\overline{b}\leq\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|$.

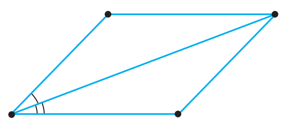
486*. Дано вектори $\overline{a}\,(1;\,3)$ і $\overline{b}\,(3;\,4)$. Знайдіть таке число λ, щоб вектор $2\overline{a}+\lambda\overline{b}$ був перпендикулярним до вектора:
1) $\overline{b}$;
2) $\overline{a}$.

487*. Знайдіть кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах:
1) $\overline{a}\,(2;\,2)$ і $\overline{b}\,(5;\,-2)$; 2) $\overline{a}\,(2;\,-1)$ і $\overline{b}\,(2;\,-3)$.

488*. Вершини трикутника містяться в точках $A\,(0;\,0)$, $B\,(6;\,0)$ і $C\,(-3;\,3)$. Знайдіть кут між стороною AB та медіаною AM.

489*. У рівнобічній трапеції $OACB$: $BC = AC = 2$, точки M і N — середини основ трапеції OB і AC відповідно. Гострий кут трапеції дорівнює $60°$. Знайдіть кут між векторами $\overline{OM}$ і $\overline{ON}$.

490*. Одиничні вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ задовольняють умову: $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$. Обчисліть $\overline{a}\,\overline{b}+\overline{b}\,\overline{c}+\overline{a}\,\overline{c}$.



Проявіть компетентність

491. Знайдіть, яку роботу виконує сила $\overline{F}\,(4;\,7)$, якщо її точка прикладання переміщується на вектор $\overline{s}\,(-1;\,10)$.

492. Силу, яка діє на матеріальну точку, розкладено на дві складові за напрямами, що утворюють кути α і β з напрямом дії сили. Знайдіть модулі складових, якщо модуль даної сили дорівнює 3Н і відомо, що:
1) $\alpha = 30°$, $\beta = 90°$; 2) $\alpha = 60°$, $\beta = 18°$.
Виконайте малюнок.

493. Крайні точки України мають такі географічні координати: північна (55°22′ пн. ш.; 33°11′ сх. д.), східна (49°15′ пн. ш.; 40°13′ сх. д.), південна (44°23′ пн. ш.; 33°44′ сх. д.), західна (48°05′ пн. ш.; 22°08′ сх. д.). Якщо провести умовні прямі через крайні північну й південну точки та крайні західну і східну точки, то чи можна переконатися в перпендикулярності цих прямих?

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, що таке вектор, довжина та напрям вектора; як зображають вектор.
2. Які вектори називають колінеарними; співнапрямленими; протилежно напрямленими; рівними; протилежними?
3. Поясніть, як застосувати правило трикутника в додаванні двох векторів.
4. Як знайти суму векторів за правилом паралелограма? А їхню різницю?
5. Які властивості додавання векторів і множення вектора на число?
6. Що таке координати вектора?
7. Як знайти довжину вектора, заданого своїми координатами; суму двох векторів; добуток вектора на число?
8. Що називають скалярним добутком двох векторів? Які його властивості?

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

1° $ABCD$ — квадрат. Яка рівність є правильною?

А. $\overline{AB}=\overline{AD}$.
Б. $\overline{AB}=\overline{AC}$.
В. $\overline{AB}=\overline{DC}$.
Г. $\overline{AB}=\overline{BD}$.

2° $ABCD$ — паралелограм. Який вектор дорівнює сумі векторів $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$?

А. $\overline{AC}$.
Б. $\overline{BD}$.
В. $\overline{AD}$.
Г. $\overline{DC}$.

3° Відомо, що $\bar{a}(4; 3) \parallel \bar{b}(m; -12)$. Чому дорівнює число m?

А. −3.
Б. 16.
В. −16.
Г. 4.

4 Які координати має одиничний вектор $\bar{a}$, перпендикулярний до вектора $\bar{b}(2; 2)$?

А. (1; 1).
Б. (−2; −2).
В. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Г. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

5* У прямокутному рівнобедреному трикутнику з бічною стороною 2 см проведено медіану з вершини гострого кута. Обчисліть косинус кута між медіаною та гіпотенузою.

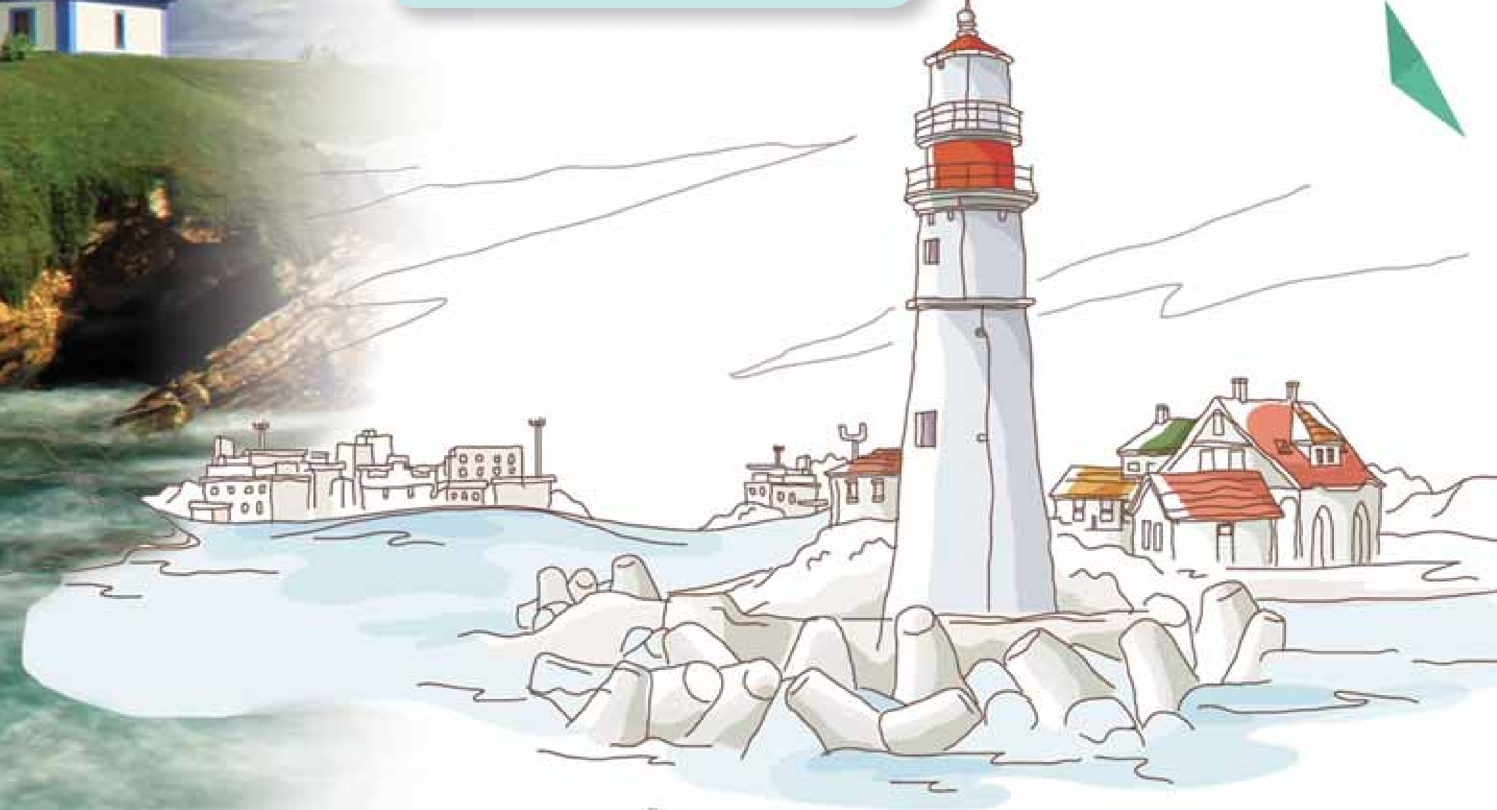
А. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
Б. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.
В. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.
Г. $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

Розділ 3

Розв'язування трикутників

У розділі дізнаєтеся:

- про співвідношення між сторонами й кутами трикутника;
- про алгоритми знаходження невідомих сторін і кутів довільного трикутника за відомими його сторонами й кутами;
- як застосовувати вивчені алгоритми до розв’язування геометричних задач і задач практичного змісту;
- про нові формули для обчислення площі трикутника та як їх використовувати в розв’язуванні задач



§ 11. ТЕОРЕМА СИНУСІВ

Ви вже знаєте співвідношення між сторонами й кутами прямокутного трикутника. Тепер ознайомимось із співвідношенням між сторонами й кутами довільного трикутника.

Позначатимемо сторони трикутника через a, b, c, а протилежні їм кути — через α, β, γ або $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

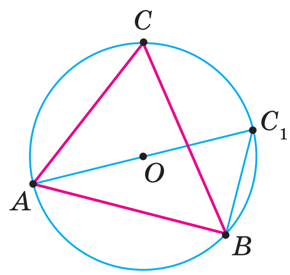
ТЕОРЕМА **Теорема синусів**

Сторони трикутника пропорційні до синусів протилежних кутів:

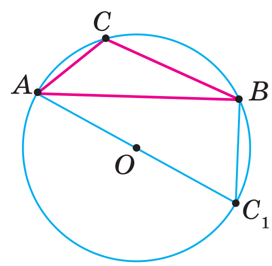
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Дано: ΔABC, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Довести: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.



Мал. 134



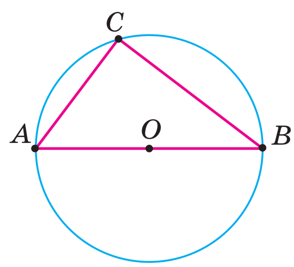
Мал. 135

Доведення. Опишемо коло радіуса R навколо даного трикутника ABC (мал. 134). Через одну з вершин трикутника, наприклад A, проведемо діаметр AC_1 описаного кола. Трикутник ABC_1 — прямокутний ($\angle B$ — прямий, як вписаний кут, що спирається на діаметр), тому $c = 2R \cdot \sin C_1$ або $\frac{c}{\sin C_1} = 2R$.

Якщо кут C — гострий (мал. 134), то $\angle C = \angle C_1$ (як вписані кути, що спираються на одну дугу кола), і $\sin C_1 = \sin C$.

Якщо ж кут C — тупий (мал. 135), то кут C_1 — гострий, оскільки $\angle C + \angle C_1 = 180°$. Звідси $\angle C_1 = 180° - \angle C$. Отже, $\sin C_1 = \sin(180° - \angle C) = \sin C$.

В обох випадках маємо, що $\frac{c}{\sin C} = 2R$. (1)



Мал. 136

Якщо кут C — прямий (мал. 136), то $c = 2R$, $\sin C = \sin 90° = 1$ і рівність (1) також має місце.

Аналогічні рівності знайдемо для кутів A і B трикутника.

Отже, для будь-якого трикутника ABC:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R,\ \frac{b}{\sin B} = 2R,\ \frac{c}{\sin C} = 2R, \text{ звідси } \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

НАСЛІДОК 1. У будь-якому трикутнику відношення сторони до синуса протилежного кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

? Чи можна знайти сторону трикутника за радіусом R описаного кола та кутом, що лежить проти цієї сторони? Так. За наслідком 1 з теореми синусів, $\frac{a}{\sin A} = 2R$. Звідси $a = 2R\sin A$. Так само $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$.

НАСЛІДОК 2. **У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти більшого кута лежить більша сторона.**

Спробуйте довести це самостійно, розглянувши гострокутний і тупокутний трикутники.

Задача 1. У трикутнику дано сторону $a = 6$ і прилеглі до неї кути: $\angle B = 80°$, $\angle C = 30°$. Знайдіть сторону b.

Розв'язання. $\angle A = 180° - (30° + 80°) = 70°$. За теоремою синусів: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$. Звідси $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{6 \cdot \sin 80°}{\sin 70°} \approx \frac{6 \cdot 0{,}985}{0{,}940} \approx 6$.

Задача 2. У трикутнику дано сторони $a = 8$, $b = 4$ і $\angle A = 48°$, що лежить проти сторони a. Знайдіть $\angle B$.

Розв'язання. За теоремою синусів: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.

Звідси $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{4 \sin 48°}{8} \approx \frac{4 \cdot 0{,}743}{8} \approx 0{,}372$.

Цьому значенню синуса відповідають два кути: $22°$ і $180° - 22° = 158°$. Оскільки $a > b$, то, за наслідком 2, $\angle A > \angle B$. Оскільки $\angle A$ — гострий, то $\angle B$ — гострий. Отже, $\angle B = 22°$.

Теорема синусів дає можливість за стороною і прилеглими до неї кутами (задача 1) або за двома сторонами й кутом, протилежним до однієї з них (задача 2), знаходити інші сторони й кути трикутника.

Дізнайтеся більше

Розв'яжемо задачу.

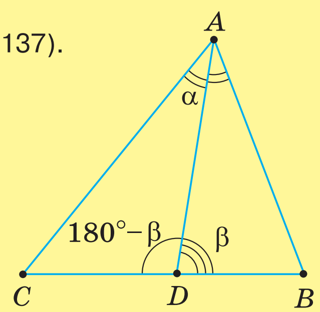
Задача. Доведіть, що бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін.

Розв'язання. Нехай AD — бісектриса трикутника ABC (мал. 137). Позначимо $\angle CAD = \angle BAD = \alpha$, $\angle ADB = \beta$, тоді $\angle ADC = 180° - \beta$. Застосуємо теорему синусів до трикутників ABD і ACD:

Із ΔABD: $$\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\beta}, \qquad (1)$$

із ΔACD: $$\frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(180° - \beta)}.$$

Оскільки $\sin(180° - \beta) = \sin\beta$, то $$\frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta}. \qquad (2)$$



Мал. 137

Поділимо почленно рівність (1) на рівність (2). Одержимо: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$, що й треба було довести.

Поміркуємо. Розв'язуючи задачу, ми ввели допоміжні кути α і β, яких не було дано в умові. Використавши теорему синусів, склали рівності (1) і (2). Потім, почленно поділивши ці рівності, позбулися синусів допоміжних кутів α і β й одержали шукану пропорцію. Такий спосіб розв'язування інколи називають *способом введення допоміжного кута*.

Пригадайте головне

1. Сформулюйте теорему синусів.
2. Як знайти сторону трикутника за радіусом описаного кола й кутом, що лежить проти цієї сторони?
3. Яка залежність між величинами кутів трикутника та довжинами його сторін?
4. Сформулюйте дві задачі, які можна розв’язати за теоремою синусів.

Розв’яжіть задачі

494'. Який із записів правильний:

1) $\dfrac{a}{\sin B} = \dfrac{b}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$;

2) $\dfrac{a}{\angle A} = \dfrac{b}{\angle B} = \dfrac{c}{\angle C}$;

3) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$?

495'. Чи правильно, що в трикутнику ABC:
1) $a = R \sin B$;
2) $a = R \sin A$;
3) $a = 2R \sin A$?

496'. Чи правильно, що в трикутнику проти більшої сторони лежить:
1) менший кут; 2) більший кут?

497'. Чи правильно, що в трикутнику проти меншого кута лежить:
1) менша сторона; 2) більша сторона?

498°. За даними на малюнку 138:
1) запишіть відношення кожної сторони трикутника до синуса протилежного кута;
2) знайдіть значення синусів цих кутів;
3) обчисліть кожне з відношень сторони трикутника до значення синуса протилежного кута і зробіть висновок.

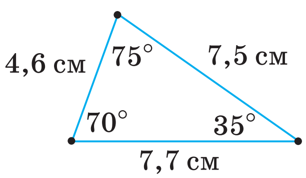
499°. За даними на малюнку 139:
1) запишіть відношення заданої сторони до синуса протилежного кута;
2) знайдіть значення цього відношення.

500°. За даними на малюнках 140, 141 обчисліть:
1) сторону a трикутника (мал. 140);
2) кут α трикутника (мал. 141).

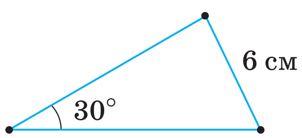
501°. Знайдіть сторону AC трикутника ABC, якщо:
1) $c = 4$ см, $\angle B = 45°$, $\angle C = 30°$;
2) $a = 6$ см, $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$.

502°. Знайдіть сторону AC трикутника ABC, якщо $c = 4$ см, $\angle A = 65°$, $\angle B = 75°$.

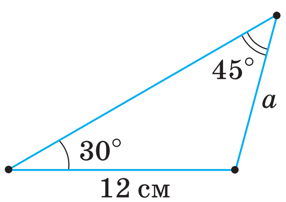
503°. Знайдіть кут A трикутника ABC, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 4$ см, $\angle B = 60°$;
2) $c = 8$ см, $a = 5$ см, $\angle C = 30°$.



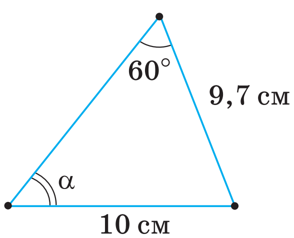
Мал. 138



Мал. 139



Мал. 140



Мал. 141

504°. Знайдіть кут A трикутника ABC, якщо $b = 6$ см, $a = 4$ см, $\angle B = 45°$.

505°. Яка зі сторін трикутника ABC (мал. 142) найбільша, а яка — найменша?

506°. Який з кутів трикутника ABC (мал. 143) найбільший, а який — найменший?

507°. **Який з кутів трикутника ABC найбільший, а який — найменший, якщо:**
1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 7$ см;
2) $a = b = c$;
3) $a > b > c$?

508°. **Яка зі сторін трикутника ABC найменша, а яка — найбільша, якщо:**
1) $\angle A = 50°$, $\angle B = 20°$;
2) $\angle B = 40°$, $\angle C = 85°$;
3) $\angle A = 105°$, $\angle C = 32°$?

509°. Порівняйте катети AC і BC прямокутного трикутника ABC, якщо:
1) $\angle A = 46°$; 2) $\angle B = 51°$; 3) $\angle A = 65°$.

510°. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 9 см. Чи може кут, протилежний до сторони завдовжки 7 см, бути:
1) тупим;
2) гострим;
3) прямим?

511°. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 5 см і 6 см. Чи може кут, протилежний до сторони завдовжки 4 см:
1) бути більшим за 60°;
2) дорівнювати 60°;
3) бути меншим від 60°?

512°. BC — найменша сторона трикутника ABC. Чи може кут A дорівнювати:
1) 61°; 2) 60°; 3) 59°?

513°. **Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, якщо проти сторони завдовжки 3 см лежить кут:**
1) 120°; 2) 30°; 3) 135°.

514°. Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює 8 см. Знайдіть сторону, яка лежить проти кута:
1) 150°; 2) 45°; 3) 60°.

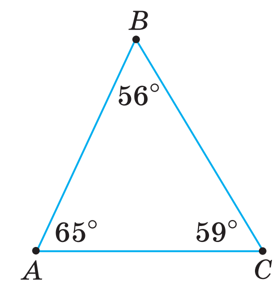
515. Кути трикутника відносяться, як 1 : 2 : 3. Як відносяться його сторони?

516. У трикутнику ABC $a = 12$ см, $b = 5$ см. Чи може $\sin B$ дорівнювати:
1) 0,25; 2) 0,5; 3) 0,75?

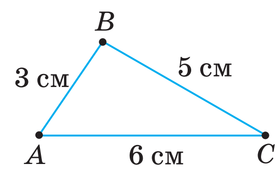
517. Знайдіть сторони a і c трикутника ABC, якщо: $b = 5$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 30°$.

518. Знайдіть сторони a і c трикутника ABC, якщо $b = 1$ см, $\angle A = 100°$, $\angle C = 50°$.

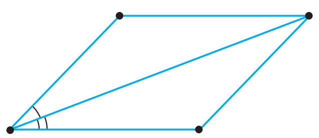
519. **Сторона трикутника дорівнює a, а прилеглі до неї кути — β і γ. Знайдіть дві інші сторони трикутника.**



Мал. 142



Мал. 143



520. Знайдіть кути B і C трикутника ABC, якщо:
1) $c = 20$ см, $a = 40$ см, $\angle A = 30°$;
2) $c = 30$ см, $a = 40$ см, $\angle A = 45°$.

521. У паралелограмі $ABCD$ $AD = 8$ см, $BD = 4$ см, $\angle A = 22°$. Знайдіть:
1) $\angle BDC$; 2) $\angle DBC$.

522. **Діагональ d паралелограма ділить його кут на кути α і β. Знайдіть сторони паралелограма.**

523. Обчисліть сторони трикутника ABC, якщо $\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$, а висота AD дорівнює 3 см.

524. Знайдіть сторони b і c трикутника ABC, якщо:
$a = 8$ см, $\angle A : \angle B : \angle C = 4 : 2 : 3$.

525. Знайдіть сторони b і c трикутника ABC, якщо
$a = 6$ см, $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 5 : 4$.

526. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, а кут при основі — α. Знайдіть довжину бісектриси кута при основі, якщо:
1) $a = 6$ см, $\alpha = 30°$;
2) $a = 7$ см, $\alpha = 20°$.

527. У трикутнику ABC $\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$. Знайдіть сторони a і c, якщо $a - c = 5$.

528. У трикутнику ABC $\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$. Знайдіть сторони a і c, якщо $a + c = 4$.

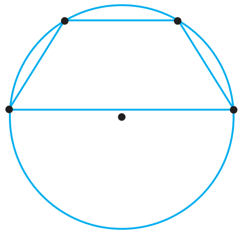
529. Що більше, основа чи бічна сторона рівнобедреного трикутника, якщо:
1) один з його кутів — тупий;
2) прилеглий до основи кут менший від 60°;
3) прилеглий до основи кут більший за 60°?

530. У паралелограмі $ABCD$ діагональ BD утворює зі стороною AB більший кут, ніж зі стороною BC. Доведіть, що $BC > AB$.

531. У трикутнику ABC медіана BM утворює зі стороною AB більший кут, ніж зі стороною BC. Доведіть, що $BC > AB$.

532. У прямокутному трикутнику ABC з вершини прямого кута C проведено медіану CM. $\angle ACM > 45°$. Який катет більший: AC чи BC?

533. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, а бічна сторона — b. Знайдіть радіус R кола, описаного навколо трикутника, якщо:
1) $a = 24$ см, $b = 13$ см; 2) $a = 12$ см, $b = 10$ см.



534. Діагональ трапеції, вписаної в коло, дорівнює 4 см. Знайдіть радіус кола, якщо один з кутів трапеції дорівнює:
1) 135°; 2) 30°.

535. Діагональ трапеції, вписаної в коло, дорівнює 4 см. Знайдіть радіус кола, якщо один з кутів трапеції дорівнює 120°.

536*. У рівнобічній трапеції менша основа дорівнює бічній стороні, більша основа дорівнює 10 см, а кут при основі — 70°. Знайдіть периметр трапеції.

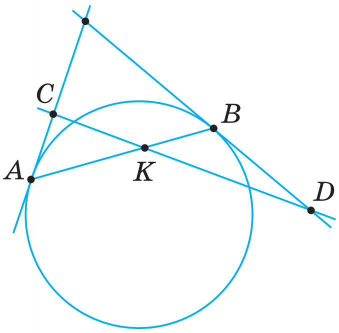
537*. Знайдіть площу трапеції, якщо її основи дорівнюють a і b ($a > b$), а прилеглі до основи a кути — α і β.

538*. **Виведіть формули для обчислення довжин відрізків, на які бісектриси кутів трикутника ABC ділять його протилежні сторони.**

539*. Доведіть, що медіана трикутника ділить кут при вершині на частини, синуси яких пропорційні до синусів відповідних кутів при основі.

540*. **Скориставшись теоремою синусів, доведіть, що медіани AA_1, BB_1 і CC_1 трикутника ABC точкою O їх перетину діляться у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини.**

541*. Через точку K хорди AB кола проведено пряму, яка перетинає в точках C і D дотичні до кола, що проходять через точки A і B (мал. 144). Доведіть, що $AC \cdot KD = BD \cdot KC$.



Мал. 144

542*. У трапеції $ABCD$ з основами AB і CD кут A більший за кут B. Доведіть, що якщо $AB > CD$, то $BC > AD$.

543*. Діагоналі трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) перетинаються в точці O. Доведіть, що якщо $AC > BD$, то $AO > BO$ і $CO > DO$.

544*. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, а кут при вершині — α. Знайдіть радіус кола, яке проходить через центр вписаного в цей трикутник кола та кінці основи.

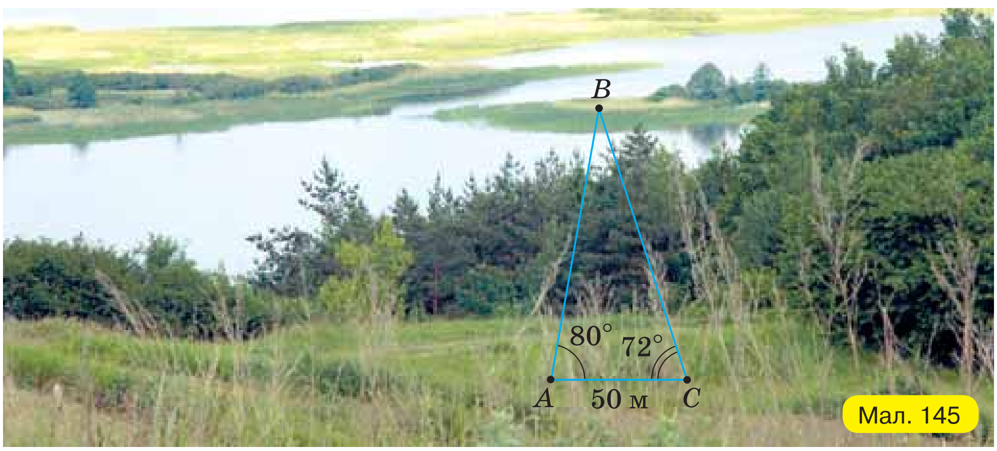
545*. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 1 см і 3 см, а бічна сторона — 2 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

546*. Точка D лежить на стороні AC трикутника ABC. Доведіть, що відношення радіусів кіл, описаних навколо трикутників ABD і DBC, не залежить від вибору точки D.

547*. O — точка перетину діагоналей описаного чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що сума радіусів кіл, описаних навколо трикутників AOB і COD, дорівнює сумі радіусів кіл, описаних навколо трикутників BOC і AOD.

Проявіть компетентність

548. Знайдіть відстань від точки A до недоступної точки B, якщо $AC = 50$ м, $\angle CAB = 80°$ і $\angle ACB = 72°$ (мал. 145).



Мал. 145

§ 12. ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ

Ознайомимося ще з одним співвідношенням між сторонами й кутами довільного трикутника.

ТЕОРЕМА **Теорема косинусів**

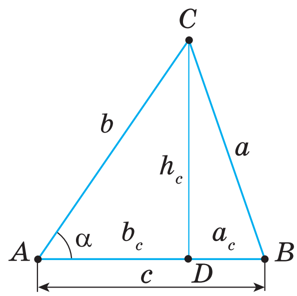
Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

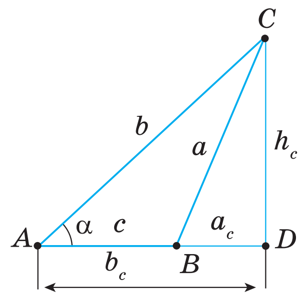
Дано: ΔABC, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Довести: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Доведення. Кут A трикутника ABC може бути гострим, тупим або прямим. Розглянемо ці випадки.



Мал. 146



Мал. 147

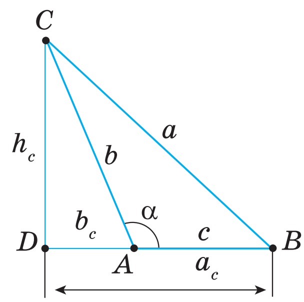
1. Кут A — гострий. Проведемо висоту CD до сторони AB (мал. 146) або до її продовження (мал. 147). Нехай a_c і b_c — проекції сторін BC і AC на пряму AB, h_c — висота CD. Із прямокутного трикутника BCD: $a^2 = h_c^2 + a_c^2$. (1)

Знайдемо h_c^2 і a_c^2. Із прямокутного трикутника ACD: $h_c^2 = b^2 - b_c^2$.

Оскільки $a_c = c - b_c$ (мал. 146) або $a_c = b_c - c$ (мал. 147), то в кожному із цих випадків $a_c^2 = (c - b_c)^2 = c^2 - 2cb_c + b_c^2$.

Підставивши вирази для h_c^2 і a_c^2 у рівність (1), маємо: $a^2 = b^2 - b_c^2 + c^2 - 2cb_c + b_c^2 = b^2 + c^2 - 2cb_c$. Із прямокутного трикутника ACD: $b_c = b\cos A$.

Отже, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.



Мал. 148

2. Кут A — тупий (мал. 148). Так само, як і в першому випадку, проводимо висоту CD і з прямокутного трикутника BCD знаходимо: $a^2 = h_c^2 + a_c^2$. (1)

Потім знаходимо h_c^2 і a_c^2. $h_c^2 = b^2 - b_c^2$ (із прямокутного трикутника ACD), $a_c^2 = (c + b_c)^2 = c^2 + 2cb_c + b_c^2$. Підставивши вирази для h_c^2 і a_c^2 у рівність (1), одержимо: $a^2 = b^2 - b_c^2 + c^2 + 2cb_c + b_c^2 = b^2 + c^2 + 2cb_c$. Із прямокутного трикутника ACD: $b_c = b\cos(180° - \angle A) = -b\cos A$. Тоді $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

3. Кут A — прямий. У цьому випадку $\cos A = \cos 90° = 0$. За теоремою Піфагора, маємо: $a^2 = b^2 + c^2$. Тоді $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Задача 1. У трикутнику дано сторони: $a = 5$, $b = 8$ і $\angle C = 60°$ між ними. Знайдіть сторону c.

Розв'язання. За теоремою косинусів:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 0{,}5 = 49,\ c = \sqrt{49} = 7.$$

Задача 2. Дано сторони трикутника: $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$. Знайдіть $\angle A$.

Розв'язання. З рівності $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ знаходимо:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36 + 49 - 25}{2 \cdot 6 \cdot 7} \approx 0{,}714.$$

Звідси $\angle A \approx 44°$.

Так само можна обчислити $\angle B$ і $\angle C$.

За теоремою косинусів можна знайти:
1) сторону трикутника за двома його сторонами та кутом між ними (задача 1);
2) кути трикутника за трьома його сторонами (задача 2).

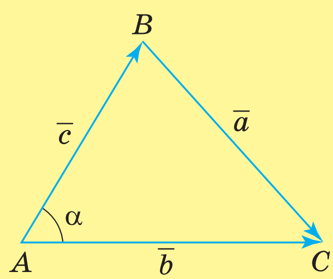
Чи можна визначити вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний), знаючи лише його сторони? Поміркуємо.
Якщо $\angle A$ — гострий, то $\cos A > 0$ і $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A < b^2 + c^2$.
Якщо $\angle A$ — прямий, то $\cos A = \cos 90° = 0$ і $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2$.
Якщо $\angle A$ — тупий, то $\cos A < 0$ і $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A > b^2 + c^2$.

$\angle A$ — гострий, якщо $a^2 < b^2 + c^2$; $\angle A$ — прямий, якщо $a^2 = b^2 + c^2$; $\angle A$ — тупий, якщо $a^2 > b^2 + c^2$.

Наприклад, сторони трикутника дорівнюють 2 см, 3 см і 4 см. Прямий або тупий кут може лежати проти більшої сторони. Тому визначимо вид кута, що лежить проти сторони 4 см. $4^2 > 2^2 + 3^2$. Отже, цей кут тупий, а трикутник — тупокутний.

Дізнайтеся більше

1. Поміркуємо над рівністю $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$. $b \cos A$ дорівнює за модулем проекції b_c сторони AC на сторону AB (мал. 146) або її продовження (мал. 147). Знак $b \cos A$ залежить від кута A: якщо кут A гострий, то беремо «+», якщо тупий, то «–». Звідси маємо наслідок: квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін «±» подвоєний добуток однієї з них на проекцію другої. Знак «+» беремо тоді, коли протилежний кут тупий, а знак «–», коли гострий.
2. Теорему косинусів називають іноді *узагальненою теоремою Піфагора*. Така назва пояснюється тим, що теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів. Справді, якщо в трикутнику $\angle A$ — прямий, то $\cos A = \cos 90° = 0$ і з рівності $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ одержимо: $a^2 = b^2 + c^2$.
3. Теорему косинусів можна довести, застосовуючи скалярне множення векторів.
Нехай на сторонах трикутника ABC, у якого $\angle BAC = \alpha$ й сторони мають довжини a, b і c, задано вектори $\overline{AB} = \overline{c}$, $\overline{AC} = \overline{b}$, $\overline{BC} = \overline{a}$ (мал. 149).
Виразимо, наприклад, вектор $\overline{BC}$ через вектори $\overline{AC}$ і $\overline{AB}$.
Дістанемо: $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$. Тоді $\overline{a} = \overline{b} - \overline{c}$.
Знайдемо скалярний квадрат вектора $\overline{a}$:
$$\overline{a}^2 = \left(\overline{b} - \overline{c}\right)\left(\overline{b} - \overline{c}\right) = \overline{b}^2 + \overline{c}^2 - 2\overline{b}\overline{c}.$$
В одержаній рівності розкриємо скалярний добуток векторів $\overline{b}$ і $\overline{c}$ за означенням: $\overline{b}\,\overline{c} = \left|\overline{b}\right| \cdot \left|\overline{c}\right| \cdot \cos\alpha$, та скористаємось тим, що скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини. Тоді одержимо: $\left|\overline{a}\right|^2 = \left|\overline{b}\right|^2 + \left|\overline{c}\right|^2 - 2 \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \left|\overline{c}\right| \cdot \cos\alpha$ або $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.



Мал. 149

Пригадайте головне

1. Сформулюйте теорему косинусів.
2. Сформулюйте дві задачі, які можна розв'язати за теоремою косинусів.
3. Як визначити вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний) за даними його сторонами?

Розв'яжіть задачі

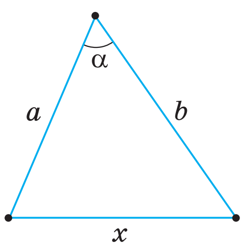
549'. Який із записів правильний:
1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$;
2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos B$;
3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$?

550'. Чи правильно, що трикутник ABC є прямокутним, якщо:
1) $a^2 < b^2 + c^2$; 2) $a^2 = b^2 + c^2$; 3) $a^2 > b^2 + c^2$?

551'. Чи правильно, що трикутник ABC є гострокутним, якщо:
1) $a^2 < b^2 + c^2$; 2) $a^2 = b^2 + c^2$; 3) $a^2 > b^2 + c^2$?

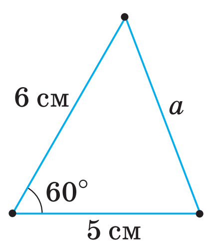
552'. Чи правильно, що трикутник ABC є тупокутним, якщо:
1) $a^2 < b^2 + c^2$; 2) $a^2 = b^2 + c^2$; 3) $a^2 > b^2 + c^2$?

553°. Скориставшись теоремою косинусів, запишіть, чому дорівнює квадрат сторони x трикутника (мал. 150).



Мал. 150

554°. За даними на малюнку 151 обчисліть сторону a трикутника.



Мал. 151

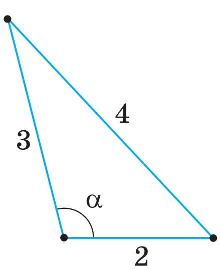
555°. a, b, c — сторони трикутника ABC. За теоремою косинусів запишіть квадрат сторони:
1) b, якщо $\angle B = 45°$; 2) c, якщо $\angle C = 60°$; 3) a, якщо $\angle A = 30°$.

556°. Знайдіть невідому сторону трикутника ABC, якщо:
1) $b = 3$ см, $c = 4$ см, $\angle A = 60°$; 2) $a = 4$ см, $b = 2$ см, $\angle C = 45°$.

557°. Знайдіть невідому сторону трикутника ABC, якщо $a = 8\sqrt{3}$ см, $c = 10$ см, $\angle B = 30°$.

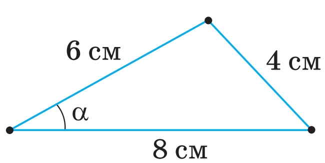
558°. Знайдіть $\cos B$ з рівності $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$.

559°. За даними на малюнку 152 обчисліть $\cos \alpha$.



Мал. 152

560°. За даними на малюнку 153 обчисліть кут α трикутника.



Мал. 153

561°. Обчисліть косинуси кутів трикутника ABC, якщо його сторони дорівнюють:
1) $a = 8$ см, $b = 9$ см, $c = 10$ см;
2) $a = 3$ см, $b = 7$ см, $c = 8$ см;
3) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 7$ см.

562°. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо його сторони дорівнюють:
1) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 3$ см; 2) $a = 3$ см, $b = 2$ см, $c = 4$ см.

563°. Знайдіть кути трикутника, якщо його сторони дорівнюють 5 см, 6 см, 7 см.

564°. За яких значень кута α квадрат сторони трикутника, що лежить проти цього кута:
1) менший від суми квадратів двох інших сторін;
2) дорівнює цій сумі;
3) більший за неї?

565°. Не обчислюючи кутів, установіть вид трикутника (відносно кутів), якщо його сторони дорівнюють:
1) 11 см, 17 см, 21 см;
2) 8 см, 10 см, 12 см;
3) 0,3 см, 0,5 см, 0,4 см.

566. Обчисліть невідому сторону трикутника ABC, якщо:
1) $a = 7$ см, $b = 10$ см, $\angle C = 120°$;
2) $a = 2$ см, $c = 3\sqrt{3}$ см, $\angle B = 150°$.

567. Обчисліть невідому сторону трикутника ABC, якщо $b = 8$ см, $c = 12$ см, $\angle A = 115°$.

568. Доведіть, що в прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

569. На сторонах кута A позначено дві точки M і N. Знайдіть відстань MN, якщо:
1) $AM = 17$ см, $AN = 12\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45°$;
2) $AM = 7\sqrt{3}$ см, $AN = 10$ см, $\angle A = 30°$.

570. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 6$ см, $AD = 10$ см. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо кут A дорівнює: 1) 60°; 2) 48°; 3) 125°.

571. **Сторони паралелограма дорівнюють a і b, а один з кутів — α. Знайдіть діагоналі паралелограма.**

572. Катети прямокутного трикутника ABC дорівнюють: $AC = 4$ см, $BC = 3$ см. На катеті BC побудовано рівносторонній трикутник BCD. Знайдіть довжину відрізка AD (розгляньте два випадки).

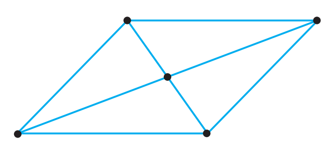
573. Знайдіть невідому сторону трикутника ABC, якщо:
1) $a = 5$ см, $b = 7$ см, $\sin C = 0{,}8$; 2) $b = 4$ см, $c = 10$ см, $\sin A = 0{,}6$.
Скільки розв'язків має задача?

574. Скориставшись формулою $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$, дослідіть, як змінюється сторона a зі зростанням кута α від 0° до 180° (при сталих значеннях b і c).

575. a, b, c — сторони трикутника ABC. Доведіть:
1) якщо $a^2 < b^2 + c^2$, то $\angle A$ — гострий;
2) якщо $a^2 > b^2 + c^2$, то $\angle A$ — тупий.

576. Знайдіть найбільший кут трикутника ABC, якщо:
1) $a = 5$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см;
2) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 6$ см;
3) $a = 40$ см, $b = 13$ см, $c = 37$ см.

577. **Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.**



578. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо вони відносяться, як 3 : 5, а сторони дорівнюють 13 см і 16 см.

579. Знайдіть сторони паралелограма, якщо вони відносяться, як 1 : 2, а діагоналі дорівнюють 9 см і 13 см.

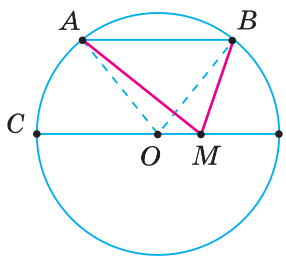
580. Одна зі сторін паралелограма на 1 см довша за іншу, а його діагоналі дорівнюють 7 см і 11 см. Знайдіть сторони паралелограма.

581. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 11 см. Одна з її бічних сторін дорівнює 8 см й утворює з основою кут 60°. Знайдіть діагоналі трапеції.

582*. **Доведіть, що медіану трикутника можна обчислити за формулою $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.**

583*. Дві сторони трикутника дорівнюють 8 см і 15 см, а кут між ними — 120°. Знайдіть медіану, проведену до третьої сторони трикутника.

584*. Сторона трикутника дорівнює 26 см, а медіани, проведені до двох інших сторін, дорівнюють 15 см і 30 см. Знайдіть третю медіану трикутника.



Мал. 154

585*. Бісектриса кута паралелограма ділить його сторону на відрізки завдовжки 5 см. Знайдіть діагональ паралелограма, якщо друга його діагональ дорівнює 9 см.

586*. До даного кола радіуса R дотикаються два рівні менші кола радіуса r: одне — зсередини, друге — зовні. Дуга між точками дотику містить 60°. Знайдіть відстань між центрами менших кіл.

587*. У колі з центром O хорда AB паралельна діаметру CD (мал. 154). На діаметрі або його продовженні позначено довільну точку M. Доведіть, що сума $AM^2 + BM^2$ не залежить від положення хорди при заданому положенні точки M.

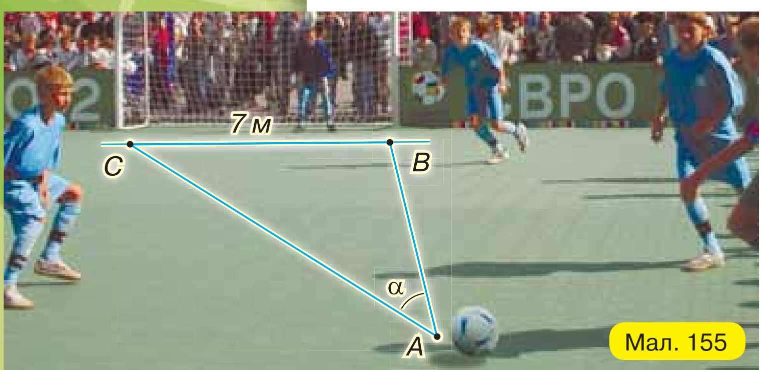
588*. Для сторін трикутника виконується рівність $\frac{a^2 - (b-c)^2}{b} = 1$. Доведіть, що один із кутів трикутника дорівнює 60°.

Проявіть компетентність

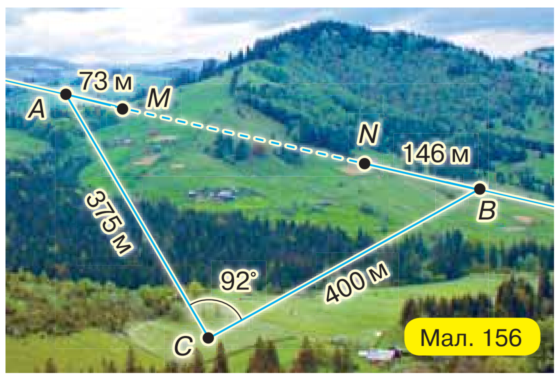
589. Футбольний м'яч перебуває в точці A футбольного поля на відстані 4,5 м і 9,4 м від основ B і C стійок воріт (мал. 155). Футболіст направляє м'яч у ворота. Знайдіть кут α влучення м'яча у ворота, якщо ширина воріт становить 7 м.

590*. На будівництві залізниці на ділянці AB потрібно прокласти тунель MN (мал. 156). За даними на малюнку поясніть, як знайти довжину й напрямок тунелю. Обчисліть довжину тунелю.

591. Із пунктів A і B на березі моря, відстань між якими становить 3 км, спостерігають за пароплавом, що рухається прямолінійно й рівномірно. У певний час пароплав було видно з пункту A під кутом 102° до напрямку AB, а з пункту B — під кутом 51° до напрямку BA. Через 10 хв кути змінилися й стали дорівнювати відповідно 84° і 74°. Знайдіть швидкість пароплава.



Мал. 155



Мал. 156

§ 13. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

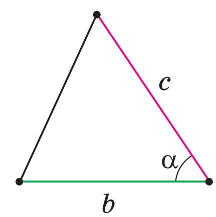
1. АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

У 8-му класі ви розв'язували задачі на обчислення елементів прямокутного трикутника. Ці задачі є окремими випадками задач, які прийнято називати задачами на розв'язування трикутників.

Розв'язати трикутник означає — знайти невідомі сторони та кути трикутника за відомими його сторонами й кутами.

Існують такі види задач, у яких вимагається розв'язати трикутник: 1) за двома сторонами й кутом між ними; 2) за стороною і прилеглими до неї кутами; 3) за трьома сторонами; 4) за двома сторонами й кутом, прилеглим до однієї з них.

Задача 1. Дано: $b = 93$, $c = 65$, $\angle A = 42°$.
Знайти: a, $\angle B$, $\angle C$.



Розв'язання. 1) За теоремою косинусів: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

$$a^2 = 93^2 + 65^2 - 2 \cdot 93 \cdot 65 \cdot \cos 42° = 8649 + 4225 - 12090 \cdot 0{,}743 \approx 3890,$$

$$a \approx \sqrt{3890} \approx 62.$$

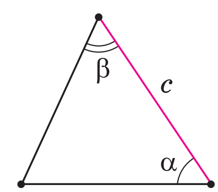
2) Застосовуючи теорему косинусів, одержимо:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx \frac{3890 + 4225 - 8649}{2 \cdot 62 \cdot 65} \approx -0{,}066.$$

Отже, $\angle B$ — тупий. Знайдемо гострий кут B_1, косинус якого дорівнює $0{,}066$. $\angle B_1 \approx 86°$. Тоді $\angle B = 180° - \angle B_1 \approx 180° - 86° \approx 94°$.

3) $\angle C = 180° - \angle A - \angle B \approx 180° - 42° - 94° \approx 44°$.

Задача 2. Дано: $c = 40$, $\angle A = 28°$, $\angle B = 31°$.
Знайти: a, b, $\angle C$.



Розв'язання. 1) $\angle C = 180° - 28° - 31° = 121°$.

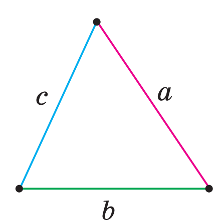
2) Із рівності $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ знаходимо сторону a:

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{40 \cdot \sin 28°}{\sin 121°} = \frac{40 \cdot 0{,}469}{0{,}857} \approx 22.$$

3) Із рівності $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ знаходимо сторону b:

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{40 \cdot \sin 31°}{\sin 121°} = \frac{40 \cdot 0{,}515}{0{,}857} \approx 24.$$

Задача 3. Дано: $a = 18$, $b = 24$, $c = 13$.
Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

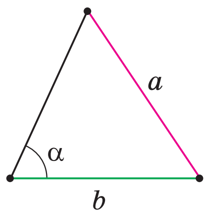


Розв'язання. 1) За теоремою косинусів знаходимо кут A:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{576 + 169 - 324}{2 \cdot 24 \cdot 13} = \frac{421}{624} \approx 0{,}675, \quad \angle A \approx 48°.$$

2) За теоремою косинусів: $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{324 + 169 - 576}{2 \cdot 18 \cdot 13} = \dfrac{-83}{468} \approx -0{,}177.$

Знайдемо гострий кут B_1, косинус якого дорівнює 0,177.
$\angle B_1 \approx 80°$. Тоді $\angle B = 180° - \angle B_1 \approx 180° - 80° \approx 100°$.
3) $\angle C = 180° - \angle A - \angle B \approx 180° - 48° - 100° \approx 32°$.



Задача 4. Дано: $a = 70$, $b = 65$, $\angle A = 40°$.
Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$.

Розв'язання. 1) За теоремою синусів:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{65 \cdot \sin 40°}{70} \approx \frac{65 \cdot 0{,}643}{70} \approx 0{,}597.$$

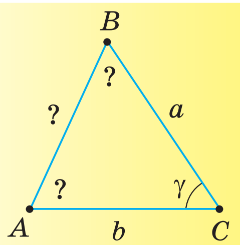
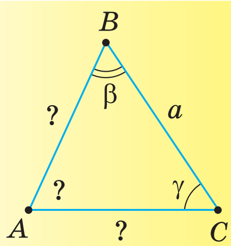
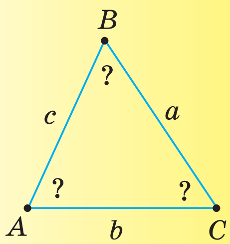
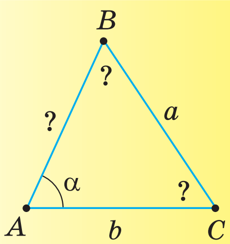
Цьому значенню синуса відповідають два кути: 37° і 143°. Оскільки $b > a$, то $\angle B > \angle A$. Тоді $\angle B$ — гострий: $\angle B \approx 37°$.

2) $\angle C \approx 180° - 37° - 40° \approx 103°$.

3) $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A} = \dfrac{70 \cdot \sin 103°}{\sin 40°} \approx \dfrac{70 \cdot 0{,}974}{0{,}643} \approx 106.$

Алгоритми розв'язування задач наведено в таблиці 17.

Таблиця 17

Умова задачі		Алгоритм розв'язування
	**Дано:** $AC = b$, $BC = a$, $\angle C = \gamma$. **Знайти:** AB, $\angle A$, $\angle B$.	1) $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$, 2) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 3) $\angle B = 180° - \angle A - \gamma$.
	**Дано:** $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. **Знайти:** AC, AB, $\angle A$.	1) $\angle A = 180° - \beta - \gamma$, 2) $AC = \dfrac{a \cdot \sin\beta}{\sin A}$, 3) $AB = \dfrac{a \cdot \sin\gamma}{\sin A}$.
	**Дано:** $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. **Знайти:** $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.	1) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 2) $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, 3) $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$.
	**Дано:** $BC = a$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$. **Знайти:** AB, $\angle B$, $\angle C$.	1) $\sin B = \dfrac{b \sin\alpha}{a}$, 2) $\angle C = 180° - \alpha - \angle B$, 3) $AB = \dfrac{a \cdot \sin C}{\sin\alpha}$.

2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Розв'язування багатьох прикладних задач ґрунтується на розв'язуванні трикутників. Розглянемо деякі види прикладних задач.

1. Задачі на знаходження висоти предмета, основа якого недоступна.

Задача 5. Знайдіть висоту вежі, яка відокремлена від вас річкою (мал. 157).

Розв'язання. На горизонтальній прямій, яка проходить через основу вежі, позначимо дві точки A_1 і C_1. Вимірюємо $A_1C_1 = b$, $\angle DAB = \alpha$ і $\angle DCB = \beta$.
За теоремою синусів, із трикутника ABC одержимо:

$$AB = \frac{AC \cdot \sin\beta}{\sin B} = \frac{b\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Із прямокутного трикутника ABD маємо: $BD = AB \cdot \sin\alpha$.

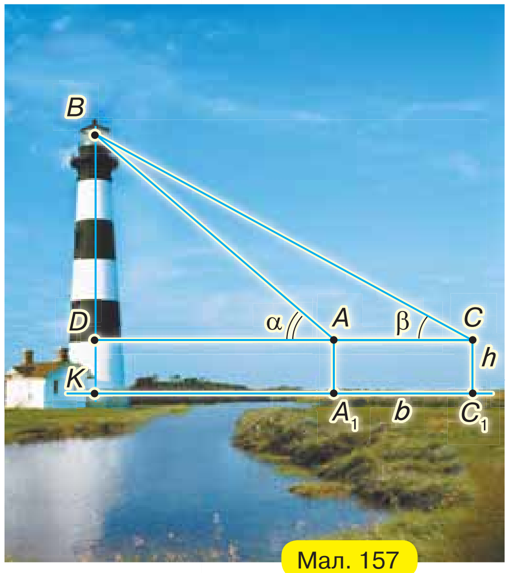
Отже, $BD = \dfrac{b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

Додавши до BD висоту приладу $AA_1 = DK = h$, яким вимірювали кути, одержимо формулу для обчислення висоти вежі:

$$BK = BD + DK = \frac{b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} + h.$$

Нехай результати вимірювання такі: b = 12 м, h = 1,5 м, $\alpha = 42°$, $\beta = 37°$.
Тоді:

$$BK = \frac{12 \cdot \sin 42° \cdot \sin 37°}{\sin 5°} + 1{,}5 \approx \frac{12 \cdot 0{,}669 \cdot 0{,}602}{0{,}087} + 1{,}5 \approx 57 \text{ (м)}.$$



Мал. 157

2. Задачі на знаходження відстані до недоступного пункту.

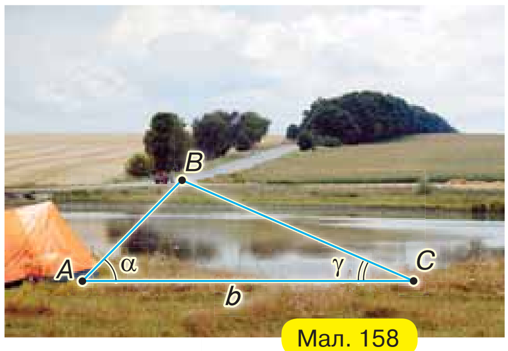
Задача 6. Знайдіть відстань від пункту A до недоступного пункту B (мал. 158).

Розв'язання. Обираємо на місцевості таку точку C, щоб з неї було видно пункт B і можна було виміряти відстань AC.
Вимірюємо $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $BCA = \gamma$. Знаходимо $\angle B = 180° - (\alpha + \gamma)$.

За теоремою синусів: $AB = \dfrac{b \cdot \sin\gamma}{\sin(180° - (\alpha+\gamma))} = \dfrac{b\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$.

Нехай результати вимірювання такі: $b = 90$ м, $\alpha = 46°$, $\gamma = 25°$.

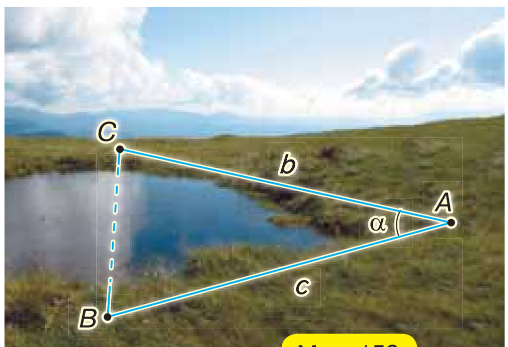
Тоді $AB = \dfrac{90 \cdot \sin 25°}{\sin 71°} \approx \dfrac{90 \cdot 0{,}423}{0{,}946} \approx 40$ (м).



Мал. 158

3. Задачі на знаходження відстані між двома доступними пунктами (якщо безпосереднє вимірювання неможливе).

Задача 7. Знайдіть відстань між пунктами B і C, розділеними ставком (мал. 159).



Мал. 159

Розв'язання. Обираємо на місцевості точку A так, щоб можна було виміряти відстані AB і AC. Вимірюємо $AB = c$, $AC = b$ і $\angle BAC = \alpha$.

За теоремою косинусів: $BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$.
Нехай результати вимірювання такі: $b = 88$ м, $c = 90$ м, $\alpha = 28°$.
Тоді $BC = \sqrt{88^2 + 90^2 - 2 \cdot 88 \cdot 90 \cdot \cos 28°} \approx 43$ (м).

Дізнайтеся більше

Поміркуємо над задачею четвертого виду.

Дано: a, b, $\angle A$.

Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$.

Відкладемо на стороні кута A відрізок $AC = b$ (мал. 160), а потім з точки C як із центра опишемо коло радіуса a.

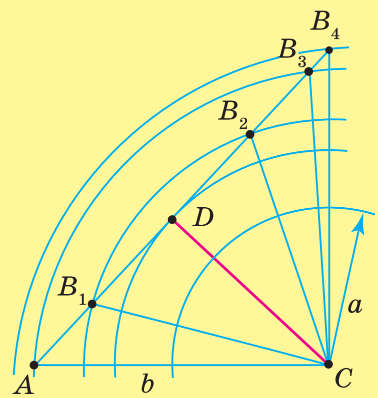
Можливі такі випадки.

1) Коло не перетинає сторону AB кута A. Задача розв'язку не має.

2) Коло дотикається до сторони AB в точці D. Задача має один розв'язок — прямокутний ΔACD.

3) Коло перетинає сторону AB у двох точках B_1 і B_2. Задача має два розв'язки — ΔAB_1C і ΔAB_2C.

4) Коло перетинає сторону AB в точці B_3 і проходить через вершину A кута. Задача має один розв'язок — рівнобедрений ΔAB_3C.



Мал. 160

5) Коло перетинає сторону AB в точці B_4. Задача має один розв'язок — ΔAB_4C.

Виникає запитання: *Чи не можна лише на основі числових даних задачі, не виконуючи вказаних побудов, визначити, скільки розв'язків вона має?*

Помічаємо, що якщо $\angle A < 90°$, то з прямокутного трикутника ACD (мал. 160): $CD = b \sin A$. Тоді випадки 1) — 5) запишемо так:

1) $a < CD$, тобто $a < b \sin A$. Задача розв'язку не має, оскільки $\sin B = \dfrac{b\sin A}{a} > 1$.

2) $a = b \sin A$. $\sin B = \dfrac{b\sin A}{a} = 1$ і $\angle B = 90°$. Задача має один розв'язок.

3) $b \sin A < a < b$. Задача має два розв'язки, оскільки $\angle B$ може бути як гострим, так і тупим.

4) $a = b$. Задача має один розв'язок. $\angle A = \angle B$ як кути рівнобедреного трикутника.

5) $a > b$. $\angle B$ — гострий, оскільки він лежить проти меншої сторони трикутника. Задача має один розв'язок.

Якщо ж $\angle A > 90°$, то матимемо випадок 5), оскільки проти тупого кута завжди лежить більша сторона.

Розглянемо приклад.

Дано: $a = 71$, $b = 96$, $\angle A = 26°$.

Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$.

Знайдемо: $b \sin A = 96 \sin 26° \approx 96 \cdot 0{,}438 \approx 42 < 71$.

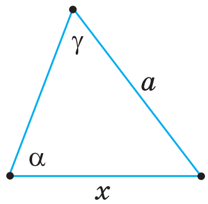
Отже, $b \sin A < a < b$ і задача має два розв'язки.

Пригадайте головне

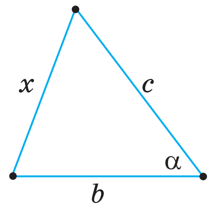
1. Що означає — розв'язати трикутник?
2. Які види задач стосуються розв'язування трикутників?
3. Запишіть алгоритми розв'язування кожного з видів цих задач.
4. Назвіть види прикладних задач, що потребують розв'язування трикутників.

Розв'яжіть задачі

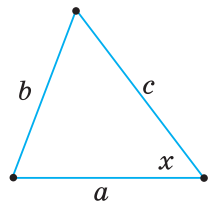
592'. За даними на малюнках 161–163 запишіть формули для обчислення елемента x трикутника.



Мал. 161

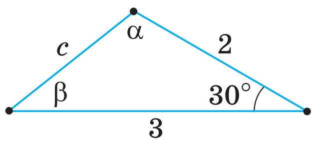


Мал. 162

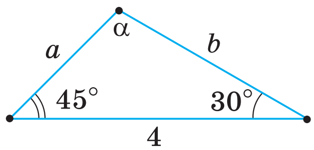


Мал. 163

593'. За даними на малюнках 164 і 165 обчисліть невідомі сторони та кути трикутника.



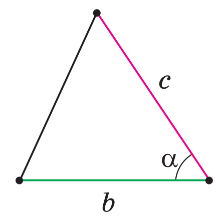
Мал. 164



Мал. 165

594°. Дано дві сторони трикутника й кут між ними. Знайдіть інші два кути і третю сторону, якщо:

1) $a = 6$, $c = 8$, $\beta = 30°$;
2) $b = 4$, $c = 5$, $\alpha = 60°$;
3) $a = 5$, $b = 7$, $\gamma = 105°$.

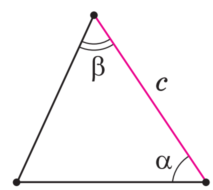


595°. Дано дві сторони трикутника та кут між ними. Знайдіть інші два кути і третю сторону, якщо:

1) $a = 3$, $b = 2$, $\gamma = 45°$;
2) $b = 3$, $c = 4$, $\alpha = 120°$.

596°. Дано сторону і прилеглі до неї кути трикутника. Знайдіть третій кут та інші дві сторони, якщо:

1) $a = 4$, $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$;
2) $c = 2$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$;
3) $b = 10$, $\alpha = 20°$, $\gamma = 110°$.

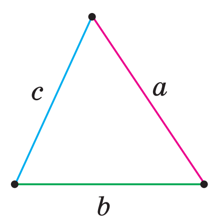


597°. Дано сторону і прилеглі до неї кути трикутника. Знайдіть третій кут та інші дві сторони, якщо:

1) $a = 7$, $\beta = 30°$, $\gamma = 48°$;
2) $c = 5$, $\alpha = 28°$, $\beta = 122°$.

598°. Дано три сторони трикутника. Знайдіть його кути, якщо:

1) $a = 3$, $b = 6$, $c = 5$;
2) $a = 4$, $b = 3$, $c = 6$;
3) $a = 4$, $b = 7$, $c = 5$.

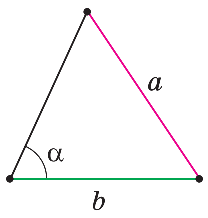


599°. Дано три сторони трикутника. Знайдіть його кути, якщо:

1) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$;
2) $a = 6$, $b = 8$, $c = 7$.

600°. У паралелограмі діагональ дорівнює d, сторона — a, а кут між ними — α. Знайдіть невідомі діагональ, сторону й кути паралелограма, якщо:

1) $d = 10$, $a = 6$, $\alpha = 20°$;
2) $d = 12$, $a = 5$, $\alpha = 35°$;
3) $d = a = 5$, $\alpha = 32°$.



601. **У трикутнику дано дві сторони та кут, що лежить проти однієї з них. Знайдіть інші два кути і третю сторону трикутника**, якщо:
1) $a = 12$, $b = 10$, $\alpha = 40°$;
2) $a = 40$, $c = 30$, $\alpha = 45°$;
3) $b = c = 15$, $\gamma = 75°$.

602. У трикутнику дано дві сторони та кут, що лежить проти однієї з них. Знайдіть інші два кути і третю сторону трикутника, якщо:
1) $a = 30$, $c = 20$, $\alpha = 30°$;
2) $a = 20$, $b = 13$, $\alpha = 65°$.

603. a, b, c — сторони трикутника, α, β, γ — його кути. Накресліть у зошиті таблицю 18 і заповніть її.

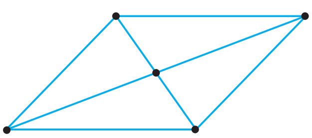
Таблиця 18

a	5	3	2	
b	4			5
c	8		4	8
α				
β		35°	40°	
γ		30°		20°

604. Розв'яжіть трикутник, якщо:
1) $a - b = 5$, $\angle A = 54°$, $\angle B = 13°$;
2) $b + c = 7$, $\angle A = 29°$, $\angle B = 47°$.

605. Розв'яжіть трикутник, якщо $c - a = 3$, $\angle B = 44°$, $\angle C = 102°$.

606. Обчисліть невідомі сторони й кути трикутника, якщо:
1) $a = 15$, $c = 18$, $m_b = 11{,}3$;
2) $a = 13$, $b = 15$, $m_c = 12{,}3$.



607. **Діагоналі паралелограма дорівнюють d_1 і d_2, а кут між ними — α. Знайдіть сторони паралелограма**, якщо:
1) $d_1 = 12$ см, $d_2 = 6$ см, $\alpha = 35°$;
2) $d_1 = 4$ см, $d_2 = 10$ см, $\alpha = 140°$.

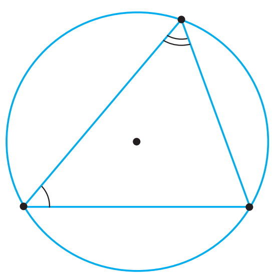
608. Знайдіть бісектриси трикутника ABC, якщо:
1) $AC = 7$, $\angle A = 60°$, $\angle C = 40°$;
2) $BC = 5$, $\angle B = 45°$, $\angle C = 70°$.

609. Визначте сторони трикутника, якщо середня за довжиною сторона відрізняється від кожної з двох інших на 1 см, а проекція більшої сторони на середню дорівнює 9 см.

610. У рівнобедреному прямокутному трикутнику ABC гіпотенузу AB продовжено на довжину $BD = BC$ і точку D сполучено з точкою C. Знайдіть сторони трикутника ADC, якщо катет $BC = a$.

611. Площа трикутника ABC дорівнює 16 см², $AC = 5$ см, $BC = 8$ см. Знайдіть сторону AB.

612. У коло радіуса 38 см вписано трикутник, гострі кути якого дорівнюють 49° і 63°. Знайдіть сторони трикутника.



613. **У трикутнику ABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, а радіус описаного кола — R. Знайдіть сторони трикутника.**

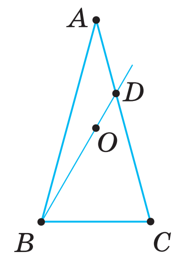
614. Сторона трикутника дорівнює 21 см, а дві інші його сторони утворюють кут 60° і відносяться, як 3 : 8. Знайдіть невідомі сторони та кути трикутника.

615. Основи трапеції дорівнюють 60 см і 18 см, а бічні сторони — 28 см і 35 см. Обчисліть кути трапеції.

616*. У трикутнику ABC $AB = 2$ см, $AC = 5$ см, $BC = 6$ см. Знайдіть відстань від вершини B до точки перетину висот трикутника.

617*. Усередині кута A з градусною мірою $60°$ позначено точку M на відстанях a і b від сторін кута. Знайдіть відстань AM.

618*. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = AC = b$, а $\angle A = 30°$ (мал. 166). Пряма, що проходить через вершину B і центр O описаного кола, перетинає сторону AC в точці D. Знайдіть довжину відрізка BD.

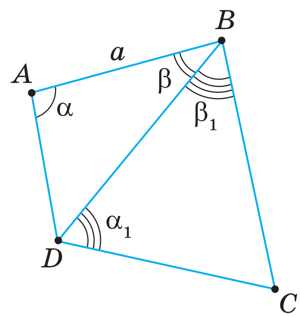


Мал. 166

619*. Знайдіть діагоналі трапеції, якщо її основи дорівнюють 23,8 см і 43,5 см, а кути при більшій основі — $64°$ і $71°$.

620*. Обчисліть площу трапеції, якщо її основи дорівнюють a і b ($a > b$), а прилеглі до основи a кути — α і β.

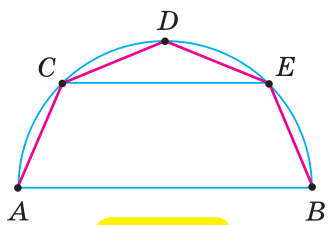
621*. За даними на малюнку 167 знайдіть сторону BC чотирикутника $ABCD$.



Мал. 167

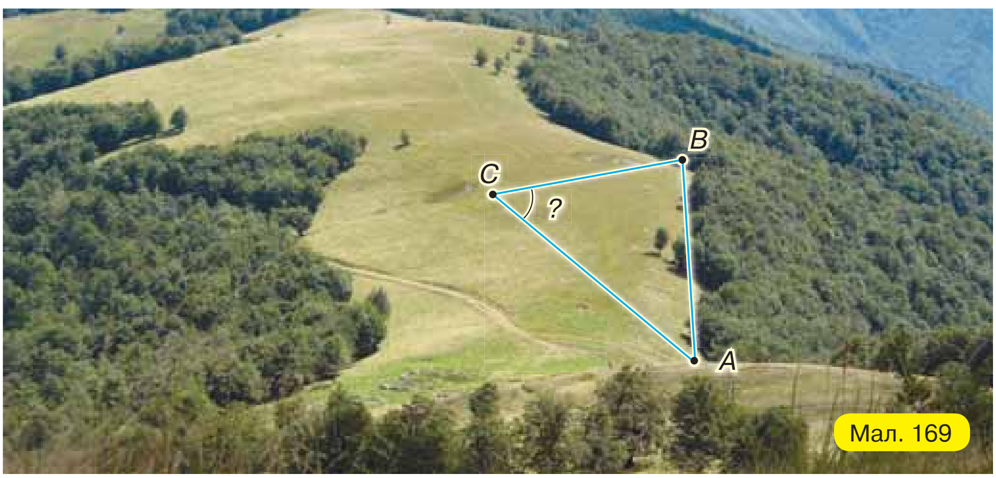
Проявіть компетентність

622. Мансардну покрівлю спроектували так: на відрізку $AB = 11{,}5$ м (ширина перекриття, мал. 168) описали півколо та поділили його на чотири рівні частини. Точки A, C, D, E і B сполучили відрізками. Знайдіть:
1) довжину схилів покрівлі AC і CD;
2) довжину поперечки CE;
3) кути нахилу схилів AC і CD покрівлі.



Мал. 168

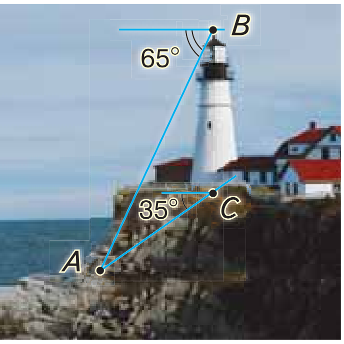
623. Під яким кутом видно прямолінійний край лісу $AB = 1240$ м з пункту C, який віддалений від пункту A на 1600 м і від пункту B — на 1170 м (мал. 169)?



Мал. 169

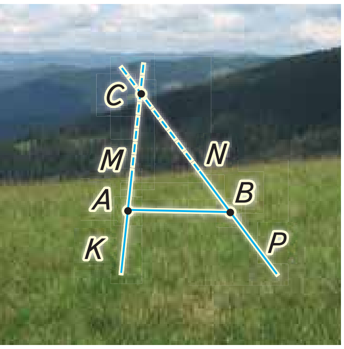
624. Щоб знайти кут на місцевості, на його сторонах від вершини відклали по 10 м і виміряли відстань між одержаними точками — 16 м. Дістали, що кут дорівнює 106°. Поясніть, як обчислили кут.

625. На горі розміщена башта заввишки 60 м (мал. 170). Деякий предмет на підошві гори видно з вершини B башти під кутом 65° до горизонту, а з її основи C — під кутом 35° до горизонту. Знайдіть висоту гори.



Мал. 170

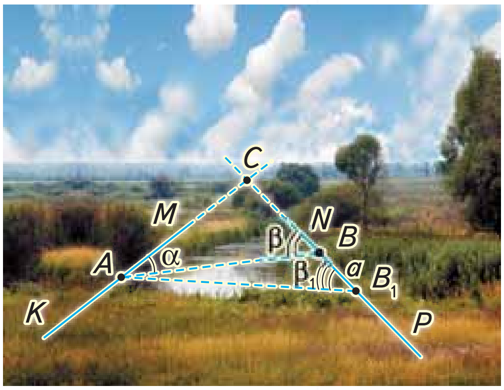
626*. На малюнку 171 зображено дві прямі дороги KM і PN, які перетинаються десь за лісом у недоступній точці C. Потрібно знайти відстань від деякого пункту A на дорозі KM до точки C перетину доріг. Для цього на дорозі PN позначили пункт B так, щоб можна було виміряти відстань AB, і визначили кути BAM і ABN. Поясніть спосіб знаходження відстані AC. Обчисліть AC, якщо $AB = 800$ м, $\angle BAM = 85°$, $\angle ABN = 52°$.



Мал. 171

627*. Трапилося так, що місцевість між дорогами заболочена й виміряти відстань AB, як у задачі 626, не можна (мал. 172). Але пункт A видно з двох місць B і B_1 на дорозі PN, а також можна підійти до пункту A. Тоді виміряли BB_1, $\angle BAM$, $\angle ABN$ і $\angle AB_1N$. Поясніть, як знайти відстань AC. Знайдіть цю відстань, якщо: $BB_1 = a$, $\angle BAM = \alpha$, $\angle ABN = \beta$, $\angle AB_1N = \beta_1$.

628*. Потрібно обчислити відстань між недоступними пунктами C і D (мал. 173). Для цього на місцевості вибрали точки A і B так, щоб можна було виміряти відстань AB і щоб із цих точок було видно точки C і D. Потім виміряли $AB = a$, $\angle CAD = \alpha_1$, $\angle BAD = \alpha_2$, $\angle ABC = \beta_2$, $\angle CBD = \beta_1$. Поясніть, як знайти відстань CD. Обчисліть CD, якщо $a = 100$ м, $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 70°$, $\beta_1 = 54°$, $\beta_2 = 28°$.



Мал. 172

Мал. 173

§ 14. ФОРМУЛИ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

$$S = \frac{1}{2}ah_a$$

$$S = p \cdot r$$

Ви вже знаєте, що площу трикутника можна обчислити за формулами:

$S = \frac{1}{2}ah_a$, де a — сторона трикутника; h_a — висота, проведена до цієї сторони;

$S = p \cdot r$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр трикутника; r — радіус вписаного кола.

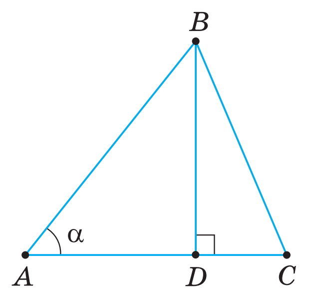
Виведемо інші формули для обчислення площі трикутника.

1. Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними:

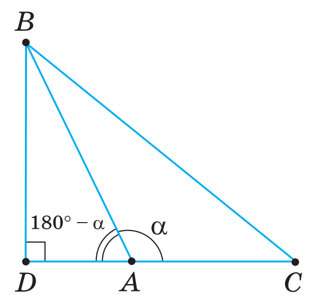
$$S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha.$$

У трикутнику ABC проведемо висоту BD (мал. 174, 175). Маємо: $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$. Із прямокутного трикутника ABD: $BD = AB \sin\alpha$, якщо кут α — гострий (мал. 174); $BD = AB\sin(180° - \alpha)$, якщо кут α — тупий (мал. 175). Оскільки $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, то для будь-якого випадку $BD = AB\sin\alpha$. Підставивши у формулу $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ вираз BD, одержимо:

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot AB\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$



Мал. 174



Мал. 175

Задача. Доведіть, що площу трикутника обчислюють за формулою $S = \frac{abc}{4R}$, де a, b, c — сторони трикутника, R — радіус описаного кола.

Розв'язання. За наслідком 1 з теореми синусів, $2R = \frac{a}{\sin\alpha}$. Звідси $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$. Підставивши вираз $\sin\alpha$ у формулу $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, одержимо:

$$S = \frac{1}{2}bc\frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

Отже, площу трикутника обчислюють і за формулою:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

2. Формула Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де a, b, c — сторони трикутника; $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр.

За теоремою косинусів, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Звідси $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

З формули $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$ знаходимо: $\sin\alpha = \dfrac{2S}{bc}$.

Підставляючи знайдені вирази $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ у формулу $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, одержимо: $\left(\dfrac{2S}{bc}\right)^2 + \left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = 1$.

Звідси $S^2 = \dfrac{4b^2c^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{16}$.

Застосовуючи формулу різниці квадратів, маємо:

$$S^2 = \frac{\left((b+c)^2 - a^2\right)\left(a^2 - (b-c)^2\right)}{16} = \frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}.$$

Взявши до уваги, що $a + b + c = 2p$, $b + c - a = 2p - 2a$, $a + b - c = 2p - 2c$, $a + c - b = 2p - 2b$, одержимо:

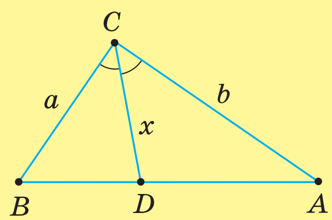
$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ або $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Дізнайтеся більше

1. Герон Александрійський (приблизно I ст. до н. е.) — видатний давньогрецький учений. Його відкриття збагатили математику, фізику, механіку, астрономію. Найбільш важливою геометричною працею вченого була «Метрика» (вчення про вимірювання). У цій книжці серед правил вимірювання площ наведено так звану «Формулу Герона» (нині встановлено, що цю формулу застосовував Архімед, який жив на кілька століть раніше Герона).
2. Застосування поняття площі дає можливість іноді значно спростити розв'язування таких задач, в умовах яких це поняття не вживається. Найчастіше це можна зробити так: спочатку площу деякої фігури виражаємо через дані й шукані величини двома різними способами, а потім прирівнюємо знайдені вирази. Одержуємо рівняння, з якого можна знайти шукану величину.

Задача. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. Знайдіть довжину бісектриси прямого кута.

Розв'язання. Нехай ABC — даний прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$), $BC = a$, $AC = b$ і CD — бісектриса прямого кута (мал. 176). Позначимо $CD = x$ і знайдемо площу трикутника ABC двома способами.



Мал. 176

З одного боку:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{ab}{2}. \quad (1)$$

З іншого боку:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BCD} + S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}ax\cdot\sin 45° + \frac{1}{2}bx\cdot\sin 45° = \frac{x\sqrt{2}}{4}(a+b). \quad (2)$$

Прирівнявши праві частини рівностей (1) і (2), одержимо рівняння:

$$\frac{ab}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{4}(a+b).$$

Звідси $x = \dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

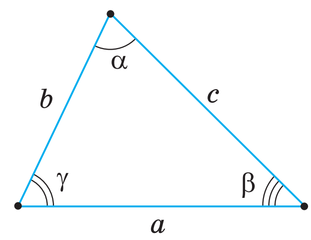
Пригадайте головне

1. Запишіть і поясніть формулу для обчислення площі трикутника за двома сторонами й кутом між ними.
2. Запишіть і поясніть формулу Герона.

Розв'яжіть задачі

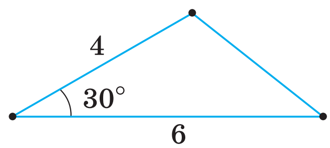
629'. Чи є правильною рівність для обчислення площі трикутника, зображеного на малюнку 177:

1) $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\beta$;
3) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
2) $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$;
4) $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$?



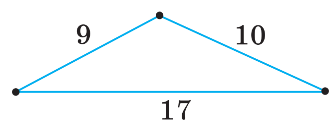
Мал. 177

630°. Обчисліть площу трикутника за даними на малюнку 178.



Мал. 178

631°. За даними на малюнку 179 знайдіть площу трикутника, дотримуючись плану:
1) обчисліть півпериметр p;
2) обчисліть значення виразу $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.



Мал. 179

632°. Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) $a = 5\sqrt{3}$ см, $c = 4$ см, $\beta = 60°$;
2) $c = 12$ см, $b = 8$ см, $\alpha = 30°$.

633°. Знайдіть площу трикутника, якщо $a = 7\sqrt{2}$ см, $b = 16$ см, $\gamma = 45°$.

634°. Бічні сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють a, а кут між ними — α. Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) $a = 2$ см, $\alpha = 70°$;
2) $a = 4$ см, $\alpha = 65°$;
3) $a = 6$ см, $\alpha = 100°$.

635°. **a, b, c — сторони трикутника, R — радіус описаного кола. Знайдіть площу трикутника, якщо:**
1) $a = 26$ см, $b = 24$ см, $c = 10$ см, $R = 13$ см;
2) $a = 6$ см, $b = 6$ см, $c = 4\sqrt{5}$ см, $R = 4{,}5$ см.

636°. a, b, c — сторони трикутника, R — радіус описаного кола. Знайдіть площу трикутника, якщо $a = 26$ см, $b = 28$ см, $c = 30$ см, $R = 16{,}25$ см.

637°. a, b, c — сторони трикутника, r — радіус вписаного кола. Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см, $r = 4$ см;
2) $a = 4$ см, $b = 13$ см, $c = 15$ см, $r = 1{,}5$ см.

638°. a, b, c — сторони трикутника, r — радіус вписаного кола. Знайдіть площу трикутника, якщо $a = 7$ см, $b = 15$ см, $c = 20$ см, $r = 2$ см.

639°. **Доведіть, що радіуси описаного (R) і вписаного (r) кіл трикутника можна обчислити за формулами:**

$$R=\frac{abc}{4S} \text{ і } r=\frac{2S}{a+b+c}.$$

$$S = p\cdot r$$

$$S=\frac{abc}{4R}$$

640°. Знайдіть площу трикутника, якщо його сторони дорівнюють:
1) 5 см, 5 см, 6 см;
2) 12 см, 17 см, 25 см.

641°. Знайдіть площу трикутника, якщо його сторони дорівнюють 15 см, 26 см, 37 см.

642. a, b — сторони трикутника, γ — кут між ними, S — площа трикутника. Накресліть у зошиті таблицю 19 і заповніть її.

Таблиця 19

a	7	5	4	
b	10	8		9
γ	80°		150°	75°
S		12	24	16

$$S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha$$

643. Площа трикутника ABC дорівнює 60 см². Знайдіть сторону AB, якщо:
1) $AC = 15$ см, $\angle A = 30°$;
2) $BC = 10\sqrt{3}$ см, $\angle B = 60°$.

644. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 10 см. Чи може його площа дорівнювати:
1) 19 см²;
2) 35 см²;
3) 24 см²?

645. Скориставшись формулою $S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha$, дослідіть, як змінюватиметься площа трикутника ABC зі зростанням кута α від 0° до 180° (b і c — сталі). За якого значення α площа трикутника ABC буде найбільшою?

646. **Доведіть, що площа паралелограма дорівнює добутку двох його суміжних сторін на синус кута між ними.**

647. Сторони паралелограма дорівнюють a і b, а один з кутів — α. Знайдіть площу паралелограма, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $\alpha = 70°$;
2) $a = 5$ см, $b = 3$ см, $\alpha = 130°$.

648. **Площа ромба дорівнює квадрату його сторони, помноженому на синус кута ромба.** Доведіть.

649. Обчисліть площу ромба за його стороною a та кутом α, якщо:
1) $a = 2$ см, $\alpha = 20°$;
2) $a = 6$ см, $\alpha = 124°$.

650. **Доведіть, що площа паралелограма дорівнює половині добутку його діагоналей на синус кута між ними.**

651. Знайдіть площу паралелограма за його діагоналями d_1 і d_2 й кутом α між ними:
1) $d_1 = 6$ см, $d_2 = 10$ см, $\alpha = 40°$;
2) $d_1 = 8$ см, $d_2 = 12$ см, $\alpha = 59°$.

652. Обчисліть площу прямокутника за діагоналлю d та кутом α між діагоналями, якщо:
1) $d = 12$ см, $\alpha = 30°$;
2) $d = 10$ см, $\alpha = 25°$.

653. Обчисліть площу трикутника за стороною c і прилеглими до неї кутами α і β якщо:
1) $c = 6$ см, $\alpha = 70°$, $\beta = 60°$;
2) $c = 8$ см, $\alpha = 65°$, $\beta = 54°$.

654. **Доведіть, що довжину бісектриси l кута α трикутника ABC можна обчислити за формулою:** $l_a = \dfrac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

655. **Знайдіть висоту трикутника, проведену до сторони a, якщо його сторони дорівнюють a, b і c.**

$S = \dfrac{1}{2}ah_a$

656. Знайдіть висоти трикутника, якщо його сторони дорівнюють:
1) 7 см, 15 см, 20 см;
2) 13 см, 14 см, 15 см.

657. Площа трикутника дорівнює 810 см^2. Знайдіть сторони трикутника, якщо вони відносяться, як 12 : 17 : 25.

658. Дві сторони трикутника дорівнюють 17 см і 21 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 5 см. Знайдіть площу трикутника.

659. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, якщо його основа та висота відповідно дорівнюють:
1) 20 см і 26 см;
2) 16 см і 17 см.

660. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, якщо його сторони дорівнюють:
1) 10 см, 24 см, 26 см;
2) 26 см, 28 см, 30 см.

661. a, b, c — сторони трикутника, S — його площа, R, r — радіуси описаного і вписаного кіл. Накресліть у зошиті таблицю 20 і заповніть її.

Таблиця 20

a	5 см	3 см	5 см	6 см	4 см
b	7 см	4 см	5 см	10 см	13 см
c	8 см	5 см	6 см	8 см	15 см
S	$10\sqrt{3}$ см^2				
R		2,5 см		5 см	
r			1,5 см		

662*. Доведіть формули для обчислення площі трикутника:
1) $S = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$;
2) $S = \dfrac{a^2 \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin\alpha}$;
3) $S = \sqrt{\dfrac{1}{2}Rh_a h_b h_c}$,

де R — радіус описаного кола.

663*. Бісектриса l прямого кута трикутника утворює з гіпотенузою кут α. Знайдіть площу трикутника.

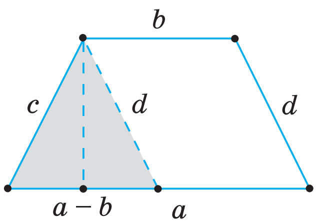
664*. Знайдіть площу трикутника за медіаною m і кутами α і β, які утворює медіана з прилеглими сторонами.

665*. Знайдіть площу трикутника за двома його висотами h_1 і h_2 та кутом α між ними.

666*. **Доведіть, що площа чотирикутника дорівнює половині добутку його діагоналей на синус кута між ними.**

667*. Сторона трикутника дорівнює 30 см, а медіани, проведені до двох інших сторін, — 12 см і 39 см. Знайдіть площу трикутника.

668*. Основи трапеції дорівнюють 16 см і 44 см, бічні сторони — 15 см і 41 см. Скориставшись малюнком 180, знайдіть площу трапеції.



Мал. 180

Щоб обчислити площу трапеції за її сторонами (мал. 180):
1) проведіть через вершину меншої основи пряму, паралельну бічній стороні;
2) знайдіть висоту утвореного трикутника за трьома його сторонами (висоту трапеції);
3) знайдіть площу трапеції.

669*. Знайдіть висоту трапеції, якщо її основи дорівнюють 25 см і 11 см, а бічні сторони — 13 см і 15 см.

670*. Знайдіть площу трикутника, якщо його медіани дорівнюють m_a, m_b, m_c.

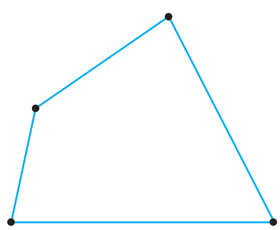
671*. Знайдіть площу трикутника, якщо його висоти дорівнюють h_a, h_b, h_c.

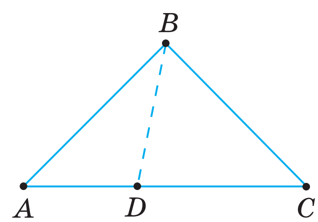
Проявіть компетентність

672. На малюнку 181 зображено план ділянки в масштабі 1 : 1000. Скориставшись планом, знайдіть площу цієї ділянки.

673. Маса 1 м² листового заліза становить 38 кг. Яку масу має трикутник, вирізаний із цього заліза, якщо його сторони дорівнюють 29 см, 35 см і 48 см?

674. Від трикутної ділянки площею 5 га потрібно межею BD відділити ділянку площею 2 га (мал. 182). Як це зробити, якщо $AC = 1000$ м?


Мал. 181



Мал. 182

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Сформулюйте теорему синусів; теорему косинусів.
2. Назвіть, які є види задач на розв’язування трикутників, та запишіть алгоритми розв’язування кожного з видів цих задач.
3. Запишіть і поясніть формули для обчислення площі трикутника: за трьома сторонами; за двома сторонами й кутом між ними.

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестових завдань потрібно 10–15 хв.

1° Знайдіть сторону b трикутника ABC, якщо: $c = 1$ см, $\angle B = 45°$, $\angle C = 30°$.

А. $\sqrt{3}$ см.
Б. 2 см.
В. $\sqrt{2}$ см.
Г. 1 см.

2° Знайдіть площу трикутника, якщо його сторони дорівнюють 10 см, 10 см, 12 см.

А. 32 см^2.
Б. 60 см^2.
В. 48 см^2.
Г. 24 см^2.

3° Обчисліть площу рівнобедреного трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 2 см, а кут між бічними сторонами — 30°.

А. 2 см^2.
Б. 6 см^2.
В. 4 см^2.
Г. 1 см^2.

4 Знайдіть площу паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 2 см і 4 см, а один з кутів — 45°.

А. $4\sqrt{2}$ см^2.
Б. 8 см^2.
В. $2\sqrt{2}$ см^2.
Г. $8\sqrt{2}$ см^2.

5* Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, якщо його сторони дорівнюють 4 см, 7 см і 9 см.

А. 10 см.
Б. $6\sqrt{5}$ см.
В. $\frac{42\sqrt{5}}{5}$ см.
Г. $\frac{21\sqrt{5}}{10}$ см.

Розділ 4

Правильні многокутники. Довжина кола. Площа круга

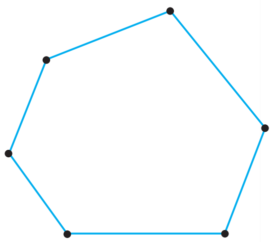
У розділі дізнаєтеся:

- що таке правильний n-кутник, які його властивості та як будувати деякі правильні n-кутники;
- як знайти радіуси вписаного й описаного кіл для правильного n-кутника за даною його стороною;
- про формули для обчислення довжини кола й дуги кола, площі круга, сектора та сегмента;
- як застосовувати вивчені властивості та формули до розв'язування геометричних задач на практиці

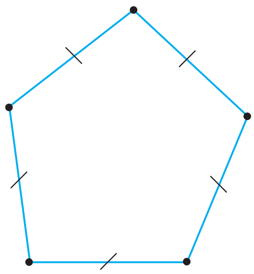
§ 15. ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

На малюнках 183–186 ви бачите многокутники. У чому їх відмінність?

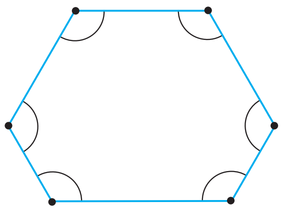
У многокутнику на малюнку 183 кути та сторони не рівні. На малюнку 184 зображено многокутник з рівними сторонами, але не рівними кутами. А в многокутнику на малюнку 185 — навпаки, усі кути рівні, а сторони — ні. Лише многокутник на малюнку 186 має всі сторони рівні й усі кути рівні. Це — правильний многокутник.



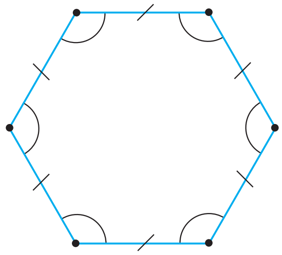
Мал. 183



Мал. 184



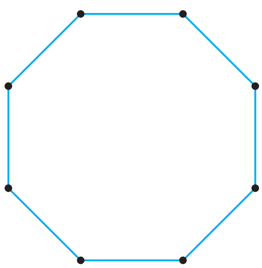
Мал. 185



Мал. 186

Многокутник **називається** ***правильним*****, якщо в нього всі сторони рівні й усі кути рівні.**

Квадрат і рівносторонній трикутник — приклади правильних многокутників. Многокутник, зображений на малюнку 186, — правильний шестикутник, а на малюнку 187 — правильний восьмикутник.



Мал. 187

У правильному n-кутнику, як і в довільному n-кутнику, сума всіх кутів дорівнює $180°(n-2)$.

Задача. Знайдіть кут правильного десятикутника.

Розв'язання. Сума кутів правильного десятикутника дорівнює:

$$180°(n-2) = 180°(10-2) = 1440°.$$

Усіх кутів є 10. Тому кожний кут дорівнює:

$$1440° : 10 = 144°.$$

Щоб знайти кут правильного *n*-кутника, скористайтеся формулою:

$$\alpha = \frac{180°(n-2)}{n}.$$

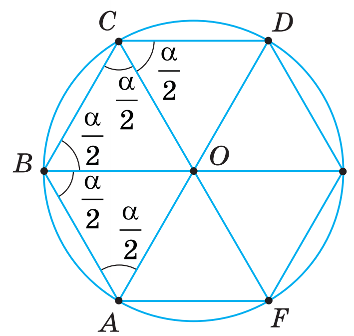
Ви знаєте, що правильний трикутник і чотирикутник (квадрат) є вписаними в коло й описаними навколо кола. Чи справджується це для будь-якого правильного многокутника? Відповідь дає теорема.

ТЕОРЕМА **(властивість правильного многокутника)**

Якщо многокутник правильний, то навколо нього можна описати коло й у нього можна вписати коло.

Дано: многокутник $ABCD... F$;
$AB = BC = CD = ... = FA$, $\angle A = \angle B = \angle C = ... = \angle F$.

Довести: 1) многокутник $ABCD... F$ є вписаним у коло;
2) многокутник $ABCD... F$ є описаним навколо кола.



Мал. 188

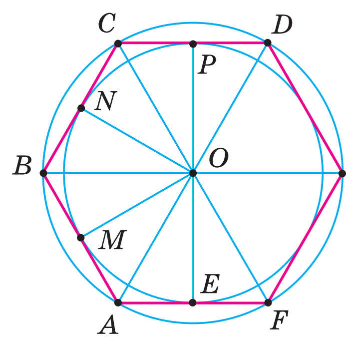
Доведення. 1) Нехай бісектриси кутів A і B правильного многокутника $ABCD... F$ перетинаються в точці O (мал. 188). Доведемо, що $OA = OB = OC = ... = OF$, тобто що ці відрізки є радіусами кола, описаного навколо даного многокутника.

Оскільки $\angle A = \angle B$, то і $\angle OAB = \angle OBA = \frac{\alpha}{2}$, де α — кут многокутника.

Тоді ΔAOB — рівнобедрений і $OA = OB$.
Сполучимо точку O відрізками з рештою вершин многокутника.
У трикутниках AOB і BOC сторона OB — спільна, $AB = BC$ за умовою, $\angle OBA = \angle OBC = \frac{\alpha}{2}$, оскільки OB — бісектриса кута B.
Отже, $\Delta AOB = \Delta BOC$, звідси $OB = OC$.
Так само в трикутниках BOC і COD сторона OC — спільна, $BC = CD$, за умовою, $\angle OCB = \angle OCD = \frac{\alpha}{2}$ (за доведеним, ΔBOC — рівнобедрений і $\angle OBC = \angle OCB = \frac{\alpha}{2}$, тоді й $\angle OCD = \frac{\alpha}{2}$).
Отже, $\Delta BOC = \Delta COD$, звідси $OC = OD$.
Таким чином, $OA = OB = OC = OD$.
Продовжуючи порівняння сусідніх трикутників, одержимо:

$$OA = OB = OC = OD = ... = OF.$$

Отже, усі вершини даного многокутника лежать на колі з центром O.

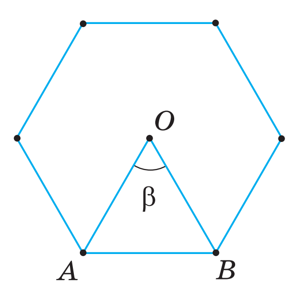


Мал. 189

2) Доведемо, що $OM = ON = OP = ... = OE$ (мал. 189), тобто що ці відрізки є радіусами кола, вписаного в даний многокутник. Ми довели що $\Delta AOB = \Delta BOC = \Delta COD = ... = \Delta FOA$. Тому висоти цих трикутників, проведені з вершини O, також рівні: $OM = ON = OP = ... = OE$. Звідси випливає, що коло із центром O і радіусом OM проходить через точки $M, N, P, ...,$ E й дотикається до сторін многокутника $ABCD... F$ у цих точках, тобто це коло — вписане в даний правильний многокутник.

У правильному многокутнику центри вписаного й описаного кіл збігаються. Спільний центр цих кіл називають *центром правильного многокутника*.

Кут, утворений двома радіусами, проведеними в суміжні вершини правильного многокутника, називають його *центральним кутом* (мал. 190).

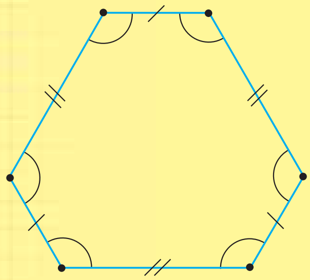


Мал. 190

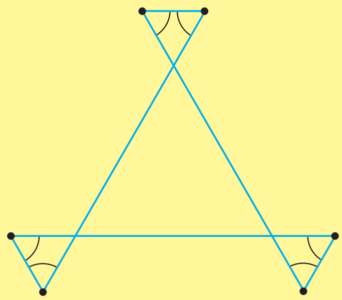
Щоб знайти центральний кут правильного n-кутника, скористайтеся формулою: $\beta = \frac{360°}{n}$.

Дізнайтеся більше

Окремим видом многокутників є *напівправильні многокутники*. Многокутник, у якого всі кути рівні, а сторони рівні через одну, називають напівправильним рівнокутним многокутником. Найпростіший приклад — прямокутник. На малюнках 191, 192 зображено напівправильні рівнокутні шестикутники — опуклий і зірчастий.

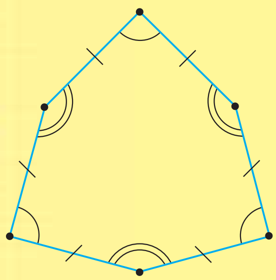


Мал. 191

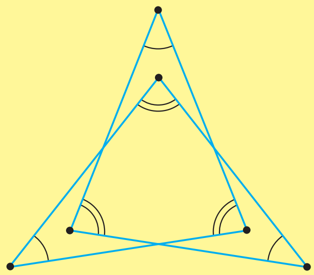


Мал. 192

Якщо в многокутнику всі сторони рівні, а кути рівні через один, то його називають напівправильним рівностороннім многокутником. На малюнках 193, 194 зображено опуклий і зірчастий напівправильні рівносторонні шестикутники.



Мал. 193



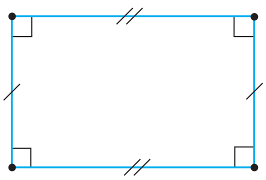
Мал. 194

Пригадайте головне

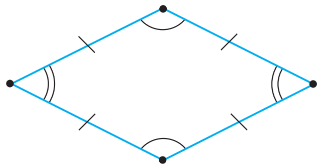
1. Що таке правильний многокутник?
2. Поясніть, як навколо правильного многокутника описати коло та як вписати в нього коло.
3. Що називають центром правильного многокутника; центральним кутом правильного многокутника?
4. Як знайти кут правильного n-кутника; центральний кут правильного n-кутника?

Розв'яжіть задачі

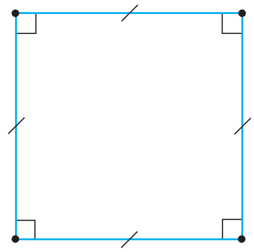
675'. Який із чотирикутників, зображених на малюнках 195–197, — правильний? Відповідь поясніть.



Мал. 195

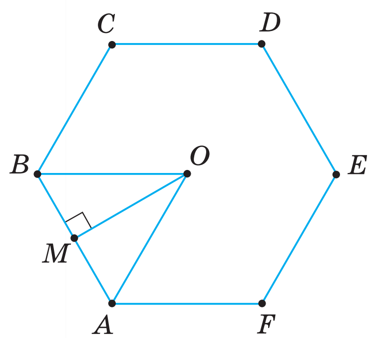


Мал. 196



Мал. 197

676'. На малюнку 198 зображено правильний шестикутник із центром O. Чи правильно, що:
1) радіус описаного кола — це відрізок: а) OA; б) OM; в) OB;
2) радіус вписаного кола — це відрізок: а) OA; б) OM; в) OB;
3) центральний кут шестикутника — це кут: а) MOA; б) BOM; в) AOB?



Мал. 198

677'. Чи правильно, що:
1) кут правильного n-кутника дорівнює:
а) $\dfrac{180°n}{n-2}$; б) $\dfrac{180°(n-2)}{n}$; в) $180°(n-2)$;
2) центральний кут правильного n-кутника дорівнює:
а) $\dfrac{180°}{n}$; б) $180°n$; в) $\dfrac{360°}{n}$?

678°. Знайдіть периметр правильного n-кутника зі стороною 4 см, якщо:
1) $n = 5$; 2) $n = 8$; 3) $n = 10$.

679°. Які з тверджень є правильними:
1) многокутник є правильним, якщо всі його сторони — рівні;
2) будь-який чотирикутник з рівними кутами є правильним;
3) трикутник є правильним, якщо всі його кути — рівні;
4) будь-який рівносторонній трикутник є правильним?
Відповідь поясніть.

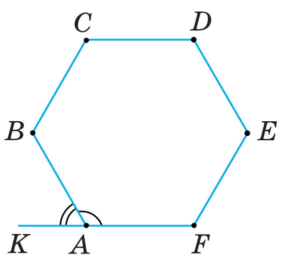
680°. Знайдіть радіус кола, вписаного в квадрат, якщо периметр квадрата дорівнює:
1) 12 см; 2) 16 см; 3) P.

681°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо квадрата, якщо діагональ квадрата дорівнює:
1) 8 см; 2) 16 см; 3) d.

682°. Обчисліть кут правильного n-кутника, якщо:
1) $n = 5$; 2) $n = 12$.

683°. Обчисліть кут правильного 18-кутника.

684°. Знайдіть центральний кут правильного n-кутника, якщо:
1) $n = 20$; 2) $n = 24$.



Мал. 198

685°. Знайдіть центральний кут правильного 10-кутника.

686°. Скільки сторін має правильний n-кутник, якщо його центральний кут дорівнює:
1) 36°; 2) 120°; 3) 30°?

687. **Знайдіть кількість сторін правильного n-кутника, якщо його кут дорівнює:**
1) 135°; 2) 150°; 3) 140°.

688. На малюнку 198 $\angle BAK$ — зовнішній кут правильного n-кутника $ABCD... F$. Знайдіть кут цього n-кутника, якщо його зовнішній кут дорівнює:
1) 60°; 2) 26°; 3) 34°.

689. Скільки сторін має правильний n-кутник, якщо кожний з його зовнішніх кутів дорівнює:
1) 10°; 2) 36°; 3) 18°?

690. α — кут правильного n-кутника, β — його центральний кут і γ — зовнішній кут. Накресліть у зошиті таблицю 21 і заповніть її.

Таблиця 21

α	144°						150°
β		40°				45°	
γ			20°		12°		
n				6			

691. **Доведіть, що центральний кут правильного n-кутника дорівнює його зовнішньому куту.**

692. **Центральний кут правильного многокутника та його кут у сумі становлять 180°.** Доведіть.

693. Знайдіть відношення градусної міри кута правильного n-кутника до градусної міри його зовнішнього кута.

694. У скільки разів кут правильного n-кутника більший за його зовнішній кут, якщо:
1) $n = 10$; 2) $n = 20$?

695. Скільки вершин має правильний многокутник, якщо:
1) радіус вписаного кола вдвічі менший від сторони многокутника;
2) радіус описаного кола вдвічі більший за радіус вписаного кола?

696. Скільки сторін має правильний n-кутник, якщо його кут:
1) у 3 рази більший за зовнішній кут;
2) у 5 разів більший за центральний кут?

697. Скільки сторін має правильний n-кутник, якщо його кут і зовнішній кут відносяться, як:
1) 5 : 2; 2) 3 : 2?

698. Який найбільший центральний кут може мати правильний многокутник?

699. **1) У коло вписано многокутник, усі сторони якого рівні. Чи рівні його кути?** Відповідь поясніть.
2) У коло вписано многокутник, усі кути якого рівні. Чи рівні його сторони? Відповідь поясніть.

700. Два рівні кола перетинаються так, що центр одного кола лежить на другому колі. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, вершинами якого є точки перетину та центри даних кіл? Відповідь поясніть.

701. Знайдіть кут між двома несусідніми сторонами правильного шестикутника (мал. 199).

702. Дано правильний п'ятикутник. Доведіть: 1) усі його діагоналі — рівні; 2) кожна діагональ паралельна одній з його сторін; 3) на кожній з діагоналей, що перетинаються, є відрізок, що дорівнює стороні п'ятикутника.

703. $ABCDEFGH$ — правильний восьмикутник (мал. 200). Доведіть, що точки K, L, M, N — вершини квадрата.

704. $ABCDEFMN$ — правильний восьмикутник. Доведіть, що точки A, C, E і M є вершинами квадрата.

705*. П'ятикутник $ABCDE$ — правильний (мал. 201). Доведіть, що п'ятикутник $FGHKL$ — теж правильний.

706*. **Доведіть, що середини сторін правильного n-кутника є вершинами іншого правильного n-кутника.**

707*. Обчисліть кут між сторонами AB і DE правильного дев'ятикутника (мал. 202).

708*. Від кожної вершини квадрата зі стороною a на його сторонах відкладено відрізки, що дорівнюють половині його діагоналі (мал. 203). Здобуті 8 точок послідовно сполучено відрізками. Доведіть, що утворений восьмикутник — правильний.

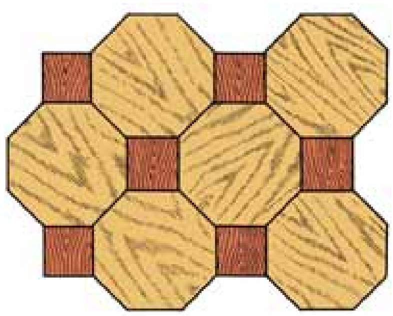
709*. **Доведіть, що сума відстаней від довільної точки всередині правильного n-кутника до його сторін не залежить від вибору точки.**

710*. Два рівні кола перетинаються так, що центр одного кола лежить на другому колі. Через одну точку їх перетину проведено спільну січну. Дві інші точки перетину січної з колами сполучено відрізками з другою точкою перетину кіл. Якого виду трикутник утворився при цьому?

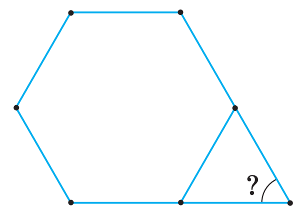
Проявіть компетентність

711. Доведіть, що підлогу можна покрити плитками, які мають форму правильних трикутників, чотирикутників або шестикутників.

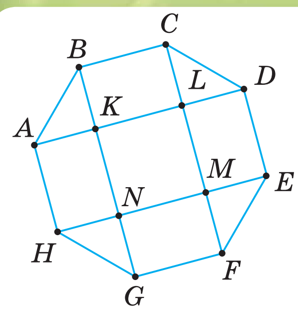
712. Підлогу покрили плитками, які мають форму правильних чотирикутників і восьмикутників (мал. 204). Поясніть, чому можливе таке покриття.



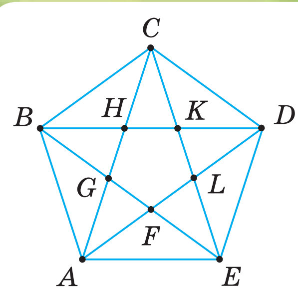
Мал. 204



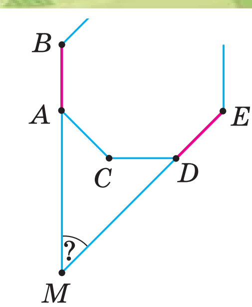
Мал. 199



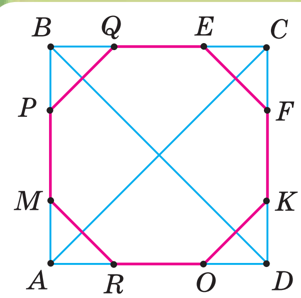
Мал. 200



Мал. 201



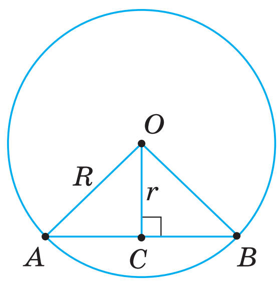
Мал. 202



Мал. 203

§ 16. РАДІУСИ ОПИСАНИХ І ВПИСАНИХ КІЛ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОКУТНИКІВ

1. ФОРМУЛИ ДЛЯ РАДІУСІВ ОПИСАНИХ І ВПИСАНИХ КІЛ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОКУТНИКІВ



Мал. 205

Знайдемо радіус R описаного кола та радіус r вписаного кола для правильного n-кутника зі стороною a. Нехай сторона правильного n-кутника $AB = a$, $OA = R$, $OC = r$ (мал. 205). У рівнобедреному трикутнику AOB висота OC є його медіаною й бісектрисою, тому

$$AC = CB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2},\ \angle BOC = \angle AOC = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}.$$

Із прямокутного трикутника AOC знаходимо:

$$R = \frac{AC}{\sin\angle AOC} = \frac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}} \text{ і } r = \frac{AC}{\operatorname{tg}\angle AOC} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}.$$

У правильному трикутнику:

$$n = 3,\ \angle AOC = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ,\ \text{тоді } R = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}60^\circ} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

У правильному чотирикутнику (квадраті):

$$n = 4,\ \angle AOC = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ,\ \text{тоді } R = \frac{a}{2\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2},\ r = \frac{a}{2\operatorname{tg}45^\circ} = \frac{a}{2}.$$

У правильному шестикутнику:

$$n = 6,\ \angle AOC = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ,\ \text{тоді } R = \frac{a}{2\sin 30^\circ} = a,\ r = \frac{a}{2\operatorname{tg}30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Формули для радіусів описаних і вписаних кіл правильних n-кутників подано в таблиці 22.

Таблиця 22

n / R, r	n	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
R	$\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	a
r	$\dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Задача. Виразіть сторону a_n правильного n-кутника через радіус R описаного навколо нього кола й радіус r вписаного кола. Обчисліть a_n, якщо $n = 3, 4, 6$.

Розв'язання. Із формули $R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$ знаходимо:

$$a_n = 2R \cdot \sin\frac{180°}{n}.$$

Підставивши в цю формулу замість n числа 3, 4, 6, одержимо формули, що виражають через радіуси описаних кіл сторони правильного трикутника, чотирикутника й шестикутника: $a_3 = R\sqrt{3}$, $a_4 = R\sqrt{2}$, $a_6 = R$.

Із формули $r = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}$ знаходимо:

$$a_n = 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}.$$

Зокрема, $a_3 = 2r\sqrt{3}$, $a_4 = 2r$, $a_6 = \dfrac{2r}{\sqrt{3}} = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$.

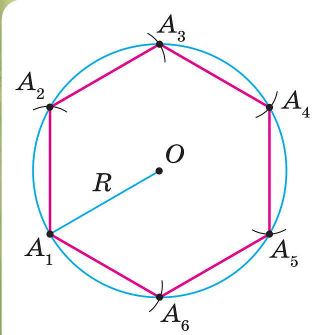
Пам'ятайте, що за однією з величин — a_n, r чи R — можна обчислити дві інші.

2. ПОБУДОВА ПРАВИЛЬНИХ МНОГОКУТНИКІВ

Для побудови правильного n-кутника використовують описане навколо нього коло.

Задача 1. Побудуйте правильний шестикутник.

Розв'язання. Сторона правильного шестикутника дорівнює радіусу R описаного навколо нього кола. Проводимо коло радіуса R і позначаємо на ньому довільну точку A_1 (мал. 206). Потім, не змінюючи розхилу циркуля, будуємо на колі точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, щоб виконувалася рівність $\smile A_1A_2 = \smile A_2A_3 = \smile A_3A_4 = \smile A_4A_5 = \smile A_5A_6$. Послідовно сполучивши відрізками побудовані точки, одержимо правильний шестикутник.

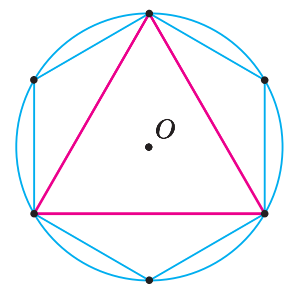


Мал. 206

Щоб побудувати правильний n-кутник, поділіть коло на n рівних частин і послідовно сполучіть точки поділу.

Задача 2. Побудуйте правильний трикутник.

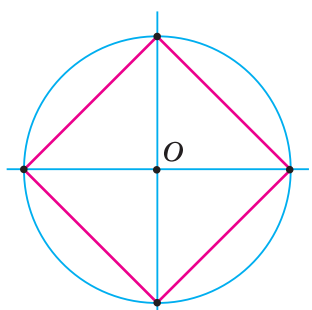
Розв'язання. Будуємо спочатку правильний шестикутник (задача 1), а потім сполучаємо відрізками його вершини через одну (мал. 207).



Мал. 207

Задача 3. Побудуйте правильний чотирикутник.

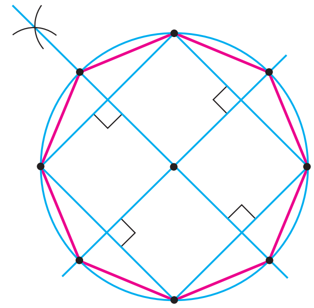
Розв'язання. Креслимо коло й через його центр проводимо дві перпендикулярні прямі (мал. 208). Вони перетнуть коло в чотирьох точках — вершинах квадрата.



Мал. 208

? Чи можна побудувати інші правильні n-кутники? Так. Якщо ви побудували правильний n-кутник, то легко побудуєте і правильний $2n$-кутник.

Наприклад, побудуємо правильний 8-кутник. Будуємо правильний чотирикутник (задача 3). Проводимо до його сторін серединні перпендикуляри (мал. 209). Точки перетину серединних перпендикулярів з колом разом з вершинами чотирикутника й будуть вершинами правильного 8-кутника. Цим самим способом можна побудувати правильний 16-кутник, правильний 32-кутник і т. д.



Мал. 209

Дізнайтеся більше

Знайдемо площу правильного n-кутника, якщо дано:
1) радіус R описаного кола; 2) радіус r вписаного кола;
3) сторону a.
Подивіться на малюнок 210. Площа правильного n-кутника $S = n \cdot S_{\Delta AOB}$.

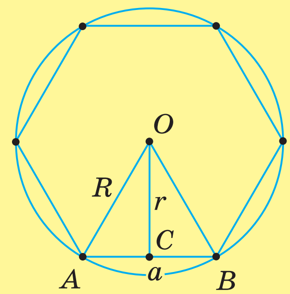
1) $S_{\Delta AOB} = \dfrac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin\angle AOB$ (мал. 210).

Але $AO = BO = R$, $\angle AOB = \dfrac{360°}{n}$.

Тому $S_{\Delta AOB} = \dfrac{1}{2} R^2 \cdot \sin\dfrac{360°}{n}$.

Отже, площа правильного n-кутника дорівнює:

$$S = \frac{n}{2} R^2 \sin\frac{360°}{n}.$$



Мал. 210

2) $S_{\Delta AOB} = \dfrac{1}{2} AB \cdot OC = \dfrac{a_n}{2} r$ (мал. 210). Оскільки $\dfrac{a_n}{2} = r \cdot \text{tg}\dfrac{180°}{n}$,

то $S_{\Delta AOB} = r^2 \cdot \text{tg}\dfrac{180°}{n}$. Отже, $S = nr^2 \cdot \text{tg}\dfrac{180°}{n}$.

3) $S_{\Delta AOB} = \dfrac{1}{2} AB \cdot OC$ (мал. 210).

Оскільки $AB = a$, $OC = \dfrac{\frac{a}{2}}{2\text{tg}\frac{180°}{n}}$, то $S_{\Delta AOB} = \dfrac{a^2}{4\text{tg}\frac{180°}{n}}$, а $S = \dfrac{na^2}{4\text{tg}\frac{180°}{n}}$.

Пригадайте головне

1. Виведіть формули для радіусів вписаного й описаного кіл правильного n-кутника.
2. За якими формулами знаходять радіуси вписаного й описаного кіл для правильного трикутника, чотирикутника, шестикутника?
3. За якими формулами знаходять сторону правильного n-кутника через радіуси вписаного й описаного кіл?
4. Як побудувати правильний шестикутник; трикутник; чотирикутник?

Розв'яжіть задачі

713'. Чи правильно записано формулу для знаходження радіусів описаних і вписаних кіл через сторону правильного n-кутника:

1) $R=\dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$, $r=\dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$; 2) $R=\dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$, $r=\dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$?

714'. Чи правильно записано формулу для знаходження радіусів описаних і вписаних кіл через сторону a:

1) правильного трикутника:

а) $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $r=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; б) $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $r=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$;

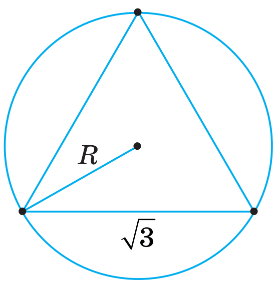
2) правильного чотирикутника:

а) $R=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $r=\dfrac{a}{2}$; б) $R=\dfrac{a}{2}$, $r=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

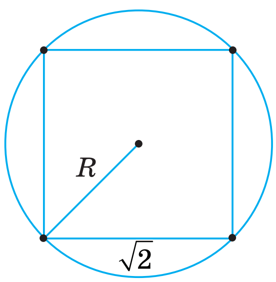
3) правильного шестикутника:

а) $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $r=a$; б) $R=a$, $r=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$?

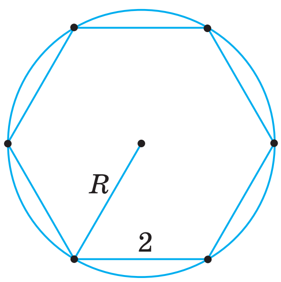
715°. На малюнках 211, 212 зображено правильні многокутники, вписані в коло. За даними на малюнках знайдіть радіус кола.



Мал. 211



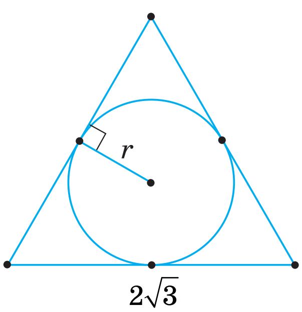
Мал. 212



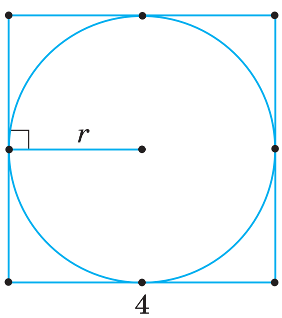
Мал. 213

716°. На малюнку 213 зображено правильний шестикутник, вписаний у коло. За даними на малюнку знайдіть радіус кола.

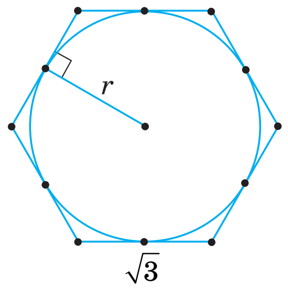
717°. На малюнках 214, 215 зображено правильні многокутники, описані навколо кола. За даними на малюнках знайдіть радіус кола.



Мал. 214



Мал. 215



Мал. 216

$$r_3 = \frac{a\sqrt{3}}{6};\ R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$r_4 = \frac{a}{2};\ R_4 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

718°. На малюнку 216 зображено правильний шестикутник, описаний навколо кола. За даними на малюнку знайдіть радіус кола.

719°. Знайдіть сторону правильного трикутника, якщо радіус описаного навколо нього кола дорівнює:
1) $4\sqrt{3}$ см; 2) 5 см; 3) $6\sqrt{3}$ см.

720°. Знайдіть сторону правильного трикутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює:
1) $2\sqrt{3}$ см; 2) 8 см; 3) $3\sqrt{3}$ см.

721°. Обчисліть радіус кола, вписаного в правильний трикутник, якщо радіус описаного кола дорівнює:
1) 10 см; 2) 12 см; 3) 16 см.

722°. **Доведіть, що радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, дорівнює діаметру вписаного в нього кола.**

723°. ***a*** **— сторона правильного трикутника,** ***P*** **— його периметр,** ***R*** **і** ***r*** **— радіуси описаного і вписаного кіл. Накресліть у зошиті таблицю 23 й заповніть її.**

Таблиця 23

a	$2\sqrt{3}$ см			
R		$4\sqrt{3}$ см		
r			$6\sqrt{3}$ см	
P				$9\sqrt{3}$ см

724°. У квадрат вписано коло, радіус якого дорівнює 4 см. Обчисліть:
1) сторону квадрата;
2) радіус кола, описаного навколо квадрата.

725°. Знайдіть радіус кола, вписаного у квадрат, якщо його периметр дорівнює:
1) 12 см; 2) 16 см; 3) 20 см.

726°. Обчисліть периметр квадрата, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює:
1) $\sqrt{2}$ см; 2) $2\sqrt{2}$ см; 3) $6\sqrt{2}$ см.

727°. ***a*** **— сторона правильного чотирикутника,** ***P*** **— його периметр,** ***R*** **і** ***r*** **— радіуси описаного і вписаного кіл. Накресліть у зошиті таблицю 24 й заповніть її.**

Таблиця 24

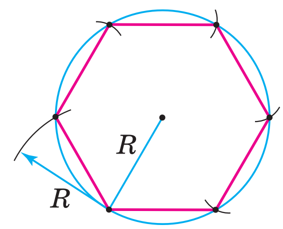
A	6 см			
R		$8\sqrt{2}$ см		
r			10 см	
P				16 см

728°. Знайдіть периметр правильного шестикутника, якщо радіус описаного кола дорівнює:
1) 4 см; 2) 5 см; 3) 7 см.

729°. Знайдіть сторону правильного шестикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює:
1) $\sqrt{3}$ см; 2) $4\sqrt{3}$ см; 3) 1 см.

730°. Обчисліть радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, якщо радіус описаного кола дорівнює:
1) $\sqrt{3}$ см; 2) $6\sqrt{3}$ см; 3) $10\sqrt{3}$ см.

731°. На малюнку 217 показано побудову правильного шестикутника. Поясніть побудову.



Мал. 217

732°. Побудуйте правильний трикутник, дотримуючись плану:
1) циркулем накресліть коло;
2) не змінюючи розхилу циркуля, поділіть коло на шість рівних частин;
3) сполучіть відрізками точки поділу через одну.

733°. Виконайте такі побудови:
1) циркулем накресліть коло із центром O;
2) через точку O проведіть довільну пряму й позначте точки її перетину з колом буквами A і B;
3) через точку O проведіть пряму, перпендикулярну до прямої AB; точки перетину цієї прямої з колом позначте буквами C і D;
4) послідовно сполучіть відрізками точки A, B, C і D.
Як називається побудований многокутник?

734°. Побудуйте правильний шестикутник зі стороною, що дорівнює даному відрізку $AB = a$.

735°. Впишіть у коло квадрат, якщо радіус кола дорівнює:
1) 3 см; 2) 4 см; 3) 5 см.

736°. **Впишіть у коло правильний:**
1) шестикутник;
2) трикутник;
3) чотирикутник.

737°. **Опишіть навколо кола правильний:**
1) шестикутник;
2) трикутник;
3) чотирикутник.

738. ***a*** **— сторона правильного шестикутника,** ***P*** **— його периметр,** ***R*** **і** ***r*** **— радіуси описаного і вписаного кіл. Накресліть у зошиті таблицю 25 і заповніть її.**

$$r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \; R_6 = a$$

Таблиця 25

a	20 см			
R		14 см		
r			$10\sqrt{3}$ см	
P				36 см

739. Знайдіть сторону правильного трикутника, якщо різниця між радіусами кіл, описаного навколо правильного трикутника і вписаного в нього, дорівнює:
1) $\sqrt{3}$ см; 2) m.

740. Обчисліть радіуси кіл, вписаного в правильний трикутник й описаного навколо нього, якщо їхня різниця дорівнює:
1) 4 см; 2) n.

741. Знайдіть радіуси кіл, вписаного у квадрат й описаного навколо нього, якщо їхній добуток дорівнює:
1) $4\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}$.

742. Обчисліть радіуси кіл, описаного навколо правильного шестикутника і вписаного в нього, якщо їхня різниця дорівнює:
1) 3 см; 2) 5 см; 3) m.

743. У коло вписано правильний трикутник і квадрат. Знайдіть сторону квадрата, якщо периметр трикутника дорівнює:
1) 9 см; 2) 27 см; 3) P.

744. Знайдіть сторону правильного шестикутника, вписаного в коло, якщо сторона правильного трикутника, описаного навколо цього кола, дорівнює:
1) $10\sqrt{3}$ см; 2) $2\sqrt{3}$ см; 3) a.

745. Обчисліть сторону квадрата, описаного навколо кола, якщо сторона правильного шестикутника, вписаного в це коло, дорівнює:
1) 15 см; 2) 17 см; 3) a.

746. Знайдіть сторону правильного шестикутника, описаного навколо кола, якщо сторона правильного трикутника, вписаного в це коло, дорівнює:
1) 21 см; 2) 18 см; 3) a.

747. Навколо кола описано квадрат і правильний шестикутник. Знайдіть периметр квадрата, якщо периметр шестикутника дорівнює:
1) $12\sqrt{3}$ см; 2) 36 см; 3) P.

748. Обчисліть сторону правильного шестикутника, радіуси описаного і вписаного кіл, якщо більша діагональ шестикутника дорівнює:
1) 6 см;
2) 8 см;
3) d.

749. **Знайдіть сторону правильного шестикутника та радіус вписаного кола, якщо його менша діагональ дорівнює:**
1) $10\sqrt{3}$ см;
2) $12\sqrt{3}$ см;
3) d.

750. **Знайдіть діагоналі правильного шестикутника, якщо його сторона дорівнює:**
1) 2 см; **3) a.**
2) 8 см;

751. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є для одного кола стороною правильного вписаного трикутника, а для другого — стороною правильного вписаного шестикутника. Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо хорда дорівнює:
1) 9 см; 3) a.
2) $3\sqrt{3}$ см;

752. Сторона якого правильного вписаного в коло n-кутника є хордою, перпендикулярною до радіуса в його середині? Відповідь поясніть.

753. У якого правильного многокутника радіус вписаного кола вдвічі менший від сторони?

754. На сторонах правильного трикутника поза ним побудовано квадрати. Чи є вершини квадратів вершинами правильного шестикутника? Відповідь поясніть.

755. Побудуйте правильний шестикутник, якщо його більша діагональ дорівнює:
1) 8 см; 3) 12 см.
2) 10 см;

756. Побудуйте правильний чотирикутник, якщо його сторона дорівнює:
1) $2\sqrt{2}$ см; 2) $3\sqrt{2}$ см.

757*. Через середини двох суміжних сторін правильного чотирикутника, вписаного в коло радіуса R, проведено хорду. Яка довжина цієї хорди, якщо:
1) $R = 4$ см; 2) $R = 6$ см?

758*. **У коло радіуса R вписано правильний n-кутник і середини його сторін послідовно сполучено. Знайдіть сторону утвореного многокутника, якщо:**
1) $n = 6$; **2) $n = 8$.**

759*. За яких значень n сторона правильного n-кутника:
1) більша за радіус описаного кола;
2) дорівнює радіусу описаного кола;
3) менша від радіуса описаного кола?

760*. Три рівні кола, що попарно дотикаються одне до одного, зовні дотикаються до кола радіуса R. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо:
1) $R = 2$ см;
2) $R = 4$ см.

761*. У правильному восьмикутнику зі стороною a сполучено середини чотирьох сторін, узятих через одну, так, що утворився квадрат. Знайдіть сторону цього квадрата.

762*. У правильному 12-кутнику зі стороною a сполучено середини шести сторін, узятих через одну, так, що утворився правильний шестикутник. Знайдіть його сторону.

763*. Доведіть, що:

1) $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; 2) $r_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$,

де a_8 і r_8 — відповідно сторона правильного 8-кутника й радіус вписаного в нього кола; R — радіус описаного кола.

764*. Доведіть, що:

1) $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

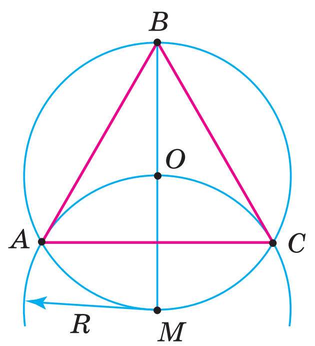
2) $r_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$,

де a_{12} і r_{12} — відповідно сторона правильного 12-кутника й радіус вписаного в нього кола; R — радіус описаного кола.

765*. Знайдіть радіус кола, описаного навколо правильного n-кутника зі стороною a, якщо:

1) $n = 8$; 2) $n = 12$.

766*. Побудуйте трикутник так, як показано на малюнку 218. Доведіть, що ΔABC — правильний.



Мал. 218

767*. Побудуйте правильний восьмикутник зі стороною, що дорівнює даному відрізку $AB = a$.

768*. Побудуйте правильний 12-кутник зі стороною, що дорівнює даному відрізку $AB = a$.

Проявіть компетентність

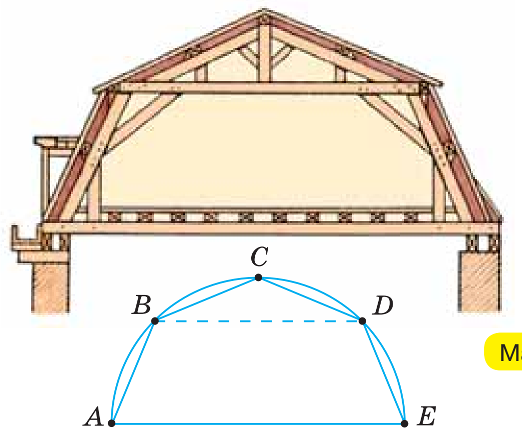
769. Знайдіть розмір отвору h ключа для правильної шестигранної гайки, якщо ширина грані гайки $a = 2,5$ см (мал. 219). Величина зазору між гранями гайки та ключа дорівнює 0,5 мм.

770. Найпростіше мансардне покриття утворює у вертикальному перерізі половину правильного восьмикутника (мал. 220). Знайдіть ширину перекриття BD, сторону восьмикутника та висоту мансардної кімнати $ABCDE$, якщо $AE = 6$ м.

771. На квадратній ділянці землі потрібно розбити клумбу для квітів у формі правильного восьмикутника. Запропонуйте спосіб побудови такої клумби.

772*. Як розбити клумбу для квітів у формі п'ятикутної зірки?

Мал. 219



Мал. 220

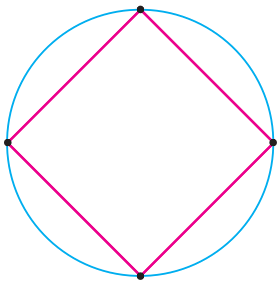
§ 17. ДОВЖИНА КОЛА. ДОВЖИНА ДУГИ КОЛА

1. ДОВЖИНА КОЛА

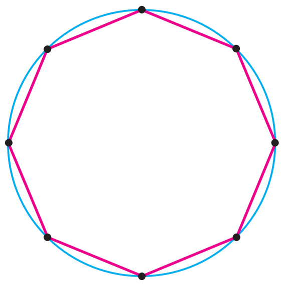
У 6-му класі за допомогою вимірювання ви відшукали формулу для обчислення довжини кола $C = 2\pi R$, де R — радіус кола, $\pi \approx 3{,}14$.

Як вивести цю формулу більш строго?

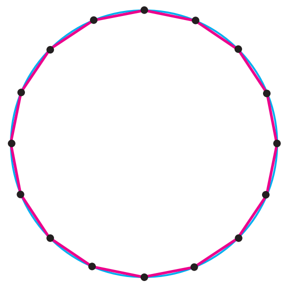
Подивіться на малюнки 221–223. Зрозуміло, що при необмеженому збільшенні кількості сторін n вписаного в коло правильного n-кутника його периметр P_n необмежено наближається до довжини кола C. Якщо n дуже велике, то довжина кола дуже мало відрізняється від периметра P_n.



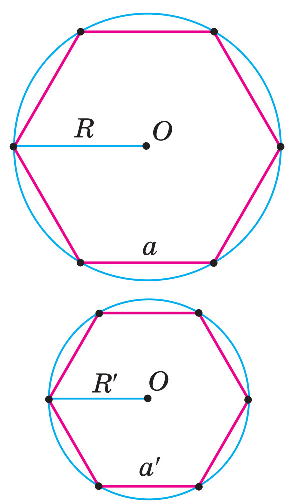
Мал. 221



Мал. 222



Мал. 223



Мал. 224

Виведемо формулу для обчислення довжини кола. Візьмемо два довільні кола (мал. 224). Нехай C і C' — їхні довжини, а R і R' — радіуси кіл. У кожне із цих кіл впишемо правильні n-кутники з однаковим числом сторін. Позначимо їхні сторони через a_n і a_n', а через P_n і P_n' — їхні периметри. Виразимо периметри цих n-кутників через радіуси R і R' кіл.

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \text{ і } P_n' = n \cdot a_n' = n \cdot 2R'\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Поділивши ці рівності почленно, одержимо: $\dfrac{P_n}{P_n'} = \dfrac{2R}{2R'}$. Якщо число сторін n необмежено збільшувати, то периметри P_n і P_n' прямуватимуть до довжин кіл C і C', а відношення периметрів — до відношення довжин кіл $\dfrac{C}{C'}$. Отже, $\dfrac{C}{C'} = \dfrac{2R}{2R'}$ або $\dfrac{C}{2R} = \dfrac{C'}{2R'}$.

Ми довели таку властивість довжини кола: **відношення довжини кола до його діаметра одне й те саме для кожного кола.**

Це відношення позначають грецькою буквою π (читають «пі»): $\dfrac{C}{2R} = \pi$.

Число π — ірраціональне. Його наближене значення: $\pi \approx 3{,}14$.

Оскільки $\dfrac{C}{2R} = \pi$, то довжину кола обчислюють за формулою:

$$C = 2\pi R.$$

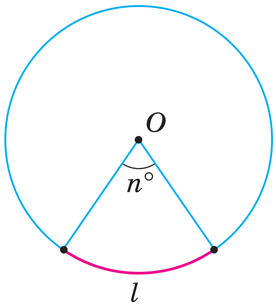
Радіус R або діаметр D кола, довжина якого C, знаходьте з формули $C = 2\pi R$:

$$R = \frac{C}{2\pi} \text{ або } D = \frac{C}{\pi}.$$

2. ДОВЖИНА ДУГИ КОЛА

Знайдемо довжину l дуги кола, яка відповідає центральному куту $n°$ (мал. 225). Розгорнутому куту відповідає довжина півкола πR. Отже, куту в $1°$ відповідає дуга довжиною $\dfrac{\pi R}{180°}$. Тоді довжину l дуги, що відповідає куту $n°$, виражає формула:

$$l = \frac{\pi R n°}{180°}.$$



Мал. 225

Задача. Довжина дуги кола дорівнює 4π см, а її градусна міра — $120°$. Знайдіть радіус кола.

Розв'язання. З формули $l = \dfrac{\pi R n°}{180°}$ знаходимо:

$$R = \frac{l \cdot 180°}{\pi n°} = \frac{4\pi \cdot 180°}{\pi \cdot 120°} = 6 \text{ (см)}.$$

Пам'ятайте, що за формулою $l = \dfrac{\pi R n°}{180°}$ також знаходимо:

1) радіус R кола за довжиною його дуги l та її градусною мірою $n°$:

$$R = \frac{l \cdot 180°}{\pi n°};$$

2) градусну міру $n°$ дуги за її довжиною l та радіусом R кола:

$$n° = \frac{l \cdot 180°}{\pi R}.$$

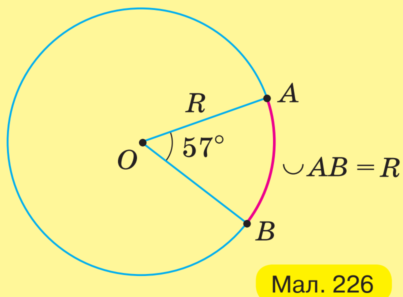
Дізнайтеся більше

1. Позначення буквою π відношення довжини кола до його діаметра в 1706 р. увів англійський математик У. Джонс. Воно походить від грецького слова περιφέρεια — периферія, що означає «коло». Леонард Ейлер (1707–1783), застосовуючи методи вищої математики, знайшов для π наближення з 153 правильними знаками.
Знайти наближення π намагалися ще в глибоку давнину. Вавилоняни (близько 2000 р. до н. е.) відкрили, що радіус шість разів уміщується в колі, звідси було зроблено припущення, що довжина кола дорівнює $6R$.
У III ст. до н. е. видатний давньогрецький учений Архімед виявив, що значення π дуже близьке до значення звичайного дробу $\dfrac{22}{7}$, тобто $3\dfrac{1}{7}$. Це число відрізняється від точного значення π менш ніж на 0,002.

2. У 7 класі ви дізналися, що кути вимірюють не лише в градусах, а й у радіанах. Що таке радіанна міра кута?

Радіанною мірою кута називається відношення довжини відповідної дуги до радіуса кола.

З формули для довжини дуги кола випливає, що $\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180°} \cdot n°$, тобто радіанну міру кута одержуємо з градусної множенням на $\frac{\pi}{180°}$. Зокрема, радіанна міра кута 180° дорівнює π, радіанна міра прямого кута дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Одиницею радіанної міри кутів є *радіан*. Кут один радіан — це кут, довжина дуги якого дорівнює радіусу (мал. 226). Градусна міра кута в один радіан дорівнює $\frac{180°}{\pi} \approx 57°$.



Мал. 226

Оскільки дріб $\frac{\pi n°}{180°}$ є радіанною мірою дуги, то формулу довжини дуги можна записати ще й так: $l = \alpha R$, де α — радіанна міра дуги.

Отже, довжина дуги кола дорівнює добутку її радіанної міри на радіус.

Пригадайте головне

1. Поясніть, чому відношення довжини кола до його діаметра одне й те саме для кожного кола.
2. Запишіть і поясніть формулу для знаходження довжини кола; довжини дуги кола.
3. Яке наближене значення числа π?

Розв'яжіть задачі

773'. Чи є правильною рівність:

1) $\frac{2R}{C} = \pi$; 2) $\frac{C}{R} = \pi$; 3) $\frac{C}{2R} = \pi$?

774'. Чи правильно записано формулу для знаходження довжини C кола радіуса R:

1) $C = \pi R$; 2) $C = 2R$; 3) $C = 2\pi R$?

775'. Чи правильно записано формулу для знаходження довжини l дуги кола радіуса R, що відповідає куту $n°$:

1) $l = \frac{R}{180°}$; 2) $l = \frac{Rn°}{180°}$; 3) $l = \frac{\pi R n°}{180°}$?

776°. Накресліть коло. Виміряйте його радіус і знайдіть довжину кола.

777°. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює:

1) 5 см; 2) 10 см; 3) 12 см.

778°. Обчисліть довжину кола, якщо його діаметр дорівнює:

1) 4 см; 2) 6 см; 3) 8 см.

779°. Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює:
1) 4π см; 2) 14π см; 3) 2π см.

$C = 2\pi R$

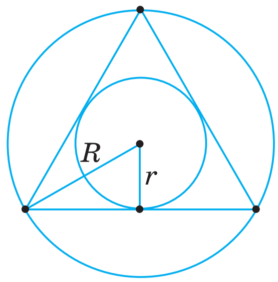
780°. **R — радіус кола, D — його діаметр, C — довжина кола. Накресліть у зошиті таблицю 26 і заповніть її.**

Таблиця 26

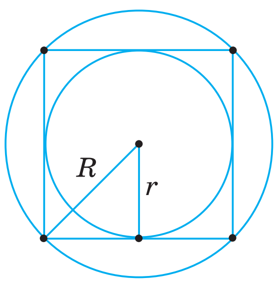
R	2,5 см				11 см
D		20 см		9,6 см	
C			$18{,}4\pi$ см		

781°. Побудуйте коло, довжина якого дорівнює:
1) 6π см; 2) 18π см; 3) 20π см.

782°. Як зміниться довжина кола, якщо його радіус:
1) збільшити на 5 см;
2) зменшити на 3 см;
3) збільшити у 2 рази?



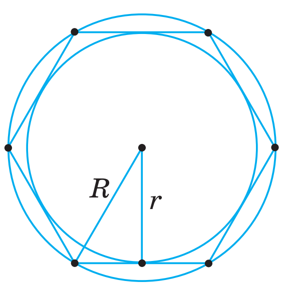
783°. **Сторона правильного трикутника дорівнює $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть довжину кола:**
1) вписаного в цей трикутник;
2) описаного навколо нього.



784°. **Сторона квадрата дорівнює 8 см. Обчисліть довжину кола:**
1) вписаного в цей квадрат;
2) описаного навколо нього.

785°. Знайдіть довжину кола, описаного навколо прямокутника, якщо його сторони дорівнюють:
1) 5 см і 12 см; 2) 7 см і 24 см; 3) 12 см і 16 см.

786°. Знайдіть довжину кола, вписаного в ромб, якщо його сторона і кут дорівнюють:
1) 6 см і 30°;
2) 4 см і 45°;
3) 8 см і 60°.



787°. **Сторона правильного шестикутника дорівнює 10 см. Обчисліть довжину кола:**
1) вписаного в цей шестикутник;
2) описаного навколо нього.

788°. Знайдіть довжину дуги кола радіуса 6 см, яка відповідає центральному куту:
1) 30°;
2) 60°;
3) 120°.

789°. Дузі кола довжиною l відповідає центральний кут $n°$. Знайдіть радіус кола, якщо:
1) $l = 3$ см, $n° = 15°$;
2) $l = 12\pi$ см, $n° = 20°$;
3) $l = 6$ см, $n° = 18°$.

$l = \dfrac{\pi R n°}{180°}.$

790°. Довжина дуги кола радіуса R дорівнює l. Знайдіть градусну міру центрального кута, якому відповідає ця дуга, якщо:
1) $l = 4\pi$ см, $R = 9$ см;
2) $l = 6\pi$ см, $R = 10$ см;
3) $l = 8\pi$ см, $R = 18$ см.

791. ***R* — радіус кола, *l* — довжина дуги, яка відповідає центральному куту *n*°. Накресліть у зошиті таблицю 27 і заповніть її.**

Таблиця 27

R	15 см		12 см
$n°$	45°	40°	
l		20π см	2π см

792. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону на відрізки завдовжки b і c, рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть довжину кола, вписаного в ромб, якщо:
1) $b = 6$ см, $c = 4$ см;
2) $b = 5$ см, $c = 8$ см.

793. Знайдіть довжину кола, вписаного в ромб, якщо його діагоналі дорівнюють:
1) 18 см і 24 см;
2) 12 см і 16 см.

794. У рівнобічну трапецію з основами a і b та бічною стороною c вписано коло. Знайдіть довжину кола, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 18$ см, $c = 10$ см;
2) $a = 32$ см, $b = 18$ см, $c = 25$ см.

795. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b, а діагональ — d. Знайдіть довжину кола, описаного навколо трапеції, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 18$ см, $d = 20$ см;
2) $a = 16$ см, $b = 8$ см, $d = 13$ см.

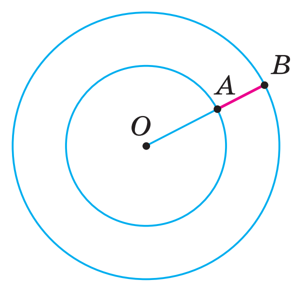
796. Обчисліть сторону правильного трикутника, якщо:
1) довжина кола, вписаного в цей трикутник, дорівнює 8π см;
2) довжина кола, описаного навколо нього, дорівнює 14π см.

797. Знайдіть сторону правильного шестикутника, якщо:
1) довжина кола, вписаного в цей шестикутник, дорівнює $6\sqrt{3}\,\pi$ см;
2) довжина кола, описаного навколо нього, дорівнює 2π см.

798. Як побудувати коло, довжина якого дорівнює:
1) сумі довжин двох даних кіл;
2) різниці довжин двох даних кіл?

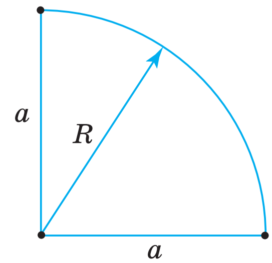
799. Знайдіть довжину кола, якщо вона більша за діаметр:
1) на 10 см;
2) на m.

800. Довжини двох кіл, що мають спільний центр, дорівнюють C і C_1. Знайдіть ширину кільця AB (мал. 227), якщо:
1) $C = 10\pi$ см, $C_1 = 4\pi$ см;
2) $C = 16\pi$ см, $C_1 = 6\pi$ см.

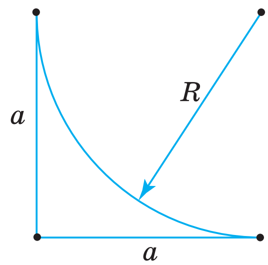


Мал. 227

801. Порівняйте периметри фігур, зображених на малюнках 228 і 229.



Мал. 228

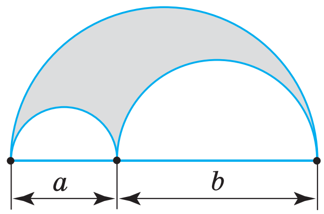


Мал. 229

802. За даною довжиною дуги l знайдіть хорду, яка сполучає її кінці, якщо дуга містить:
1) 60°;
2) 90°;
3) 120°.

803. Знайдіть довжину дуги, якщо хорда, що її стягує, дорівнює a, а дуга містить:
1) 60°;
2) 90°;
3) 120°.

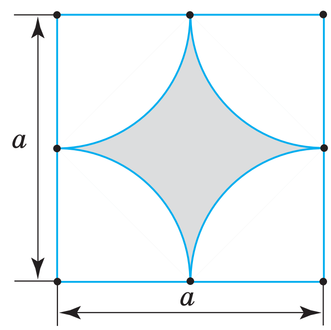
804. За даними на малюнках 230–232 знайдіть периметри зафарбованих фігур.



Мал. 230

805*. Три кола попарно дотикаються зовні. Знайдіть довжину кола, яке проходить через точки дотику, якщо радіуси трьох кіл дорівнюють:
1) 9 см, 16 см, 20 см;
2) 1 см, 2 см, 3 см.

806*. У колі по один бік від центра проведено дві паралельні хорди завдовжки a і b. Відстань між хордами дорівнює c. Знайдіть довжину кола, якщо:
1) $a = 40$ см, $b = 48$ см, $c = 8$ см;
2) $a = 120$ см, $b = 32$ см, $c = 38$ см.



Мал. 231

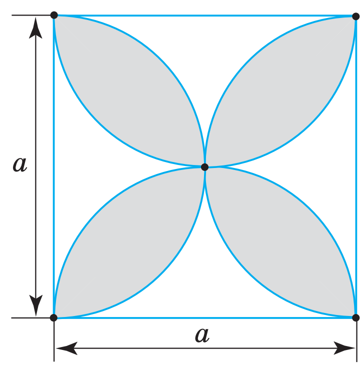
807*. Діаметр $2R$ кола поділено на n рівних частин і на кожній із цих частин, як на діаметрі, побудовано коло. Чому дорівнює сума довжин цих кіл?

808*. Дуга в 60° довша за хорду, яка її стягує, на 14 см. Знайдіть довжину хорди.

809*. Дуга радіуса 4 см, що відповідає центральному куту в 120°, дорівнює довжині деякого кола. Знайдіть радіус цього кола.

810*. В одному з двох кіл, що перетинаються, дуга, яку стягує їхня спільна хорда, дорівнює 45°, а в другому — 60°. Яке коло має більшу довжину?

811*. **Спільна хорда двох кіл стягує дуги в 60° і 120°. Знайдіть відношення довжин цих кіл.**



Мал. 232

Проявіть компетентність

812. Скільки стовпчиків потрібно для паркана навколо майданчика, що має форму круга, якщо відстань між стовпчиками (за дугою кола) має становити близько півтора метра, а діаметр майданчика — 60 м?

813. Щоб знайти товщину дерева (діаметр), можна виміряти його обхват (довжину кола). Обчисліть товщину дерева, обхват якого дорівнює: 1) 2 м; 2) 2,5 м.

814. На котушці є 80 витків дроту. Знайдіть довжину дроту, якщо діаметр котушки дорівнює 0,5 м.

815. Вантаж піднімають за допомогою блока, який зображено на малюнку 233. На яку висоту підніметься вантаж за 9 обертів блока, якщо його діаметр дорівнює 20 см?

816. Як знайти відстань до води в колодязі, якщо можна виміряти діаметр вала, на який намотується ланцюг для відра?

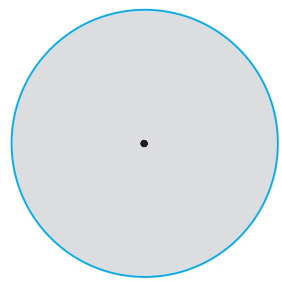
817. Знайдіть довжину земного екватора, якщо радіус земної кулі дорівнює 6381 км.

Мал. 233

§ 18. ПЛОЩА КРУГА ТА ЙОГО ЧАСТИН

1. ПЛОЩА КРУГА

Ви вже знаєте, що кругом називають частину площини, обмежену колом (мал. 234).



Мал. 234

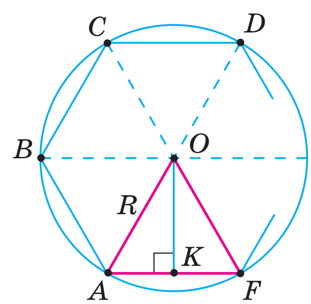
Виведемо формулу для обчислення площі круга. Впишемо в круг радіуса R правильний многокутник $ABCD...F$ (мал. 235) й обчислимо його площу. Радіуси, проведені у вершини многокутника, розбивають його на n трикутників, кожний з яких дорівнює трикутнику AOF.

Тому $S_{ABCD...F} = n \cdot S_{\Delta AOF}$. Проведемо висоту OK трикутника AOF. Оскільки $S_{\Delta AOF} = \frac{1}{2} AF \cdot OK$, то $S_{ABCD...F} = \frac{1}{2}\ (nAF \cdot OK) = \frac{P \cdot OK}{2}$, де P — периметр n-кутника. При досить великому n периметр P як завгодно мало відрізняється від довжини кола $C = 2\pi R$, висота OK — від радіуса R кола, а площа многокутника $S_{ABCD...F}$ як завгодно мало відрізняється від площі S круга. Тоді площа круга дорівнюватиме:

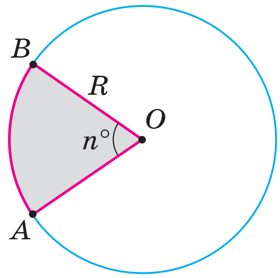
$$S = \frac{CR}{2} = \frac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2 .$$

Отже, площу круга обчислюють за формулою:

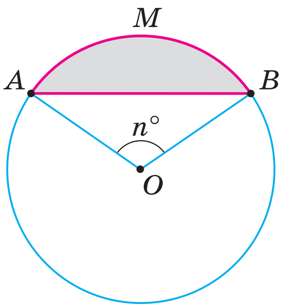
$$\boxed{S = \pi R^2.}$$



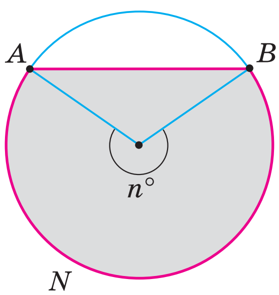
Мал. 235



Мал. 236



Мал. 237



Мал. 238

Задача. Знайдіть радіус круга, площа якого дорівнює 25π см.

Розв'язання. З формули $S = \pi R^2$ одержимо: $R^2 = \frac{S}{\pi} = \frac{25\pi}{\pi} = 25$ (см).

Звідси $R = \sqrt{25} = 5$ (см).

Радіус R або діаметр D круга, площа якого S, знаходьте з формули $S = \pi R^2$:

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \text{ або } D = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

2. ПЛОЩА КРУГОВОГО СЕКТОРА ТА СЕГМЕНТА

Круговим сектором називається частина круга, обмежена двома радіусами й дугою.

На малюнку 236 сектор AOB зафарбовано. Дугу, яка обмежує сектор, називають *дугою сектора*.

Нехай сектор AOB круга радіуса R має центральний кут $n°$. Тоді площа сектора із центральним кутом в 1° дорівнює $\frac{\pi R^2}{360°}$, а площу сектора із центральним кутом $n°$ визначають за формулою: $S = \frac{\pi R^2 n°}{360°}$.

Круговим сегментом називають частину круга, обмежену хордою й дугою.

На малюнку 237 сегмент AMB зафарбовано.

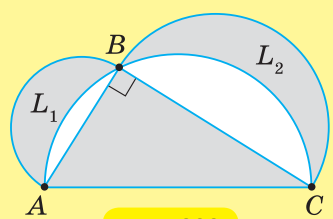
Розглянемо сегмент круга, дуга якого містить $n°$. Якщо $n° < 180°$ (мал. 237), то площа сегмента дорівнює різниці площ сектора AOB і ΔAOB, а якщо $n° > 180°$ — то їхній сумі (мал. 238).

? Як знайти площу сегмента, якщо його дуга містить 180°? Маємо півкруг, площа якого дорівнює $\frac{\pi R^2}{2}$.

Дізнайтеся більше

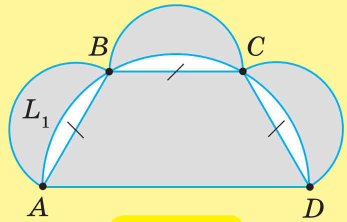
1. Стародавні греки намагалися побудувати циркулем і лінійкою квадрат, рівновеликий даному кругу, і тим самим точно обчислити площу круга. Задача одержала назву — *квадратура круга*.

Один з підходів до розв'язування цієї задачі обрав Гіппократ з острова Хіос (південна частина Егейського моря), який жив у V ст. до н. е. Задачу про квадратуру круга вчений намагався розв'язати, відшукуючи квадратуру серпків — фігур, обмежених дугами двох кіл. Найпростіші серпки Гіппократа L_1 і L_2 (мал. 239) можна одержати, якщо в півколо вписати прямокутний трикутник ABC і на його катетах побудувати півкола. Учений довів, що площа двох серпків дорівнює площі трикутника: $S_{L_1} + S_{L_2} = S_{\Delta ABC}$.



Мал. 239

Наступна задача, на думку Гіппократа, була найближчою до розв'язання проблеми квадратури круга. У півколо вписано рівнобічну трапецію $ABCD$ — половину правильного шестикутника — і на її трьох рівних сторонах побудовано півкола (мал. 240). Тоді сума площ утворених трьох однакових серпків рівновелика площі трапеції: $S_{L_1} + S_{L_2} + S_{L_3} = S_{ABCD}$.



Мал. 240

Це вперше в історії математики за допомогою циркуля та лінійки вдалося перетворити фігуру, обмежену кривими лініями, в рівновелику їй прямолінійну фігуру. Учений сподівався, що те саме можна зробити з кругом. Але сподівання були марними. Неможливість розв'язати задачу про квадратуру круга була доведена наприкінці XIX ст. німецьким математиком Карлом Ліндеманом (1852–1939).

Внесок Гіппократа був гідно поцінований — і сьогодні вживається термін «Гіппократові серпки». Вираз «квадратура круга» в повсякденному житті означає, що дану задачу, проблему розв'язати не можна.

2. Слово «сектор» походить від латинського *sector* — той, що відсікає. Слово «сегмент» теж латинського походження й означає відрізок.

3. **Білоусова Віра Петрівна** (28.02.1906–30.03.1986) — кандидат фізико-математичних наук, професор, відомий фахівець у галузі геометрії та навчання геометрії. Життя і творчість Віри Петрівни нерозривно пов'язані з Київським державним університетом. Після закінчення механіко-математичного факультету (1932) і аспірантури по кафедрі геометрії захистила кандидатську дисертацію (1941), працювала доцентом (з 1944), професором (з 1970) кафедри геометрії. Учениця професора Б. Я. Букреєва. Нагороджена орденом Трудового Червоного Прапора, нагрудним знаком «За відмінні успіхи в роботі», медалями та грамотами. Підручник «Аналітична геометрія» В. П. Білоусової, І. Г. Ільїна, О. П. Сергунової та В. П. Котлової перевидавався декілька разів і тривалий час залишався базовим навчальним посібником для студентів механіко-математичних, математичних та фізико-математичних факультетів університетів України.


В. П. Білоусова

Пригадайте головне

1. Запишіть і поясніть формулу для знаходження площі круга.
2. Що таке сектор; сегмент?
3. Запишіть і поясніть формулу для знаходження площі кругового сектора.
4. Поясніть, як знайти площу кругового сегмента.

Розв'яжіть задачі

818'. Чи правильно записано формулу для знаходження площі S круга радіуса R:

1) $S = \pi$; 2) $S = \pi R$; 3) $S = \pi R^2$?

819'. Чи правильно записано формулу для знаходження площі S кругового сектора радіуса R, що відповідає куту $n°$:

1) $S = \dfrac{\pi R^2}{180°}$; 2) $S = \dfrac{\pi R^2 n°}{180°}$; 3) $S = \dfrac{\pi R^2 n°}{360°}$?

$S = \pi R^2$

820°. Накресліть коло та виміряйте його радіус. Обчисліть площу круга, обмеженого цим колом.

821°. Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює:
1) 4 см;
2) 6 см;
3) 9 см.

822°. Обчисліть площу круга, якщо його діаметр дорівнює:
1) 10 см;
2) 12 см;
3) 16 см.

823°. Знайдіть радіус круга, площа якого дорівнює:
1) 25π см^2;
2) 9π см^2;
3) 36π см^2.

824°. Накресліть круг, площа якого дорівнює:
1) 4π см^2;
2) 16π см^2;
3) 49π см^2.

825°. Доведіть, що площу круга можна обчислювати за формулами:
1) $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$;
2) $S = \dfrac{C}{2} R$;
3) $S = \dfrac{C^2}{4\pi}$.

826°. Як зміниться площа круга, якщо його радіус:
1) збільшити в 3 рази;
2) зменшити у 2 рази;
3) збільшити в 4 рази?

827°. Знайдіть радіус круга, якщо його площа та довжина кола мають одне й те саме числове значення.

828°. Обчисліть площу круга, якщо довжина його кола дорівнює:
1) π см;
2) 6π см;
3) 8π см.

829°. **Сторона правильного трикутника дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу круга:**
1) вписаного в цей трикутник;
2) описаного навколо нього.

830°. Обчисліть площу круга, вписаного у квадрат й описаного навколо нього, якщо сторона квадрата дорівнює:
1) 10 см; 2) 14 см; 3) 18 см.

831°. Знайдіть площу круга, якщо сторони вписаного в нього прямокутника дорівнюють:
1) 6 см і 8 см;
2) 10 см і 24 см;
3) 12 см і 16 см.

832°. **Сторона правильного шестикутника дорівнює 12 см. Знайдіть площу круга:**
1) вписаного в цей шестикутник;
2) описаного навколо нього.

833°. Доведіть, що площу сектора можна обчислювати за формулою: $S = \frac{lR}{2}$, де l — дуга сектора; R — радіус круга.

834°. Знайдіть площу сектора круга радіуса 6 см, якщо відповідний цьому сектору центральний кут дорівнює:
1) 10°;
2) 20°;
3) 100°.

835°. Знайдіть площу сектора круга радіуса 18 см, якщо дуга сектора дорівнює:
1) 2π см;
2) 5π см;
3) 8π см.

836°. Обчисліть площу кругового сегмента, якщо радіус кола дорівнює R, а дуга містить:
1) 90°;
2) 60°.

837. Доведіть, що довжину кола можна обчислювати за формулою: $C = 2\sqrt{\pi S}$, де S — площа круга.

838. Знайдіть довжину кола, якщо площа круга дорівнює:
1) 4π см²;
2) π см²;
3) 81π см².

839. S — площа круга, R і C — радіус і довжина його кола. Накресліть у зошиті таблицю 28 і заповніть її.

Таблиця 28

R	10 см				3 см				9,42 см
C		20π см		2π см		12π см		15,7 π см	
S			25π см²				9π см²		

840. Що більше — площа круга, побудованого на відрізку a як на діаметрі, чи площа півкруга, побудованого на відрізку $2a$ як на діаметрі?

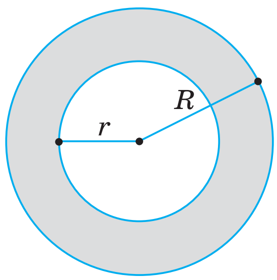
841. У скільки разів площа півкруга радіуса R більша за суму площ двох півкругів з радіусами $\frac{R}{2}$?

842. У правильний трикутник вписано коло, і навколо цього трикутника описано коло. Яка залежність між площами кругів, обмежених указаними колами?

843. Знайдіть діаметр круга, якщо його площа дорівнює:
1) сумі площ двох кругів з радіусами 3 см і 4 см;
2) різниці площ двох кругів з радіусами 10 см і 8 см.

844. Знайдіть відношення площ вписаного й описаного кругів:
1) для правильного трикутника;
2) для квадрата;
3) для правильного шестикутника.

845. Знайдіть площі кругів, описаного навколо правильного трикутника і вписаного в нього, якщо площа трикутника дорівнює:
1) $12\sqrt{3}$ см^2;
2) $3\sqrt{3}$ см^2.



Мал. 241

846. Знайдіть площі кругів, описаного навколо квадрата і вписаного в нього, якщо площа квадрата дорівнює:
1) 16 см^2;
2) 36 см^2.

847. Радіуси двох кіл зі спільним центром дорівнюють R і r (мал. 241). Виведіть формулу для обчислення площі кільця, обмеженого цими колами.

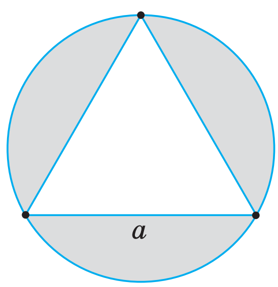
848. Знайдіть площу кільця, обмеженого двома колами зі спільним центром, якщо радіуси кіл дорівнюють:
1) 2 см і 8 см;
2) 4,6 см і 5,4 см.

849. Усередині даного круга проведено коло, яке ділить його площу навпіл. Знайдіть радіус цього кола.

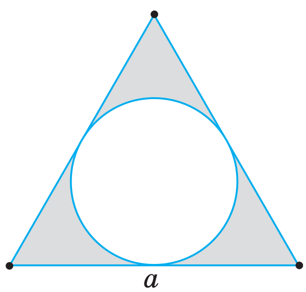
850. Площа сектора круга радіуса R дорівнює S. Знайдіть центральний кут сектора, якщо:
1) $R = 3$ см, $S = 4\pi$ см^2;
2) $R = 10$ см, $S = 20\pi$ см^2.

851. Площа сектора дорівнює S, а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює $n°$.
Обчисліть радіус круга, якщо:
1) $S = 25$ см^2, $n° = 18°$;
2) $S = 14$ см^2, $n° = 45°$.

852. На малюнках 242 і 243 зображено вписаний у коло й описаний навколо нього правильний трикутник. Обчисліть площі зафарбованих частин фігур, якщо радіус кола R, а сторона трикутника — a.

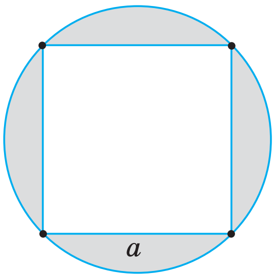


Мал. 242

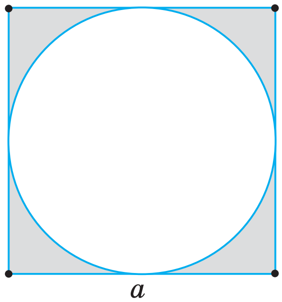


Мал. 243

853. На малюнках 244 і 245 зображено вписаний у коло й описаний навколо нього правильний чотирикутник. Обчисліть площі зафарбованих частин фігур, якщо радіус кола R, а сторона чотирикутника — a.



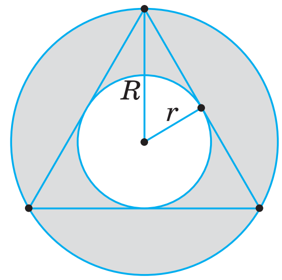
Мал. 244



Мал. 245

854*. Навколо круга, площа якого дорівнює S, описано ромб із кутом 30°. Обчисліть площу цього ромба.

855*. 1) Навколо правильного трикутника з площею Q описано коло, і в цей самий трикутник вписано коло (мал. 246). Знайдіть площу кільця, обмеженого цими колами, якщо їх радіуси — R і r.
2) Узагальніть задачу для правильного n-кутника.



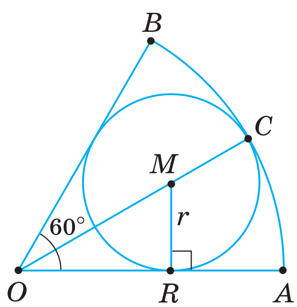
Мал. 246

856*. У кільці, утвореному двома колами зі спільним центром, хорда більшого кола, яка дотикається до меншого, дорівнює m. Знайдіть площу кільця.

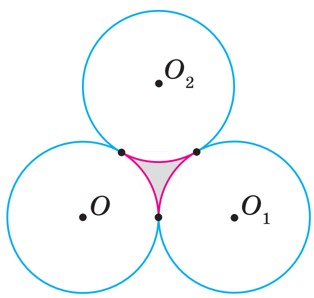
857*. Дуга сегмента містить 120°, а її довжина дорівнює l. Знайдіть площу круга, вписаного в цей сегмент.

858*. У круговий сектор із центральним кутом 60° вписано коло радіуса r (мал. 247). Знайдіть відношення площі сектора до площі круга, обмеженого цим колом.

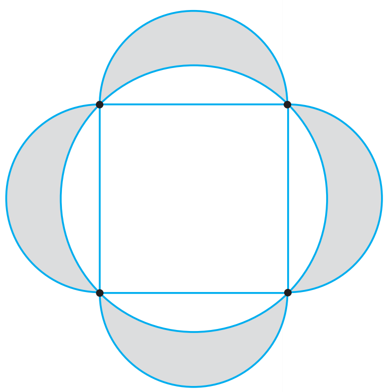
859*. Три кола радіуса R попарно дотикаються зовні (мал. 248). Обчисліть площу «криволінійного трикутника», обмеженого дугами цих кіл.



Мал. 247



Мал. 248



Мал. 249

860*. На кожній стороні a квадрата зовні нього побудовано півколо, і навколо квадрата описано коло (мал. 249). Обчисліть суму площ зафарбованих серпків.

Проявіть компетентність

861. Дві водопровідні труби з діаметрами 6 см і 8 см потрібно замінити однією трубою з такою самою пропускною здатністю. Знайдіть діаметр цієї труби.

862. Обчисліть площу поперечного перерізу дерева, якщо його обхват (довжина кола) дорівнює:
1) 90 см;
2) 1,5 м.

863. Якої товщини шар потрібно зняти з круглого мідного дроту, що має площу перерізу 314 мм^2, щоб дріт проходив крізь отвір діаметром 18,5 мм?

864. Діаметр заготовки дорівнює 30 мм. Поперечний переріз після обробки цієї заготовки — квадрат зі стороною 20 мм. Скільки відсотків становлять відходи металу?

865. Навколо круглої клумби є доріжка, яка прилягає до клумби. Довжина зовнішнього кола доріжки дорівнює 25 м, а її ширина — 0,5 м. Який об'єм піску потрібно, щоб посипати ним доріжку, якщо на 1 м^2 доріжки витрачають 0,8 дм^3 піску?

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, як описати коло навколо правильного многокутника та як вписати в нього коло.
2. Виведіть формули для радіусів вписаного й описаного кіл правильного n-кутника.
3. Поясніть, як побудувати правильний шестикутник, трикутник і чотирикутник.
4. Поясніть, чому відношення довжини кола до його діаметра одне й те саме для кожного кола.
5. За якою формулою обчислюють довжину кола; довжину дуги кола?
6. Запишіть і поясніть формулу для обчислення площі круга; кругового сектора.
7. Поясніть, як знайти площу кругового сегмента.

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестових завдань потрібно 10–15 хв.

1° Знайдіть кут правильного n-кутника, якщо $n = 6$.
- **А.** 100°.
- **Б.** 110°.
- **В.** 120°.
- **Г.** 90°.

2° Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює 20π см.
- **А.** 5 см.
- **Б.** 15 см.
- **В.** 20 см.
- **Г.** 10 см.

3° Знайдіть довжину кола, якщо площа круга дорівнює 16π см^2.
- **А.** 6π см.
- **Б.** 12π см.
- **В.** 10π см.
- **Г.** 8π см.

4 Знайдіть довжину дуги кола радіуса 9 см, яка відповідає центральному куту 20°.
- **А.** 4π см.
- **Б.** 2π см.
- **В.** π см.
- **Г.** 6 см.

5* Знайдіть радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, якщо радіус описаного кола дорівнює $8\sqrt{3}$ см.
- **А.** 8 см.
- **Б.** 10 см.
- **В.** 24 см.
- **Г.** 12 см.

Розділ 5

Геометричні перетворення

У розділі дізнаєтеся:

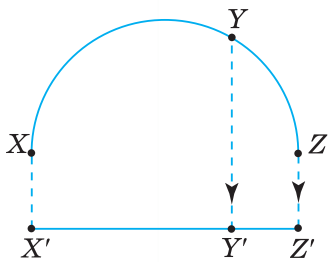
- що таке переміщення та які його властивості;
- про симетрію відносно точки та прямої, поворот, паралельне перенесення та про їх застосування в природі, техніці, архітектурі;
- що таке перетворення подібності та які його властивості;
- як застосовувати вивчені означення та властивості на практиці й у розв'язуванні задач

§ 19. ПЕРЕМІЩЕННЯ

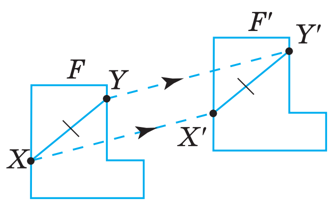
Подивіться на малюнок 250. Кожну точку півкола змістили так, що одержали відрізок. Говорять, що півколо відобразили на відрізок. Можна також сказати, що відрізок утворився з півкола в результаті геометричного перетворення. Далі коротко будемо говорити: перетворення. Зрозуміло, що дане перетворення не зберігає відстань між точками цих фігур: $X'Y' \neq XY$.

Перетворення, подане на малюнку 251, за якого фігура F відображається у фігуру F', є особливим. Воно зберігає відстань між відповідними точками фігур. Будь-які дві точки X і Y фігури F переходять у точки X' і Y' фігури F' так, що $X'Y' = XY$. Таке перетворення є переміщенням.

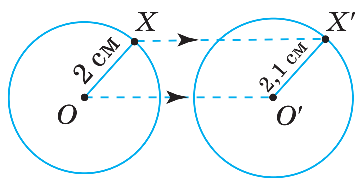
Перетворення називається *переміщенням*, якщо воно зберігає відстань між точками.



Мал. 250



Мал. 251



Мал. 252

Деяке перетворення переводить дане коло в коло іншого радіуса (мал. 252). Чи є це перетвореня переміщенням? Ні, бо воно не зберігає відстань між відповідними точками: $OX \neq O'X'$.

ТЕОРЕМА властивість переміщення

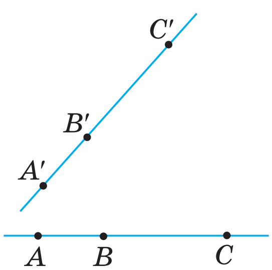
При переміщенні точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.

Дано: перетворення, що є переміщенням.

Довести: 1) точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій;

2) зберігається порядок взаємного розміщення точок на прямій.

Доведення. Нехай три точки A, B і C лежать на одній прямій.



Мал. 253

Тоді одна з них лежить між двома іншими. Нехай, наприклад, точка B лежить між точками A і C (мал. 253).

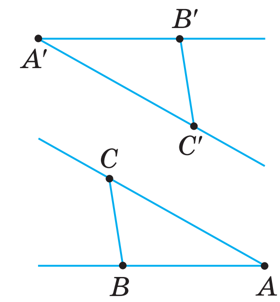
Тоді $$AC = AB + BC. \quad (1)$$

Деяке переміщення переводить точки A, B і C в точки A', B' і C'. Оскільки переміщення зберігає відстані, то $AC = A'C'$, $AB = A'B'$ і $BC = B'C'$. Із цих рівностей і рівності (1) випливає: $A'C' = A'B' + B'C'$.
Остання рівність означає, що точки A', B', і C' лежать на одній прямій, а точка B' лежить між точками A' і C'.

НАСЛІДОК. **Переміщення прямі переводить у прямі, промені — у промені, відрізки — у рівні їм відрізки.**

Задача. Доведіть, що переміщення переводить кут у рівний йому кут.

Розв'язання. Нехай AB і AC — два промені, що виходять зі спільної точки A й не лежать на одній прямій (мал. 254). Переміщення переводить ці промені в деякі промені $A'B'$ і $A'C'$.
Оскільки переміщення зберігає відстані, то $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. $ABC = \Delta A'B'C'$ за трьома сторонами.
З рівності трикутників випливає: $\angle BAC = \angle B'A'C'$.



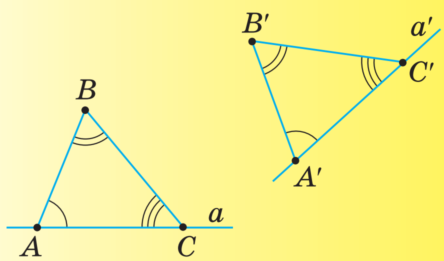
Мал. 254

Узагалі, переміщення будь-яку фігуру переводить у рівну їй фігуру. Тому поняття «рівні фігури» можна визначити за допомогою поняття «переміщення».

Дві фігури називаються рівними, якщо вони переводяться переміщенням одна в одну.

Властивості переміщення подано в таблиці 29.

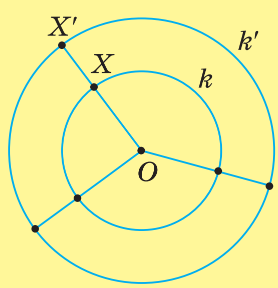
Таблиця 29

Переміщення	Властивості
	1. Пряма переходить у пряму (a в a'), промінь — у промінь. 2. Відрізок переходить у рівний йому відрізок ($A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $A'C' = AC$). 3. Кут переходить у рівний йому кут ($\angle A' = \angle A$, $\angle B' = \angle B$, $\angle C' = \angle C$).

Дізнайтеся більше

Давайте поміркуємо над поняттям «відображення фігур».

Нехай k і k' — два кола зі спільним центром O (мал. 255). Вважатимемо, що кожній точці X першого кола відповідає точка X' другого, яка лежить на промені OX. При цьому кожна точка другого кола поставлена у відповідність деякій точці першого кола. Крім того, різним точкам першого кола відповідають різні точки другого кола. Ми одержали відображення кола k на коло k'.



Мал. 255

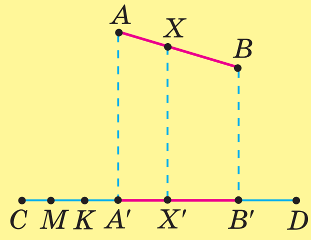
Відображенням фігури F на F' називають таку відповідність, за якої:
1) кожній точці фігури F відповідає певна точка фігури F';

2) кожна точка фігури F' поставлена у відповідність деякій точці фігури F;

3) різним точкам фігури F відповідають різні точки фігури F'.

? Чи кожна відповідність між точками фігур буде відображенням цих фігур? Ні.

На малюнку 256 зображено відрізки AB і CD. Кожній точці X відрізка AB поставлено у відповідність основу X' перпендикуляра, проведеного з точки X до відрізка CD. Поясніть, чому задана відповідність не буде відображенням відрізка AB на відрізок CD.



Мал. 256

Пригадайте головне

1. Яке перетворення називається переміщенням?
2. Доведіть, що при переміщенні точки, які лежать на прямій, переходять у точки, які теж лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.
3. У які фігури переходять під час переміщення прямі, промені, відрізки й кути?
4. Які дві фігури називаються рівними?

Розв'яжіть задачі

866'. Чи правильно, що переміщення:
1) не зберігає відстані; 2) зберігає відстані?

867'. Чи правильно, що при переміщенні точки, що лежать на прямій, переходять у точки:
1) що не лежать на одній прямій; 2) що лежать на одній прямій?

868'. Чи правильно, що при переміщенні порядок точок на прямій:
1) не зберігається; 2) зберігається?

869'. Чи правильно, що при переміщенні пряма переходить у:
1) відрізок; 2) промінь; 3) пряму; 4) кут?

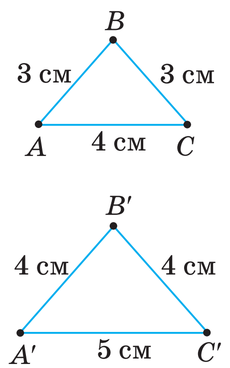
870'. Чи правильно, що при переміщенні промінь переходить у:
1) відрізок; 2) промінь; 3) пряму; 4) кут?

871'. Чи правильно, що при переміщенні відрізок переходить у:
1) рівний йому відрізок; 2) промінь; 3) пряму; 4) кут?

872'. Чи правильно, що при переміщенні кут переходить у:
1) відрізок; 2) промінь; 3) пряму; 4) рівний йому кут?

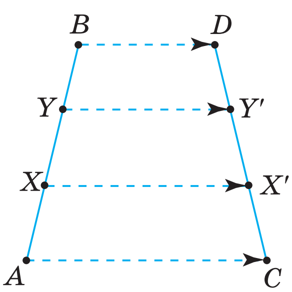
873'. Чи правильно, що фігури, які суміщаються при переміщенні, є:
1) нерівними; 2) рівними?

874°. Перетворення переводить трикутник ABC у трикутник $A'B'C'$ (мал. 257). Чи є це перетворення переміщенням? Відповідь поясніть.



Мал. 257

875°. На малюнку 258 переміщення переводить відрізок AB у відрізок CD.
1) У які точки переходять точки X і Y при цьому переміщенні?
2) У які фігури переходять відрізки AX і XY?
3) Чи рівні відрізки AX і CX', XY і $X'Y'$, BY і DY'?
Відповідь поясніть.



Мал. 258

876°. Чи існує переміщення, яке переводить відрізок AB у відрізок CD, якщо: 1) $AB = 4$ см, $CD = 6$ см; 2) $AB = 5$ см, $CD = 5$ см?

877°. **Переміщення переводить фігуру F у фігуру F'. Чи рівні фігури F і F'?**

878°. Переміщення переводить відрізок AB у відрізок $A'B'$. Який із записів правильний: 1) $AB > A'B'$; 2) $AB = A'B'$; 3) $AB < A'B'$?

879°. Позначте довільні точки A і B. Побудуйте коло із центром A й радіусом 3 см. Побудуйте фігуру, у яку перейде це коло під час переміщення, що переводить точку A в точку B.

880°. Побудуйте два прямокутні трикутники, що мають кут 30° і менший катет завдовжки 2 см. У першому трикутнику з вершини прямого кута через середину гіпотенузи проведіть промінь. Побудуйте фігуру, у яку він переходить під час переміщення, що переводить перший трикутник у другий.

881°. **Проведіть промені OA і $O'A'$. На промені OA позначте три точки M, K, P. Побудуйте точки M', K' і P', у які переходять точки M, K і P під час переміщення, що переводить промінь OA в промінь $O'A'$.**

882°. Дано промені OA і OB зі спільним початком у точці O та промінь $O'A'$. Побудуйте промінь $O'B'$, у який переходить промінь OB під час переміщення, що переводить промінь OA в промінь $O'A'$. Чи однозначно визначається положення променя $O'B'$?

883°. Побудуйте два рівні трикутники ABC і $A'B'C'$ та позначте точку X на стороні AC. Побудуйте точку, у яку переходить точка X' при переміщенні, що переводить ΔABC у $\Delta A'B'C'$.

884. Чи існує переміщення, що переводить ΔABC у $\Delta A'B'C'$, якщо:
1) $\angle A = 110°$, $\angle B' = 120°$;
2) $\angle C = 20°$, $\angle A' = 60°$;
3) $AC = 6$ см, $A'B' = B'C' = 3$ см?

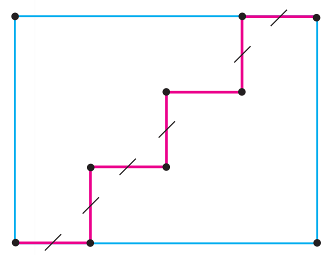
885. Чи рівні два квадрати, якщо:
1) рівні їхні діагоналі; 2) рівні їхні периметри?

886. Чи рівні два прямокутники, якщо:
1) рівні їхні діагоналі; 2) рівні їхні периметри?

887. У крузі з центром O проведено діаметри AB і CD. Яка фігура рівна частині круга: 1) AOC; 2) AOD?

888. **Дві частини, з яких складається фігура F, відповідно рівні двом частинам, з яких складається фігура F'. Чи рівні ці фігури? Виконайте малюнок.**

889. Прямокутник поділено на дві частини, як показано на малюнку 259. Чи рівні ці частини?

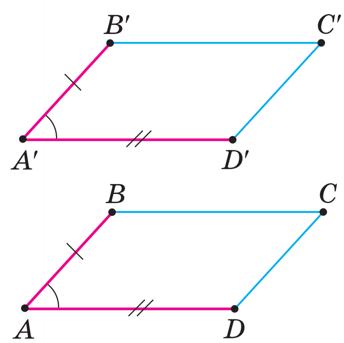


Мал. 259

890. Чи можна поділити різносторонній трикутник на дві рівні частини? Для яких трикутників такий поділ можливий?

891. Доведіть, що переміщення переводить:
1) трикутник у рівний йому трикутник;
2) паралелограм у рівний йому паралелограм.

892. За даними на малюнку 260 доведіть, що паралелограми $ABCD$ і $A'B'C'D'$ — рівні.



Мал. 260

893. Чи рівні два паралелограми, якщо в них рівні:
1) дві діагоналі та кут між ними; 2) сторона і дві діагоналі;
3) периметри; 4) дві сусідні сторони й зовнішній кут?

894*. Доведіть, що ромби рівні, якщо вони мають рівні діагоналі.

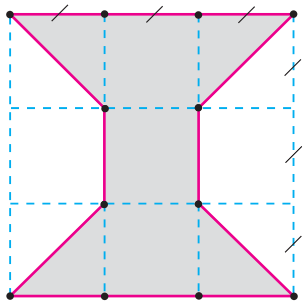
895*. Доведіть, що переміщення переводить многокутник у многокутник з відповідно рівними сторонами й кутами.

896*. **Доведіть, що переміщення переводить паралельні прямі в паралельні прямі.**

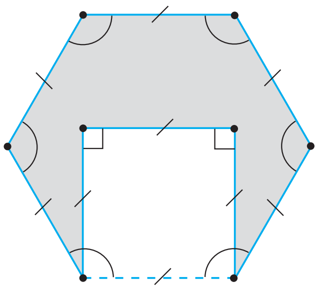
Проявіть компетентність

897. Опишіть ситуацію математичною мовою:
1) машина виїхала з гаража й зупинилася;
2) викрійку сорочки поклали на тканину;
3) чайник переставили з однієї конфорки плити на іншу;
4) шафу пересунули від однієї стіни кімнати до іншої;
5) книжки поставили на полицю;
6) складену вчетверо квадратну серветку розгорнули;
7) для зручності читання тексту на екрані смартфона збільшили масштаб зображення.

898. Побудуйте фігури, які рівні фігурам, зображеним на малюнках 261 і 262 (для побудови можна скористатися лінійкою, циркулем, косинцем або калькою). Обчисліть площі цих фігур, зробивши найменшу кількість вимірювань.



Мал. 261



Мал. 262

§ 20. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ І ПРЯМОЇ

1. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ

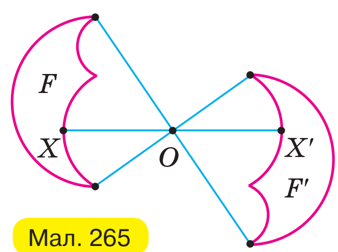
Дві точки X і X' площини називають *симетричними відносно точки O*, якщо O є серединою відрізка XX' (мал. 263).

Мал. 263

Щоб побудувати точку X', симетричну точці X відносно точки O, проведіть промінь XO, відкладіть на ньому з другого боку від точки O відрізок $OX' = OX$ (мал. 264).

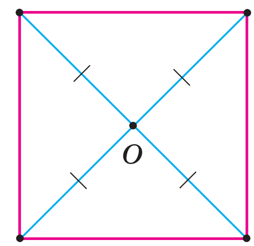
Мал. 264

Перетворення, за якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', симетричну відносно даної точки O, називають *симетрією відносно точки O*. При цьому фігури F і F' називають *симетричними відносно точки O* (мал. 265). Симетрію із центром O називають також *центральною симетрією*.



Мал. 265

Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то таку фігуру називають *центрально-симетричною*, а точку O — її *центром симетрії*. Наприклад, квадрат — центрально-симетрична фігура. Його центром симетрії є точка перетину діагоналей (мал. 266).



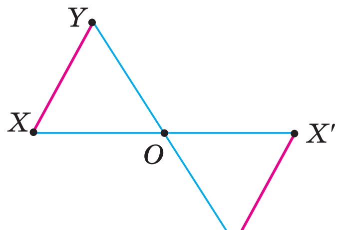
Мал. 266

ТЕОРЕМА

властивість симетрії відносно точки

Симетрія відносно точки є переміщенням.

Дано: перетворення, яке є симетрією відносно точки.
Довести: дане перетворення є переміщенням.
Доведення. Нехай симетрія відносно точки O переводить довільні точки X і Y фігури F у точки X' і Y' фігури F' (мал. 267).
$\Delta X'OY' = \Delta XOY$ — за двома сторонами та кутом між ними. У них $OX' = OX$, $OY' = OY$ за означенням симетрії відносно точки O, $\angle X'OY' = \angle XOY$ як вертикальні. З рівності трикутників випливає:



Мал. 267

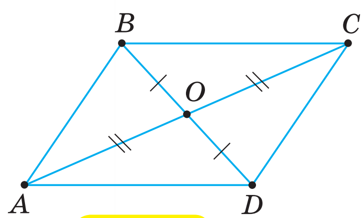
$$X'Y' = XY.$$

Це означає, що симетрія відносно точки O є переміщенням. (Випадок, коли точки X, Y, O лежать на одній прямій, розгляньте самостійно).

НАСЛІДОК. **Симетрія відносно точки має всі властивості переміщення.**

Задача. Доведіть, що паралелограм є центрально-симетричною фігурою відносно точки перетину його діагоналей.

Розв'язання. Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$ (мал. 268). Оскільки діагоналі AC і BD точкою O діляться навпіл, то точки A і C, B і D симетричні відносно точки O. Тоді сторони AB і CD, BC і DA також симетричні відносно точки O. Тому симетрія відносно точки перетину діагоналей паралелограма переводить його в себе.



Мал. 268

Фігури, що мають центр симетрії, часто трапляються в довкіллі. Наприклад, пропелер літака (мал. 269), орнамент (мал. 270), квітка (мал. 271), сніжинка (мал. 272).


Мал. 269


Мал. 270


Мал. 271

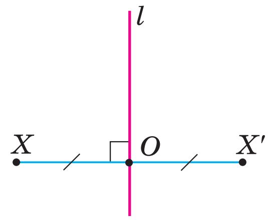

Мал. 272

2. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ПРЯМОЇ

Дві точки X і X' площини називають *симетричними відносно прямої l*, якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка XX' і проходить через його середину (мал. 273).

Якщо точка X лежить на прямій l, то симетричною їй точкою є сама точка X.

Щоб побудувати точку X', симетричну точці X відносно прямої l, проведіть з точки X перпендикуляр XO до прямої l і на його продовженні з другого боку від прямої l відкладіть відрізок $OX' = OX$ (мал. 273).

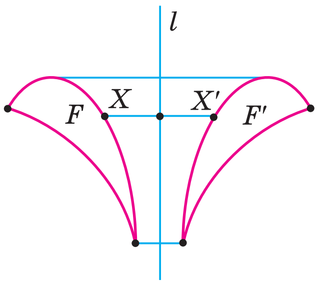


Мал. 273

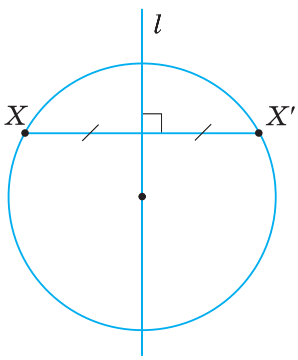
Перетворення, за якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', симетричну відносно даної прямої l, називають *симетрією відносно прямої l*. При цьому фігури F і F' називають *симетричними відносно прямої l* (мал. 274). Пряму l називають *віссю симетрії*. Симетрію відносно прямої l називають також *осьовою симетрією*.

Якщо перетворення симетрії відносно прямої l переводить фігуру F у себе, то цю фігуру називають *симетричною відносно прямої l* (або *осесиметричною*), а пряму l — *віссю симетрії* фігури.

Наприклад, пряма, що проходить через центр кола, є віссю симетрії цього кола (мал. 275).



Мал. 274



Мал. 275

ТЕОРЕМА властивість симетрії відносно прямої

Симетрія відносно прямої є переміщенням

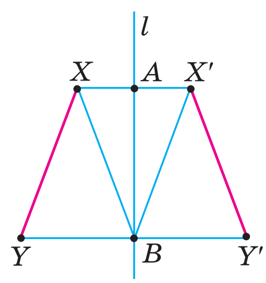
Дано: перетворення, яке є симетрією відносно прямої.

Довести: дане перетворення є переміщенням.

Доведення. Нехай симетрія відносно прямої l переводить довільні точки X, Y фігури F у точки X', Y' фігури F'. Розглянемо загальний випадок, коли точки X, Y не лежать на прямій, перпендикулярній до l (мал. 276). Доведемо, що $X'Y' = XY$.

Нехай пряма l перетинає відрізки XX' і YY' відповідно в точках A і B. $\Delta ABX' = \Delta ABX$ як прямокутні з рівними катетами. У них $\angle X'AB = \angle XAB = 90°$, $AX' = AX$ за означенням осьової симетрії, сторона AB — спільна. Звідси випливає: $BX' = BX$ і $\angle ABX' = \angle ABX$.

$\Delta X'Y'B = \Delta XYB$ за двома сторонами й кутом між ними. У них $BX' = BX$ за доведеним, $BY' = BY$ за означенням осьової симетрії, $\angle X'BY' = \angle XBY$ ($\angle XBY = 90° - \angle ABX$, $\angle X'BY' = 90° - \angle ABX'$). З рівності трикутників випливає: $X'Y' = XY$. (Випадки, коли точки X і Y лежать на прямій l або на прямій, перпендикулярній до l, розгляньте самостійно.)

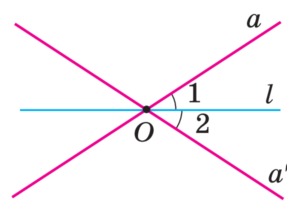


Мал. 276

НАСЛІДОК. **Симетрія відносно прямої має всі властивості переміщення.**

Задача. Доведіть, що прямі a і a' симетричні відносно осі симетрії l або перетинаються в точці, яка лежить на осі симетрії, й утворюють з віссю симетрії рівні кути або паралельні їй.

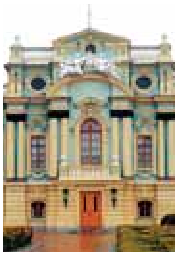
Розв'язання. Можливі два випадки.
1) Пряма a перетинає вісь l у деякій точці O (мал. 277). Оскільки при осьовій симетрії точка O переходить у себе, то вона лежатиме й на симетричній прямій a'. Таким чином, симетричні прямі a і a' перетинаються в точці, яка лежить на осі l. Кути 1 і 2, утворені цими прямими з віссю l, симетричні відносно l і тому рівні.
2) Пряма a паралельна осі симетрії l. Пряма a', симетрична прямій a, не може перетинати вісь l, оскільки тоді пряма a також перетинала б вісь l (випадок 1). Отже, $a' \parallel l$.



Мал. 277

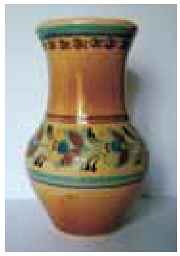
Фігури, що мають вісь симетрії, часто трапляються в техніці (мал. 278), архітектурі (мал. 279, 280), природі (мал. 281), побуті (мал. 282).


Мал. 278


Мал. 279

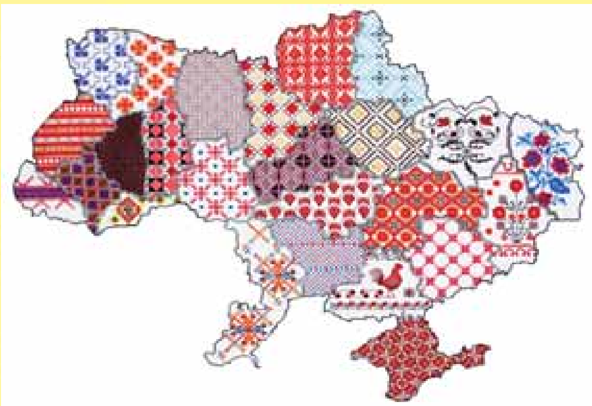

Мал. 280


Мал. 281


Мал. 282

Дізнайтеся більше

1. Слово «симетрія» грецького походження й у перекладі означає сумірність, правильне відношення, однаковість у розміщенні частин.
2. Симетрію широко застосовують у художніх композиціях, зокрема у вишивках. Історія української вишивки своїм корінням сягає у глибину віків. Вишивкою, за свідчення давньогрецького вченого Геродота, був прикрашений одяг скіфів. Українські майстрині оздоблювали вишитими орнаментами не лише одяг, а й предмети побуту — рушники, скатертини, наволочки, серветки тощо. При цьому в різних регіонах України вишивки мали свій колорит і техніку виконання (мал. 283).


Мал. 283

Наприклад, на Харківщині й Луганщині різнокольорові вишивки виконували грубою ниткою, через що узори справляли враження рельєфних (мал. 284). А для гуцульських вившивок характерним є густе заливання тла, коли велика кількість дрібних елементів заповнює площину орнаменту, а візерунок окреслюється тонкими просвітками (мал. 285).

Мал. 284

Мал. 285

Пригадайте головне

1. Які дві точки називають симетричними відносно даної точки?
2. Яке перетворення називають симетрією відносно даної точки?
3. Яку фігуру називають центрально-симетричною?
4. Доведіть, що перетворення симетрії відносно точки є переміщенням.
5. Які дві точки називають симетричними відносно даної прямої?
6. Яке перетворення називають симетрією відносно даної прямої?
7. Яку фігуру називають симетричною відносно даної прямої?
8. Доведіть, що перетворення симетрії відносно прямої є переміщенням.
9. Назвіть властивості симетрії відносно точки; прямої.

Розв'яжіть задачі

899'. Чи правильно, що кінці відрізка симетричні відносно точки, що:
1) не є серединою цього відрізка; 2) є серединою цього відрізка?

900'. Чи правильно, що симетрія відносно точки:
1) не є переміщенням; 2) є переміщенням?

901'. Чи правильно, що кінці відрізка симетричні відносно прямої, що:
1) не проходить через середину цього відрізка, але перпендикулярна до нього;
2) проходить через середину цього відрізка, але не перпендикулярна до нього;
3) проходить через середину цього відрізка й перпендикулярна до нього?

902'. Чи правильно, що симетрія відносно прямої:
1) не є переміщенням;
2) є переміщенням?

903°. Які з точок X і X', зображених на малюнку 286, *а* — *в*, симетричні відносно точки O? Відповідь поясніть.

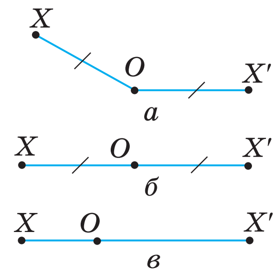
904°. Позначте точки A і O. Побудуйте точку B, симетричну точці A відносно точки O.

905°. Накресліть відрізок AB й позначте точку M, яка не лежить на відрізку AB. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку AB відносно точки M.

906°. Позначте точки A і B. За допомогою лінійки побудуйте точку, відносно якої симетричні точки A і B.

907°. **Дано трикутник ABC. Побудуйте фігуру, симетричну трикутнику ABC відносно:**
1) вершини C;
2) середини O сторони BC;
3) точки K, яка лежить поза трикутником.

908°. Знайдіть координати точки A', яка симетрична точці A (3; 5) відносно точки:
1) O (0; 0);
2) C (3; 0);
3) D (−1; −1).

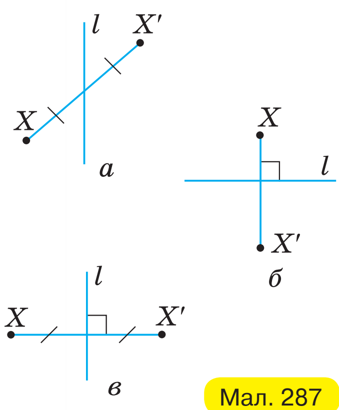


Мал. 286

909°. На координатній площині побудуйте відрізок $A'B'$, симетричний відрізку AB, де A (2; 2), B (6; 6), відносно:
1) початку координат;
2) точки M (4; 0);
3) кінця A відрізка AB.
Запишіть координати точок A' і B'.

910°. Побудуйте фігуру, симетричну даному колу із центром O відносно:
1) точки A, що лежить на колі;
2) точки B, що лежить поза колом;
3) точки C, що лежить усередині кола.

911°. Які з точок X і X', зображених на малюнках 287, *а* — *в*, симетричні відносно прямої l? Відповідь поясніть.



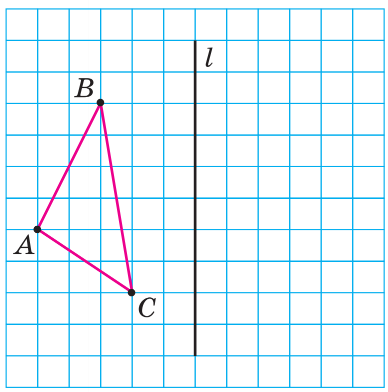
Мал. 287

912°. Проведіть пряму a й позначте точку M, яка не лежить на прямій a. Побудуйте точку N, симетричну точці M відносно прямої a.

913°. За клітинками побудуйте фігуру, симетричну трикутнику ABC відносно прямої l (мал. 288).

914°. Позначте точки M і N. За допомогою лінійки та косинця побудуйте пряму l, відносно якої симетричні точки M і N.

915°. **Побудуйте трикутник, симетричний трикутнику ABC відносно прямої l, яка:**
1) не перетинає трикутник;
2) перетинає трикутник;
3) містить сторону AC трикутника.



Мал. 288

916°. Дано точки A, B і C, що не лежать на одній прямій. Побудуйте точку, симетричну:
1) точці C відносно прямої AB;
2) точці B відносно прямої AC;
3) точці A відносно прямої BC.

917°. Побудуйте фігуру, симетричну:
1) чотирикутнику відносно однієї з його сторін;
2) прямокутнику відносно однієї з його діагоналей;
3) трапеції відносно її середньої лінії.

918°. Побудуйте фігуру, симетричну даному колу відносно прямої, яка:
1) не перетинає коло;
2) дотикається до кола;
3) перетинає коло.

919°. Знайдіть координати точки, симетричної точці $A\ (-4;\ 5)$ відносно:
1) осі OX;
2) осі OY.

920°. Знайдіть координати кінців відрізка $A'B'$, симетричного відрізку AB відносно осі OX, якщо:
1) $A\ (2;\ 1)$, $B\ (4;\ 1)$;
2) $A\ (-3;\ -3)$, $B\ (3;\ 3)$;
3) $A\ (3;\ 2)$; $B\ (6;\ 4)$.

921. Побудуйте фігуру, симетричну даному відрізку AB відносно точки O, якщо:
1) точка O лежить на відрізку;
2) точка O не лежить на відрізку, але лежить на прямій, яка містить відрізок.

922. Дано точки A, B і C, що не лежать на одній прямій. При симетрії відносно деякої точки точка B переходить у точку C. Побудуйте точку, у яку при цій симетрії переходить точка A.

923. **Доведіть, що при симетрії відносно точки пряма, яка не проходить через цю точку, переходить у паралельну їй пряму.**

924. Вершина B трикутника ABC при симетрії відносно середини сторони AC переходить у точку D. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

925. Знайдіть координати вершини трикутника $A'B'C'$, який симетричний трикутнику ABC відносно початку координат, якщо:
1) $A\ (1;\ 2)$, $B\ (4,\ 6)$, $C\ (7,\ 3)$;
2) $A\ (4,\ -2)$, $B\ (1;\ 2)$, $C\ (-2;\ 6)$.

926. Чи має центр симетрії:
1) відрізок;
2) промінь;
3) коло?

927. Дано точки A, B і C, які не лежать на одній прямій. Доповніть їх четвертою точкою D так, щоб чотирикутник $ABCD$ мав центр симетрії.

928. **Доведіть, що чотирикутник, який має центр симетрії, — паралелограм.**

929. **Доведіть, що фігура, яка складається з двох паралельних прямих, є центрально-симетричною. Знайдіть геометричне місце центрів симетрії цих прямих.**

930. Дано довільний трикутник ABC й довільну точку A'. Побудуйте трикутник, симетричний даному відносно деякої прямої так, щоб точка A перейшла в точку A'.

931. **Доведіть, що пряма, яка містить бісектрису кута, є його віссю симетрії.**

932. Доведіть, що пряма, яка містить висоту рівнобедреного трикутника, проведену до основи, є віссю симетрії трикутника.

933. Точки перетину двох кіл симетричні відносно прямої, що проходить через їхні центри. Доведіть.

934. Доведіть, що діагоналі ромба є його осями симетрії.

935. Якщо трикутник має вісь симетрії, то він рівнобедрений. Доведіть.

936. Доведіть, що коли трапеція має вісь симетрії, то вона рівнобічна.

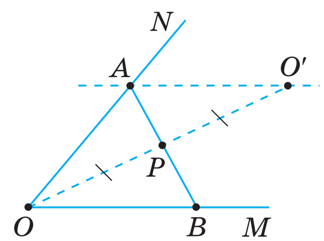
937. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини основ рівнобічної трапеції, є її віссю симетрії.

938. Скільки осей симетрії може мати чотирикутник? Наведіть приклади.

939. Вершина B рівнобедреного трикутника ABC при симетрії відносно прямої, що містить основу AC, переходить у точку D. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — ромб.

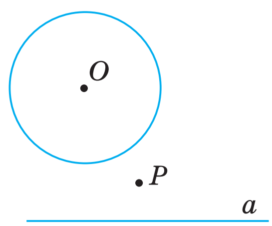
940*. Дано точки A і O. Скориставшись тільки циркулем, побудуйте точку A', симетричну точці A відносно точки O.

941*. Дано кут MON і довільну точку P, яка лежить у внутрішній області кута. Побудуйте відрізок з кінцями на сторонах кута й серединою в даній точці P. За малюнком 289 складіть план побудови.



Мал. 289

942*. Побудуйте відрізок так, щоб його середина була в даній точці P, а кінці — на даній прямій a й на даному колі (мал. 290).



Мал. 290

943*. Скориставшись тільки циркулем, побудуйте точку, симетричну даній точці відносно даної прямої.

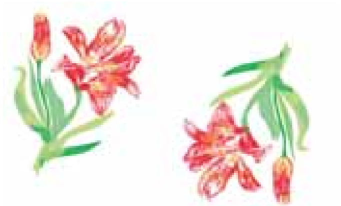
944*. Доведіть, що коли трикутник має дві осі симетрії, то він має й третю вісь симетрії.

945*. Дано пряму l і точки A і B з одного боку від неї. На прямій l знайдіть таку точку N, щоб сума відстаней $AN + BN$ була найменшою.

946*. Дано гострий кут ABC й точку M усередині його. На сторонах кута знайдіть такі точки X і Y, щоб трикутник MXY мав найменший периметр.

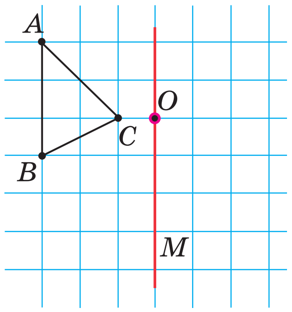
Проявіть компетентність

947. Базовий елемент орнаменту містить два елементи. Опишіть математичною мовою принцип побудови такого орнаменту:
1) на малюнку 291;
2) на малюнку 292.



Мал. 291

Мал. 292



Мал. 293

948. Дано частину базового елемента орнаменту (мал. 293).
1) На основі цієї частини побудуйте повний базовий елемент орнаменту, використавши симетрію відносно: а) точки O; б) прямої OM;
2) побудуйте орнамент із трьох базових елементів.

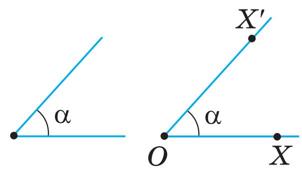
949. З одного боку від газопроводу розташовані міста A і B. У якому місці газопроводу слід побудувати газову підстанцію, щоб при розподілі газу для міст A і B витратити найменшу кількість труб?

§ 21. ПОВОРОТ

Нехай дано кут α і точку O (мал. 294). Візьмемо довільну, відмінну від O, точку X. Точці X поставимо у відповідність таку точку X', що:

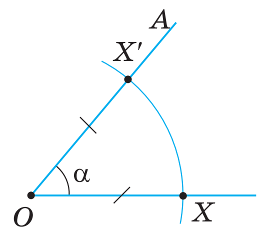
1) кут між променями OX і OX' дорівнює α;
2) відстані OX і OX' — рівні.

Такий перехід точки X у точку X' називають *поворотом навколо точки O на кут α* проти годинникової стрілки. Сама точка O внаслідок повороту переходить у себе. Точку O називають *центром повороту*, кут між променями OX і OX' — *кутом повороту* проти годинникової стрілки (мал. 294).



Мал. 294

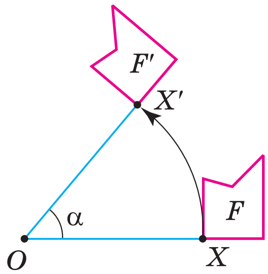
Якщо центр O і кут α повороту задано, то точку X', у яку переходить точка X унаслідок повороту проти годинникової стрілки, будуємо так (мал. 295): проводимо промінь OX; від променя OX відкладаємо кут XOA, що дорівнює куту α; на промені OA знаходимо точку X', таку, що $OX' = OX$.



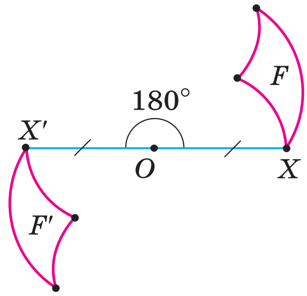
Мал. 295

Якщо на площині дано деяку фігуру F, то для кожної її точки X можна знайти точку X', у яку перейде точка X унаслідок повороту навколо точки O на кут α (мал. 296). У результаті одержимо фігуру F', у яку перейшла фігура F при заданому повороті. При цьому точка O переходить у себе.

Поворот на кут $180°$ навколо точки O є симетрією відносно точки O (мал. 297).



Мал. 296

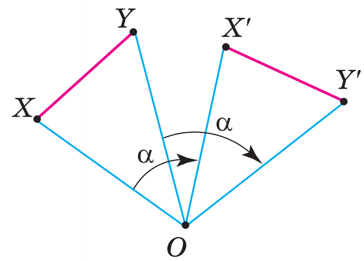


Мал. 297

ТЕОРЕМА властивість повороту

Поворот є переміщенням.

Дано: перетворення, що є поворотом.
Довести: дане перетворення є переміщенням.
Доведення. Нехай поворот навколо точки O на кут α переводить точки X, Y фігури F у точки X', Y' фігури F' (мал. 298). Доведемо, що $X'Y' = XY$. Розглянемо загальний випадок, коли точки O, X, Y не лежать на одній прямій.
$\Delta OX'Y' = \Delta OXY$ за двома сторонами й кутом між ними. У них $OX' = OX$, $OY' = OY$ за означенням повороту і $\angle X'OY' = \angle XOY$ (кожний із цих кутів дорівнює різниці кута α й кута YOX'). З рівності трикутників випливає $X'Y' = X\,Y$. (Випадок, коли точки O, X, Y лежать на одній прямій, розгляньте самостійно.)

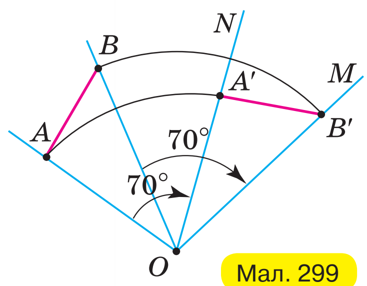


Мал. 298

НАСЛІДОК. **Поворот має всі властивості переміщення.**

Задача. Побудуйте відрізок, у який переходить відрізок AB при повороті навколо точки O на кут $70°$ за годинниковою стрілкою.

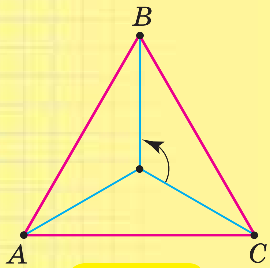
Розв'язання. Проводимо промені OA і OB (мал. 299). Відкладемо за годинниковою стрілкою $\angle AON = 70°$ і $\angle BOM = 70°$. На промені ON відкладемо відрізок $OA' = OA$, а на промені OM — відрізок $OB' = OB$. Сполучимо точки A' і B'.



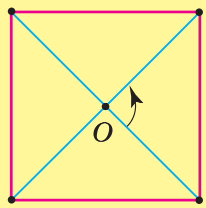
Мал. 299

Дізнайтеся більше

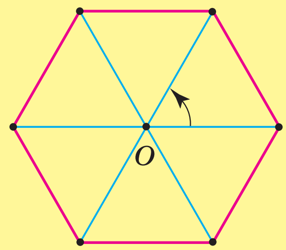
Розглянемо фігури, зображені на малюнках 300–302. Кожна з цих фігур внаслідок повороту навколо точки O на деякий кут переходить у себе. Правильний трикутник (мал. 300) переходить у себе при повороті на кут 120° $\left(120° = \frac{360°}{3}\right)$ навколо його центра O.



Мал. 300



Мал. 301



Мал. 302

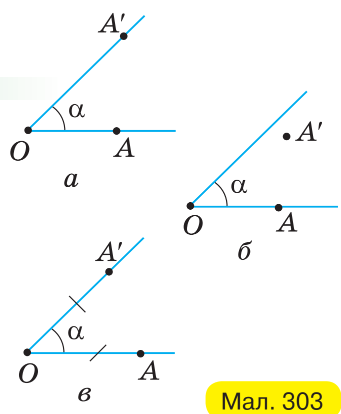
Справді, $OA = OB = OC$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = 120°$, тому трикутник ABC переходить у себе при даному повороті.

Аналогічно можна показати, що квадрат переходить у себе при повороті на кут $\frac{360°}{4}$ навколо його центра (мал. 301), правильний шестикутник — при повороті на кут $\frac{360°}{6}$ навколо його центра (мал. 302). Зрозуміло, що будь-який правильний многокутник з n вершинами переходить у себе внаслідок повороту навколо свого центра на кут $\frac{360°}{n}$.

Пригадайте головне

1. Що таке поворот?
2. Що таке центр повороту; кут повороту?
3. Доведіть, що поворот є переміщенням.
4. Сформулюйте властивості повороту.

Розв'яжіть задачі

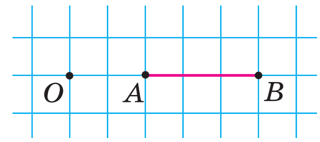


Мал. 303

950°. На якому з малюнків 303, *а* — *в*, точка A перейшла в точку A' унаслідок повороту навколо точки O на кут α?

951°. За допомогою транспортира побудуйте $\angle MON = 60°$. На стороні OM кута позначте точку X. На стороні ON знайдіть точку X', у яку перейде точка X унаслідок повороту навколо точки O на кут 60°.

952'. За клітинками побудуйте відрізок $A'B'$, у який переходить відрізок AB при повороті навколо точки O на кут $90°$ проти годинникової стрілки (мал. 304).



Мал. 304

953°. Дано точки O і A. Побудуйте точку A', у яку переходить точка A при повороті навколо точки O:
1) на кут $50°$ за годинниковою стрілкою;
2) на кут $120°$ проти годинникової стрілки;
3) на кут $180°$ за годинниковою стрілкою.

954°. Дано відрізок AB і точку O, що лежить на прямій AB. Виконайте поворот відрізка AB навколо точки O:
1) на кут $80°$ проти годинникової стрілки;
2) на кут $140°$ за годинниковою стрілкою;
3) на кут $90°$ за годинниковою стрілкою.

955°. Розв'яжіть задачу 954 за умови, що точка O не лежить на прямій AB.

956°. **Накресліть відрізок AB. Виконайте поворот відрізка AB:**
1) навколо точки A на кут $150°$ за годинниковою стрілкою;
2) навколо точки B на кут $60°$ проти годинникової стрілки;
3) навколо середини відрізка на кут $40°$ за годинниковою стрілкою.

957°. У яку фігуру перейде при повороті на деякий кут:
1) пряма, що проходить через центр повороту;
2) коло, центр якого збігається із центром повороту;
3) кут з вершиною в центрі повороту?

958°. У трикутнику AOB $AO = OB$. Побудуйте трикутник, у який переходить трикутник AOB при повороті навколо точки O:
1) на кут AOB за годинниковою стрілкою;
2) на кут AOB проти годинникової стрілки;
3) на кут $120°$ за годинниковою стрілкою.

959°. Побудуйте кут, у який переходить прямий кут MON при повороті навколо вершини O на кут $45°$:
1) за годинниковою стрілкою;
2) проти годинникової стрілки.

960. **Накресліть пряму a та позначте точку M, яка не лежить на прямій. Побудуйте пряму, у яку переходить пряма a при повороті навколо точки M:**
1) на кут $90°$ за годинниковою стрілкою;
2) на кут $45°$ проти годинникової стрілки.

961. Виконайте поворот даного кола навколо точки A на кут $90°$, якщо:
1) точка A лежить поза колом; 2) точка A лежить на колі.

962. Позначте точки X і X'. Побудуйте геометричне місце центрів поворотів, за яких точка X переходить у точку X'.

963. Дано два рівні кола. Знайдіть геометричне місце центрів поворотів, за яких одне коло переходить у друге.

964. Побудуйте фігуру, у яку переходить трикутник ABC при повороті на $90°$ за годинниковою стрілкою навколо:
1) вершини C;
2) середини сторони AC;
3) точки O, яка лежить поза трикутником.

965. Накресліть квадрат $ABCD$. Побудуйте квадрат, у який переходить квадрат $ABCD$ при повороті за годинниковою стрілкою:
1) навколо вершини D на $135°$;
2) навколо центра квадрата на $45°$.

966. Доведіть, що квадрат при повороті навколо точки перетину його діагоналей на кут $90°$ переходить у себе.

967. **Доведіть, що рівносторонній трикутник при повороті навколо точки перетину його висот на кут $120°$ переходить у себе.**

968. Через центр правильного трикутника проведено дві прямі, кут між якими дорівнює $60°$. Доведіть, що відрізки цих прямих, які містяться між сторонами трикутника, рівні між собою.

969. **Через центр квадрата проведено дві взаємно перпендикулярні прямі. Доведіть, що відрізки прямих, які містяться всередині квадрата, — рівні.**

970*. Дано два кола. Поворотом на кут $45°$ одне коло переводиться в друге. Побудуйте центр цього повороту.

971*. Дано два рівні відрізки AB і $A'B'$. Побудуйте центр повороту O, за якого точка A переходить у точку A', а точка B — у точку B'. Чи завжди можна знайти центр такого повороту?

972*. Нехай на сторонах AB і BC трикутника ABC побудовано квадрати $ABPQ$ і $BCMN$. Квадрат $ABPQ$ і трикутник ABC розміщені з різних боків відносно прямої AB, а квадрат $BCMN$ і трикутник ABC — з одного боку відносно прямої BC. Доведіть, що відрізки PN і AC — рівні та перпендикулярні.

973*. При повороті навколо точки A на кут $60°$ кінець B відрізка BC переходить у кінець C, а кінець C — у точку D. Доведіть, що точки A, B, C, D — вершини ромба.

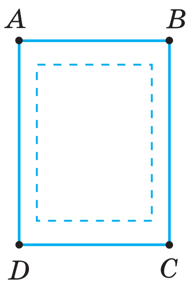
974*. Виконайте поворот рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом 1 см навколо вершини прямого кута на $45°$. Знайдіть площу спільної частини даного трикутника і трикутника, який одержали при повороті.

Проявіть компетентність

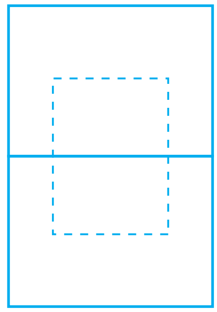
975. Опишіть ситуацію математичною мовою:
1) подивившись на годинник, Андрій побачив, що пройшло:
   а) чверть години; б) півгодини;
2) розкрили складаний ніж;
3) шматок мотузки склали вдвічі.

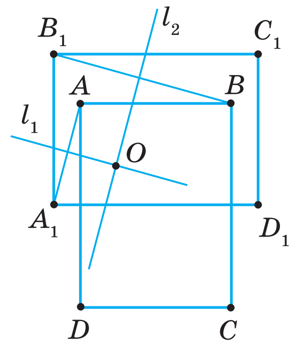
976. Стрілки годинника показують 12 годин. Який час показуватиме годинник, якщо хвилинна стрілка здійснить поворот:
1) на $60°$;
2) на $120°$;
3) на $150°$?

977. Потрібно виготовити розкладний столик так, щоб у закритому стані його кришка (стільниця) була розміщена, як показано на малюнку 305, у відкритому — як на малюнку 306. У якому місці потрібно помістити шип, поворотом навколо якого кришка столу переходила б з положення, зображеного на малюнку 305, у положення, зображене на малюнку 306? Під час розв'язування скористайтеся малюнком 307.



Мал. 305


Мал. 306

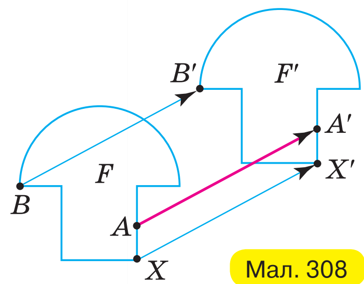


Мал. 307

§ 22. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ

Подивіться на малюнок 308. Кожну точку фігури F змістили в одному й тому самому напрямі (уздовж паралельних прямих XX', AA', BB'...) на одну й ту саму відстань ($XX' = AA' = BB'$...). Одержали фігуру F'. Говорять, що фігура F перейшла у фігуру F' унаслідок паралельного перенесення на вектор $\overline{XX'}$.

Перетворення, за якого всі точки фігури зміщуються в одному й тому самому напрямі й на одну й ту саму відстань, називають *паралельним перенесенням*.



Мал. 308

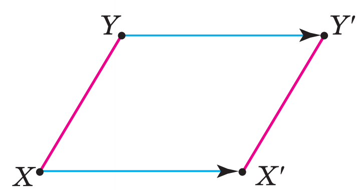
ТЕОРЕМА **властивість паралельного перенесення**

Паралельне перенесення є переміщенням.

Дано: перетворення, що є паралельним перенесенням.

Довести: дане перетворення є переміщенням.

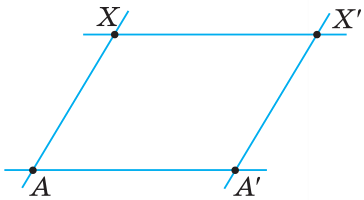
Доведення. Нехай X і Y — дві довільні точки фігури (мал. 309). Паралельне перенесення переводить їх у точки X' і Y' фігури F'. Доведемо, що $X'Y' = XY$. За означенням паралельного перенесення, $XX' = YY'$ і $XX' \parallel YY'$. Тоді чотирикутник $XYY'X'$ — паралелограм. У паралелограмі протилежні сторони рівні, отже, $X'Y' = XY$. (Випадок, коли рівні відрізки XX' і YY' лежать на одній прямій, розгляньте самостійно.)



Мал. 309

НАСЛІДОК 1. **Паралельне перенесення має всі властивості переміщення.**

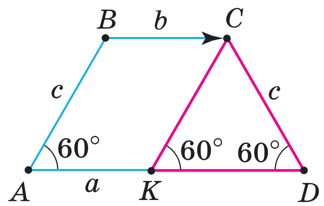
НАСЛІДОК 2. **При паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну їй пряму або сама в себе.**



Мал. 310

Справді, паралельність прямих випливає з паралельності відрізків XY і $X'Y'$ (мал. 310). Якщо ж пряма паралельна напряму перенесення, то кожна точка прямої переходить у точку цієї самої прямої, а сама пряма переходить сама в себе.

Щоб побудувати точку X', у яку переходить точка X при паралельному перенесенні на вектор $\overline{AA'}$, скористайтеся наслідком 2: проведіть паралельні прямі так, як показано на малюнку 310.



Мал. 311

Задача. У рівнобічній трапеції гострий кут дорівнює 60°. Доведіть, що бічна сторона трапеції дорівнює різниці її основ.

Розв'язання. Нехай a, b — основи, c — бічна сторона рівнобічної трапеції (мал. 311). Доведемо, що $c = a - b$. Виконаємо паралельне перенесення так, щоб точка B бічної сторони AB перейшла в точку C. Тоді точка A перейде в точку K. Оскільки паралельне перенесення є переміщенням, то воно переводить кут у рівний йому кут. Отже, $\angle DKC = \angle KAB = 60°$. Тоді ΔKCD — рівносторонній і $KD = c$.
З іншого боку, $KD = AD - AK = AD - BC = a - b$. Маємо: $c = a - b$.

Паралельне перенесення малюнків (вони однакові й періодично повторюються) є на вишивках, шпалерах, тканинах, паркетній підлозі, орнаментах. На малюнках 312–314 подано орнаменти на старовинній грецькій вазі (мал. 312), вітражі в соборі Паризької Богоматері (Франція, Середньовіччя) (мал. 313), на стіні палацу Дарія в Сузах (Давня Персія) (мал. 314).

Мал. 312

Мал. 313

Мал. 314

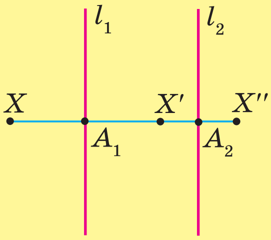
Дізнайтеся більше

1. Нехай деяке переміщення переводить фігуру F у фігуру F', а інше переміщення переводить фігуру F' у фігуру F''. Тоді послідовне виконання цих переміщень називають їх *композицією*.

Одна з композицій має таку властивість: **послідовне виконання двох осьових симетрій з паралельними осями симетрій є паралельним перенесенням.**

Доведемо це твердження.

Нехай задано дві осьові симетрії з паралельними осями l_1 і l_2 (мал. 315). Симетрія з віссю l_1 точку X переводить у точку X',



Мал. 315

а симетрія з віссю l_2 точку X' переводить у точку X''. Точки X, X', X'' лежать на одній прямій, оскільки $XX' \perp l_1$ і $X'X'' \perp l_2$, а прямі l_1 і l_2 — паралельні. Позначимо через A_1 і A_2 точки перетину прямої XX'' з l_1 і l_2.

Тоді $XX'' = 2A_1A_2$.

Справді, $XX'' = XA_1 + A_1X' + X'A_2 + A_2X'' = 2A_1X' + 2X'A_2 = 2(A_1X' + X'A_2) = 2A_1A_2$. Отже, відрізок, що сполучає точки X і X'', дорівнює відрізку $2A_1A_2$, який визначений заданням прямих l_1 і l_2. А це означає, що композиція двох осьових симетрій з паралельними осями є паралельним перенесенням на відстань $2A_1A_2$.

2. Значний внесок у розвиток шкільної геометрії зробив відомий український математик **Семенович Олександр Федорович** (1920–2009), який пройшов шлях від учителя математики сільської школи у Свердловській області до професора, завідувача кафедри геометрії та методики викладання математики Черкаського педінституту. Наукові інтереси О. Ф. Семеновича формувалися під впливом видатних математиків-педагогів А. М. Фішер, С. О. Яновської, А. М. Колмогорова. У 1949 р. О. Ф. Семенович захистив дисертацію на тему «Про числення точок», і його подальша наукова діяльність була пов'язана з геометрією та її викладанням. Творчий доробок ученого становить понад 150 праць, серед яких книги з проективної геометрії та основ геометрії, навчально-методичні посібники для вчителів та учнів. Він один з авторів шкільних підручників з геометрії 60–70-х років XX ст.

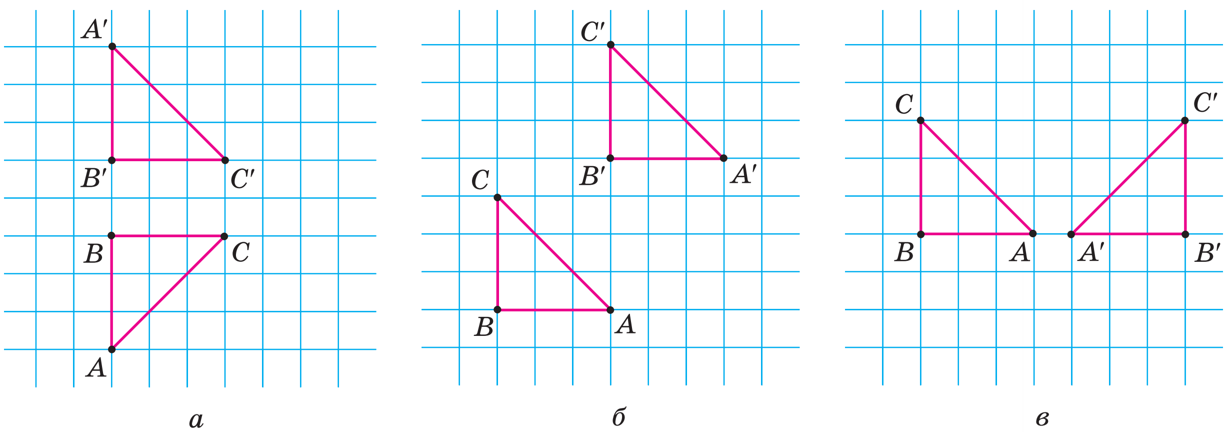
О. Ф. Семенович

Пригадайте головне

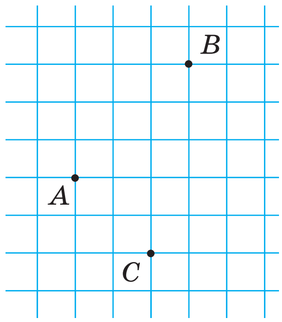
1. Яке перетворення називають паралельним перенесенням?
2. Доведіть, що паралельне перенесення є переміщенням.
3. Поясніть, чому при паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну їй пряму або сама в себе.
4. Назвіть властивості паралельного перенесення.

Розв'яжіть задачі

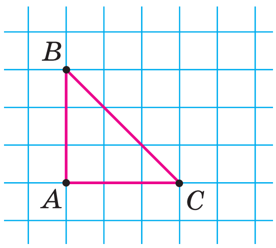
978'. На якому з малюнків 316, *а* — *в*, зображено паралельне перенесення, що переводить трикутник ABC в трикутник $A'B'C'$?



Мал. 316



Мал. 317



Мал. 318

979'. При паралельному перенесенні точка A переходить у точку B (мал. 317). За клітинками побудуйте точку D, у яку переходить точка C при цьому паралельному перенесенні.

980°. Дано відрізок AB і точку M, що не лежить на прямій AB. Виконайте паралельне перенесення відрізка AB так, щоб:
1) точка A перейшла в точку M;
2) точка B перейшла в точку M;
3) середина відрізка AB перейшла в точку M.

981°. Чи може пряма при паралельному перенесенні перейти сама в себе?

982°. Чи існує паралельне перенесення, за якого:
1) одна зі сторін прямокутника переходить в іншу його сторону;
2) одна сторона трикутника переходить в іншу його сторону?

983°. За клітинками побудуйте фігуру, у яку переходить трикутник ABC (мал. 318) при паралельному перенесенні, що переводить:
1) точку A в точку C;
2) точку C в точку B.

984°. **Накресліть прямокутник $ABCD$. Виконайте паралельне перенесення цього прямокутника так, щоб:**
1) точка A перейшла в точку C;
2) точка D перейшла в точку A;
3) точка A перейшла в точку B.

985°. Відрізки AB і CD — рівні. У якому випадку існує паралельне перенесення, що переводить один із цих відрізків у другий?

986°. Позначте точки A, B і C. Побудуйте точку, у яку переходить точка A при паралельному перенесенні, що переводить:
1) точку B в точку C;
2) точку C в точку B.
Розгляньте два випадки:
а) точка C лежить на прямій AB; б) точка C не лежить на прямій AB.

987°. Виконайте паралельне перенесення даного кола так, щоб його центр O перейшов у дану точку O_1.

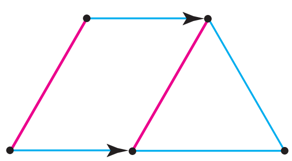
988. **За яких умов відрізок AB можна перевести у відрізок CD за допомогою паралельного перенесення?**

989. Дано паралельні прямі a і b. Скільки існує паралельних перенесень, що переводять одну із цих прямих у другу? Відповідь поясніть.

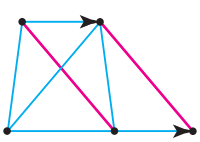
990. При паралельному перенесенні відрізка AB точка A переходить у точку B, а точка B — у точку B'. Доведіть, що точка B — середина відрізка AB'.

991. Виконайте паралельне перенесення квадрата $ABCD$ зі стороною 4 см так, щоб точка A перейшла в точку O перетину діагоналей. Знайдіть площу спільної частини даного й утвореного квадратів.

992. Доведіть, що різниця основ трапеції більша за різницю бічних сторін і менша від їх суми.



Мал. 319



Мал. 320

Якщо в умові задачі дано трапецію, то корисно паралельно перенести бічну сторону або діагональ так, як показано на малюнках 319 і 320. Потім використати властивості утвореного трикутника.

993. Доведіть, що в рівнобічній трапеції кути при основі рівні.

994. **Якщо діагоналі трапеції рівні, то трапеція — рівнобічна.** Доведіть.

995. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 6 см, бічна сторона — 2 см, а кут між ними — 60°. Знайдіть меншу основу трапеції.

996*. У рівнобічній трапеції гострий кут дорівнює 60°. Доведіть, що більша основа трапеції дорівнює сумі меншої основи й бічної сторони.

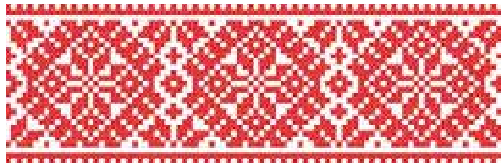
997*. Доведіть, що сума діагоналей трапеції більша за суму її основ.

998*. **Якщо в трикутнику дві медіани рівні, то він рівнобедрений.** Доведіть.

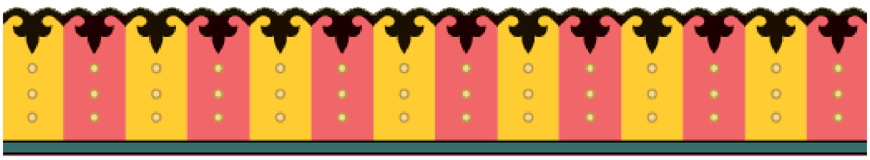
Проявіть компетентність

999*. Виокремте базовий елемент орнаменту та опишіть математичною мовою принцип побудови такого орнаменту:
1) на малюнку 321; 2) на малюнку 322; 3) на малюнку 323.

Мал. 321



Мал. 322



Мал. 323

1000. Села A і B розміщені на різних берегах річки (мал. 324). У якому місці потрібно побудувати міст, щоб шлях між селами був найкоротшим?

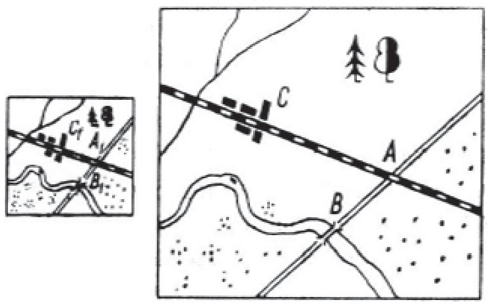
Мал. 324

§ 23. ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ

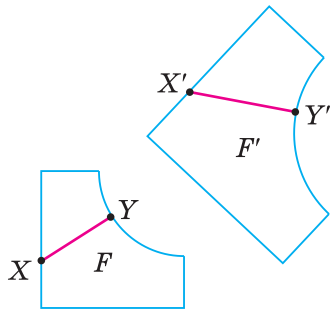
Подивіться на малюнок 325. З одного плану ділянки місцевості виготовили інший. При цьому відношення відстаней між відповідними парами точок на планах рівні й дорівнюють 2,5 (відношенню масштабів):

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\ldots=2{,}5.$$

Можна сказати, що один план одержали з іншого перетворенням подібності.



Мал. 325



Мал. 326

Перетворення, що переводить фігуру F у фігуру F', за якого відстані між відповідними точками змінюються в тому самому відношенні $k > 0$, називають *перетворенням подібності*, або *подібністю* (мал. 326). Це означає, що коли довільні точки X і Y фігури F при перетворенні подібності переходять у точки X' і Y' фігури F', то $X'Y' = k \cdot XY$, де $k > 0$. Число k називають *коефіцієнтом подібності*.

? Чи існує зв'язок між перетворенням подібності й переміщенням? Так. Переміщення можна розглядати як перетворення подібності з коефіцієнтом $k = 1$, тобто **переміщення є окремим випадком перетворення подібності**.

ТЕОРЕМА властивість перетворення подібності

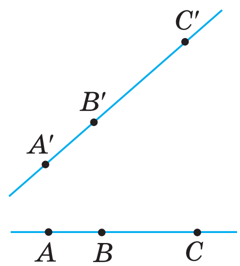
При перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.

Дано: перетворення, що є перетворенням подібності.
Довести: 1) точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій; 2) зберігається порядок взаємного розміщення точок на прямій.

Доведення. Нехай точки A, B і C лежать на одній прямій і точка B лежить між точками A і C (мал. 327). Тоді $AC = AB + BC$. Деяке перетворення подібності переводить точки A, B і C в точки A', B' і C'. За означенням перетворення подібності маємо:

$$A'C' = k \cdot AC = k \cdot (AB + BC) =$$
$$= k \cdot AB + k \cdot BC = A'B' + B'C'.$$

З рівності $A'C' = A'B' + B'C'$ випливає, що точки A', B' і C' лежать на одній прямій, а точка B' лежить між точками A' і C'.



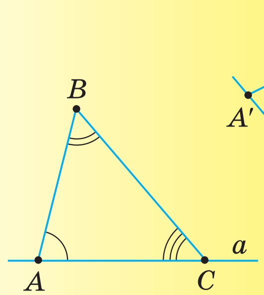
Мал. 327

НАСЛІДОК. Перетворення подібності прямі переводить у прямі, промені — у промені, відрізки — у відрізки.

Приймемо без доведення ще таку властивість: **перетворення подібності переводить кут у рівний йому кут.**

Властивості перетворення подібності подано в таблиці 30.

Таблиця 30

Перетворення подібності	Властивості
	1. Пряма переходить у пряму (a в a'), промінь — у промінь. 2. Відрізок переходить у відрізок (AB в $A'B'$, BC в $B'C'$, AC в $A'C'$). 3. Кут переходить у рівний йому кут ($\angle A' = \angle A$, $\angle B' = \angle B$, $\angle C' = \angle C$).

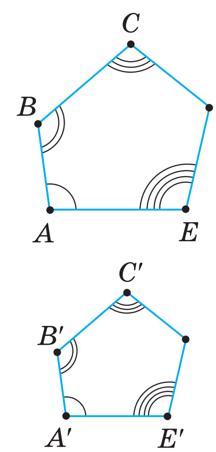
Дві фігури називаються подібними, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності.

Якщо фігура F подібна фігурі F', то записують $F \sim F'$ або (коли треба вказати коефіцієнт подібності) $F \overset{k}{\sim} F'$.

Подібні фігури добре відомі з практики. Наприклад, подібними є скановані копії документа, які зберегли в різних, але пропорційних форматах, дві однакові географічні карти різного масштабу, те саме фото, яке роздивляємось на смартфоні й на планшеті тощо. Прикладами подібних геометричних фігур можуть бути будь-які два квадрати, два кола.

Із властивостей перетворення подібності випливає, що в подібних фігурах відповідні кути рівні, а відповідні відрізки — пропорційні. Зокрема, у подібних многокутниках $ABC... E$ і $A'B'C'... E'$ (мал. 328):

$$\angle A = \angle A',\ \angle B = \angle B',\ ...\ ,\ \angle E = \angle E' \text{ і } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots = \frac{EA}{E'A'}.$$

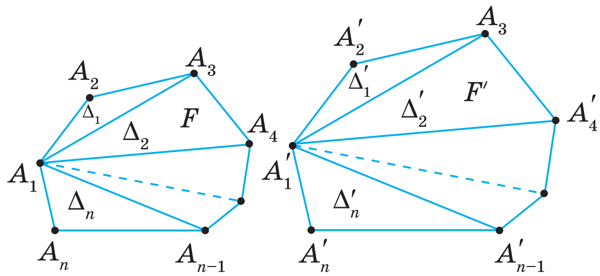


Мал. 328

ТЕОРЕМА про відношення площ подібних многокутників

Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Дано: F і F' — подібні многокутники з коефіцієнтом подібності k (мал. 329).



Мал. 329

Довести: $\dfrac{S_{F'}}{S_F} = k^2$.

Доведення. Розіб'ємо многокутник F на трикутники $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ (мал. 329). Оскільки многокутники F і F' подібні, то існує перетворення подібності, яке переводить многокутник F у многокутник F', а трикутники розбиття многокутника F — у трикутники $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_n$ відповідного розбиття многокутника F'. Площа многокутника F дорівнює сумі площ трикутників $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, а площа многокутника F' дорівнює сумі площ трикутників $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_n$. Якщо коефіцієнт подібності дорівнює k, то сторони й висоти трикутників многокутника F' у k разів більші (мал. 323) за відповідні сторони й висоти трикутників многокутника F.
Звідси випливає: $S_{\Delta'_1} = k^2 S_{\Delta_1}$, $S_{\Delta'_2} = k^2 S_{\Delta_2}$, ... , $S_{\Delta'_n} = k^2 S_{\Delta_n}$.
Додавши ці рівності почленно, дістанемо: $S_{F'} = S_{\Delta'_1} + S_{\Delta'_2} + \ldots + S_{\Delta'_n} = k^2 (S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + \ldots + S_{\Delta_n}) = k^2 S_F$.
Отже, $\dfrac{S_{F'}}{S_F} = k^2$.

Цей факт справджується для будь-яких фігур.

Коефіцієнт подібності k дорівнює відношенню довжин відповідних лінійних елементів фігур F і F'. Тому **площі подібних фігур відносяться, як квадрати їх відповідних лінійних елементів.**

Дізнайтеся більше

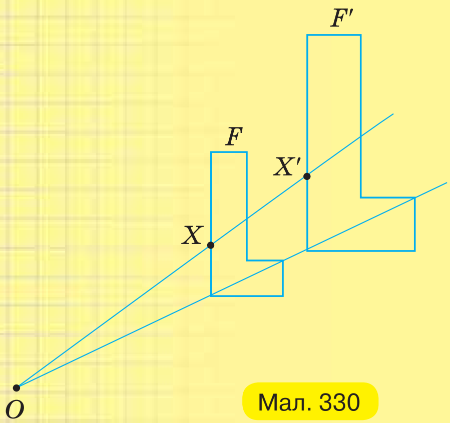
Розглянемо особливий спосіб побудови подібних фігур (мал. 330, 331). Нехай F — дана фігура. Позначимо довільну точку O. Через кожну точку X фігури F проведемо промінь OX і відкладемо на ньому відрізок OX', що дорівнює $k \cdot OX$. Одержимо шукану фігуру F'.

На малюнку 330 точки X і X' лежать на одному промені OX, а на малюнку 331 — на доповняльних променях OX і OX'. Щоб розрізняти ці випадки, вважають, що в першому випадку $k > 0$, а в другому — $k < 0$. Фігури F і F' називають *гомотетичними.*

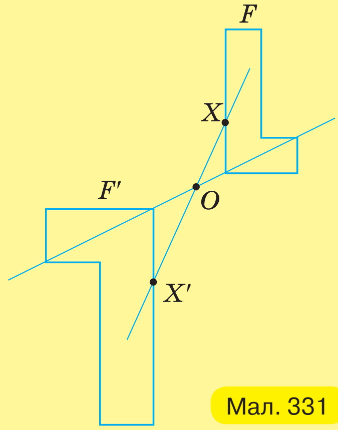
Перетворення називається гомотетією, якщо воно переводить кожну точку X фігури F у точку X' фігури F' так, що $OX' = |k|\, OX$, де k — будь-яке число, відмінне від нуля, O — фіксована точка, $X' \in OX$.

Число k називають *коефіцієнтом гомотетії*, точку O — *центром гомотетії*.

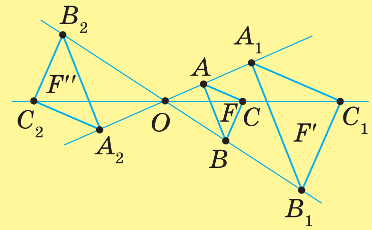
На малюнку 332 трикутник ABC при гомотетії з центром O та коефіцієнтом $k = 3$ переходить у трикутник $A_1B_1C_1$, а при гомотетії з коефіцієнтом $k = -2$ й тим самим центром — у трикутник $A_2B_2C_2$.



Мал. 330



Мал. 331



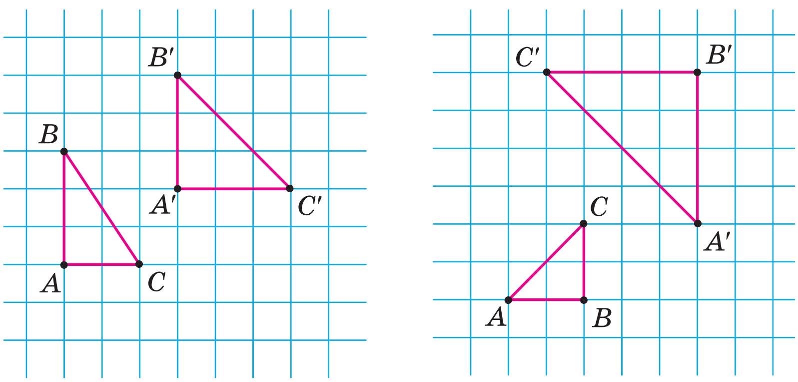
Мал. 332

Пригадайте головне

1. Що таке перетворення подібності?
2. Доведіть, що при перетворенні подібності точки, які лежать на прямій, переходять у точки, які теж лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.
3. У які фігури переходять прямі, промені, відрізки, кути під час перетворення подібності?
4. Які дві фігури називаються подібними? Наведіть приклади подібних фігур.
5. Сформулюйте теорему про відношення площ подібних многокутників.

Розв'яжіть задачі

1001°. На якому з малюнків 333, *а* — *б* зображено перетворення подібності, що переводить трикутник ABC в трикутник $A'B'C'$?

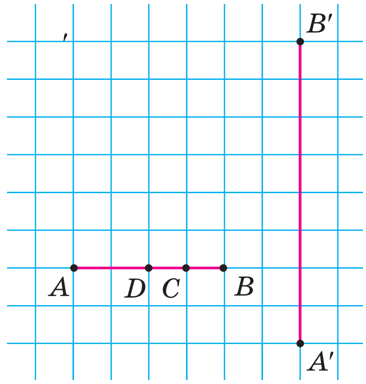


а *б*

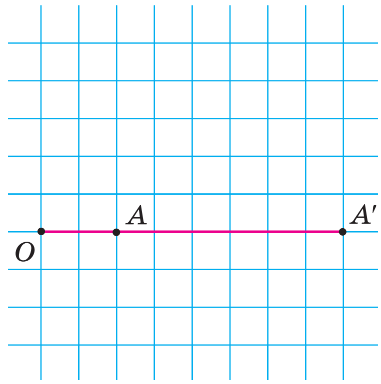
Мал. 333

1002°. На малюнку 334 перетворення подібності переводить відрізок AB у відрізок $A'B'$. За клітинками побудуйте точки, у які переходять точки C і D відрізка AB при цьому перетворенні.

1003°. На малюнку 335 перетворення подібності переводить відрізок OA у відрізок OA'. Скориставшись клітинками, знайдіть коефіцієнт подібності.



Мал. 334

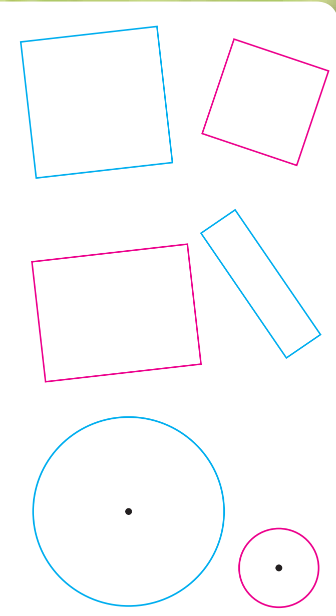


Мал. 335

1004°. За якої умови дві подібні фігури — рівні?

1005°. Побудуйте дві подібні, але не рівні фігури.

1006°. Чи достатньо лише рівності відповідних кутів двох многокутників або лише пропорційності відповідних сторін, щоб ці многокутники були подібними?



1007°. **Чи будуть подібними:**
1) два будь-які квадрати;
2) два будь-які прямокутники;
3) два будь-які кола?

1008°. Чому дорівнює відношення площ двох подібних многокутників, якщо коефіцієнт їх подібності дорівнює:
1) 0,5;
2) 2;
3) 5?

1009°. Площі двох подібних многокутників дорівнюють 16 см і 32 см. Знайдіть коефіцієнт подібності многокутників.

1010. Чи подібні два ромби, якщо:
1) кут одного ромба дорівнює 45°, а кут другого — 135°;
2) у кожного з них сторона дорівнює меншій діагоналі?

1011. Сторони одного прямокутника дорівнюють 12 см і 8 см, а сторони другого прямокутника — 6 см і 9 см. Чи подібні ці прямокутники? Відповідь поясніть.

1012. Кожну діагональ прямокутника поділено на три рівні частини й точки поділу послідовно сполучено відрізками. Чи подібний даному прямокутнику утворений чотирикутник?

1013. Карти одного району виготовлено в масштабах 1 : 25 000 і 1 : 100 000. Який коефіцієнт подібності цих карт?

1014. Середня лінія трапеції ділить її на дві частини. Чи подібні ці частини між собою? Чи подібна якась із цих частин даній трапеції?

1015. Сторони одного чотирикутника дорівнюють 16 см, 24 см, 32 см і 40 см. Менша сторона подібного йому чотирикутника дорівнює 14 см. Знайдіть сторони другого чотирикутника.

1016. Знайдіть відношення площ двох квадратів, якщо їхні сторони відносяться, як:
1) 1 : 4;
2) 2 : 5;
3) $m : n$.

1017. Як відносяться сторони двох квадратів, якщо їхні площі відносяться, як:
1) 4 : 9;
2) 1 : 16;
3) $m : n$?

1018. Площі двох квадратів відносяться, як 1 : 4. Знайдіть периметр другого квадрата, якщо периметр першого дорівнює:
1) 8 см;
2) 12 см;
3) 16 см.

1019. Відповідні сторони двох подібних многокутників дорівнюють 2 см і 4 см. Знайдіть площу більшого многокутника, якщо площа меншого дорівнює:
1) 14 см^2;
2) 25 см^2;
3) 30 см^2.

1020. У чотирикутнику $ABCD$ на відрізках AB, AC і AD позначено відповідні їм середини — K, L, M. Чи подібні чотирикутники $ABCD$ і $AKLM$?

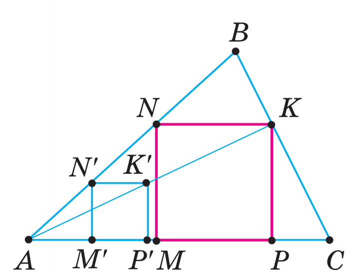
1021. Чи подібні трикутники ABC і AMN, якщо MN — середня лінія трикутника ABC? Відповідь поясніть.

1022*. Пряма ділить трапецію на дві подібні трапеції. Порівняйте довжину відрізка цієї прямої, що міститься між сторонами трапеції, з довжиною її середньої лінії.

1023*. Пряма, паралельна основам трапеції, ділить її на дві подібні трапеції. У якому відношенні ця пряма ділить бічні сторони трапеції, якщо її основи відносяться, як:
1) 1 : 4;
2) 2 : 3?

1024*. Упишіть у даний трикутник квадрат, дві вершини якого лежать на одній стороні, а дві інші вершини — на двох інших сторонах трикутника. За малюнком 336 складіть план побудови.

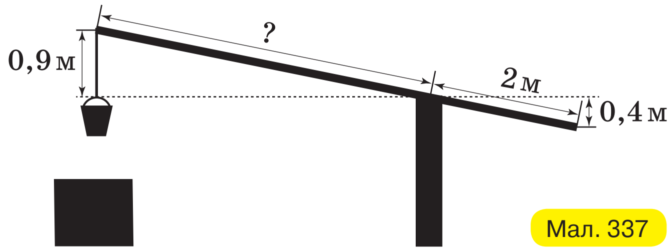
1025*. У трикутник ABC впишіть ромб із даним гострим кутом α так, щоб одна з його сторін лежала на основі AC трикутника, а дві його вершини — на бічних сторонах AB і BC трикутника.



Мал. 336

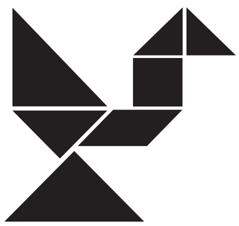
Проявіть компетентність

1026. Коротке плече «журавля» колодязя має довжину 2 м. Коли кінець короткого плеча опустився на 0,4 м, кінець довгого піднявся на 0,9 м (мал. 337). Яка довжина довгого плеча?

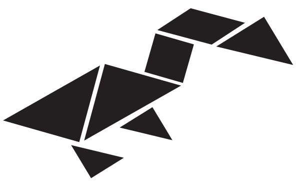


Мал. 337

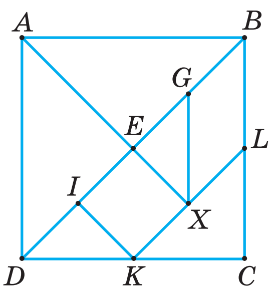
1027. На відстані 21 м одна від одної ростуть дві сосни. Висота першої сосни становить 39 м, а висота другої — 11 м. Знайдіть відстань між їхніми верхівками. Відповідь подайте в метрах.



Мал. 338



Мал. 339



Мал. 340

1028. У давньому Китаї зародилася гра (за легендою, її придумав китаєць Тан) — з певних геометричних фігур («танграмів»), складали різні силуети. Танграми вирізали із чорного картону або випилювали з дерева, тому силуети виходили правдоподібними (мал. 338, 339). На малюнку 340 ви бачите квадрат $ABCD$, у якому проведено відрізки — лінії розрізу квадрата для одержання танграмів. Точки K, M, L, G, I — середини відповідних відрізків.

1) Форму яких геометричних фігур мають танграми:
   а) на малюнку 338;
   б) на малюнку 339?
   Відповідь обґрунтуйте.
2) Чи є серед танграмів подібні фігури:
   а) на малюнку 338;
   б) на малюнку 339?
   Відповідь обґрунтуйте.
3) Чи є серед танграмів подібні фігури з коефіцієнтом 1:
   а) на малюнку 338;
   б) на малюнку 339?
   Відповідь обґрунтуйте.
4) Якщо серед танграмів є подібні фігури, то який коефіцієнт їх подібності:
   а) на малюнку 338;
   б) на малюнку 339?
   Відповідь обґрунтуйте.
5) Скільки рівних і скільки подібних танграмів використали для складання:
   а) силуету на малюнку 338;
   б) силуету на малюнку 339;
   в) силуетів на обох малюнках разом?
6) Придумайте інший силует, який можна скласти із танграмів.

1029. План земельної ділянки в масштабі 1 : 200 виконано на аркуші 407 × 288 мм. Чи поміститься на аркуші 288 × 203 мм цей план у масштабі 1 : 300?

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яке перетворення фігури називається переміщенням?
2. Назвіть властивості переміщення.
3. Які дві фігури називаються рівними?
4. Яке перетворення називають симетрією відносно даної точки; симетрією відносно даної прямої?
5. Яку фігуру називають центрально-симетричною; симетричною відносно даної прямої?
6. Що таке поворот?
7. Яке перетворення називають паралельним перенесенням?
8. Що таке перетворення подібності?
9. Назвіть властивості перетворення подібності.
10. Які дві фігури називаються подібними?

ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестових завдань потрібно 10–15 хв.

1° O — точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. Назвіть точку, симетричну точці A відносно точки O.

А. C.
Б. D.
В. A.
Г. B.

2° $ABCD$ — ромб. Назвіть точку, симетричну точці B відносно прямої AC.

А. B.
Б. D.
В. A.
Г. C.

3° Знайдіть відношення площ двох подібних многокутників, якщо коефіцієнт їх подібності дорівнює 0,5.

А. 0,5.
Б. 0,25.
В. 0,1.
Г. 0,025.

4 Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 12 см і 14 см. Менша сторона подібного йому трикутника дорівнює 6 см. Знайдіть решту сторін.

А. 8 см і 10 см.
Б. 18 см і 12 см.
В. 14 см і 24 см.
Г. 18 см і 21 см.

5* Площі двох квадратів відносяться, як 1 : 9. Знайдіть периметр другого квадрата, якщо периметр першого дорівнює 24 см.

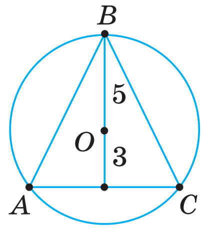
А. 72 см.
Б. 54 см.
В. 18 см.
Г. 216 см.

ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

1. МЕТОД КООРДИНАТ

Ви вже знаєте, що властивості геометричних фігур можна досліджувати засобами алгебри. Метод, який при цьому застосовують, називають *методом координат*. У §5 і §6 методом координат ви розв'язували такі дві задачі: 1) знаючи геометричні властивості фігури, знаходили її рівняння; 2) знаючи рівняння фігури, характеризували її властивості. На практиці нерідко виникає потреба розв'язати обидві задачі разом — спочатку за деякими властивостями фігури скласти її рівняння, а потім, дослідивши одержане рівняння, встановити нові властивості даної фігури.

Задача 1. Знайдіть довжини сторін рівнобедреного трикутника, вписаного в коло радіуса 5 см, якщо центр цього кола віддалений від основи трикутника на 3 см.

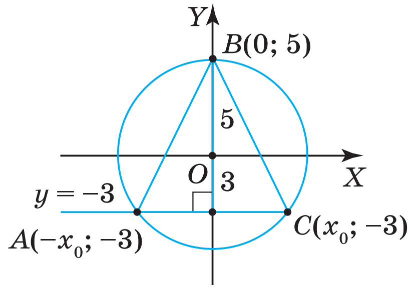


Мал. 341

Розв'язання. Нехай ABC — даний рівнобедрений трикутник з основою AC (мал. 341), точка O — центр описаного кола. Уведемо прямокутну декартову систему координат так, щоб її початок лежав у центрі кола, вісь OY містила висоту, проведену до основи AC трикутника, а вісь OX проходила паралельно цій основі (мал. 342).

Тоді дане коло задає рівняння $x^2 + y^2 = 25$, а вершини трикутника мають координати:

$$A(-x_0; -3),\ B(0; 5),\ C(x_0; -3),\ \text{де } x_0 > 0.$$



Мал. 342

Точка C лежить на даному колі, тому її координати задовольняють його рівняння: $x_0^2 + (-3)^2 = 25$. Звідси одержуємо: $x_0 = 4$, $A(-4; -3)$, $C(4; -3)$.

За координатами вершин трикутника знайдемо довжини його сторін:

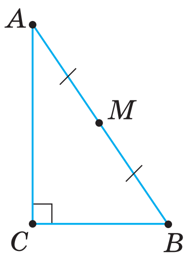
$AB = BC = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}$ (см), $AC = 8$ см.

Щоб застосувати метод координат:
1) накресліть задану фігуру та введіть прямокутну декартову систему координат (для цього вкажіть розміщення початку координат й осей абсцис і ординат відносно даної фігури);
2) визначте координати точок даної фігури;
3) скористайтеся відомими формулами.

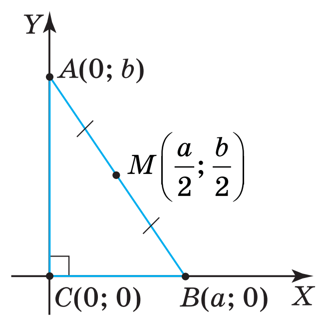
Застосування методу координат дозволяє спростити доведення властивостей фігури. Розглянемо приклад.

Задача 2. Доведіть, що середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від його вершин.

Розв'язання. Нехай ABC — даний прямокутний трикутник із прямим кутом C (мал. 343). Позначимо довжини його катетів малими літерами a і b, а середину гіпотенузи — M. Уведемо прямокутну декартову систему координат так, щоб її початок містився у вершині C трикутника, а його катети лежали на осях координат (мал. 344). Тоді вершини трикутника



Мал. 343



Мал. 344

матимуть координати: $C(0; 0)$, $B(a; 0)$, $A(0; b)$. Точка M є серединою гіпотенузи AB, тому вона має координати: $M\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$.

Знайдемо довжини відрізків MC, MA і MB:

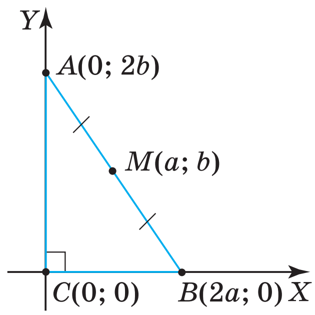
$$MC = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}},$$

$$MA = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}},$$

$$MB = \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}.$$

З одержаних рівностей випливає, що $MC = MA = MB$. Отже, точка M — рівновіддалена від вершин трикутника ABC.

? Чи можна в розглянутій задачі одержати простіші вирази для довжин відрізків? Так, якщо довжини катетів трикутника ABC позначити відповідно $2a$ і $2b$ (мал. 345).



Мал. 345

Якщо в розв'язуванні задачі потрібно використати координати середин відрізків, то можна застосувати прийом подвоєння числових значень довжин відрізків.

Знаючи координати вершин трикутника $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ і $C(x_3; y_3)$, можна знайти його площу. Для цього використовують такі формули.

У прямокутній декартовій системі координат:

$$S = \left|\frac{1}{2}(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2))\right|.$$

У косокутній системі координат з рівнозначними шкалами й кутом φ між осями:

$$S = \left|\frac{\sin\varphi}{2}(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2))\right|.$$

КОРОТКИЙ ЕКСКУРС В ІСТОРІЮ

Виникнення координат і системи координат має давню історію й пов'язане з астрономією та географією. Необхідність системи координат була зумовлена потребою визначати положення світил на небі й точок на поверхні Землі при складанні календаря, зіркових та географічних карт. На стіні однієї з похоронних камер Стародавнього Єгипту зображені сліди застосування ідеї прямокутних координат у вигляді квадратної сітки (палетки). Давньогрецького вченого Гіппарха (бл. 190–126 рр. до н. е.) вважають основоположником математичної картографії. Учений запропонував оперезати на мапі земну кулю паралелями й меридіанами та ввести географічні координати — широту й довготу, позначаючи їх числами.

ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

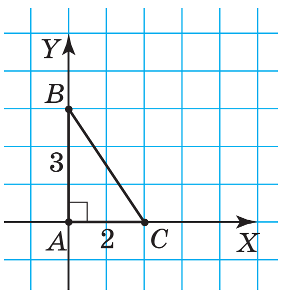
Розв’яжіть задачі

1030'. Чи правильно, що методом координат досліджують властивості геометричних фігур засобами алгебри?

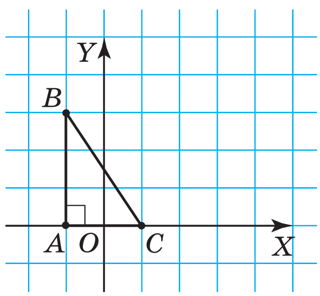
1031'. Чи правильно, що методом координат розв’язують такі задачі:
1) знаючи геометричні властивості фігури, знаходять її рівняння;
2) знаючи рівняння фігури, знаходять її властивості;
3) спочатку за деякими властивостями фігури складають її рівняння, а потім, дослідивши одержане рівняння, встановлюють нові властивості даної фігури?

1032'. Чи правильно вказано порядок кроків для застосування методу координат:
1) а) визначити координати точок даної фігури;
б) накреслити задану фігуру;
в) увести прямокутну декартову систему координат відносно даної фігури, тобто вказати розміщення початку координат та осей абсцис і ординат відносно цієї фігури;
г) скористатися відомими формулами;
2) а) накреслити задану фігуру;
б) увести прямокутну декартову систему координат відносно даної фігури, тобто вказати розміщення початку координат та осей абсцис і ординат відносно цієї фігури;
в) визначити координати точок даної фігури;
г) скористатися відомими формулами?

1033°. Відносно прямокутного трикутника *ABC* з катетами 2 і 3 введено систему координат так, як показано на малюнках 346 і 347. Які координати мають вершини трикутника?

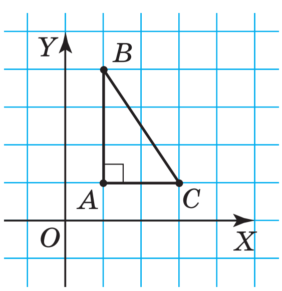


Мал. 346



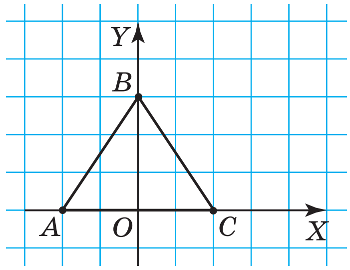
Мал. 347

1034°. Які координати мають вершини трикутника *ABC* з катетами 2 і 3 на малюнку 348?

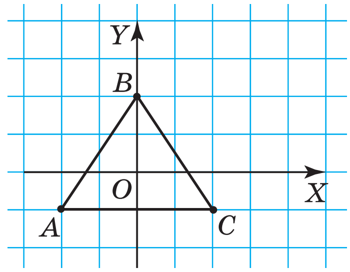


Мал. 348

1035°. Чи правильно визначено координати вершин рівнобедреного трикутника ABC у введеній відносно нього системі координат:
1) $A(-2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(2; 0)$ (мал. 349); 2) $A(-2; -1)$, $B(0; 3)$, $C(2; 0)$ (мал. 350)?



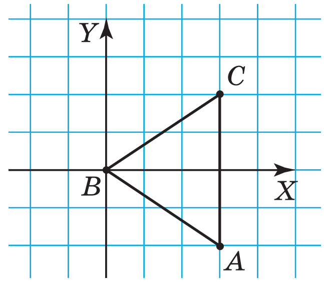
Мал. 349



Мал. 350

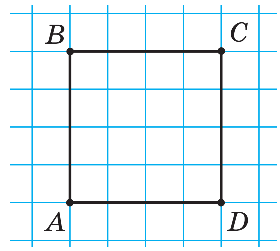
Відповідь поясніть.

1036°. Чи правильно визначено координати вершин рівнобедреного трикутника ABC у введеній відносно нього системі координат (мал. 351): $A(-2; 3)$, $B(0; 0)$, $C(2; 3)$? Відповідь поясніть.

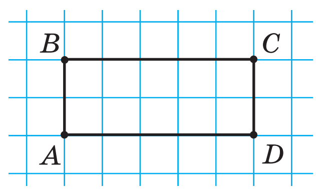


Мал. 351

1037°. На малюнках 352 і 353 зображено чотирикутник $ABCD$. Уведіть систему координат так, щоб у ній вершини чотирикутника мали координати:
1) $A(0; 0)$, $B(0; 4)$, $C(4; 4)$, $D(4; 0)$ (мал. 352);
2) $A(-2; 0)$, $B(-2; 2)$, $C(3; 2)$, $D(3; 0)$ (мал. 353).



Мал. 352



Мал. 353

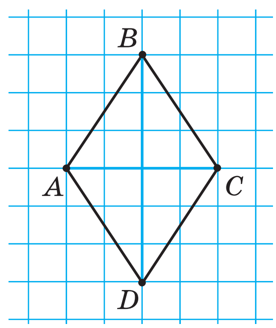
1038°. На малюнку 354 зображено чотирикутник $ABCD$. Уведіть систему координат так, щоб у ній вершини чотирикутника мали координати: $A(-2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(2; 0)$, $D(-3; 0)$.

1039°. У трикутнику ABC: $\angle A = 90°$, $AB = 6$ см, $AC = 8$ см. Уведіть прямокутну декартову систему координат так, як указано в таблиці 43, та заповніть її.

Таблиця 43

Початок координат у точці	Одиничний відрізок довжиною	Додатна піввісь координат		Координати вершин ΔABC		
		OX	OY			
		містить катет		A	B	C
A	1 см	AB	AC			
A	0,5 см	AB	AC			
A	2 см	AC	AB			

1040°. Діагоналі квадрата $ABCD$ зі стороною 2 см перетинаються в точці M. Уведіть прямокутну декартову систему координат з одиничним відрізком 1 см так, щоб початок координат лежав у вказаній точці, а на додатних півосях OX і OY лежали вказані відрізки:
1) A, AB, AD; 2) B, BC, AB.
Визначте координати вершин квадрата.



Мал. 354

1041°. Діагоналі квадрата $ABCD$ зі стороною 3 см перетинаються в точці P. Уведіть прямокутну декартову систему координат з одиничним відрізком 1 см так, щоб початок координат лежав у точці P, а на додатних півосях OX і OY лежали відрізки CP і PD відповідно. Визначте координати вершин квадрата.

ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

1042°. У прямокутному трикутнику ABC з катетами AB і BC знайдіть довжини медіан, якщо:
1) $AB = 3$, $BC = 4$; 2) $AB = 5$, $BC = 12$.

1043°. У прямокутному трикутнику ABC з катетами $AB = 7$ і $BC = 24$ знайдіть довжини медіан.

1044°. У рівнобедреному трикутнику ABC до основи AB проведено висоту CH. Знайдіть довжину медіани, проведеної до бічної сторони, якщо:
1) $AB = 12$, $CH = 4$; 2) $AB = 4$, $CH = 6$.

1045°. У рівнобедреному трикутнику ABC до основи $BC = \frac{16}{3}$ проведено висоту $AH = 6$. Знайдіть довжину медіани, проведеної до бічної сторони.

1046°. Знайдіть відстань між серединами протилежних сторін ромба, якщо його діагоналі дорівнюють:
1) $AC = 6$, $BD = 8$; 2) $AC = 10$, $BD = 24$.

1047°. Діагоналі ромба дорівнюють 14 і 48. Знайдіть відстань між серединами його протилежних сторін.

1048. Визначте координати вершин правильного шестикутника, якщо одна з координатних осей паралельна його стороні, а початок координат міститься:
1) у точці перетину діагоналей шестикутника;
2) у вершині шестикутника.

1049. Якою залежністю пов'язані відповідні координати вершин двох квадратів, що мають спільну вершину в початку координат й одну спільну сторону?

1050. Чи існують подібні трикутники з відповідно пропорційними координатами?

1051. У прямокутному трикутнику ABC на гіпотенузі AB взято точку M так, що $AM = 4$ см. Знайдіть довжину відрізка CM, якщо $AC = 15$ см, $BC = 20$ см.

1052. Точка M є серединою відрізка AB. Доведіть, що для будь-якої точки T площини справджується рівність: $TA^2 + TB^2 = 2\,TM^2 + 0{,}5\,AB^2$.

1053. Відстань між точками A і B дорівнює 4. Знайдіть геометричне місце точок M площини, для яких:
1) $MA^2 + MB^2 = 24$; 2) $MA^2 - MB^2 = 4$.

1054. **Доведіть, що в прямокутнику сума квадратів діагоналей дорівнює подвоєній сумі квадратів його суміжних сторін.**

1055. Якщо чотирикутник $ABCD$ — прямокутник, то для будь-якої точки M площини справджується рівність: $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$. Доведіть.

1056. Точка M лежить усередині квадрата $ABCD$ й відомо, що:
1) $MA = 7$, $MB = 13$, $MC = 17$; 2) $MA = 1$, $MB = \sqrt{5}$, $MC = 3$.
Знайдіть довжину сторони й діагоналі квадрата.

1057. Центр кола радіуса R лежить у вершині прямого кута прямокутного трикутника з катетами a і b. Чи перетинає коло гіпотенузу даного трикутника, якщо:
1) $a = 5$, $b = 12$, $R = 4$;
2) $a = 20$, $b = 15$, $R = 12$?

1058*. Доведіть, що сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює сумі половини квадрата третьої сторони трикутника та подвоєного квадрата медіани, проведеної до цієї сторони.

1059*. **Доведіть, що сума квадратів сторін паралелограма дорівнює сумі квадратів його діагоналей.**

1060*. **Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основам і дорівнює піврізниці основ.**

1061*. Точка A лежить на відстані 6 см від центра O кола з радіусом 2 см. На прямій OA знайдіть таку точку M, щоб довжина дотичної, проведеної із цієї точки до кола, дорівнювала відстані між точками M і A.

1062*. Доведіть, що сума квадратів відстаней від усіх вершин квадрата до прямої, що проходить через точку перетину його діагоналей, не залежить від вибору прямої.

1063*. Квадрат описано навколо кола радіуса R. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки кола до вершин квадрата дорівнює $12R^2$.

1064*. Навколо правильного трикутника зі стороною a описано коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки кола до вершин трикутника дорівнює $2a^2$.

1065*. Знайдіть геометричне місце точок, модуль різниці квадратів відстаней від яких до двох даних точок A і B дорівнює a^2, де a — заданий відрізок.

1066*. Якщо координати вершин трикутника є парними числами, то число, яке виражає його площу, є натуральним числом. Доведіть.

1067*. Якщо координати двох сусідніх вершин квадрата є цілими числами, то координати двох інших його вершин також є цілими числами. Доведіть.

Проявіть компетентність

1068. Якщо середини двох сторін трикутника та їх спільна вершина лежать у вузлах сітки, то середина третьої сторони також лежить у вузлі сітки. Доведіть.

1069. Якщо дві сусідні вершини квадрата лежать у вузлах сітки, то дві інші його вершини також лежать у вузлах сітки. Доведіть.

1070. Поясніть, як побудувати вершини квадрата у вузлах сітки, не будуючи його сторін. Розгляньте випадки, коли діагоналі квадрата:
1) лежать на лініях сітки;
2) не лежать на лініях сітки.

2. ВЕКТОРНИЙ МЕТОД

Дії додавання векторів і множення вектора на число дозволяють будь-який вектор на площині розкласти за будь-якими двома неколінеарними векторами. Таку впорядковану пару неколінеарних векторів називають *базисом площини*.

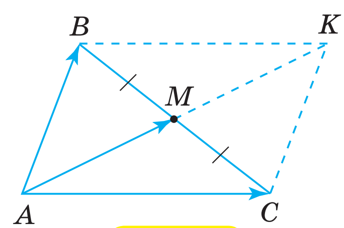
Наприклад, у трикутнику ABC (мал. 355) базис можна утворити з векторів $\overline{AC}$ і $\overline{AB}$. Тоді для вектора, заданого медіаною AM, одержимо розклад:

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AB}.$$

Якщо базис утворити з векторів $\overline{AC}$ і $\overline{AM}$, то за цим базисом можна розкласти вектор $\overline{AB}$. Для цього спочатку розкладемо за базисом вектор $\overline{CM}$, потім вектор $\overline{CB}$, а за ним — вектор $\overline{AB}$.

Отже, маємо:

$$\overline{CM} = \overline{AM} - \overline{AC},\ \overline{CB} = 2\overline{CM},$$
$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AC} + 2\overline{CM} = \overline{AC} + 2(\overline{AM} - \overline{AC}) = -\overline{AC} + 2\overline{AM}.$$



Мал. 355

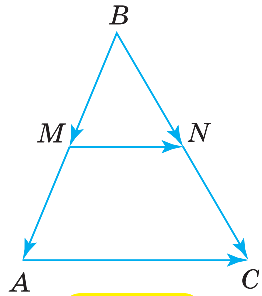
Зрозуміло, що розклад вектора $\overline{AB}$ за базисом $\overline{AC}$ і $\overline{AM}$ можна одержати й по-іншому. Поміркуйте над цим самостійно.

Векторний метод можна застосовувати для доведення тверджень.

Задача 1. Доведіть, що середня лінія трикутника паралельна третій стороні й дорівнює її половині.

Розв'язання. Нехай MN — середня лінія трикутника ABC (мал. 356).

Доведемо, що $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$.



Мал. 356

1. Уведемо вектори $\overline{MN}$ і $\overline{AC}$. Тоді мовою векторів вимогу задачі можна записати так: $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

2. Уведемо базис $\overline{BC}$ і $\overline{BA}$ та розкладемо за ним вектори $\overline{MN}$ і $\overline{AC}$.
$\overline{AC} = \overline{BC} - \overline{BA}$ (з ΔABC) і $\overline{MN} = \overline{BN} - \overline{BM}$ (з ΔMBN).
Оскільки точки M і N — середини сторін AB і BC трикутника ABC, то $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BA}$.

Підставивши одержані векторні рівності в розклад вектора $\overline{MN}$, матимемо:
$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC} - \frac{1}{2}\overline{BA} = \frac{1}{2}\left(\overline{BC} - \overline{BA}\right)$. Отже, $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

3. З останньої векторної рівності випливає: 1) вектори $\overline{MN}$ і $\overline{AC}$ — колінеарні, тобто відрізки MN і AC паралельні; 2) $\left|\overline{MN}\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{AC}\right|$, тобто $MN = \frac{1}{2}AC$.

1. Щоб застосувати метод векторів до розв'язування задач, треба виконати три кроки:
1) сформулювати задачу мовою векторів, для чого спочатку ввести базис і допоміжні вектори, а потім скласти векторну рівність;
2) перетворити векторну рівність, користуючись законами дій над векторами і відомими векторними рівностями;
3) перекласти знайдений результат мовою геометрії.

2. Установивши колінеарність векторів та пропорційність їх довжин, можна довести, що:
1) прямі або відрізки паралельні;
2) деяка точка є серединою відрізка або ділить його в певному відношенні;
3) три точки лежать на одній прямій.

3. Використовуючи скалярний добуток векторів, можна знайти:
1) довжину відрізка (як квадратний корінь зі скалярного квадрата відповідного вектора);
2) градусну міру кута (за формулою косинуса кута та тригонометричними таблицями).

Задача 2. Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — даний паралелограм (мал. 357). Уведемо базис $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$, а також вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$. Тоді мовою векторів вимогу задачі можна записати так:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{AB}^2 + 2\overline{AD}^2.$$

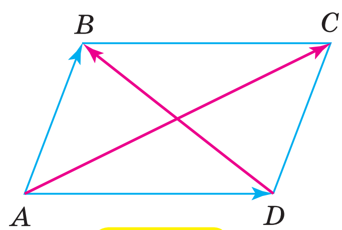
Розкладемо вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ за базисом $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ та знайдемо їх скалярні квадрати. Тоді одержимо:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD},$$

$$\overline{AC}^2 = \left(\overline{AB} + \overline{AD}\right)^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{AD}^2,$$

$$\overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD},$$

$$\overline{BD}^2 = \left(\overline{AB} - \overline{AD}\right)^2 = \overline{AB}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{AD}^2.$$



Мал. 357

Додавши почленно рівності, що містять скалярні квадрати шуканих векторів, одержимо:

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2\overline{AB}^2+2\overline{AD}^2.$$

Оскільки скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини, то з останньої рівності маємо:

$$AC^2+BD^2=2AB^2+2AD^2.$$

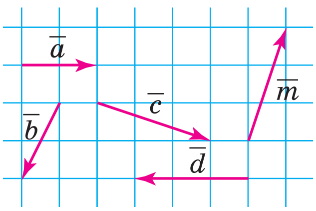
КОРОТКИЙ ЕКСКУРС В ІСТОРІЮ

У 1918 р. побачила світ книжка «Простір, час, матерія» видатного німецького математика Германа Вейля (1885–1955). Учений запропонував покласти в основу геометрії лише два поняття — «точка» і «вектор» та чотири операції над ними. Ці операції задаються так: 1) будь-якій парі точок A і B ставиться у відповідність деякий вектор $\overline{AB}$; 2) будь-яким векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$ ставиться у відповідність деякий вектор $\overline{a}+\overline{b}$ — сума векторів; 3) будь-якому вектору $\overline{a}$ й дійсному числу k ставиться у відповідність деякий вектор $k\overline{a}$ — добуток вектора на число; 4) будь-яким векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$ ставиться у відповідність деяке число $\overline{a}\,\overline{b}$ — скалярний добуток векторів. Відомі вам властивості дій над векторами прийняті як аксіоми. Але як теореми доводяться твердження, котрі ви вивчали як аксіоми в шкільному курсі геометрії. Наприклад, аксіома про те, що через дві точки можна провести пряму і тільки одну. Побудована автором теорія широко застосовується в сучасній фізиці, кристалографії, хімії, економіці та інших науках. За роботи з геометрії та спеціального розділу алгебри — теорії груп, Г. Вейль у 1927 р. отримав Міжнародну премію імені Лобачевського.

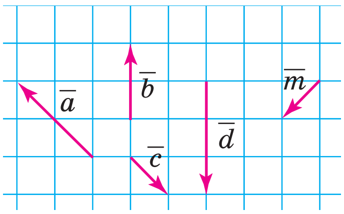
Герман Вейль

Розв'яжіть задачі

1071°. Назвіть пари векторів (мал. 358, 359), які можна обрати за базис площини.



Мал. 358

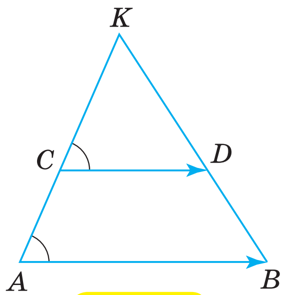


Мал. 359

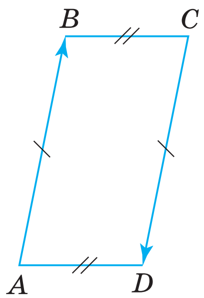
1072°. Чи утворюють базис вектори, які:
1) колінеарні;
2) рівні;
3) неколінеарні?

1073°. Яка з умов свідчить про паралельність прямих AB і MP:
1) $\overline{AB}\parallel\overline{MP}$;
2) $\overline{AB}\cdot\overline{MP}=0$;
3) $\overline{AB}=\overline{MP}$;
4) $\overline{AB}=\lambda\overline{MP}$;
5) $\overline{AM}=\overline{BP}$?

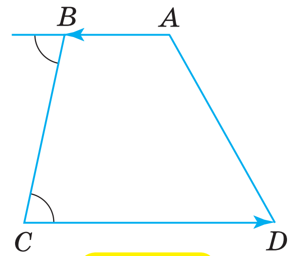
1074°. Чому вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ на малюнках 360–362 не можна вважати базисом площини?



Мал. 360



Мал. 361



Мал. 362

1075°. Чи правильно, що точки A, B і C лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли $\overline{AB} = k\overline{BC}$? Відповідь обґрунтуйте.

1076°. Сформулюйте мовою векторів твердження:
1) прямі AB і MP — паралельні;
2) прямі AB і MP — перпендикулярні;
3) точки A, B і C лежать на одній прямій;
4) відрізки AB і MP — рівні;
5) точка M — середина відрізка AB;
6) AM — медіана трикутника ABC;
7) MN — середня лінія трикутника ABC, що паралельна стороні AC;
8) з медіан трикутника можна скласти трикутник;
9) $ABCD$ — паралелограм;
10) $ABCD$ — трапеція з основами AD і BC.

1077°. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в серединах сторін трапеції — паралелограм.

1078°. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в серединах сторін довільного чотирикутника — паралелограм.

1079°. Доведіть, що діагоналі квадрата перпендикулярні.

1080°. Доведіть, що діагоналі прямокутника рівні.

1081°. Доведіть теорему Піфагора.

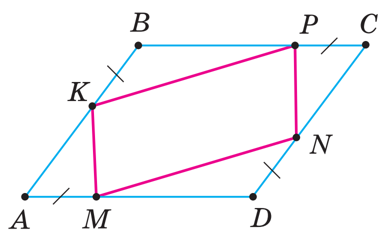
1082°. Трикутник ABC переходить у трикутник $AB'C'$ при перетворенні подібності з коефіцієнтом $k = 3$. Доведіть, що $BC \parallel B'C'$.

1083. **Доведіть, що вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхні координати пропорційні.**

1084. **Координати суми двох векторів дорівнюють сумам відповідних координат даних векторів.** Доведіть.

1085. У паралелограмі $ABCD$ точка M — середина сторони AD, а N — середина сторони BC. Доведіть, що $BNDM$ — паралелограм.

1086. На сторонах паралелограма $ABCD$ відкладено, як показано на малюнку 363, рівні відрізки AM, DN, CP, BK. Доведіть, що $MNPK$ — паралелограм.



Мал. 363

1087. Поза паралелограмом $ABCD$ з гострим кутом A побудовано рівносторонні трикутники ABE і CDF. Доведіть, що $AECF$ — паралелограм.

1088. $ABCD$ і $ABEF$ — паралелограми (мал. 364). Доведіть, що $DF = CE$ і $DF \parallel CE$.

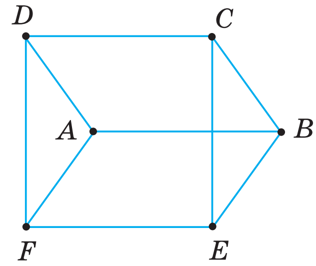
1089. $ABCD$ — паралелограм (мал. 365), $AM = KC$, $BN = PD$. Доведіть, що $MP = NK$ і $MP \parallel NK$.

1090. Медіану AO трикутника ABC продовжено на відрізок $OD = AO$. Точку D сполучено з вершинами B і C трикутника. Доведіть, що $CD = AB$ і $CD \parallel AB$.

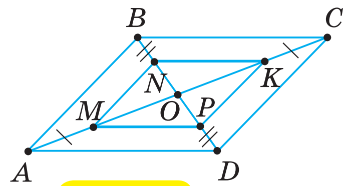
1091. Доведіть, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

1092. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини бічних сторін трапеції, паралельний її основам і дорівнює їх півсумі.

1093. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний її основам і дорівнює їх піврізниці.



Мал. 364



Мал. 365

1094. Доведіть тотожність $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)^2+\left(\bar{a}-\bar{b}\right)^2=2\left(\left|\bar{a}\right|^2+\left|\bar{b}\right|^2\right)$. З'ясуйте її геометричний зміст.

1095*. Доведіть, що якщо діагоналі чотирикутника перпендикулярні, то суми квадратів протилежних сторін цього чотирикутника рівні між собою.

1096*. Доведіть, що точка перетину медіан трикутника ділить кожну медіану у відношенні $2:1$, починаючи від вершини трикутника.

1097*. Доведіть, що три висоти трикутника перетинаються в одній точці.

1098*. Знайдіть залежність між сторонами трикутника ABC, якщо його медіани AA_1 і BB_1 перпендикулярні.

1099*. Правильний трикутник ABC зі стороною a вписано в коло. Точка M — деяка точка кола. Доведіть, що сума $MA^2 + MB^2 + MC^2$ не залежить від вибору точки M.

1100*. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3R^2$, де M — точка перетину медіан трикутника ABC, R — радіус описаного навколо нього кола.

1101*. Точки A, B, C, D, N, M — середини сторін опуклого шестикутника $KFPHLG$. Доведіть, що існує трикутник, сторони якого паралельні й рівні відрізкам AB, CD, MN.

1102*. На стороні AD і діагоналі AC паралелограма $ABCD$ взято точки M і N так, що $AM = \frac{1}{5}AD$ і $AN = \frac{1}{6}AC$. Доведіть, що точки B, M і N лежать на одній прямій.

1103*. Доведіть нерівність $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}\le\sqrt{12}$ за умови, що $a + b = 1$.

1104*. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=2\sqrt{x}$.

Проявіть компетентність

1105. Тіло, маса якого дорівнює m, сповзає під дією сили тяжіння з похилої площини. Знайдіть модуль складової сили тяжіння, яка напрямлена вздовж похилої площини, якщо кут нахилу дорівнює β.

1106. Малюк тягне санки із силою 10 Н на відстань 20 м. Кут між напрямом сили і напрямом переміщення дорівнює 45°. Яку роботу виконав малюк, перетягуючи санки?

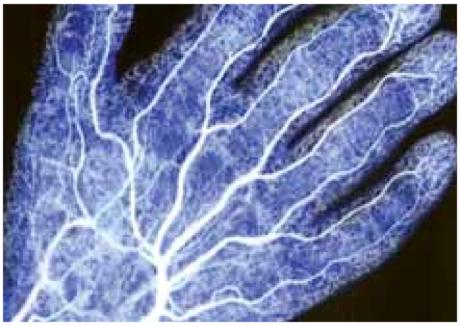
1107. Троє учнів, намагаючись зрушити з місця вантаж, тягнуть його кожний у свою сторону з однаковою силою 100 Н. Які кути між напрямами їхніх сил, якщо вантаж не зрушив з місця? Як треба змінити ці напрями, щоб зрушити з місця вантаж?

1108. Населені пункти A і B розташовані на різних берегах річки, які можна вважати паралельними. У якому місці слід будувати міст MN через річку, щоб шлях $AMNB$ був найкоротшим?

3. ФРАКТАЛИ

Подивіться на малюнки 366–369. Ви бачите дельту річки, судини людської долоні, лист папороті, качан капусти Романеско. Якщо виокремити будь-яку частину такого зображення, то можна побачити, що ця частина є зменшеною копією повного зображення. Якщо далі з виділеної частини виокремити якусь її частину, то знову одержимо зменшену копію, причому не лише виділеної за першим разом частини, а й повного зображення. Таке явище називають самоподібністю. У природі самоподібність є досить поширеною. Її можна побачити в будові блискавки, сніжинки, крони дерева, мушлі тощо. Нині для самоподібних структур використовують спеціальну назву «*фрактал*».


Мал. 366

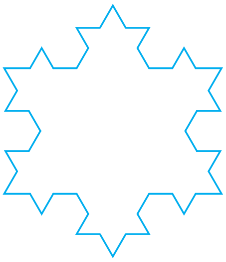

Мал. 367


Мал. 368


Мал. 369

У геометрії фракталом називають геометричну фігуру, яка складається із частин, що за довільного збільшення є подібними до неї самої.

Одним з перших фракталів, досліджених ученими, є сніжинка Коха (мал. 370). Вона складається з трьох копій кривої Коха, про яку вперше йшлося у статті шведського математика Хельге фон Коха в 1904 р. Ця крива була придумана як приклад неперервної лінії, до якої не можна провести дотичну в жодній точці. Це суцільна «колючка». У цьому можна переконатися, виконавши принаймні перші кроки побудови цієї кривої.


Мал. 370

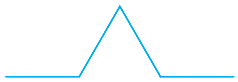
Задача. Виконайте перші три кроки побудови кривої Коха.

Розв'язання.

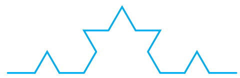
1. Побудуємо відрізок (мал. 371).
2. Поділимо цей відрізок на три рівні частини й на середній з них добудуємо рівносторонній трикутник, а його основу видалимо. Одержимо ламану, що складається із чотирьох рівних відрізків, довжина кожного з яких дорівнює третині довжини початкового відрізка (мал. 372).

3. До кожного з одержаних чотирьох відрізків застосуємо алгоритм, описаний у п. 2. Одержимо нову ламану, у якої всі ланки є рівними відрізками. Довжина кожної ланки ламаної дорівнює дев'ятій частині довжини початкового відрізка (мал. 373).

Мал. 371



Мал. 372



Мал. 373

? Чи можна побудувати криву Коха цілком? Ні. Цей процес нескінченний.

Із цієї властивості кривої Коха випливає цікава властивість сніжинки Коха — її периметр є нескінченним, але вона обмежує фігуру скінченної площі:

$$S = \frac{2\sqrt{3}}{5}a^2,$$ де a — довжина сторони початкового трикутника.

Формулу площі сніжинки Коха неважко вивести, спираючись на формулу площі трикутника й формулу суми геометричної прогресії. Проведіть ці обчислення самостійно.

КОРОТКИЙ ЕКСКУРС В ІСТОРІЮ

Бенуа Мандельброт

Термін *фрактал* (лат. *fractus* — подрібнений, дробовий) увів усесвітньо відомий математик Бенуа Мандельброт (1924–2010) — засновник фрактальної геометрії.

У 1977 р. Б. Мандельброт опублікував роботу «Фрактальна геометрія природи», у якій стверджував, що випадкові на перший погляд форми є насправді складними геометричними фігурами, що складаються з менших фігур, які точно повторюють більшу. За допомогою цього відкриття став можливим геометричний опис предметів, що раніше не піддавалися вимірюванню — таких як хмари або малюнок рельєфу місцевості. Теорія фракталів також знайшла застосування у фізиці, хімії, астрономії та інших галузях знання.

Досліджуючи економіку, Б. Мандельброт виявив, що довільні зовні коливання ціни можуть випливати з прихованого математичного порядку, який не описується стандартними кривими. Б. Мандельброт зайнявся вивченням статистики цін на бавовну за великий період часу (понад сто років). Коливання цін у плині дня здавалися випадковими, але вчений зміг з'ясувати тенденцію їхньої зміни. Він простежив симетрію в тривалих коливаннях ціни й коливаннях короткочасних. Це відкриття виявилося несподіванкою для економістів. По суті, Б. Мандельброт застосував для розв'язання цієї проблеми зачатки свого фрактального методу.

Розв'яжіть задачі

1109. Побудуйте сніжинку Коха.

1110. Побудуйте сніжинку Коха «навпаки» (криві Коха будуються всередину рівностороннього трикутника).

1111. Побудуйте квадратний варіант сніжинки Коха «навпаки» (використайте квадрат замість трикутника).

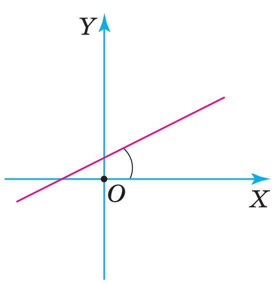
1112. Побудуйте фрактал на основі ліній Чезаро. Для цього в алгоритмі побудови сніжинки Коха замість рівносторонніх трикутників використайте рівнобедрені з кутом при основі, наприклад, 70°.

Проявіть компетентність

1113. Наведіть приклад фракталу з довкілля.

ГОТУЄМОСЬ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ



$k = \operatorname{tg} \alpha.$

1. Який кут утворює з віссю ординат пряма $y = \sqrt{3}x - 1$?
А. 45°.
Б. 60°.
В. 30°.
Г. 90°.

2. Який кут утворює з віссю ординат пряма $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$?
А. 45°.
Б. 60°.
В. 30°.
Г. 90°.

3. Яка з прямих перетинає коло $(x - 2)^2 + y^2 = 4$?
А. $x = -3$.
Б. $x = 5$.
В. $y = 1$.
Г. $y = -3$.

4. Яка з прямих перетинає коло $x^2 + (y - 1)^2 = 9$?
А. $x = -2$.
Б. $x = 5$.
В. $y = 5$.
Г. $y = -3$.

5. Яка з точок лежить на обох прямих: $y = 3x - 7$ і $y = 2x - 6$?
А. (2; –1).
Б. (1; –4).
В. (3; 0).
Г. (4; 5).

6. Яка з точок лежить на обох прямих: $y = 2x + 5$ і $y = 7x - 15$?
А. (3; 11).
Б. (1; –8).
В. (4; 13).
Г. (2; 9).

7. Точка B — середина відрізка AM, а точка N — середина відрізка AB. Визначте координати точки M, якщо $A(2; -5)$, $N(-1; -3)$.
А. $M(-10; 3)$.
Б. $M(-1; -3)$.
В. $M(6; -4)$.
Г. $M(0; -3)$.

8. Точка C — середина відрізка AM, а точка P — середина відрізка AC. Визначте координати точки M, якщо $A(3; -2)$, $P(3{,}5; -3)$.
А. $M(5; -6)$. **В.** $M(14; -12)$.
Б. $M(10{,}5; -9)$. **Г.** $M(1; -2)$.

9. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо $A(-2; -2)$, $B(2; 2)$, $C(8; 2)$, $D(4; -2)$.

10. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо $A(-2; -1)$, $B(0; 2)$, $C(5; 2)$, $D(3; -1)$.

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

1. $|\overline{b}|=1,\ |\overline{a}|=6,\ \left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)=150°.\ 2\,\overline{a}\overline{b}=...$

А. $3\sqrt{3}$. **В.** $-6\sqrt{3}$.
Б. $6\sqrt{3}$. **Г.** 6.

2. $|\overline{b}|=4,\ |\overline{a}|=3,\ \left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)=135°.\ -3\,\overline{a}\overline{b}=...$

А. $18\sqrt{2}$. **В.** $-18\sqrt{2}$.
Б. $-9\sqrt{2}$. **Г.** $9\sqrt{2}$.

3. $\overline{a}\,(1;\,2)$, $\overline{b}\,(6;\,3)$. Порівняйте довжини векторів $2\overline{a}$ і $-\overline{b}$.

А. $|2\overline{a}|<|-\overline{b}|$. **В.** $|2\overline{a}|=|-\overline{b}|$.
Б. $|2\overline{a}|>|-\overline{b}|$. **Г.** Не можна визначити.

4. $\overline{a}\,(12;\,-9)$, $\overline{b}\,(6;\,3)$. Порівняйте довжини векторів $\frac{1}{3}\overline{a}$ і $-\overline{b}$.

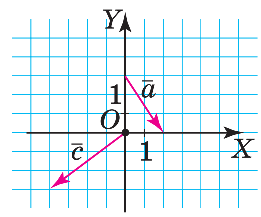
А. $\left|\frac{1}{3}\overline{a}\right|<|-\overline{b}|$. **В.** $\left|\frac{1}{3}\overline{a}\right|=|-\overline{b}|$.
Б. $\left|\frac{1}{3}\overline{a}\right|>|-\overline{b}|$. **Г.** Не можна визначити.

5. $\overline{b}\,(6;\,-8)$, $\overline{a}\,(2;\,1)$, $\overline{c}\,(x;\,-5)$. Знайдіть x, якщо $\overline{c}=0{,}5\,\overline{b}-\overline{a}$.
А. 4. **В.** 10.
Б. 1. **Г.** Не можна визначити.

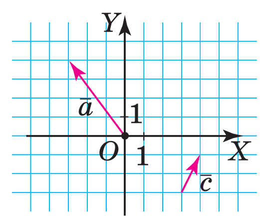
6. $\overline{b}\,(5;\,-2)$, $\overline{a}\,(2;\,1)$, $\overline{c}\,(1;\,x)$. Знайдіть x, якщо $\overline{c}=\overline{b}-2\,\overline{a}$.
А. −4. **В.** −1.
Б. 0. **Г.** Не можна визначити.

7. На малюнку 374 дано вектори $\overline{c}$ і $\overline{a}$. Знайдіть косинус кута між векторами $\overline{c}$ і $\overline{a}$.

8. На малюнку 375 дано вектори $\overline{c}$ і $\overline{a}$. Знайдіть косинус кута між векторами $\overline{c}$ і $\overline{a}$.



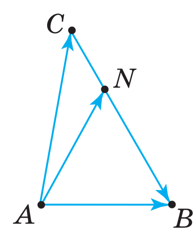
Мал. 374



Мал. 375

9. У трикутнику ABC $AN : NB = 1 : 2$ (мал. 376). Розкладіть вектор $\overline{AN}$ за векторами $\overline{AC}$ і $\overline{CB}$.

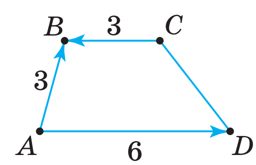
А. $-\overline{AC}+\frac{1}{3}\overline{CB}$. **В.** $\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{CB}$.
Б. $-\overline{AC}-\frac{1}{3}\overline{CB}$. **Г.** $\overline{AC}+\frac{1}{3}\overline{CB}$.



Мал. 376

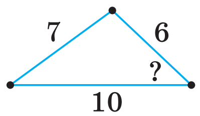
10. $ABCD$ — трапеція з основами AD і BC (мал. 377). Розкладіть вектор $\overline{CB}$ за векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$.

А. $\frac{1}{2}\overline{AD}$. **В.** $\overline{AB}+\overline{AD}$.
Б. $\overline{AB}-\overline{AD}$. **Г.** $-\frac{1}{2}\overline{AD}$.

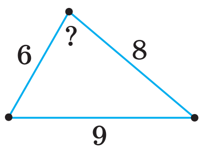


Мал. 377

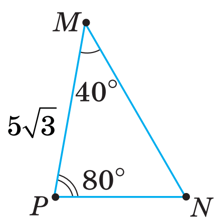
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ



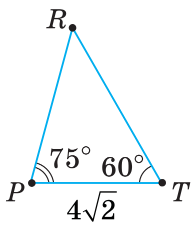
Мал. 378



Мал. 379



Мал. 380



Мал. 381

1. За даними на малюнку 378 визначте косинус невідомого кута.

А. $\frac{113}{140}$. **В.** $\frac{3}{40}$.
Б. $-\frac{5}{28}$. **Г.** $\frac{29}{40}$.

2. За даними на малюнку 379 визначте косинус невідомого кута.

А. $\frac{109}{144}$. **В.** $\frac{53}{108}$.
Б. $\frac{19}{96}$. **Г.** $\frac{3}{4}$.

За даними на малюнку 380 розв'яжіть задачі 3–4.

3. Складіть вираз для обчислення сторони NP.

А. $10\sin 80°$. **В.** $10\sin 40°$.
Б. $5\sin 80°$. **Г.** $5\sin 40°$.

4. Визначте радіус кола, описаного навколо трикутника MNP.

А. 5. **В.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.
Б. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **Г.** 2,5.

За даними на малюнку 381 розв'яжіть задачі 5–6.

5. Складіть вираз для обчислення сторони RT.

А. $2\sin 75°$. **В.** $4\sqrt{3}$.
Б. $2\sqrt{6}$. **Г.** $8\sin 75°$.

6. Визначте діаметр кола, описаного навколо трикутника PRT.

А. 8. **В.** $2\sqrt{2}$.
Б. 4. **Г.** $4\sqrt{2}$.

7. Обчисліть сторону трикутника, якщо його площа дорівнює $36\sqrt{2}$ см², одна зі сторін — 4 см, а кут між даною й шуканою сторонами — 45°.

А. $9\sqrt{2}$ см. **В.** 18 см.
Б. 54 см. **Г.** 36 см.

8. Обчисліть сторону трикутника, якщо його площа дорівнює $18\sqrt{3}$ см², одна зі сторін — 6 см, а кут між даною й шуканою сторонами — 60°.

А. 27 см. **В.** 12 см.
Б. $12\sqrt{3}$ см. **Г.** 36 см.

9. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 13$ см, $AC = 15$ см, $\angle CAD = 60°$. Знайдіть периметр паралелограма.

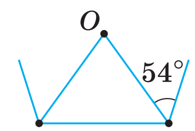
10. Діагоналі паралелограма, що дорівнюють 8 см і 12 см, при перетині утворюють кути, які відносяться, як 1 : 2. Визначте площу паралелограма.

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ. ДОВЖИНА КОЛА. ПЛОЩА КРУГА

1. Знайдіть градусну міру внутрішнього кута правильного 10-кутника.
А. $100°$. **В.** $150°$.
Б. $144°$. **Г.** $160°$.

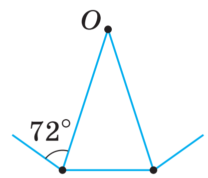
2. Знайдіть градусну міру внутрішнього кута правильного 15-кутника.
А. $100°$. **В.** $156°$.
Б. $144°$. **Г.** $160°$.

3. За даними на малюнку 382 знайдіть кількість сторін правильного многокутника із центром O.
А. 10. **В.** 5.
Б. 9. **Г.** 4.



Мал. 382

4. За даними на малюнку 383 знайдіть кількість сторін правильного многокутника із центром O.
А. 10. **В.** 5.
Б. 9. **Г.** 4.



Мал. 383

5. Знайдіть довжину кола, вписаного в правильний чотирикутник зі стороною a.
А. $\frac{\pi a}{2}$. **В.** πa.
Б. $\pi a\sqrt{2}$. **Г.** πa^2.

6. Знайдіть площу круга, описаного навколо правильного чотирикутника зі стороною a.
А. $\frac{3\pi a^2}{4}$. **В.** $\frac{\pi a^2}{4}$.
Б. $\frac{\pi a^2}{2}$. **Г.** $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

7. Більша діагональ правильного шестикутника дорівнює 12 см. Знайдіть периметр шестикутника.
А. $12\sqrt{3}$ см. **В.** 24 см.
Б. $6\sqrt{3}$ см. **Г.** 36 см.

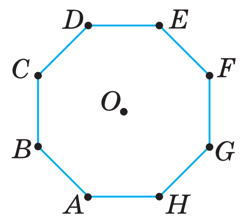
8. Більша діагональ правильного шестикутника дорівнює 8 см. Знайдіть меншу діагональ шестикутника.
А. $18\sqrt{3}$ см. **В.** 24 см.
Б. $4\sqrt{3}$ см. **Г.** 16 см.

9. У коло вписано правильний трикутник зі стороною $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону правильного чотирикутника, описаного навколо даного кола.

10. У коло вписано правильний шестикутник зі стороною 6 см. Знайдіть сторону правильного чотирикутника, описаного навколо даного кола.

ГОТУЄМОСЬ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ



Мал. 384

За малюнком 384 розв'яжіть задачі 1–6.

ABCDEFGH — правильний восьмикутник. *O* — його центр.

1. При симетрії відносно прямої *CG* трикутник *OAB* переходить у трикутник...

А. *OED*. В. *ODE*.
Б. *OFE*. Г. *OEF*.

2. При симетрії відносно прямої *AE* трикутник *HFG* переходить у трикутник...

А. *BDC*. В. *DCB*.
Б. *DBC*. Г. *AEG*.

3. При симетрії відносно точки *O* трикутник *ABD* переходить у трикутник...

А. *HGE*. В. *EFH*.
Б. *HEB*. Г. *EFC*.

4. При симетрії відносно точки *O* трикутник *HOG* переходить у трикутник...

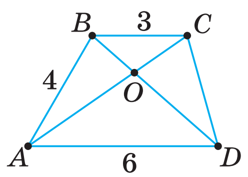
А. *COB*. В. *DOE*.
Б. *DOC*. Г. *COD*.

5. При повороті навколо точки *O* на кут 90° проти годинникової стрілки трикутник *GOF* переходить у трикутник...

А. *AOC*. В. *AOH*.
Б. *BOC*. Г. *EOD*.

6. При повороті навколо точки *O* на кут 135° за годинниковою стрілкою трикутник *ODC* переходить у трикутник...

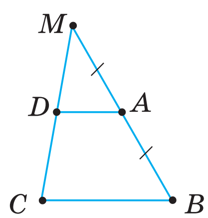
А. *OGH*. В. *OAH*.
Б. *OGF*. Г. *OGH*.



Мал. 385

7. *ABCD* — трапеція з основами *AD* і *BC* (мал. 385). Знайдіть коефіцієнт перетворення подібності, за якого точка *A* переходить у точку *C*.

А. $\frac{1}{2}$. В. 4.
Б. −2. Г. 2.



Мал. 386

8. У трикутнику *CBM* проведено середню лінію *AD* (мал. 386). Знайдіть коефіцієнт перетворення подібності, за якого точка *C* переходить у точку *D*.

А. $-\frac{1}{2}$. В. −2.
Б. $\frac{1}{2}$. Г. 2.

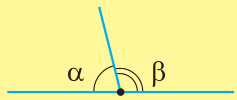
9. Трикутники *ABC* і $A_1B_1C_1$ подібні. $S_{ABC}=1$, $S_{A_1B_1C_1}=25$. Висота B_1H_1 трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 3. Знайдіть висоту *BH*.

10. Рівносторонні трикутники *ABC* і $A_1B_1C_1$ подібні з коефіцієнтом 0,5. $S_{ABC}=16\sqrt{3}$. Знайдіть сторону трикутника $A_1B_1C_1$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ПІДСУМКОВОГО ОЦІНЮВАННЯ

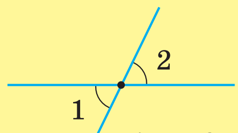
КУТИ

суміжні



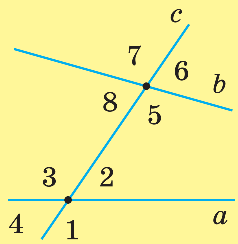
$\alpha + \beta = 180°$

вертикальні



$\angle 1 = \angle 2$

при двох прямих і січній



внутрішні:	а) односторонні:	$\angle 2$ і $\angle 5$, $\angle 3$ і $\angle 8$
	б) різносторонні:	$\angle 2$ і $\angle 8$, $\angle 3$ і $\angle 5$
відповідні:		$\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 2$ і $\angle 6$, $\angle 3$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 8$,
зовнішні:	а) односторонні:	$\angle 1$ і $\angle 6$, $\angle 4$ і $\angle 7$;
	б) різносторонні:	$\angle 1$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 6$

ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

ОЗНАКИ

ЯКЩО

при двох прямих і січній

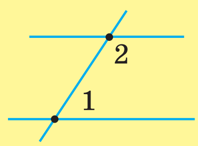
- сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°
- внутрішні різносторонні кути рівні
- відповідні кути рівні

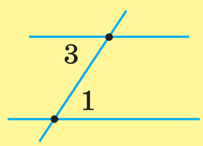
дві прямі

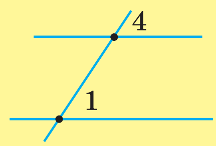
- перпендикулярні до третьої прямої

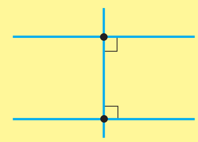
ТО

дані прямі паралельні









ВЛАСТИВОСТІ

ЯКЩО

дві прямі паралельні і їх перетинає третя пряма (січна)

пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих

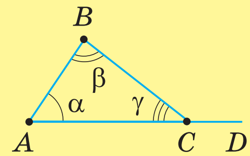
ТО

- сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°
- внутрішні різносторонні кути рівні
- відповідні кути рівні
- вона перпендикулярна і до другої прямої

ТРИКУТНИКИ

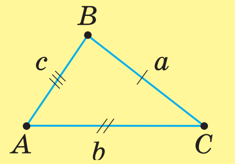
ВЛАСТИВОСТІ

кутів



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
$\angle BCD = \alpha + \beta$
$\angle BCD > \alpha$
$\angle BCD > \beta$

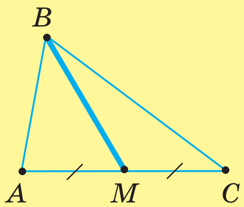
сторін



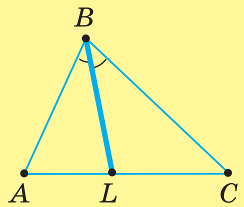
$a + b + c = P$
$a < b + c$
$b < a + c$
$c < a + b$

ВАЖЛИВІ ВІДРІЗКИ

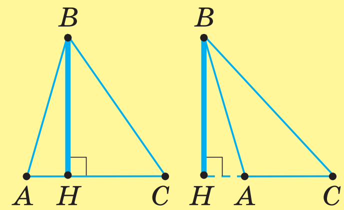
медіана



бісектриса



висота



РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК

ВЛАСТИВОСТІ

ЯКЩО

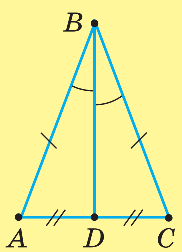
ΔABC — рівнобедрений ($AB = BC$)

ТО

$\angle A = \angle C$

бісектриса BD є медіаною

бісектриса BD є висотою



ЯКЩО

ОЗНАКИ

ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

ВЛАСТИВОСТІ

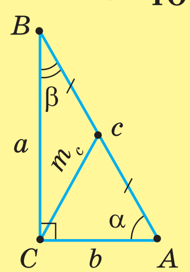
ЯКЩО

ΔABC — прямокутний ($\angle C = 90°$)

ТО

$\alpha + \beta = 90°$

$m_c = 0,5c$

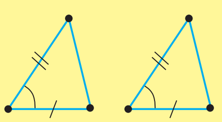


ЯКЩО

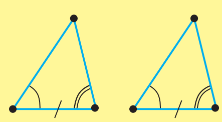
ОЗНАКИ

ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

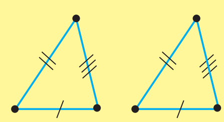
за двома сторонами і кутом між ними



за стороною і двома прилеглими кутами

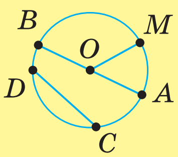


за трьома сторонами



КОЛО

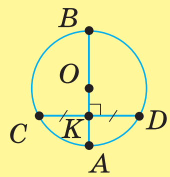
ВАЖЛИВІ ВІДРІЗКИ



AB — діаметр,
CD — хорда,
OM — радіус

$AB = 2OM$
$CD \leq AB$

ВЛАСТИВОСТІ

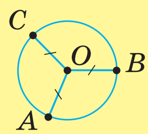


Якщо $\dfrac{AB \perp CD}{CK = KD}$, то $\dfrac{CK = KD}{AB \perp CD}$

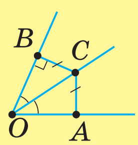
ГЕОМЕТРИЧНІ МІСЦЯ ТОЧОК

Фігура F є геометричним місцем точок **(ГМТ)** ***площини, якщо*:**

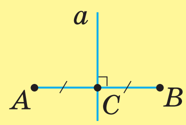
1) кожна точка фігури має ту саму властивість;
2) кожна точка площини, яка має цю властивість, належить даній фігурі



Коло **є ГМТ, рівновіддалених від даної точки**



Бісектриса кута **є ГМТ, рівновіддалених від сторін кута**

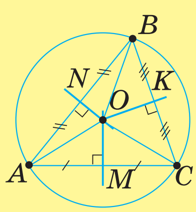


Серединний перпендикуляр до відрізка **є ГМТ, рівновіддалених від кінців відрізка**

КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА

КОЛО, ВПИСАНЕ У ТРИКУТНИК

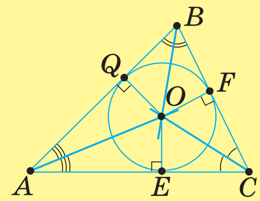
Центр O кола — точка перетину



серединних перпендикулярів до сторін трикутника
$R = OA = OB = OC$

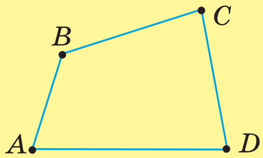
бісектрис кутів трикутника

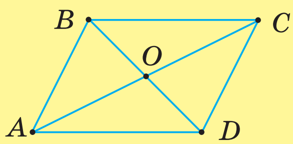
$r = OE = OF = OQ$

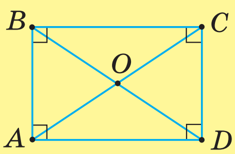
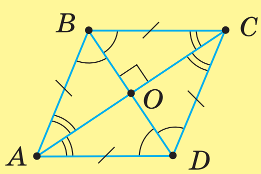
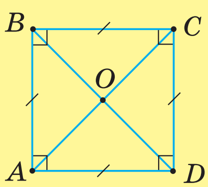


$\dfrac{\text{Навколо будь-якого трикутника}}{\text{У будь-який трикутник}}$ можна $\dfrac{\text{описати}}{\text{вписати}}$ коло, і до того ж тільки одне

ЧОТИРИКУТНИКИ

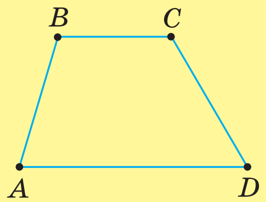
ЧОТИРИКУТНИК	
	$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

Паралелограм	**Властивості**
 $AD \parallel BC,\ AB \parallel DC$	**1.** $AB = DC,\ AD = BC$ **2.** $\angle A = \angle C,\ \angle B = \angle D$ **3.** $AO = OC,\ BO = OD$

Види паралелограмів	**Властивості**
Прямокутник  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$	**Властивості паралелограма** **1.** $AB = DC,\ AD = BC$ **2.** $\angle A = \angle C,\ \angle B = \angle D$ **3.** $AO = OC,\ BO = OD$ **Особлива властивість** **4.** $AC = BD$
Ромб  $AB = BC = CD = DA$	**Властивості паралелограма** **1.** $AB = DC,\ AD = BC$ **2.** $\angle A = \angle C,\ \angle B = \angle D$ **3.** $AO = OC,\ BO = OD$ **Особливі властивості** **4.** $AC \perp BD$ **5.** $\angle ABD = \angle CBD,\ \angle BAC = \angle DAC$
Квадрат 	**Усі властивості паралелограма, прямокутника, ромба**

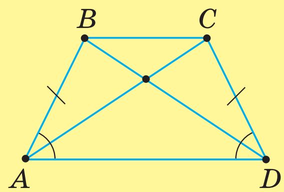
ТРАПЕЦІЇ

нерівнобічна



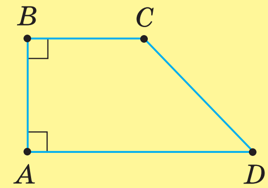
$AB \neq CD$

рівнобічна



$AB = CD$, $\angle A = \angle D$

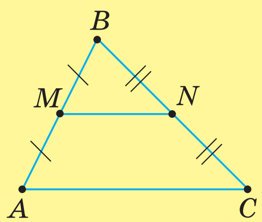
прямокутна



$\angle A = \angle B = 90°$

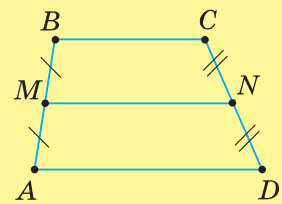
СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ

трикутника



$MN \parallel AC$, $MN = \dfrac{AC}{2}$

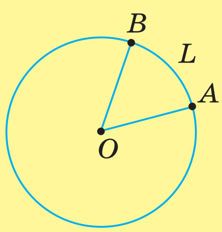
трапеції



$MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \dfrac{AD + BC}{2}$

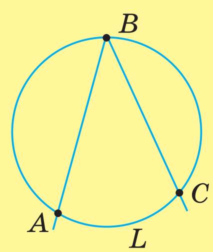
КУТИ В КОЛІ

центральні



$\angle AOB = \smile ALB$

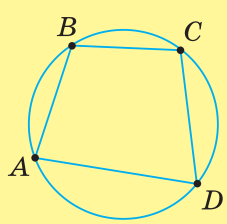
вписані



$\angle ABC = \dfrac{1}{2} \smile ALC$

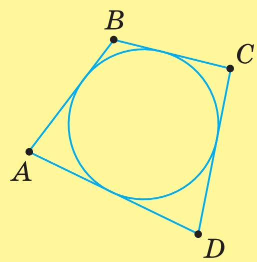
ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ

вписані



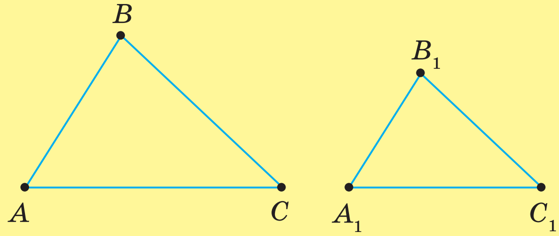
$\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180°$

описані



$AB + CD = AD + BC$

ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ



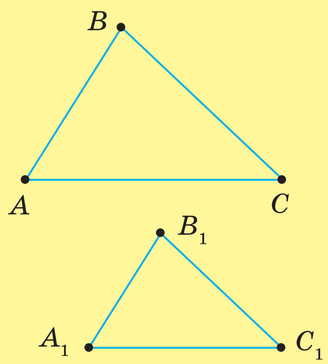
$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,

$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1$

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

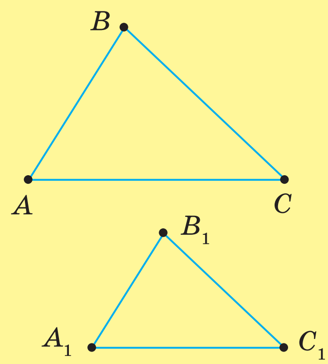
ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

за двома кутами



$\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$

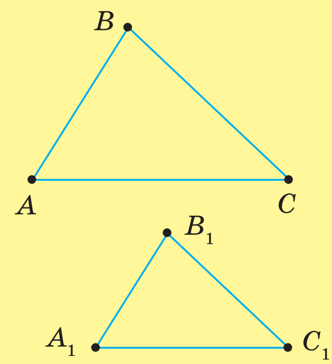
за двома сторонами та кутом між ними



$AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$,

$\angle A = \angle A_1$

за трьома сторонами

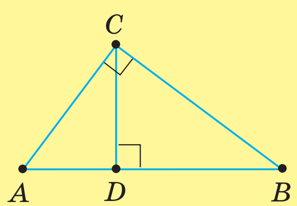


$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 =$

$= AC : A_1C_1$

ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ

у прямокутному трикутнику

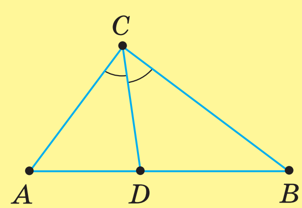


$CD^2 = AD \cdot DB$

$AC^2 = AD \cdot AB$

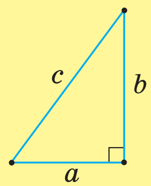
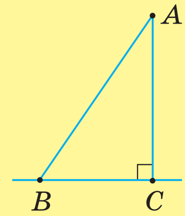
$BC^2 = BD \cdot AB$

властивість бісектриси

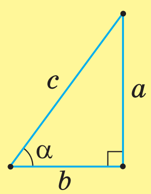


$AD : BD = AC : BC$

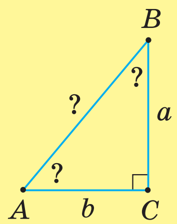
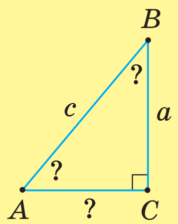
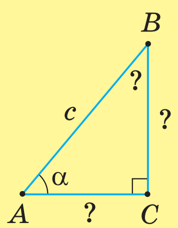
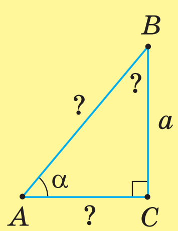
РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

Теорема Піфагора	Наслідки
 $c^2 = a^2 + b^2$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$	AC — перпендикуляр AB — похила BC — проекція похилої $AB > AC,\ AB > BC$ 

Співвідношення між сторонами й кутами прямокутного трикутника

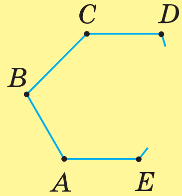
 $\dfrac{a}{c} = \sin\alpha$ $\dfrac{b}{c} = \cos\alpha$ $\dfrac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$	$a = c \cdot \sin\alpha,\ b = c \cdot \cos\alpha,\ a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$ $c = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\cos\alpha}$ $b = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$

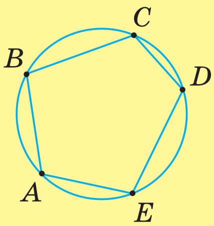
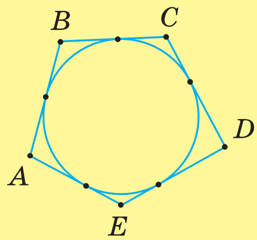
Види задач на розв’язування прямокутних трикутників

Задача	Алгоритм розв’язування
Дано: a, b Знайти: $c, \angle A, \angle B$ 	1) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, 2) $\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b}$, 3) $\angle B = 90° - \angle A$
Дано: a, c Знайти: $b, \angle A, \angle B$ 	1) $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, 2) $\sin A = \dfrac{a}{c}$, 3) $\angle B = 90° - \angle A$
Дано: c, α Знайти: $a, b, \angle B$ 	1) $\angle B = 90° - \alpha$, 2) $a = c \cdot \sin\alpha$, 3) $b = c \cdot \cos\alpha$
Дано: a, α Знайти: $c, b, \angle B$ 	1) $\angle B = 90° - \alpha$, 2) $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, 3) $b = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$

МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ

$\angle A + \angle B + \angle C + \ldots + \angle E = 180^\circ(n-2)$,
де n — кількість сторін многокутника.
Периметр: $P = AB + BC + CD + \ldots + EA$

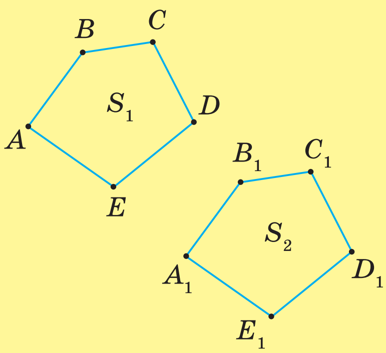


Вписані многокутники	Описані многокутники
	

Многокутник називається $\dfrac{\text{вписаним у коло}}{\text{описаним навколо кола}}$, якщо всі його $\dfrac{\text{вершини лежать на колі}}{\text{сторони дотикаються до кола}}$

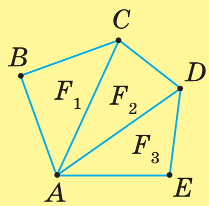
ВЛАСТИВОСТІ ПЛОЩІ

Рівні многокутники мають рівні площі



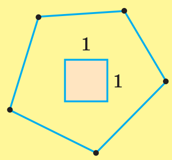
$ABCDE = A_1B_1C_1D_1E_1$
$S_1 = S_2$

Площа многокутника, складеного із частин, дорівнює сумі площ цих частин

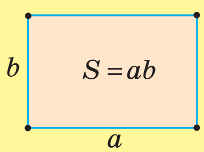
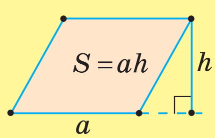
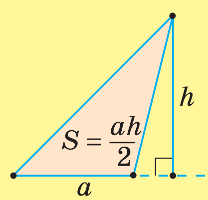
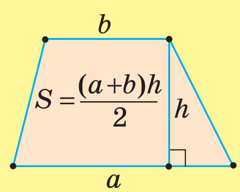


$S_{ABCDE} = S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3}$

Одиницею площі є площа одиничного квадрата

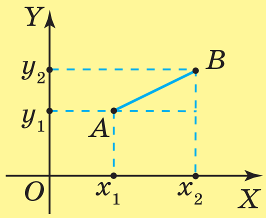


ФОРМУЛИ ПЛОЩІ

прямокутника	паралелограма	трикутника	трапеції
			
$S = ab$	$S = ah$	$S = \dfrac{ah}{2}$	$S = \dfrac{(a+b)h}{2}$

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

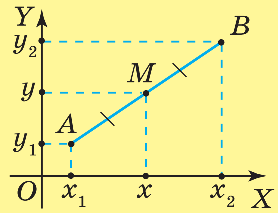
Довжина відрізка



$A\,(x_1;\,y_1)$, $B\,(x_2;\,y_2)$

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Координати середини відрізка

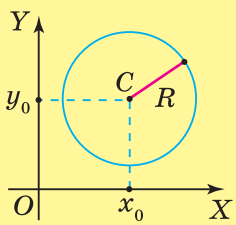


$A\,(x_1;\,y_1)$,
$B\,(x_2;\,y_2)$,
$M\,(x;\,y)$ — середина відрізка AB

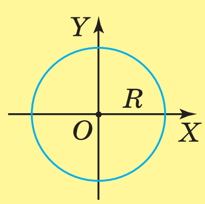
$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

РІВНЯННЯ ФІГУРИ

Рівняння кола



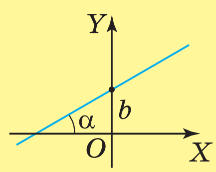
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$,
$C\,(x_0;\,y_0)$ — центр кола,
R — радіус кола



$x^2+y^2=R^2$
$O\,(0;\,0)$ — центр кола,
R — радіус кола

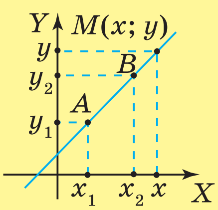
Рівняння прямої

з кутовим коефіцієнтом: $y=kx+b$



k — кутовий коефіцієнт,
$k=\mathrm{tg}\,\alpha$,
b — відрізок на осі OY

що проходить через дві точки:



$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

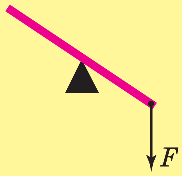
$A\,(x_1;\,y_1)$, $B\,(x_2;\,y_2)$ — точки, через які проходить пряма

загальне: $ax+by+c=0$

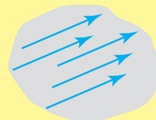
a, b і c — числа, які одночасно не дорівнюють нулю

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

Сила

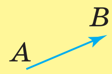


Геометричний вектор



$\overline{a}$

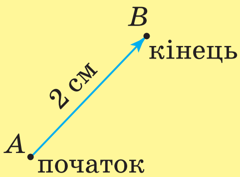
Зображення



напрямлений відрізок $\overline{AB}$

Будь-яка впорядкована пара точок визначає вектор

Характеристики вектора



напрям	A — початок вектора B — кінець вектора
довжина (модуль)	$\lvert\overline{AB}\rvert = 2$ см

Координати вектора

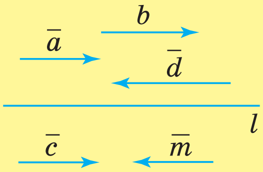
$A(x_1; y_1)$,
$B(x_2; y_2)$,
$a_1 = x_2 - x_1$,
$a_2 = y_2 - y_1$

$\overline{AB} = \overline{a}(a_1; a_2)$

$\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Взаємне розміщення векторів

колінеарні вектори



$\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$

$\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ — **співнапрямлені**

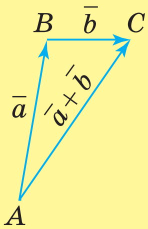
$\overline{a} = \overline{c}$ — **рівні**

$\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{d}$ — **протилежно напрямлені**

$\overline{a} = -\overline{m}$ — **протилежні**

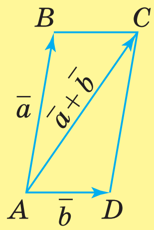
ДОДАВАННЯ ВЕКТОРІВ

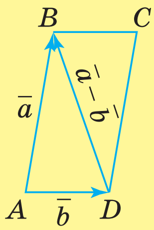
Правило трикутника



$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

Правило паралелограма



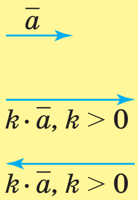


$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$ $\quad$ $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}$

У координатній формі

$\overline{a}(a_1; a_2)$,
$\overline{b}(b_1; b_2)$,
$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$,
$\overline{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$

Множення вектора на число



$\overline{a}(a_1; a_2)$

$k\overline{a}(ka_1; ka_2)$

Скалярний добуток векторів

$\overline{a}\overline{b} = \lvert\overline{a}\rvert \cdot \lvert\overline{b}\rvert \cdot \cos(\widehat{\overline{a}; \overline{b}})$

$\overline{a}^2 = \lvert\overline{a}\rvert^2$

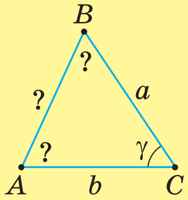
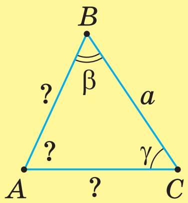
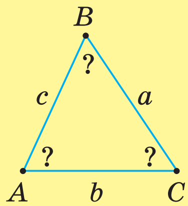
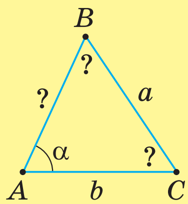
$\overline{a}\overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

$\cos(\widehat{\overline{a}; \overline{b}}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

$\overline{a} \perp \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a}\overline{b} = 0$, або $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

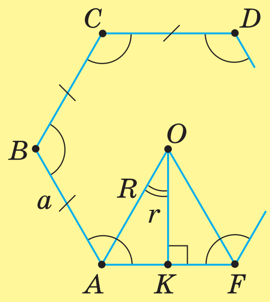
ОСНОВНІ ЗАДАЧІ НА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

Умова задачі		**Алгоритм розв'язування**
	**Дано:** $AC = b$, $BC = a$, $\angle C = \gamma$. **Знайти:** AB, $\angle A$, $\angle B$	1) $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$, 2) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 3) $\angle B = 180° - \angle A - \gamma$
	**Дано:** $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. **Знайти:** AC, AB, $\angle A$	1) $\angle A = 180° - \alpha - \beta$, 2) $AC = \dfrac{a\sin\beta}{\sin A}$, 3) $AB = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin A}$
	**Дано:** $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. **Знайти:** $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$	1) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 2) $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, 3) $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$
	**Дано:** $BC = a$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$. **Знайти:** AB, $\angle B$, $\angle C$	1) $\sin B = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$, 2) $\angle C = 180° - \alpha - \angle B$, 3) $AB = \dfrac{a\sin C}{\sin\alpha}$

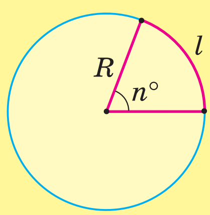
ФОРМУЛИ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

$S = \dfrac{ah_a}{2}$, де h_a — висота, проведена до сторони a	$S = pr$, де $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, r — радіус вписаного кола	$S = \dfrac{abc}{4R}$, де R — радіус описаного кола	$S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$, де α — кут між сторонами b і c	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

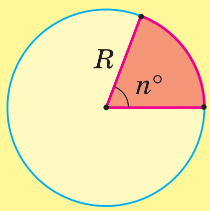
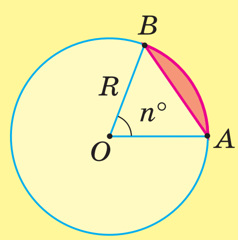
ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

Правильний n-кутник	Властивості
 $AB = BC = \ldots = AF$ і $\angle A = \angle B = \ldots = \angle F$	1. Правильний n-кутник є вписаним у коло й описаним навколо кола. $R = OA$ — радіус описаного кола $r = OK$ — радіус вписаного кола 2. $\angle AOF = \dfrac{360°}{n}$ 3. $\angle A + \angle B + \ldots + \angle F = 180°\,(n-2)$ 4. $R = \dfrac{AK}{\sin\angle AOK} = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$ 5. $r = \dfrac{AK}{\mathrm{tg}\angle AOK} = \dfrac{a}{2\mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}}$

ДОВЖИНА КОЛА Й ДУГИ КОЛА

Довжина кола	Довжина дуги кола
$C = 2\pi R$ або $C = \pi D$, де D — діаметр кола	 $l = \dfrac{\pi R n°}{180°}$

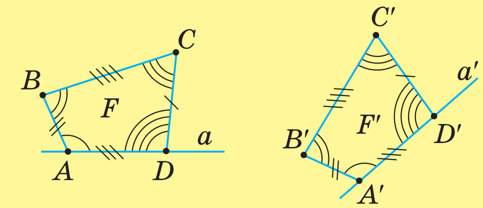
ПЛОЩА КРУГА ТА ЙОГО ЧАСТИН

Площа круга	Площа сектора	Площа сегмента
$S = \pi R^2$ або $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$, де D — діаметр кола	 $S = \dfrac{\pi R^2 n°}{360°}$	 $S = S_{сектора} - S_{\triangle AOB}$

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

ПЕРЕМІЩЕННЯ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Переміщення



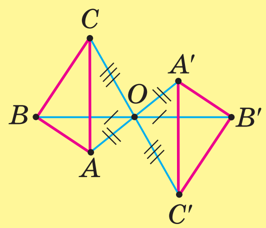
Фігури F і F' рівні, якщо переводяться переміщенням одна в одну

Властивості

1. Пряма переходить у пряму (a в a'), промінь — у промінь.
2. Відрізок переходить у рівний йому відрізок ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $AD = A'D'$).
3. Кут переходить у рівний йому кут ($\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$)

ВИДИ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Симетрія відносно точки

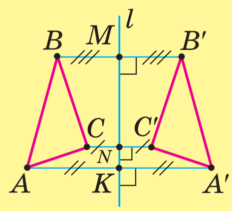


$AO = OA'$,
$BO = OB'$,
$CO = OC'$.

Симетрія відносно точки має всі властивості переміщення.

Особлива властивість: пряма переходить у паралельну їй пряму або в себе

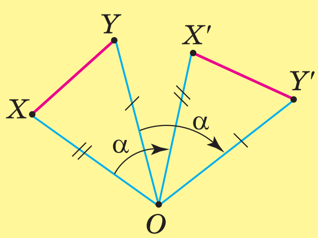
Симетрія відносно прямої



$BB' \perp l$ і $BM = MB'$,
$CC' \perp l$ і $CN = NC'$,
$AA' \perp l$ і $AK = KA'$.

Симетрія відносно прямої має всі властивості переміщення

Поворот

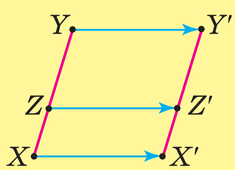


$\angle XOX' = \angle YOY' = \alpha$,
$OX = OX'$, $OY = OY'$,

α — кут повороту,
O — центр повороту.

Поворот має всі властивості переміщення

Паралельне перенесення



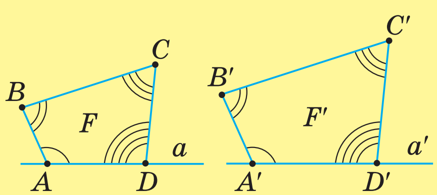
$XX' \parallel ZZ' \parallel YY'$ і $XX' = ZZ' = YY'$

Паралельне перенесення має всі властивості переміщення.

Особлива властивість:
пряма переходить у паралельну їй пряму або в себе

ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ

Перетворення подібності



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = k,$$

$k > 0$ — коефіцієнт подібності

Властивості

1. Пряма переходить у пряму (a в a'), промінь — у промінь.
2. Відрізок переходить у відрізок (AB в $A'B'$, BC в $B'C'$, CD в $C'D'$, AD в $A'D'$).
3. Кут переходить у рівний йому кут ($\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$).
4. Якщо $F \overset{k}{\backsim} F'$, то $\dfrac{S_F}{S_{F'}} = k^2$ (S_F і $S_{F'}$ — площі подібних фігур F і F')

ГОТУЄМОСЯ ДО ПІДСУМКОВОГО ОЦІНЮВАННЯ

Розв'яжіть задачі

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

1114. Вершини трикутника ABC містяться в точках A (2; 1), B (1; 3) і C (5; 2). Знайдіть координати вершин рівного йому трикутника KLM, якщо відповідні вершини даних трикутників симетричні відносно:
1) осі абсцис;
2) осі ординат;
3) початку координат.

1115. За якого значення x довжина відрізка AB дорівнює 4, якщо A (2; 3), B (0; x)?

1116. Точка M ділить сторону AC трикутника ABC у відношенні 1 : 3. Знайдіть довжину відрізка BM, якщо вершини трикутника мають координати A (1; 5), B (2; −2) і C (5; 5). Скільки розв'язків має задача?

1117. Знайдіть площу трикутника з вершинами в точках (4; 2), (7; −2) і (1; 0).

1118. Коло радіуса 3 см дотикається до осей координат. Яка відстань від центра цього кола до точки, що симетрична центру відносно:
1) осі абсцис;
2) осі ординат;
3) початку координат?

1119. Пряму задано рівнянням $y = 2x + 3$. Яке рівняння має пряма, симетрична даній відносно:
1) осі абсцис;
2) осі ординат;
3) початку координат?

1120. Дві вершини трикутника ABC містяться в точках (0; −2) і (2; 0), а третя — лежить на прямій $y = -x$. Визначте координати точки C, якщо площа трикутника ABC дорівнює 8.

1121. Знайдіть координати точки перетину медіан трикутника з вершинами в точках (1; 0), (2; 3) і (3; 2).

1122. Два кола дотикаються зовні. Доведіть, що відрізок їх спільної зовнішньої дотичної є середнім пропорційним між діаметрами кіл.

1123. **(Задача Леонардо Пізанського, XIII ст.)** Дві башти на рівнині стоять на відстані 60 ліктів одна від одної. Висота першої башти становить 50 ліктів, а висота другої — 40 ліктів. Між баштами розміщена криниця, яка однаково віддалена від вершин обох башт. Як далеко розташована криниця від основи кожної башти?

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

1124. За якого значення x вектори $\overline{a}\,(3x^2; 2)$ і $\overline{b}\,(1; x)$ перпендикулярні?

1125. Чи є колінеарними вектори:
1) $\overline{a}\,(1; 3)$ і $\overline{b}\,(-6; -18)$;
2) $\overline{a}\,(1; -1)$ і $\overline{b}\,(0; 3)$?

1126. Виразіть вектори сторін паралелограма $ABCD$ через вектори його діагоналей $\overline{AC} = \overline{a}$ і $\overline{BD} = \overline{b}$.

1127. У паралелограмі $ABCD$ точка K — середина відрізка BC, точка O — точка перетину діагоналей. Виразіть вектори $\overline{BD}$, $\overline{CO}$, $\overline{KD}$ через вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$.

1128. Одиничні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут 60°. Доведіть, що вектор $2\overline{b}-\overline{a}$ перпендикулярний до вектора $\overline{a}$.

1129. Знайдіть кут між медіанами AP і BM трикутника ABC, у якого вершини мають координати: $A\ (0; -4)$, $C\ (0; 6)$, $B\ (2; -2)$.

1130. Доведіть, що для катетів a і b та гіпотенузи c прямокутного трикутника справджується нерівність: $a + b \le \sqrt{2}\,c$.

1131. Сторону AB квадрата $ABCD$ точки M і P ділять на три рівні частини. Прямі DP і CM перетинаються в точці O. Знайдіть косинус кута COD.

1132. Середня лінія чотирикутника $ABCD$, яка з'єднує середини сторін AB і CD, дорівнює півсумі сторін BC і AD. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — трапеція.

1133. Знайдіть геометричне місце кінців одиничних векторів, початки яких знаходяться на колі радіуса 1 і які колінеарні з даним вектором.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

1134. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює c, а гострий кут — α. Знайдіть:
1) бісектрису прямого кута;
2) відрізки, на які бісектриса кута ділить гіпотенузу.

1135. У рівнобедреному трикутнику бісектриса кута при основі дорівнює l, а кут при вершині — α. Знайдіть бічну сторону трикутника.

1136. Більша діагональ прямокутної трапеції дорівнює d й утворює з більшою основою кут α. Знайдіть більшу бічну сторону, якщо гострий кут трапеції дорівнює β.

1137. AD — бісектриса трикутника ABC, $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Знайдіть: 1) CD; 2) AD.

1138. Сторони трикутника дорівнюють 4 см і 6 см, а кут між ними 60°. Знайдіть медіану, проведену до третьої сторони трикутника.

1139. Основи трапеції дорівнюють 2 см і 5 см. Одна з бічних сторін дорівнює 3 см й утворює з більшою основою кут 60°. Знайдіть діагоналі трапеції.

1140. У паралелограмі сторона дорівнює a, діагональ — d, а кут між ними — α. Знайдіть площу паралелограма, якщо:
1) $a = 3\sqrt{3}$ см, $d = 10$ см, $\alpha = 60°$;
2) $a = 2$ см, $d = 8$ см, $\alpha = 30°$.

1141. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює a, бічна сторона — b. Знайдіть радіуси кіл, описаного навколо трикутника і вписаного в нього, якщо:
1) $a = 16$ см, $b = 10$ см;
2) $a = 6$ см, $b = 5$ см.

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ. ДОВЖИНА КОЛА. ПЛОЩА КРУГА

1142. Знайдіть кут, центральний кут і зовнішній кут правильного дванадцятикутника.

1143. Скільки сторін має правильний многокутник, якщо:
1) його зовнішній кут дорівнює 24°;
2) його кут дорівнює 135°?

1144. Знайдіть радіуси кіл, описаного навколо правильного шестикутника і вписаного в нього, якщо:
1) різниця їхніх радіусів дорівнює 6 см;
2) сума їхніх радіусів дорівнює 8 см.

1145. Побудуйте правильний шестикутник, якщо:
1) його більша діагональ дорівнює 8 см;
2) його менша діагональ дорівнює 6 см.

1146. Виразіть сторону a правильного вписаного многокутника через радіус R кола і сторону b правильного описаного многокутника з тією самою кількістю сторін.

1147. Периметр правильного трикутника дорівнює P. Знайдіть довжину кола, описаного навколо цього трикутника, якщо:
1) $P = 5\sqrt{3}$ см;
2) $P = 12$ см.

1148. Знайдіть довжину кола, якщо довжина його дуги, що містить $45°$, дорівнює 10 см.

1149. Навколо кола, довжина якого дорівнює C, описано ромб із гострим кутом α. Знайдіть площу ромба.

1150. Знайдіть діаметр круга, площа якого дорівнює:
1) сумі площ двох кругів з радіусами m і n;
2) різниці площ двох кругів з радіусами m і n.

1151. Знайдіть площу круга, якщо площа його сектора дорівнює 20 см^2, а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює $72°$.

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

1152. Переміщення переводить трикутник ABC в трикутник $A'B'C'$. Знайдіть:
1) периметр трикутника $A'B'C'$, якщо $AB = 6$ см, $BC = 9$ см, $AC = 10$ см;
2) кути трикутника $A'B'C'$, якщо $\angle A = 30°$, $\angle B = 50°$, $\angle C = 20°$.

1153. Вершина B прямокутного трикутника ABC при симетрії відносно середини гіпотенузи AC переходить у точку D. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — прямокутник.

1154. Проведіть пряму a й позначте точку A, яка не лежить на прямій. За допомогою циркуля й лінійки побудуйте точку A', симетричну точці A відносно прямої a.

1155. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини основ рівнобічної трапеції, є її віссю симетрії.

1156. Побудуйте трикутник, у який переходить трикутник ABC при повороті на $150°$ за годинниковою стрілкою навколо:
1) вершини A;
2) точки O, яка лежить поза трикутником.

1157. При паралельному перенесенні відрізка AB точка A переходить у точку B, а точка B — у точку B'. Знайдіть довжину відрізка AB', якщо $AB = m$.

1158. Доведіть, що сума основ трапеції менша від суми її діагоналей.

1159. Знайдіть середню лінію трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$), якщо $AE = 10$ см (E — точка перетину продовження бічних сторін трапеції), $AD = 4$ см, $AB = 10$ см.

1160. Сторони чотирикутника дорівнюють 5 см, 7 см, 9 см і 11 см. Знайдіть сторони подібного йому чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 128 см.

1161. Площі двох квадратів відносяться, як 1 : 9. Знайдіть сторону більшого квадрата, якщо периметр меншого дорівнює m.

Додаток 1

ТАБЛИЦЯ СИНУСІВ І КОСИНУСІВ

α	sin α	cos α	β
0°	0,000	1,000	90°
1°	0,017	1,000	89°
2°	0,035	0,999	88°
3°	0,052	0,999	87°
4°	0,070	0,998	86°
5°	0,087	0,996	85°
6°	0,105	0,995	84°
7°	0,122	0,993	83°
8°	0,139	0,990	82°
9°	0,156	0,988	81°
10°	0,174	0,985	80°
11°	0,191	0,982	79°
12°	0,208	0,978	78°
13°	0,225	0,974	77°
14°	0,242	0,970	76°
15°	0,259	0,966	75°
16°	0,276	0,961	74°
17°	0,292	0,956	73°
18°	0,309	0,951	72°
19°	0,326	0,946	71°
20°	0,342	0,940	70°
21°	0,358	0,934	69°
22°	0,375	0,927	68°
23°	0,391	0,921	67°
24°	0,407	0,914	66°
25°	0,423	0,906	65°
26°	0,438	0,899	64°
27°	0,454	0,891	63°
28°	0,469	0,883	62°
29°	0,485	0,875	61°
30°	0,500	0,866	60°
31°	0,515	0,857	59°
32°	0,530	0,848	58°
33°	0,545	0,839	57°
34°	0,559	0,829	56°
35°	0,574	0,819	55°
36°	0,588	0,809	54°
37°	0,602	0,799	53°
38°	0,616	0,788	52°
39°	0,629	0,777	51°
40°	0,643	0,766	50°
41°	0,656	0,755	49°
42°	0,669	0,743	48°
43°	0,682	0,731	47°
44°	0,695	0,719	46°
45°	0,707	0,707	45°
α	cos β	sin β	β

Додаток 2

ТАБЛИЦЯ ТАНГЕНСІВ

α	tg α	α	tg α	α	tg α	α	tg α	α	tg α
0°	0,000	20°	0,364	40°	0,839	60°	1,73	80°	5,67
1°	0,017	21°	0,384	41°	0,869	61°	1,80	81°	6,31
2°	0,035	22°	0,404	42°	0,900	62°	1,88	82°	7,12
3°	0,062	23°	0,424	43°	0,933	63°	1,96	83°	8,14
4°	0,070	24°	0,445	44°	0,966	64°	2,05	84°	9,51
5°	0,087	25°	0,466	45°	1,000	65°	2,14	85°	11,4
6°	0,105	26°	0,488	46°	1,04	66°	2,25	86°	14,3
7°	0,123	27°	0,510	47°	1,07	67°	2,36	87°	19,1
8°	0,141	28°	0,532	48°	1,11	68°	2,48	88°	28,6
9°	0,158	29°	0,554	49°	1,15	69°	2,60	89°	57,3
10°	0,176	30°	0,577	50°	1,19	70°	2,75		
11°	0,194	31°	0,601	51°	1,23	71°	2,90		
12°	0,213	32°	0,625	52°	1,28	72°	3,08		
13°	0,231	33°	0,649	53°	1,33	73°	3,27		
14°	0,249	34°	0,675	54°	1,38	74°	3,49		
15°	0,268	35°	0,700	55°	1,43	75°	3,73		
16°	0,287	36°	0,727	56°	1,48	76°	4,01		
17°	0,306	37°	0,754	57°	1,54	77°	4,33		
18°	0,325	38°	0,781	58°	1,60	78°	4,70		
19°	0,344	39°	0,810	59°	1,66	79°	5,14		

Додаток 3

ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

РОЗДІЛ 1

§ 1

1. 1) Ні; 2) ні; 3) так. **2.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. **3.** 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) так. **4.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **5.** Мал. 10: $A(3;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(-1;\ 2)$, $D(-2;\ -1)$, $E(2;\ -2)$; Мал. 11: $A(3;\ -1)$, $B(2;\ -3)$, $C(-1;\ -2)$, $D(-2;\ 1)$, $E(2;\ 2)$. **6.** Мал. 12: $A(-3;\ 1)$, $B(-2;\ 3)$, $C(1;\ 2)$, $D(2;\ -1)$, $E(-2;\ -2)$. **10.** Точка A — II чв., точка B — IV чв., точка C — I чв., точка D — III чв., точка E — II чв. **11**. Точка F — I чв., точка K — IV чв., точка L — III чв. **12.** 1) $B(-2;\ -1)$; 2) $B(2;\ 1)$; 3) $B(2;\ -1)$; 4) $B(-2;\ 1)$. **13.** 1) $A(3;\ -4)$; 2) $A(-3;\ 4)$; 3) $A(-3;\ -4)$; 4) $A(3;\ 4)$. **14.** 1) Так, ні, ні; 2) ні, ні, так. **15.** 1) Ні; 2) так, вісь OX. **16.** Так, вісь OY. **18.** 1) 5; 2) 17; 3) $\sqrt{145}$. **19.** $5\sqrt{5}$. **20.** 1) $d=\sqrt{26}$, $R=\frac{\sqrt{26}}{2}$; 2) $d = 10$, $R = 5$. **21.** $R = 2{,}5$, $d = 5$. **22.** 1) $AB = 2$, $BC = 3\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{10}$; 2) $AB = 25$, $BC = 11$, $AC = 30$. **23.** $KL = 2\sqrt{2}$, $LM = 4$, $KM = 2\sqrt{2}$. **24.** 1) $y = \pm5$; 2) $y = \pm24$; 3) $x = \pm8$; 4) $x = \pm8$. **25.** 1) $y = \pm8$; 2) $x = \pm4$. **26.** 1) (3; 1) і (2; –1) або (–1; 3) і (–2; 1). **27.** 1) $AB = BC = 3\sqrt{10}$; 2) $AB = AC = \sqrt{10}$. **28.** $MP = MT = \sqrt{13}$. **29.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою Піфагора. **30.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою Піфагора. **31.** 1) 2; 2) –3 або 3. **32.** 4. **33.** 1) (4; 0) і (0; 4); 2) (0; 0). **34.** 1) 10, 10, 12; 2) $4\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, 6. **35.** 1) Може, в точках D і M; 2) може, в точці D. **36.** 1) 50 кв. од.; 2) 18 кв. од. **37.** 1) 34 кв. од.; 2) 84,5 кв. од. **38.** 1) 135°; 2) 45°. **39.** 1) *Вказівка*: скористайтеся властивістю паралелограма. **40.** 1) Прямокутник; 2) квадрат. **41.** 1) $a\sqrt{2}$ — діагональ квадрата зі стороною 1 клітинка, $a\sqrt{5}$ — діагональ прямокутника зі сторонами 1 та 2 клітинки; 2) $a\sqrt{2}$ — діагональ квадрата зі стороною 2 клітинки, $a\sqrt{5}$ — діагональ прямокутника зі сторонами 2 та 4 клітинки. **42.** 1) *Вказівка*: скористайтеся властивістю висоти до гіпотенузи рівнобедреного прямокутного трикутника. **43**. На $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ м.

§ 2

44. 1) Ні; 2) ні; 3) так. **45.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **46.** $A(1;\ 1)$, $B(5;\ 1)$, $M(3;\ 1)$ (мал. 18); $A(2;\ 3)$, $B(2;\ -1)$, $M(2;\ 1)$ (мал. 19). **47.** $A(-1;\ -1)$, $B(3;\ 1)$, $M(1;\ 0)$ (мал. 20). **48.** 1) (1; 0); 2) (3,5; 2,5). **49.** (8; 12). **50.** 1) (5; 7); 2) (–3; –4). **51.** (12; 13). **52.** 1) $B(-5;\ -6)$; 2) $O(0;\ 0)$; 3) $A(-15;\ 19)$; 4) $O(3{,}5;\ -1)$; 5) $B(-11;\ -7)$; 6) $A(-3;\ 4)$. **53.** 1) (1,5; 4,5), (4,5; 1,5), (0; 0), $BM = 6\sqrt{2}$; 2) (2,5; –1,5), (1; –1), (0,5; –2,5), $BM = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. **54.** (0,5; 1,5), (0,5; –1,5), (2; 0), $OM = 3$. **55.** 1) (–0,5; 0,5); 2) (–2; 10). **56.** (1,5; –0,5). **57.** 1) (–2; –1); 2) (2; 1). **58.** (2; –1). **59.** 1) $P(-4{,}5;\ 0)$, $Q(-4;\ -2)$, $T(-3{,}5;\ -4)$; 2) $P(3;\ 0{,}5)$, $Q(5;\ -2)$, $T(7;\ -4{,}5)$. **60.** 1) 3,5; 5; $\frac{\sqrt{37}}{2}$; 2) 25, 17, $\sqrt{82}$. **61.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю діагоналей паралелограма. **62.** 1) $O(-1{,}5;\ -0{,}5)$, $D(-6;\ -2)$; 2) $O(-2;\ 10)$, $C(-2;\ 16)$. **63.** 1) $D(10;\ 1)$; 2) $D(2;\ -1)$. **64.** 1) (9; 5); 2) (2; –3). **65.** 1) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **66.** 1) (3,5; 1); 2) (–1,5; 2,5). **67.** 1) $A(1;\ 3)$, $B(-3;\ 3)$, $C(3;\ -3)$; 2) $A(26;\ 50)$, $B(12;\ 2)$, $C(-10;\ 2)$; 3) $A(2;\ -1)$, $B(-2;\ -5)$, $C(-2;\ 3)$; 4) $A(-1;\ -3)$, $B(1;\ 7)$, $C(5;\ 1)$. **68.** *Вказівка*: скористайтеся формулами координат середини відрізка. **69.** 1) Ні; 2) так. **70.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю паралелограма. **71.** Так. **72.** Не завжди. **73.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю паралельних прямих. **74.** Не завжди.

§ 3

76. 1) Ні, так, так; 2) так, ні, так. **77.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **78.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **79.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **80.** 2) $\angle BOA = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle DOA = \gamma$; 3) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3}$, $\sin\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\gamma = -1$. **81.** 2) $\angle KOA = \alpha$, $\angle LOA = \beta$; 3) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tg α = 1, sin β = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, cos β = $-\frac{1}{2}$, tg β = $-\sqrt{3}$. **82.** 2) а) 0, 1, 0; б) 0, 0. **83.** 2) а) 1, 0, –1. **85.** «+», «+», «+». **86.** «+», «–», «–». **88.** 1) Тупим; 2) гострим; 3) тупим. **89.** 1) Гострим; 2) тупим. **90.** 1) 1; 2) 5; 3) 6. **91.** 0. **92.** 1) 0; 2) 1; 3) 0. **93.** 1) 0; 2) –1 або 1. **94.** 1) Синус ні, косинус так; 2) так; 3) ні. **95.** 1) Так; 2) так; 3) так. **96.** *Вказівка*: розгляньте різновиди трикутників за їхніми кутами. **97.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю сторін і кутів триктуника. **98.** 1) «+»; 2) «+». **99.** «+». **100.** 1) Гострий; 2) тупий. **101.** Тупий. **102.** 1) β > α; 2) α > β. **103.** β > α. **104.** 1) 0 ≤ sin α + 1 ≤ 2; 2) –0,5 ≤ cos α + 0,5 ≤ 1,5. **105.** –0,8 ≤ sin α + 0,2 ≤ 1,2. **106.** 1) sin 5°, sin 15°, sin 20°, sin 66°, sin 75°; 2) cos 80°, cos 75°, cos 46°, cos 16°, cos 9°. **107.** 1) sin 92°, sin 101°, sin 125°, sin 150°, sin 176°; 2) cos 91°, cos 97°, cos 102°, cos 165°, cos 175°. **108.** 1) «–»; 2) «–»; 3) «+». **109.** 1) «–»; 2) «–». **110.** «+». **111.** 1) –3; 2) 32. **112.** 16. **113.** 1) 0; 2) не існує; 3) –0,75. **116.** *Вказівка*: розгляньте гострий і тупий кути. **117.** Так. Наприклад: 1) 45°; 2) 135°. **118.** *Вказівка*: використайте рівність прямокутних трикутників. **119.** *Вказівка*: скористайтеся одиничним півколом та властивостями синуса і косинуса того самого кута. **120.** *Вказівка*: скористайтеся властивостями синуса і косинуса кута від 0° до 180°. **121.** AC = cos α, BC = sin α, AD = cos² α, BD = sin² α, CD = sin α · cos α. **122.** 150°. **123.** 120°.

§ 4

124. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) так; 6) ні. **125.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) так; 6) ні. **126.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) ні. **127.** 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) так. **128.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) –1; 6) –1; 7) –1; 8) –1. **129.** 1) 1; 2) –1. **130.** 1) 2; 2) $2\cos^2\alpha$; 3) $2\sin^2\alpha$; 4) $-2\sin^2\alpha$; 5) $\cos^2\alpha$; 6) $\sin^2\alpha$; 7) $-\cos^2\alpha$; 8) $-\sin^2\alpha$; 9) $-\mathrm{tg}^2\alpha$; 10) $-\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}$. **131.** 1) 0; 2) $2\sin^2\alpha$; 3) $-\cos^2\alpha$; 4) $-\sin^2\alpha$. **134.** 1) sin α; 2) –tg α; 3) 0; 4) sin α; 5) 0; 6) 2cos α. **135.** 1) –cos α; 2) cos α; 3) 0. **136.** sin 70°, sin 55°, sin 30°, sin 15°, sin 4°. **137.** sin 89°, sin 88°, sin 87°. **138.** –cos 75°, –cos 60°, –cos 58°, –cos 35°, –cos 20°. **139.** –cos 87°, –cos 86°, –cos 86°. **140.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, –1. **141.** $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **142.** 1) –0,5; 2) 1; 3) 0. **143.** 0,5. **144.** 1) sin α; 2) –sin α; 3) 2sin α; **145.** 0. **148.** При α = 90°. **149.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\sin^3\alpha$; 4) $\sin^2\alpha$. **150.** 1) 1; 2) $\sin^2\alpha$. **153.** 1) Ні; 2) так. **154.** Так. **155.** 1) 2; 2) 10; 3) 5. **156.** 1) cos α = 0,8, tg α = 0,75; 2) cos α = $-\frac{5}{13}$, tg α = $-\frac{12}{5}$; 3) cos α = 0,6, tg α = $\frac{4}{3}$. **157.** 1) sin α = $\frac{12}{13}$, tg α = $-\frac{12}{5}$; 2) sin α = $\frac{8}{17}$, tg α = $\frac{8}{15}$; 3) sin α = 0,8, tg α = $-\frac{4}{3}$. **158.** 1) sin α = 0,6, cos α = 0,8; 2) sin α = $\frac{12}{13}$, cos α = $\frac{5}{13}$; 3) sin α = $\frac{11}{61}$, cos α = $\frac{60}{61}$. **159.** 1) 3; 2) 2; 3) 1. **160.** 1) $\frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$; 2) 2sin α; 3) cos α + sin α. **161.** 1. **164.** 1) cos α – sin α; 2) 1; 3) $0{,}5\cos^2\alpha$; 4) 2. **165.** 1) 2; 2) 3; 3) –1. **166.** 1) 0; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{10}{21}$. **167.** $\frac{m^2-1}{2}$. **168.** 1) 1; 2) 0; 3) 0. **169.** ≈ 4,8 км. **170.** α ≈ 18°.

§ 5

171. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **172.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **173.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **174.** $C(0;\ 0)$, $R = 2$ (мал. 42); $C(1;\ 0)$, $R = 2$ (мал. 43). **175.** $C(1;\ 2)$, $R = 2$ (мал. 44). **178.** 1) $C(2;\ 1)$, $R = 4$; 2) $C(1;\ 3)$, $R = \sqrt{3}$; 3) $C(0;\ 3)$, $R = \sqrt{2}$; 4) $C(-1;\ 0)$, $R = 7$. **179.** 1) $C(-3;\ 4)$, $R = \sqrt{5}$; 2) $C(-4;\ 1)$, $R = 5$. **180.** 1) Ні; 2) точка A — так, точки B, C, D — ні; 3) ні. **181.** Точка T — так, точка O — ні. **182.** 1) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$; 2) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 5$. **183.** $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$. **184.** 1) $x^2 + (y+1)^2 = 25$; 2) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$; 3) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$; 4) $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 32$; 5) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 32$. **185.** 1) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 18$; 2) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 18$. **186.** $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 18$. **187.** 1) Ні; 2) ні. **188.** Так. **189.** 1) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$; 2) $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$. **190.** $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 25$. **191.** 1) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$; 2) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 25$. **192.** $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$. **193.** 1) Точка A — так, точки B, C — ні; 2) точка B — так, точки A, C — ні.

194. 1) $(x+1)^2+(y-4)^2=16$; 2) $(x-2)^2+(y-4)^2=16$. **195.** *Вказівка*: покажіть, що точки з абсцисою –5 (або ординатою 5) не можуть належати даному колу. **196.** 1) Пряма й коло перетинаються; 2) пряма дотикається до кола. **197.** 1) $B(-6;\ 2)$; 2) $B(-2;\ -2)$. **198.** 1) $x^2+(y-1)^2=8$ або $x^2+(y-5)^2=8$; 2) $x^2+y^2=13$ або $x^2+(y-6)^2=13$. **199.** *Вказівка*: покажіть, що діаметр даного кола більший за хорду AB. **200.** 1) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$; 2) $(x+3)^2+(y+1)^2=25$. **201.** 1) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ або $(x-1)^2+(y+1)^2=1$; 2) $(x-2{,}5)^2+(y-2{,}5)^2=6{,}25$ або $(x+2{,}5)^2+(y-2{,}5)^2=6{,}25$. **202.** 1) $x^2+(y-3)^2=9$ або $(x-6)^2+(y-3)^2=9$; 2) $x^2+(y-3)^2=9$, або $(x-3)^2+(y+3)^2=36$, або $(x-3)^2+(y-9)^2=36$, або $(x-12)^2+(y-15)^2=225$. **203.** 1) $(x-4)^2+(y-3)^2=25$; 2) $(x-6)^2+(y-8)^2=100$. **204.** 1) $(x-2)^2+(y-1)^2=5$; 2) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$. **206.** 1) $\sqrt{18+12\sqrt{2}}$, $\sqrt{18-12\sqrt{2}}$, $4\sqrt{2}$; 2) $4\sqrt{6}$, $2\sqrt{21}$, $\sqrt{50+2\sqrt{21}-8\sqrt{6}}$, $\sqrt{50-2\sqrt{21}-8\sqrt{6}}$, $\sqrt{50+2\sqrt{21}+8\sqrt{6}}$, $\sqrt{50-2\sqrt{21}+8\sqrt{6}}$. **207.** 1) $(x-12)^2+(y-5)^2=169$; 2) $(x-4)^2+(y-1{,}5)^2=18{,}25$. **208.** 1) $(-2;\ 2\sqrt{3})$, $(-2;\ -2\sqrt{3})$; 2) $(2\sqrt{3};\ 2)$, $(-2\sqrt{3};\ 2)$. **209.** 1) $R=\sqrt{82}$, $C(-4;\ 5)$; 2) $R=\sqrt{34}$, $C(5;\ -3)$; 3) $R=2\sqrt{6}$, $C(2;\ -2)$; 4) $R=2$, $C(4;\ 0)$. **211.** 20. **212.** Якщо уявити, що дані об'єкти містяться у вершинах трикутника, то ліхтар потрібно розмістити в центрі кола, описаного навколо цього трикутника.

§ 6

213. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. **214.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **215.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **216.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **217.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **218.** 1) Гострий; 2) тупий; 3) тупий; 4) гострий. **219.** 1) Тупий; 2) гострий. **220.** 1) У I і III координатних чвертях; 2) у II і IV координатних чвертях; 3) у II і IV координатних чвертях; 4) у I і III координатних чвертях. **221.** 1) У II і IV координатних чвертях; 2) у I і III координатних чвертях. **222.** 1) $k=1$; 2) $k=-2$; 3) $k=-\sqrt{3}$; 4) $k=\sqrt{2}$. **223.** 1) $k=3$; 2) $k=-3$. **224.** 1) $y=0$; 2) $x=0$; 3) $y=x$. **225.** $y=-x$. **226.** 1) Наприклад, $A(3;\ 0)$ або $A(-3;\ 0)$; 2) наприклад, $B(0;\ 2)$ або $B(0;\ -2)$; 3) наприклад, $C(1;\ 1)$ або $C(-1;\ -1)$. **227.** 1) Наприклад, $A(-3;\ 3)$ або $A(3;\ -3)$. **228.** 1) На мал. 54, $b=-1$, $k=3$; 2) на мал. 55, $b=1$, $k=-2$. **229.** $b=-2$, $k=1$. **230.** 1) $y=2$, $x=-1$; 2) $y=-2$, $x=-1$; 3) $y=2$, $x=4$; 4) $y=2$, $x=-4$; 5) $y=-2$, $x=4$. **231.** 1) $P=12$, $S=9$; 2) $P=32$, $S=64$. **232.** $P=38$, $S=78$. **233.** Мал. 57: $A(1;\ 1)$, $B(3;\ 2)$, пряма AB задається рівнянням 2); мал. 58: $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ -2)$, пряма AB задається рівнянням 1). **234.** $A(-2;\ -1)$, $B(2;\ 3)$, так. **235.** 1) Наприклад, (4; 1) і (2; 3); 2) наприклад, (0; 3) і (–2; 2). **236.** Наприклад, (–1; 2) і (3; –4). **237.** 1) $\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{-1-2}$ або $x+y-1=0$; 2) $\frac{x+3}{2+3}=\frac{y-1}{-2-1}$ або $3x+5y+4=0$. **238.** $\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+4}{-1+4}$ або $3x-y-10=0$. **239.** 1) AB: $3x+2y=0$, BC: $3x+4y-6=0$, AC: $y+3=0$; 2) AB: $2x+y=0$, BC: $4x-3y+10=0$, AC: $3x-y-5=0$; **240.** MP: $2x+y+1=0$, PT: $3x-y-6=0$, MT: $x+y-2=0$. **241.** 1) Ні; 2) так. **242.** Ні. **243.** 1) $y=3x+1{,}5$; 2) $2x+y+1=0$; 3) $x-2y-8=0$. **244.** $y=-2x+4$. **245.** 1) $\left(\frac{12}{7};\frac{27}{14}\right)$; 2) $\left(\frac{13}{15};-\frac{12}{5}\right)$. **246.** $\left(-\frac{19}{3};-\frac{4}{3}\right)$. **247.** 1) $y=x$; 2) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$. **248.** $y=\sqrt{3}x$. **249.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю кутового коефіцієнта прямої. **250.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю кутового коефіцієнта прямої. **251.** 1) $y=5x+5$; 2) $y=-x+5$. **252.** $y=3x+2$. **253.** 1) $y=x+3$; 2) $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}+1$. **254.** $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2\sqrt{3}$. **255.** 1) $y=0$, $3x+2y-6=0$, $3x+4y=0$; 2) $3x-y=0$, $2x+y-10=0$, $4x-3y=0$. **256.** 1) $y-2=0$, $x+y-1=0$, $x-y-1=0$ або $y-2=0$, $x-y+3=0$, $x+y-5=0$; 2) $y+3=0$, $\sqrt{3}x-3y+2\sqrt{3}-9=0$, $\sqrt{3}x-3y-6\sqrt{3}+9=0$ або $y+3=0$, $\sqrt{3}x+3y+3\sqrt{3}+6=0$, $\sqrt{3}x-3y-6\sqrt{3}-9=0$. **257.** $y=x-a$, $y=x+a$, $y=-x-a$, $y=-x+a$. **258.** 1) 45° і 45°; 2) 135° і 45°. **259.** 1) 0,65; 2) 2,5. **260.** $\frac{3\sqrt{5}}{4}$. **261.** 1) $D(-6;\ -1)$; 2) $D(9;\ 6)$. **262.** $\frac{2}{3}$ кв. од. **263.** 4,8 кв. од. **264.** *Вказівка*: див. задачу 250. **265.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю кутового коефіцієнта прямої. **266.** *Вказівка*: див. задачу 265. **267.** $\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}=\frac{c_1-d_1}{d_2-c_2}$. **268.** 1) пряма $2a_1x$ +

$+ 2a_2y - (a_1^2 + a_2^2) = 0$; 2) пряма $(2b_1 - 2a_1)x + (2b_2 - 2a_2)y + (a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2) = 0$. **269.** 1) $y = R$, $y = -R$; 2) $x = R$, $x = -R$. **270.** $yy_0 + xx_0 = R^2$. **271.** 12. **272.** 1) $\frac{b}{\sqrt{k^2+1}}$; 2) $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **273.** 1) $\frac{|y_0 - b - kx_0|}{\sqrt{k^2+1}}$; 2) $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **276.** Пряма. **277.** 2) 2 км.

РОЗДІЛ 2

§ 7

278. 1) Ні; 2) ні; 3) так. **279.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **280.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **281.** 1) Ні; 2) так. **282.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **283.** 1) Ні; 2) так. **284.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **286.** 1) $\overline{DA}, \overline{AO}, \overline{DO}, \overline{DC}, \overline{OC}, \overline{OB}, \overline{BC}, \overline{AB}$; 2) $\overline{DA}, \overline{DO}, \overline{DB}, \overline{DC}$ **289.** 1) $|\overline{AB}| = 5$ см; 2) $|\overline{AB}| = 3$ мм; 3) $|\overline{AB}| = 0{,}027$ дм. **290.** $|\overline{CD}| = 3$ см. **291.** Одиничними є вектори: 1) $\bar{c}$ і $\bar{n}$; 2) $\bar{a}$; 3) $\bar{d}$. **292.** Так. Це вектори $\bar{n}$ і $\bar{k}$. **294.** 1) $\bar{l}$ і $\bar{b}$; $\bar{c}$, $\bar{m}$ і $\bar{k}$; 2) $\bar{l}$ і $\bar{b}$; $\bar{c}$ і $\bar{m}$; 3) $\bar{c}$ і $\bar{k}$; $\bar{m}$ і $\bar{k}$; 4) $\bar{l}$ і $\bar{b}$; $\bar{c}$ і $\bar{m}$; 5) таких не зображено. **295.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **298.** Ні. Ні. Так. **299.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) ні. **300.** 1) Ні; 2) ні. **301.** Ні. **302.** $|\overline{CD}| = |\overline{BA}| = |\overline{BC}| = |\overline{DA}| = 4$, $|\overline{MB}| = |\overline{AM}| = 2$. **303.** $|\overline{AD}| = |\overline{AB}| = 3\sqrt{2}$, $|\overline{BO}| = 3$. **305.** 1) 12; 2) 4. **306.** 12. **307.** 6. **308.** 1) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AM}$; 2) $\overline{BA}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$, $\overline{MA}$. **310.** Задача має два розв'язки. **311.** 1) 2 см; 2) 4 см; 3) $2\sqrt{3}$ см; 4) 2 см. **312.** 12 пар. **313.** Коло із центром M і радіусом 1 см. **314.** Коло із центром H і радіусом 1 см. **315.** Дві прямі, які паралельні прямій AB і розташовані від неї на відстані 1 см. **316.** 1) Площину. **319.** Паралельна — з північного сходу на південний захід або з південного заходу на північний схід.

§ 8

322. 1) Ні; 2) ні; 3) так. **323.** 1) Ні; 2) так. **324.** 1) Так; 2) ні. **325.** Не можна, оскільки на колінеарних векторах неможливо побудувати паралелограм. **326.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **327.** 1) Так; 2) ні. **328.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **329.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **330.** 1) Ні; 2) так. **331.** 1) Так; 2) так. **332.** $\overline{AC}$ (мал. 93); $\overline{AC}$ (мал. 94). **333.** $\overline{AC}$ (мал. 95). **334.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні. **335.** 1) $\overline{AN}$; 2) $\overline{AC}$; 3) $\overline{BN}$. **336.** 1) $\overline{PM}$; 2) $\overline{AB}$. **338.** 1) $\overline{AC}$; 2) $\overline{0}$; 3) $\overline{0}$. **340.** 1) $\overline{AC}$; 2) $\overline{0}$; 3) $\overline{0}$. **341.** 1) $\overline{KA}$; 2) $\overline{BL}$; 3) $\overline{0}$. **342.** 1) $\overline{KM}$; 2) $\overline{LB}$. **345.** а) $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{BA}$; б) $\overline{AC} = \overline{BC} - \overline{BA}$; в) $\overline{CA} = \overline{BA} - \overline{BC}$. **346.** а) $\overline{NL} = \overline{NM} + \overline{NK}$; б) $\overline{MK} = \overline{NK} - \overline{NM}$; в) $\overline{KM} = \overline{NM} - \overline{NK}$. **349.** 1) 1; 2) $\sqrt{3}$; 3) 2. **352.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) 1. **353.** Мал. 107: 1) $k = -4$, 2) $k = -\frac{1}{4}$; мал. 108: 1) $k = \frac{1}{2}$, 2) $k = 2$; мал. 109: 1) $k = -2$, 2) $k = -\frac{1}{2}$; мал. 110: 1) $k = \frac{1}{5}$, 2) $k = 5$. **357.** 1) Протилежні; 2) протилежно напрямлені; 3) протилежно напрямлені. **358.** 1) Протилежні; 2) протилежно напрямлені. **360.** *Вказівка*: розгляньте два випадки: точки A, B і C лежать на одній прямій, точки A, B і C не лежать на одній прямій. **361.** 1) Ні; 2) так. **362.** 1) = ; 2) >, якщо кут A — тупий; <, якщо кут A — гострий. **363.** 1) 2; 2) 0. **364.** 1) $\overline{AC}$; 2) $4\overline{CD}$. **365.** 1) 0; 2) $2a$; 3) a. **366.** –1. **367.** Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ є колінеарними. **368.** 1) $\bar{a} \perp \bar{b}$; 2) $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$. **370.** Чотири розв'язки. **375.** *Вказівка*: скористайтеся задачею 374. **376.** *Вказівка*: скористайтеся задачею 375. **377.** *Вказівка*: скористайтеся задачею 375. **378.** *Вказівка*: скористайтеся задачею 375. **380.** 1) *Вказівка*: $\overline{CA} = 2\overline{DB}$; 2) *Вказівка*: точка D — точка перетину медіан трикутника abc. **385.** *Вказівка*: точка M лежить на прямій AB тоді і тільки тоді, коли $\overline{BM}$ і $\overline{BA}$ — колінеарні.

§ 9

389. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **390.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **391.** 1) Ні; 2) так. **392.** 1) Ні; 2) так. **393.** 1) Ні; 2) так. **394.** 1) Ні; 2) так. **395.** Мал. 119: $O(0;\ 0)$, $A(2;\ 3)$; мал. 120: $B(1;\ 1)$, $C(3;\ 4)$. **396.** $H(3;\ 3)$,

$T(-1;1)$. **397.** 1) $\overline{OA}\,(2;3)$; 2) $\overline{BC}\,(2;3)$. **398.** 1) $\overline{HT}\,(-4;-2)$. **399.** 1) $\sqrt{b_1^2+b_2^2}$; 2) $\sqrt{c_1^2+c_2^2}$; 3) $\sqrt{d_1^2+d_2^2}$. **400.** 1) $\sqrt{p_1^2+p_2^2}$; 2) $\sqrt{t_1^2+t_2^2}$. **401.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **402.** 1) Ні; 2) так. **403.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. **404.** $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$, $\overline{h}$, $\overline{p}$, $\overline{t}$. **405.** 1) Так; 2) так. **406.** 1) $\overline{AB}\,(3;0)$; 2) $\overline{AB}\,(5;-6)$; 3) $\overline{AB}\,(2;-10)$. **408.** 1) $\overline{AB}\,(1;-4)$; 2) $\overline{AB}\,(5;5)$. **409.** 1) $\sqrt{2}$; 2) 5; 3) 13. **410.** 1) $\sqrt{104}$; 2) $3\sqrt{2}$; 3) $2\sqrt{5}$. **411.** 10. **412.** 1) Так; 2) так. **413.** *Вказівка*: обчисліть довжину вектора. **414.** 1) $\overline{(4;6)}$ і $\overline{(-2;-2)}$; 2) $\overline{(-1;-3)}$ і $\overline{(-5;5)}$; 3) $\overline{(0;0)}$ і $\overline{(-12;-4)}$. **415.** 1) $\overline{(6;4)}$ і $\overline{(-2;-2)}$; 2) $\overline{(-3;-1)}$ і $\overline{(5;-5)}$. **416.** 1) $\overline{(2;-2)}$. **417.** $\overline{(-4;-3)}$. **418.** Ні. **419.** 1) $\overline{(5;20)}$; 2) $\overline{(-3;-12)}$; 3) $\overline{(0{,}5;2)}$; 4) $\overline{(-1;-4)}$. **420.** 1) $\overline{(2;-1)}$; 2) $\overline{(-8;4)}$. **421.** 1) $\overline{(-6;6)}$; 2) $\overline{(-1{,}5;6)}$; 3) $\overline{(-1;2{,}5)}$. **422.** 1) 5; 2) 15. **423.** $6\sqrt{5}$. **424.** 1) $A\overline{D}$ і $\overline{DA}$; 2) $A\overline{D}$ і $\overline{DA}$. **425.** l = 2. **426.** 1) $\overline{(9;8)}$; 2) $\overline{(4;-13)}$. **427.** 1) l = 0; 2) l = $2\sqrt{2}$. **428.** 1) l = $\pm 4\sqrt{2}$; 2) l= $\pm$ 2. **430.** 1) $\overline{(3;4)}$, $\overline{(2;-1)}$, $\overline{(8;-5)}$; 2) $\overline{(2;-8)}$, $\overline{(-14;-33)}$, $\overline{(-4;-19)}$. **431.** $\sqrt{34}$, $\sqrt{10}$. **432.** $\overline{AM}\,(-2;5)$. **433.** Так. **434.** *Вказівка*: покажіть, що вектори $\overline{DC}$ і $\overline{AB}$ — колінеарні та що вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ — не колінеарні. **437.** 1) 5. **438.** 1) $B(1;2)$, $C(3;1)$, $\overline{CA}\,(-2;-5)$. **439.** $\overline{b}\,(\pm 8;\pm 6)$. **440.** 1) $\overline{d}\,(-\sqrt{5};2\sqrt{5})$. **442.** $\overline{F}\,(-3;12)$.

§ 10

446. 1) Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ дорівнює добутку їх модулів і косинуса кута між ними. **447.** 1) Ні; 2) так. **448.** 1) Скалярний квадрат вектора $\overline{a}$ дорівнює квадрату його довжини. **449.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **450.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **451.** Мал. 131: 60°; мал. 132: 90°. **452.** 120°. **453.** 1) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{15\sqrt{2}}{2}$; 3) 18; 4) –18; 5) 30; 6) –6; 7) –30; 8) 6. **454.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $-\sqrt{3}$. **455.** 1) 4; 2) 9; 3) 25. **456.** 1) 16; 2) 49. **457.** 1) 45°; 2) 180°; **458.** 30°. **459.** 1) $4\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2}$. **460.** 4. **461.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt{2}$; 3) 3; 4) $2\sqrt{3}$. **462.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 2. **463.** 1) –3; 2) –22; 3) –4; 4) –1. **464.** 1) –3; 2) –22. **465.** *Вказівка*: знайдіть скалярний добуток векторів. **466.** 1) вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ — взаємно перпендикулярні; 2) скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ дорівнює 0; 3) скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ дорівнює 0. **467.** 1) вектори $\overline{p}$ і $\overline{q}$ — взаємно перпендикулярні; 2) скалярний добуток векторів $\overline{p}$ і $\overline{q}$ дорівнює 0; 3) скалярний добуток векторів $\overline{p}$ і $\overline{q}$ дорівнює 0. **468.** 1) 90°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 180°. **469.** 1) 90°; 2) 60°. **470.** $\approx$ 63°. **471.** 90°. **473.** 1) Кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ — гострий; 2) кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ — тупий; 3) вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є співнапрямленими; 3) вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є протилежно напрямленими. **474.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) 1; 6) –1. **475.** 1) $\sqrt{7}$ і $\sqrt{19}$; 2) $\sqrt{5}$ і $\sqrt{3}$. **476.** 1) $\sqrt{129}$, 7; 2) 13, 13. **477.** 1) $|\overline{a}+\overline{b}| = |\overline{a}-\overline{b}| = 5$; 2) $|\overline{a}+\overline{b}| = |\overline{a}-\overline{b}| = 13$. **478.** *Вказівка*: доведіть, що діагоналі AC і BD рівні та взаємно перпендикулярні. **479.** 1) $\overline{a}\,(3;3)$, $\overline{b}\,(-2;2)$, $|\overline{a}|=3\sqrt{2}$, $|\overline{b}|=2\sqrt{2}$, кут між a і $\overline{b}$ дорівнює 90°; 2) $\overline{a}\,(-1;1)$, $\overline{b}\,(1;-2)$, $|\overline{a}|=\sqrt{2}$, $|\overline{b}|=\sqrt{5}$, кут між a і $\overline{b}$ становить $\approx$ 162°. **480.** 1) $\approx$ 77°. **481.** 1) –60; 2) –19. **482.** –5. **483.** 60°. **484.** 1) Прямим; 2) 0°; 3) не тупим; 4) не гострим. **485.** *Вказівка*: скористайтеся означенням скалярного добутку. **486.** 1) –1,2; 2) $-1\frac{1}{3}$. **487.** 1) $\approx$ 53°; 2) 45°. **488.** 45°. **489.** $\approx$ 41°. **490.** –1,5. **491.** 66.

РОЗДІЛ 3

§ 11

494. 3). **495.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **496.** 1) Ні; 2) так. **497.** 1) Так; 2) ні. **499.** 2) 12 см. **500.** 1) $6\sqrt{2}$ см; 2) 57°9′. **501.** 1) $4\sqrt{2}$ см; 2) $2\sqrt{6}$ см. **502.** $\approx$ 6 см. **503.** 1) $\approx$ 26°; 2) $\approx$ 18°; **504.** $\approx$ 28°. **505.** BC — найбільша, AC — найменша. **506.** $\angle B$ — найбільший, $\angle C$ — найменший. **507.** 1) $\angle B$ — найбільший, $\angle A$ — найменший; 2) кути рівні; 3) $\angle A$ — найбільший, $\angle C$ — найменший. **508.** 1) AB —

найбільша, AC — найменша; 2) AB — найбільша, AC — найменша; 3) BC — найбільша, AB — найменша. **509.** 1) $AC < BC$; 2) $AC > BC$; 3) $AC < BC$. **510.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **511.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **512.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **513.** 1) $\sqrt{3}$ см; 2) 3 см; 3) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см. **514.** 1) 8 см; 2) $8\sqrt{2}$ см; 3) $8\sqrt{3}$ см. **515.** 1 : $\sqrt{3}$: 2. **516.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **517.** $a \approx 7{,}1$ см, $c \approx 9{,}7$ см. **518.** $a \approx 2$ см, $c \approx 1{,}5$ см. **519.** $\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$, $\frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$. **520.** 1) $\angle B \approx 136°$, $\angle C \approx 14°$; 2) $\angle B \approx 103°$, $\angle C \approx 32°$. **521.** 1) $\approx 49°$ або $\approx 131°$; 2) $\approx 109°$ або $\approx 27°$. *Вказівка*: розгляньте два випадки. **522.** $\frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. **523.** 6 см, $\approx 3{,}1$ см, $\approx 4{,}4$ см. **524.** $b \approx 5{,}2$ см, $c \approx 7$ см. **525.** $b \approx 8{,}2$ см, $c \approx 3\sqrt{6}$ см. **526.** 1) $3\sqrt{2}$ см; 2) 4,8 см. **527.** 1) $5(\sqrt{2}+1)$, $5(\sqrt{2}+2)$. **528.** $4(\sqrt{2}-1)$, $4(2-\sqrt{2})$. **529.** 1) Основа; 2) основа; 3) бічна сторона. **530.** *Вказівка*: застосуйте наслідок 2 з теореми синусів до ΔABD або ΔBCD. **531.** *Вказівка*: продовжте медіану BM за точку M на відрізок $MD = BM$. Розгляньте ΔBCD. **532.** $BC > AC$. **533.** 1) 16,9 см; 2) 6,25 см. **534.** 1) $2\sqrt{2}$ см; 2) 4 см. **535.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см. **536.** $\approx 27{,}8$ см. **537.** $\frac{(a^2-b^2)\,tg\alpha\, tg\beta}{2(tg\alpha+tg\beta)}$. **538.** $a_c = \frac{ac}{a+b}$, $b_c = \frac{bc}{a+b}$. **539.** *Вказівка*: нехай BD — медіана ΔABC. Застосуйте теорему синусів до ΔABD і ΔBDC. **540.** *Вказівка*: доведіть, що медіана CC_1 проходить через точку O, яка ділить медіану BB_1 у відношенні 2 : 1. Застосуйте теорему синусів спочатку до ΔBCC_1 і ΔACC_1, а потім — до трикутників BOC і B_1OC. **541.** *Вказівка*: застосуйте теорему синусів до ΔAKC і ΔBKD. **542.** *Вказівка*: побудуйте допоміжний трикутник, сторонами якого є бічні сторони трапеції і різниця її основ. **543.** *Вказівка*: побудуйте допоміжний трикутник, сторонами якого є діагоналі трапеції і сума її основ. **544.** $\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **545.** $\frac{\sqrt{21}}{3}$ см. **546.** *Вказівка*: застосуйте наслідок 1 з теореми синусів до ΔABD і ΔDBC. **547.** *Вказівка*: позначте кут між діагоналями через α. Виразіть кожну сторону чотирикутника через радіус описаного кола і кут, протилежний стороні. Потім скористайтеся властивістю сторін описаного чотирикутника. **548.** $\approx 101{,}3$ м.

§ 12

549. 1) Ні; 2) ні; 3) так. **550.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **551.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **552.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **553.** $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$. **554.** 5,5. **555.** 1) $b^2 = a^2 + c^2 - ac\sqrt{2}$; 2) $c^2 = a^2 + b^2 - ab$; 3) $a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{3}$. **556.** 1) $\sqrt{13}$ см; 2) $\approx 2{,}9$ см. **557.** $2\sqrt{13}$ см. **558.** $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$. **559.** $\alpha \approx 105°$. **560.** $\alpha \approx 61°$. **561.** 1) $\cos A = 0{,}65$, $\cos B = \frac{83}{160}$, $\cos C = \frac{5}{16}$; 2) $\cos A = \frac{13}{14}$, $\cos B = 0{,}5$, $\cos C = -\frac{1}{7}$; 3) $\cos A = \frac{23}{28}$, $\cos B = \frac{29}{56}$, $\cos C = \frac{1}{16}$. **562.** 1) $\angle A \approx 36°$, $\angle B \approx 117°$, $\angle C \approx 26°$; 2) $\angle A \approx 47°$, $\angle B \approx 27°$, $\angle C \approx 104°$. **563.** $\approx 44°$, $\approx 57°$, $\approx 78°$. **564.** 1) $\alpha < 90°$; 2) $\alpha = 90°$; 3) $\alpha > 90°$. **565.** 1) Тупокутний; 2) гострокутний; 3) прямокутний. **566.** 1) $\approx 14{,}8$ см; 2) 7 см. **567.** ≈ 17 см. **568.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою косинусів. **569.** 1) 13 см; 2) $\approx 6{,}1$ см. **570.** 1) $\approx 8{,}7$ см і 14 см; 2) $\approx 7{,}5$ см і $\approx 14{,}7$ см; 3) $\approx 14{,}3$ см і $\approx 8{,}2$ см. **571.** $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$, $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$. **572.** $\approx 6{,}08$ см або $\approx 1{,}54$ см. **573.** 1) $\approx 5{,}7$ см або $\approx 10{,}8$ см; 2) $\approx 7{,}2$ см і ≈ 13 см. **574.** Якщо кут α зростає від 0° до 90°, то значення $\cos\alpha$ спадають, залишаючись додатними. Тоді довжина сторони a зростає. При подальшому зростанні кута α від 90° до 180° значення $\cos\alpha$ спадають від 0 до –1. Тому довжина сторони a продовжує зростати. **575.** Якщо $a^2 < b^2 + c^2$, то $2bc\cos\alpha > 0$. Оскільки $b > 0$, $c > 0$, то $\cos\alpha > 0$, а отже, A — гострий кут. **576.** 1) 90°; 2) $\approx 117°$; 3) $\approx 94°$. **577.** *Вказівка*: нехай $ABCD$ — паралелограм. За теоремою косинусів знайдіть AC^2

і BD^2. **578.** 15 см і 25 см. **579.** 5 см, 10 см. **580.** 6 см, 7 см. **581.** ≈ 9,8 см і ≈ 12,2 см. **582.** *Вказівка*: продовжіть медіану $AM = m_a$ за точку M на відрізок $MD = AM$ й обґрунтуйте, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. **583.** 6,5 см. **584.** 27 см. **585.** ≈ 13 см. **586.** $\sqrt{R^2+3r^2}$. **587.** *Вказівка*: за теоремою косинусів із трикутників BOM і AOM знайдіть BM^2 і AM^2. Одержані рівності почленно додайте. **588.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою косинусів. **589.** $\alpha \approx 45°$. **590.** ≈ 339 м.

§ 13

592. $x=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$ (мал. 611); $x=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$ (мал. 162); $\cos x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ (мал. 163). **593.** $c \approx 1{,}6$, $\alpha \approx 112°$, $\beta \approx 39°$ (мал. 164); $\alpha = 105°$, $a \approx 2{,}1$, $b \approx 2{,}9$ (мал. 165). **594.** 1) $b \approx 4{,}1$, $\alpha \approx 49°$, $\gamma \approx 101°$; 2) $a \approx 4{,}6$, $\beta \approx 49°$, $\gamma \approx 71°$; 3) $c \approx 9{,}6$, $\alpha \approx 30°$, $\beta \approx 45°$. **595.** 1) $c \approx 2{,}1$, $\alpha \approx 93°$, $\beta \approx 42°$; 2) $a \approx 6{,}1$, $\beta \approx 25°$, $\gamma \approx 35°$. **596.** 1) $b \approx 2{,}1$, $c \approx 2{,}9$, $\alpha = 105°$; 2) $a \approx 1{,}5$, $b \approx 1{,}8$, $\gamma = 75°$; 3) $a \approx 4{,}5$, $c \approx 12{,}3$, $\beta = 50°$. **597.** 1) $b \approx 3{,}6$, $c \approx 5{,}3$, $\alpha = 102°$; 2) $a \approx 4{,}7$, $b \approx 8{,}5$, $\gamma = 30°$. **598.** 1) $\alpha \approx 30°$, $\beta \approx 94°$, $\gamma \approx 56°$; 2) $\alpha \approx 36°$, $\beta \approx 26°$, $\gamma \approx 118°$; 3) $\alpha \approx 34°$, $\beta \approx 102°$, $\gamma \approx 44°$. **599.** 1) $\alpha \approx 29°$, $\beta \approx 47°$, $\gamma \approx 104°$; 2) $\alpha \approx 47°$, $\beta \approx 75°$, $\gamma \approx 58°$. **600.** 1) $b \approx 4{,}8$, $d_1 \approx 4{,}3$, ≈ 45°, ≈ 135°; 2) $b \approx 8{,}4$, $d_1 \approx 6{,}9$, ≈ 55°, ≈ 125°; 3) $b \approx 2{,}8$, $d_1 \approx 6{,}4$, ≈ 74°, ≈ 106°. **601.** 1) $c \approx 17{,}8$, $\beta \approx 32°$, $\gamma \approx 108°$; 2) $b \approx 55$, $\beta \approx 103°$, $\gamma \approx 32°$; 3) $a \approx 7{,}8$, $\alpha = 30°$, $\beta = 75°$. **602.** 1) $b \approx 5{,}5$, $\beta \approx 130°$, $\gamma \approx 20°$; 2) $c \approx 21{,}7$, $\beta \approx 36°$, $\gamma \approx 79°$. **603.** 1) $\alpha \approx 31°$, $\beta \approx 24°$, $\gamma \approx 125°$; 2) $\alpha = 115°$, $b \approx 1{,}9$, $c \approx 1{,}7$; 3) $b \approx 2{,}8$, $\alpha \approx 27°$, $\gamma \approx 113°$; 4) $\alpha \approx 148°$, $\beta \approx 12°$, $a \approx 12{,}4$. **604.** 1) $a \approx 6{,}9$, $b \approx 1{,}9$, $c \approx 7{,}8$, $\angle C = 113°$; 2) $a \approx 2$, $b \approx 3$, $c \approx 4$, $\angle C = 104°$; 3) $a \approx 4$, $b \approx 5$, $c \approx 7$, $\angle C = 34°$. **605.** $a \approx 4{,}5$, $b \approx 5{,}6$, $c \approx 7{,}5$, $\angle A = 34°$. **606.** 1) $b \approx 24$, $\angle A \approx 39°$, $\angle B \approx 94°$, $\angle C \approx 49°$; 2) $c = 14$, $\angle A \approx 53°$, $\angle B \approx 68°$, $\angle C \approx 59°$. **607.** 1) ≈ 3,9 см, ≈ 8,6 см; 2) ≈ 3,7 см, ≈ 6,7 см. **608.** 1) ≈ 4,8 см, ≈ 4,02 см, ≈ 6,2 см; 2) ≈ 3,8 см, ≈ 4,7 см, ≈ 3,6 см. **609.** 13 см, 14 см, 15 см. **610.** a, $a\left(1+\sqrt{2}\right)$, $a\sqrt{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}$. **611.** 6,4 см, якщо $\angle C$ — гострий; 11,7 см, якщо $\angle C$ — тупий. **612.** ≈ 57,4 см, ≈ 67,7 см, ≈ 70,5 см. **613.** $2R\sin\alpha$, $2R\sin\beta$, $2R\sin(\alpha+\beta)$. **614.** 9,6 см, 24,1 см, ≈ 23°, ≈ 97°. **615.** $\angle A \approx 56°$, $\angle B \approx 124°$, $\angle C \approx 139°$, $\angle D \approx 41°$. **616.** $\frac{25\sqrt{39}}{39}$ см. **617.** $\frac{2\sqrt{3\left(a^2+b^2+ab\right)}}{3}$. **618.** $\frac{b\sqrt{2}}{2}$. **619.** ≈ 39,7 см, ≈ 42,4 см. *Вказівка*: з вершини меншої основи проведіть пряму, паралельну бічній стороні. Знайдіть за теоремою синусів бічні сторони утвореного трикутника. **620.** $S=\frac{\left(a^2-b^2\right)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. *Вказівка*: з вершини меншої основи проведіть пряму, паралельну бічній стороні. За теоремою синусів знайдіть сторону утвореного трикутника. **621.** $\frac{a\sin\alpha\cdot\sin\alpha_1}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha_1+\beta_1)}$. **623.** ≈ 44°. **625.** ≈ 29 м. **626.** ≈ 924,3 м. **627.** $AC=\frac{a\sin\beta\sin\beta_1}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\beta_1)}$. **628.** ≈ 162 м.

§ 14

629. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. **630.** 6 кв. од. **631.** 36 кв. од. **632.** 1) 15 см²; 2) 24 см². **633.** 56 см². **634.** 1) ≈ 1,9 см²; 2) ≈ 7,3 см²; 3) ≈ 17,7 см². **635.** 1) 120 см²; 2) $8\sqrt{5}$ см². **636.** 336 см². **637.** 1) 84 см²; 2) 24 см². **638.** 42 см². **640.** 1) 12 см²; 2) 90 см². **641.** 156 см². **642.** 1) $S \approx 34{,}5$ см²; 2) $\gamma \approx 37°$; 3) $b = 24$ см; 4) $a \approx 3{,}7$ см. **643.** 1) 16 см; 2) 8 см. **644.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **645.** Якщо кут α зростає від 0° до 90°, то площа трикутника зростає. При подальшому зростанні кута α від 90° до 180° площа спадає. Найбільша площа трикутника, якщо $\alpha = 90°$. **646.** *Вказівка*: врахуйте, що діагональ паралелограма розбиває його на два трикутники з рівними площами. **647.** 1) ≈ 5,6 см²; 2) ≈ 11,5 см². **649.** 1) ≈ 1,4 см²; 2) ≈ 29,8 см². **650.** *Вказівка*: врахуйте, що діагоналі паралелограма розбивають його на чотири трикутники з рівними площами. **651.** 1) ≈ 19,3 см²; 2) ≈ 41,1 см². **652.** 1) 36 см²; 2) ≈ 21,1 см². **653.** 1) ≈ 19,1 см²; 2) ≈ 26,8 см². **654.** *Вказівка*: нехай $AD = l$ — бісектриса ΔABC. Знайдіть за формулою $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$ площі трикутників ABC, ACD, ABD та скористайтеся рівністю $S_{ABC}=S_{ACD}+S_{ABD}$. **655.** $\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **656.** 1) 12 см, 5,6 см, 4,2 см; 2) ≈ 12,9 см, 12 см, 11,2 см. **657.** 36 см, 51 см, 75 см. **658.** 84 см². **659.** 1) ≈ 14,9 см; 2) ≈ 16,03 см. **660.** 1) 13 см; 2) 16,25 см. **661.** 1) $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$ см, $r=\sqrt{3}$ см; 2) S = 6 см², r = 1 см; 3) S = 12 см², R = 3,125 см; 4) S = 24 см², r = 2 см; 5) R = 8,125 см, r = 1,5 см. **662.** *Вказівка*: 1) скористайтеся рівностями $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$; 2) підставте у формулу (1) значення $R=\frac{a}{\sin\alpha}$. **663.** $\frac{l^2\sin\alpha}{2\sin(\alpha-45°)\sin(\alpha+45°)}$. **664.** $\frac{2m^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

665. $S=\frac{h_1h_2}{2\sin\alpha}$. **666.** *Вказівка*: нехай O — точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$. Тоді площа цього чотирикутника дорівнює сумі площ трикутників ABO, BCO, CDO, ADO. **667.** 288 см². **668.** 270 см². **669.** 12 см. **670.** $S=\frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_a+m_b-m_c)(m_a+m_c-m_b)(m_b+m_c-m_a)}$. *Вказівка*: продовжте одну з медіан трикутника на відрізок, що дорівнює $\frac{1}{3}$ медіани. **671.** $S=1:\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}$. *Вказівка*: виразіть сторони трикутника з рівності $S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$ і скористайтеся формулою Герона. **673.** ≈ 1,9 кг. **674.** AD = 400 м.

РОЗДІЛ 4

§ 15

675. На мал. 197. **676.** 1) OA; 2) OM; 3) $\angle AOB$. **677.** 1) б; 2) в. **678.** 1) 20 см; 2) 32 см; 3) 40 см. **679.** 3) і 4). **680.** 1) 1,5 см; 2) 2 см; 3) $\frac{P}{8}$. **681.** 1) 4 см; 2) 8 см; 3) $\frac{d}{2}$. **682.** 1) 108°; 2) 150°. **683.** 160°. **684.** 1) 18°; 2) 15°. **685.** 36°. **686.** 1) 10; 2) 3; 3) 12. **687.** 1) 8; 2) 12; 3) 9. **688.** 1) 120°; 2) 154°; 3) 146°. **689.** 1) 36; 2) 10; 3) 20. **690.** 1) β = 36°, γ = 36°, n = 10; 2) α = 140°, γ = 40°, n = 9; 3) α = 160°, β = 20°, n = 18; 4) α = 120°, β = 60°, γ = 60°; 5) α = 168°, β = 12°, n = 30; 6) α = 135°, γ = 45°, n = 8; 6) β = 30°, γ = 30°, n = 12. **691.** *Вказівка*: зовнішній кут дорівнює $180°-\frac{180°(n-2)}{n}$. Порівняйте зовнішній кут із центральним. **692.** *Вказівка*: знайдіть суму $\frac{180°(n-2)}{n}$ і $\frac{360°}{n}$. **693.** $\frac{n-2}{2}$. **694.** 1) У 4 рази; 2) у 9 разів. **695.** 1) 4; 2) 3. **696.** 1) 8; 2) 12. **697.** 1) 7; 2) 5. **698.** 120°. **699.** 1) Так; 2) так. **700.** Ні. **701.** 60°. **702.** *Вказівка*: 1) спочатку доведіть рівність трикутників; 2) доведіть, що утворені чотирикутники є рівнобічними трапеціями; 3) знайдіть відповідні кути трикутника і скористайтеся ознакою рівнобедреного трикутника. **703.** *Вказівка*: спочатку знайдіть зовнішній кут. **704.** *Вказівка*: спочатку доведіть рівність трикутників. **705.** *Вказівка*: доведіть рівність утворених трикутників. **706.** *Вказівка*: доведіть, що в утвореному n-кутнику всі сторони рівні й усі кути рівні. **707.** 60°. **708.** *Вказівка*: переконайтеся, що всі кути восьмикутника дорівнюють по 135°, а кожна сторона дорівнює $a(\sqrt{2}-1)$. **709.** *Вказівка*: сполучить дану точку з вершинами n-кутника і знайдіть площу n–кутника як суму площ утворених трикутників. **710.** *Вказівка*: доведіть, що кожний кут утвореного трикутника дорівнює 60°. **711.** *Вказівка*: покажіть, що сума кутів многокутників, які мають спільну вершину, дорівнює 360°. **712.** *Вказівка*: скористайтеся вказівкою до попередньої задачі.

§ 16

713. 1) Ні; 2) так. **714.** 1) а) Так; б) ні; 1) а) так; б) ні; 1) а) ні; б) так. **715.** 1) 1; 2) 1. **716.** 2. **717.** 1) 1; 2) 2. **718.** 1,5. **719.** 1) 12 см; 2) $5\sqrt{3}$ см; 3) 18 см. **720.** 1) 12 см; 2) $16\sqrt{3}$ см; 3) 18 см. **721.** 1) 5 см; 2) 6 см; 3) 8 см. **722.** *Вказівка*: порівняйте формули $a_3 = R\sqrt{3}$ і $a_3 = 2r\sqrt{3}$. **723.** 1) $R = 2$ см, $r = 1$ см, $P = 6\sqrt{3}$ см; 2) $a = 12$ см, $r = 2\sqrt{3}$ см, $P = 36$ см; 3) $a = 36$ см, $R = 12\sqrt{3}$ см, $P = 108$ см; 4) $a = 3\sqrt{3}$ см, $R = 3$ см, $r = 1{,}5$ см. **724.** 1) 8 см; 2) $4\sqrt{2}$ см. **725.** 1) 1,5 см; 2) 2 см; 3) 2,5 см. **726.** 1) 8 см; 2) 16 см; 3) 48 см. **727.** 1) $R = 3\sqrt{2}$ см, $r = 3$ см, $P = 24$ см; 2) $a = 16$ см, $r = 8$ см, $P = 64$ см; 3) $a = 20$ см, $R = 10\sqrt{2}$ см, $P = 80$ см; 4) $a = 4$ см, $R = 2\sqrt{2}$ см, $r = 2$ см. **728.** 1) 24 см; 2) 30 см; 3) 42 см. **729.** 1) 2 см; 2) 8 см; 3) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **730.** 1) 1,5 см; 2) 9 см; 3) 15 см. **731.** 1) На колі радіуса R позначаємо довільну точку; 2) із даної точки на колі відмічаємо послідовно 5 точок розхилом циркуля, що дорівнює R; 3) з'єднуємо точки й отримуємо шестикутник. **734.** *Вказівка*: врахуйте, що сторона правильного шестикутника дорівнює радіусу кола, описаного навколо нього. **735.** *Вказівка*: спочатку накресліть коло даного радіуса. Через його центр проведіть перпендикулярні прямі. **738.** 1) $R = 20$ см, $r = 10\sqrt{3}$ см, $P = 120$ см; 2) $a = 14$ см, $r = 7\sqrt{3}$ см, $P = 84$ см; 3) $a = 20$ см, $R = 20$ см, $P = 120$ см; 4) $a = 6$ см, $R = 6$ см, $r = 3\sqrt{3}$ см. **739.** 1) 6 см; 2) $2m\sqrt{3}$. **740.** 1) 4 см, 8 см; 2) n, $2n$. **741.** 1) 2 см, $2\sqrt{2}$ см; 2) 1 см, $\sqrt{2}$ см. **742.** 1) $6(2+\sqrt{3})$, $3(3+2\sqrt{3})$; 2) $10(2+\sqrt{3})$, $5(3+2\sqrt{3})$; 3) $2m(2+\sqrt{3})$, $m(3+2\sqrt{3})$. **743.** 1) $\sqrt{6}$ см; 2) $3\sqrt{6}$ см; 3) $\frac{P\sqrt{6}}{9}$. **744.** 1) 5 см; 2) 1 см; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **745.** 1) 30 см; 2) 34 см; 3) $2a$. **746.** 1) 14 см; 2) 12 см; 3) $\frac{2a}{3}$. **747.** 1) 24 см; 2) $24\sqrt{3}$ см; 3) $\frac{2P\sqrt{3}}{3}$. **748.** 1) $a = 3$ см, $R = 3$ см, $r = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ см; 2) $a = 4$ см, $R = 4$ см, $r = 2\sqrt{3}$ см; 3) $a = \frac{d}{2}$, $R = \frac{d}{2}$, $r = \frac{d\sqrt{3}}{4}$. **749.** 1) 10 см, $5\sqrt{3}$ см; 2) 12 см, $6\sqrt{3}$ см; 3) $\frac{d\sqrt{3}}{3}$, $\frac{d}{2}$. **750.** 1) 4 см, $2\sqrt{3}$ см; 2) 16 см, $8\sqrt{3}$ см; 3) $a\sqrt{3}$, $2a$. **751.** *Вказівка*: розгляньте два випадки. 1) $6\sqrt{3}$ см або $3\sqrt{3}$ см; 2) 6 см або 3 см; 3) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ або $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **752.** Правильного трикутника. **753.** Правильного чотирикутника. **754.** Ні. **755.** *Вказівка*: спочатку знайдіть радіус описаного кола. **756.** *Вказівка*: спочатку знайдіть діагоналі. **757.** 1) $4\sqrt{3}$ см; 2) $6\sqrt{3}$ см. **758.** 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **759.** 1) Якщо $n < 6$; 2) якщо $n = 6$; 3) якщо $n > 6$. **760.** 1) $2(3+2\sqrt{3})$; 2) $4(3+2\sqrt{3})$. **761.** $\frac{a}{2}(2+\sqrt{2})$. **762.** $\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$. **763.** *Вказівка*: поділіть восьмикутник на 8 рівних трикутників і розгляньте один з них. 1) Скористайтеся теоремою косинусів; 2) скористайтеся теоремою Піфагора. **764.** *Вказівка*: скористайтеся вказівкою до попередньої задачі. **765.** 1) $\frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$; 2) $a\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **766.** *Вказівка*: спочатку доведіть, що сторона правильного вписаного трикутника ділить перпендикулярний до неї діаметр у відношенні 3 : 1. **767.** *Вказівка*: спочатку побудуйте допоміжний рівнобедрений трикутник AOB з основою AB, у якого OC — висота, $D \in OC$, $AD = OD$ і $DC = AB$. OA — радіус кола, описаного навколо восьмикутника. **768.** *Вказівка*: скористайтеся вказівкою до попередньої задачі. **769.** $\approx 4{,}4$ см. **770.** 4,2 м, 2,3 м, 2,1 м. **771.** *Вказівка*: від кожної вершини квадрата відкладіть відрізки, що дорівнюють половині його діагоналі. Отримані вісім точок послідовно сполучіть. **772.** *Вказівка*: побудуйте коло й поділіть його на п'ять рівних частин. Сполучіть точки поділу, утворивши зірочку.

§ 17

773. 1) Ні; 2) ні 3) так. **774.** 1) Ні; 2) ні 3) так. **775.** 1) Ні; 2) ні 3) так. **777.** 1) 10π см; 2) 20π см; 3) 24π см. **778.** 1) 4π см; 2) 6π см; 3) 8π см. **779.** 1) 2 см; 2) 7 см; 3) 1 см. **780.** 1) $D = 5$ см, $C = 5\pi$ см; 2) $R = 10$ см, $C = 20\pi$ см; 3) $R = 9{,}2$ см, $D = 18{,}4$ см; 4) $R = 4{,}8$ см, $C = 9{,}6\pi$ см; 5) $D = 22$ см, $C = 22\pi$ см. **781.** *Вказівка*: спочатку знайдіть радіус кола. **782.** 1) Збільшиться на 10π; 2) зменшиться на 6π; 3) збільшиться в 2 рази. **783.** 1) 6π см; 2) 12π см. **784.** 1) 8π см; 2) $8\sqrt{2}\,\pi$ см. **785.** 1) 13π см; 2) 25π см; 3) 20π см. **786.** 1) 3π см; 2) $2\sqrt{2}\,\pi$ см; 3) $4\sqrt{3}\,\pi$ см. **787.** 1) $10\sqrt{3}\,\pi$ см; 2) 20π см. **788.** 1) π см; 2) 2π см; 3) 4π см. **789.** 1) $\frac{36}{\pi}$ см; 2) 108 см; 3) $\frac{60}{\pi}$ см. **790.** 1) 80°; 2) 108°; 3) 80°. **791.** 1) $\frac{15\pi}{4}$ см; 2) 90 см; 3) 30°. **792.** 1) 8π см; 2) 12π см. **793.** 1) 14,4π см; 2) 9,6π см. **794.** 1) 6π см; 2) 24π см. **795.** 1) $1{,}25\sqrt{73}\,\pi$ см; 2) $2{,}6\sqrt{41}\,\pi$ см. **796.** $8\sqrt{3}$ см; 2) $7\sqrt{3}$ см. **797.** 1) 6 см; 2) 1 см. **798.** *Вказівка*: спочатку знайдіть радіус кола. **799.** 1) ≈ 14,7 см; 2) ≈ 1,5m. **800.** 1) 3 см; 2) 5 см. **801.** Периметри рівні. **802.** 1) $\frac{3l}{\pi}$; 2) $\frac{2l\sqrt{2}}{\pi}$; 3) $\frac{3l\sqrt{3}}{2\pi}$. **803.** 1) $\frac{a\pi}{3}$; 2) $\frac{a\pi\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{2a\pi\sqrt{3}}{9}$. **804.** 1) $2\pi(a+b)$; 2) $a\pi$; 3) $2a\pi$. **805.** 1) 16π см; 2) 2π см. **806.** 1) 50π см; 2) 130π см. **807.** Довжині даного кола. **808.** ≈ 300 см. **809.** $1\frac{1}{3}$ см. **810.** Перше коло. **811.** 1 : $\sqrt{3}$. **812.** 126. **813.** 1) ≈ 40004 км; 2) ≈ 80 см. **814.** ≈ 126 м. **815.** ≈ 5,7 м. **816.** *Вказівка*: спочатку треба поміряти, скільки разів намотується ланцюг для відра на вал. **817.** ≈ 40073 км.

§ 18

818. 1) Ні; 2) ні 3) так. **819.** 1) Ні; 2) ні 3) так. **821.** 1) 16π см²; 2) 36π см²; 3) 81π см². **822.** 1) 25π см²; 2) 36π см²; 3) 64π см². **823.** 1) 5 см; 2) 3 см; 3) 6 см. **824.** *Вказівка*: спочатку знайдіть радіус круга. 1) 2 см; 2) 4 см; 3) 7 см. **825.** *Вказівка*: застосуйте формули $D = 2R$ і $C = 2\pi R$. **826.** 1) Збільшиться в 9 разів; 2) зменшиться в 4 рази; 3) збільшиться в 16 разів. **827.** 2 см². **828.** 1) $\frac{\pi}{4}$ см²; 2) 9π см²; 3) 16π см². **829.** 1) 4π см; 2) 16π см. **830.** 1) 25π см², 50π см²; 2) 49π см², 98π см²; 3) 81π см², 162π см². **831.** 1) 25π см²; 2) 169π см²; 3) 100π см². **832.** 1) 108π см²; 2) 144π см². **834.** 1) π см²; 2) 2π см²; 3) 10π см². **835.** 1) 18π см²; 2) 45π см²; 3) 72π см². **836.** 1) $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$; 2) $\frac{R^2}{12}(2\pi-3\sqrt{3})$. **837.** *Вказівка*: застосуйте формулу $S = \pi R^2$. **838.** 1) 4π см; 2) 2π см; 3) 18π см. **839.** 1) C = 20π см, S = 100π см²; 2) R = 10 см, S = 100π см²; 3) R = 5 см, C = 10π см; 4) R = 1 см, S = π см²; 5) C = 6π см, S = 9π см²; 6) R = 6 см, S = 36π см²; 7) R = 3 см, C = 6π см. **840.** Площа півкруга більша. **841.** У 2 рази. **842.** Площа описаного круга в чотири рази більша за площу вписаного круга. **843.** 1) 10 см; 2) 12 см. **844.** 1) 1 : 4; 2) 1 : 2; 3) 3 : 4. **845.** 1) 16π см², 4π см²; 2) 4π см², π см². **846.** 1) 8π см², 4π см²; 2) 18π см², 9π см². **847.** $S = \pi(R^2 - r^2)$. **848.** 1) 60π см²; 2) 8π см². **849.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **850.** 1) 160°; 2) 72°. **851.** 1) ≈ 7,12 см; 2) ≈ 3,37 см. **852.** Малюнок 242: $R^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$; малюнок 243: $R^2(3\sqrt{3}-\pi)$. **853.** Малюнок 244: $R^2(\pi-2)$; малюнок 245: $R^2(4-\pi)$. **854.** $\frac{8S}{\pi}$. **855.** $\frac{Q\pi\sqrt{3}}{3}$. **856.** $\frac{m^2\pi}{4}$. **857.** $\frac{9l^2}{64\pi}$. **858.** 3 : 2. **859.** $S = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)R^2$. **860.** a^2. **861.** 10 см. **862.** 1) ≈ 644,6 см²; 2) ≈ 1790,5 см². **863.** 0,75 мм. **864.** 43,4 %. **865.** ≈ 9,4 дм³.

РОЗДІЛ 5

§ 19

866. 1) Ні; 2) так. **867.** 1) Ні; 2) так. **868.** 1) Ні; 2) так. **869.** 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні. **870.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні. **871.** 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) ні. **872.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **873.** 1) Ні; 2) так. **874.** Перетворення не є переміщенням, оскільки воно не зберігає відстані між точками. **875.** 1) У точки X' і Y'; 2) у відрізки CX' і $X'Y'$; 3) так. **876.** 1) Не існує; 2) існує. **877.** Так. **878.** 2) $AB = A'B'$. **879.** *Вказівка*: коло із центром B і радіусом 3 см. **882.** Так. **884.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **885.** 1) Так; 2) так. **886.** 1) Не обов'язково. **887.** 1) BOD; 2) BOC. **888.** Не обов'язково. **889.** Так. **890.** Ні. Це можливо для рівнобедрених трикутників. **892.** *Вказівка*: скористайтеся наслідком з теореми про властивість переміщення та задачею 2 в тексті параграфа. **893.** 1) Так; 2) так; 3) не завжди; 4) так. **894.** *Вказівка*: скористайтеся наслідком з теореми про властивість переміщення та задачею 2 в тексті параграфа. **896.** *Вказівка*: припустіть, що паралельні прямі a і b при переміщенні переходять у прямі a' і b', які перетинаються. Оскільки переміщення зберігає належність точок прямій, то прямі a і b також перетиналися б. **898.** 5 см^2 (мал. 261); $2(3\sqrt{3}-2)$ см^2 (мал. 262).

§ 20

899. 1) Ні; 2) так. **900.** 1) Ні; 2) так. **901.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **902.** 1) Ні; 2) так. **903.** На мал. 286, *б*. **906.** *Вказівка*: виміряйте побудований відрізок та визначте розміщення його середини. **907.** *Вказівка*: побудуйте точки, симетричні вершинам трикутника. **908.** 1) $A'(-3; -5)$; 2) $A'(3; -5)$; 3) $A'(-4; -6)$, $B'(-5; -7)$. **909.** 1) $A'(-2; -2)$, $B'(-6; -6)$; 2) $A'(6; -2)$, $B'(2; -6)$; 3) $A'(2; 2)$, $B'(-2; -2)$. **911.** На мал. 287, *в*. **914.** *Вказівка*: побудуйте серединний перпендикуляр до відрізка MN. **918.** 1) *Вказівка*: побудуйте дві точки, симетричні центру кола та деякій точці кола. **919.** 1) $A'(-4; -5)$; 2) $A'(4; 5)$. **920.** 1) $A'(2; -1)$, $B'(4; -1)$; 2) $A'(-3; 3)$, $B'(3; -3)$; 3) $A'(3; -2)$, $B'(6; -4)$. **922.** *Вказівка*: спочатку знайдіть точку, відносно якої точки A і B симетричні. **923.** *Вказівка*: скористайтесь теоремою про властивість симетрії відносно точки. **924.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою: якщо діагоналі чотирикутника діляться точкою їх перетину навпіл, то такий чотирикутник — паралелограм. **925.** 1) $A'(-1; -2)$, $C'(-7; -3)$, $B'(-4; -6)$. **926.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **928.** *Вказівка*: якщо чотирикутник $ABCD$ має центр симетрії, то вершини A, B, C, D переходять відповідно у вершини C, D, A, B. Отже, його сторони AB і BC переходять відповідно у сторони CD і DA. Тому $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$. **929.** Пряма, рівновіддалена від даних прямих. **930.** *Вказівка*: спочатку побудуйте пряму l, відносно якої симетричні точки A і A', а потім точки B' і C', симетричні B і C відносно l. **931.** *Вказівка*: проведіть пряму, перпендикулярну до бісектриси кута. **933.** *Вказівка*: скористайтесь тим, що лінія центрів є віссю симетрії кожного з даних кіл. **934.** *Вказівка*: скористайтеся властивостями діагоналей ромба. **938.** Трапеція — одну; прямокутник, ромб — дві; квадрат — чотири. **940.** *Вказівка*: проведіть коло із центром O і радіусом OA. Відкладіть від точки A три хорди, які дорівнюють OA. Дістанете точку A'. **942.** *Вказівка*: побудуйте пряму, симетричну прямій a відносно точки p. **943.** *Вказівка*: позначте на даній прямій дві довільні точки M і N. Тоді точка A', симетрична точці A відносно даної прямої, є точка перетину кіл із центрами M і N й радіусами MA і NA. **944.** *Вказівка*: користуючись властивостями осьової симетрії, обґрунтуйте рівність сторін трикутника. **945.** *Вказівка*: побудуйте точку B_1, симетричну точці B відносно прямої l. Точка перетину прямих AB_1 і l — шукана точка N. **946.** *Вказівка*: побудуйте точки M_1 і M_2, симетричні точці M відносно сторін деякого кута. Проведіть пряму M_1 і M_2 й позначте точки перетину цієї прямої зі сторонами кута через X і Y. ΔMXY — шуканий. **949.** *Вказівка*: скористайтесь розв'язанням задачі 945.

§ 21

950. На малюнку 303, *в*. **951.** *Вказівка*: відкладіть відрізок $ON = OM$. **957.** 1) У пряму; 3) у кут, рівний даному. **960.** *Вказівка*: виконайте поворот двох будь-яких точок прямої навколо точки M на даний кут. **961.** *Вказівка*: виконайте поворот центра кола та деякої точки кола навколо точки A на даний кут. **962.** Геометричне місце центрів поворотів — серединний перпендикуляр до відрізка XX'. **963.** Геометричне місце центрів поворотів — серединний перпендикуляр до відрізка, що сполучає центри даних кіл. **967.** *Вказівка*: покажіть, що відрізки, які сполучають точку перетину висот із вершинами трикутника, мають рівні довжини, а кути між ними становлять по 120°. **968.** *Вказівка*: виконайте поворот трикутника навколо центра на 120°. **969.** *Вказівка*: виконайте поворот квадрата навколо центра на кут 90°. **970.** *Вказівка*: на серединному перпендикулярі до відрізка, який сполучає центри даних кіл, побудуйте точки, з яких цей відрізок видно під кутом 45°. **971.** Центр повороту — точка перетину серединних перпендикулярів до відрізків AA' і BB'. Центра повороту не існує, якщо $AA' \parallel BB'$ і $AA' \neq BB'$, або $AA' = BB'$, а середини відрізків AA' і BB' не збігаються. **972.** *Вказівка*: виконайте поворот трикутника навколо вершини B на кут 90°. **974.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. **976.** 1) 10 хвилин на 13-ту; 2) 20 хвилин на 13-ту. **977.** *Вказівка*: знайдіть центр повороту, за якого прямокутник $ABCD$ займе положення прямокутника $A_1B_1C_1D_1$ (мал. 307). Для цього знайдіть точку O перетину серединних перпендикулярів l_1 і l_2 до відрізків AA_1, BB_1. При повороті навколо точки O на кут 90° прямокутник $ABCD$ займе положення $A_1B_1C_1D_1$.

§ 22

978. Мал. 316, *б*. **981.** Так. **982.** 1) Так; 2) ні. **985.** Якщо $AB \parallel CD$ або AB і CD лежать на одній прямій. **988.** $AB \parallel CD$ і $AB = CD$ або $AB = CD$ і відрізки AB, CD лежать на одній прямій. **989.** Безліч. **991.** 4 см². **992.** *Вказівка*: виконайте паралельне перенесення бічної сторони AB трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) так, щоб точка B перейшла в точку C. Розгляньте утворений трикутник. **993.** *Вказівка*: виконайте паралельне перенесення бічної сторони трапеції так, як показано на малюнку 319. **994.** *Вказівка*: виконайте паралельне перенесення бічної сторони трапеції так, як показано на малюнку 320. **995.** 4 см. *Вказівка*: скористайтеся малюнком 319. **996.** *Вказівка*: скористайтеся малюнком 319. **997.** *Вказівка*: скористайтеся малюнком 320. **998.** *Вказівка*: нехай у трикутнику $ABCAM$ і BN — рівні медіани. Паралельно перенесіть відрізок BN так, що точка N перейшла у M. $\Delta AMB'$ — рівнобедрений. Розгляньте трикутники ANB і BMA. **1000.** *Вказівка*: нехай $AMNB$ — деякий шлях між селами A і B (мал. 324). Побудуйте точку A', у яку переходить точка A при паралельному перенесенні, що переводить точку M в N. Знайдіть точку K перетину прямої $A'B$ з берегом річки, який є ближчим до села B. Проведіть з точки K перпендикуляр до другого берега річки.

§ 23

1001. На малюнку 333, *б*. **1003.** 1) $k = 4$. **1004.** $k = 1$. **1005.** Ні. Наприклад, квадрат не подібний прямокутнику, хоча їхні кути рівні, квадрат не подібний ромбу, хоча їхні сторони пропорційні. **1006.** Ні. **1007.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **1008.** 1) 0,25; 2) 4; 3) 25. **1009.** $\sqrt{2}$. **1010.** 1) Так; 2) так. **1011.** Так, бо $\frac{8}{12} = \frac{6}{9}$. **1012.** Так. **1013.** 1 : 4. **1014.** 1) Ні; 2) ні. **1015.** 14 см, 21 см, 28 см, 35 см. **1016.** 1) 1 : 16; 2) 4 : 25; 3) $m^2 : n^2$. **1017.** 1) 2 : 3; 2) 1 : 4; 3) $\sqrt{m} : \sqrt{n}$. **1018.** 1) 16 см; 2) 24 см; 3) 32 см. **1019.** 1) 56 см²; 2) 100 см²; 3) 120 см². **1020.** Так, $k = 0,5$. **1021.** Так, якщо $MN \parallel AB$, $k = 0,5$. В інших двох випадках — ні. **1022.** Середня лінія має більшу довжину. *Вказівка*: нехай $ABCD$ — дана трапеція з основами BC і AD, точки N і M лежать відповідно на сторонах AB і CD. Трапеції $NBCM$ та $ANMD$ подібні. Тоді $\frac{BC}{NM} = \frac{NM}{AD}$, звідки $NM = \sqrt{BC \cdot AD}$. Середня лінія трапеції дорівнює $\frac{1}{2}(BC + AD)$. Тоді $\sqrt{BC \cdot AD} < \frac{1}{2}(BC + AD)$. **1023.** 1) 1 : 2; 2) $\sqrt{6}$: 3. **1025.** *Вказівка*: побудуйте деякий ромб із кутом α, вершини якого лежать на сторонах AB і AC. Такий ромб подібний шуканому. **1026.** 4,5 м. **1027.** 35 м. **1029.** Ні.

ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

1. МЕТОД КООРДИНАТ

1030. Так. **1031.** 1) Так; 2) так; 3) так. **1032.** 1) Ні; 2) так. **1033.** $A(0; 0)$, $B(0; 3)$, $C(2; 0)$ (мал. 346); $A(-1; 0)$, $B(-1; 3)$, $C(1; 0)$ (мал. 347). **1034.** $A(1; 1)$, $B(1; 4)$, $C(3; 1)$. **1035.** Так (мал. 349); ні (мал. 350). **1036.** Ні. **1039.** 1) $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(0; 8)$; 2) $A(0; 0)$, $B(3; 0)$, $C(0; 4)$; 3) $A(0; 0)$, $B(12; 0)$, $C(0; 16)$.

1040. 1) $A(0;\ 0)$, $B(2;\ 0)$, $C(2;\ 2)$; $D(0;\ 2)$; 2) $A(0;\ 2)$, $B(0;\ 0)$, $C(2;\ 0)$; $D(2;\ 2)$; 3) $A(-\sqrt{2};\ 0)$, $B(0;\ -\sqrt{2})$, $C(\sqrt{2};\ 0)$; $D(0;\ \sqrt{2})$. **1041.** $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};0\right)$, $\left(0;-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};0\right)$, $\left(0;\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. **1042.** 1) $\sqrt{13}$, 2,5, $\frac{\sqrt{73}}{2}$; 2) $\sqrt{61}$, 6,5, $\frac{\sqrt{601}}{2}$. **1043.** $\sqrt{193}$, 12,5, $\frac{\sqrt{2353}}{2}$. **1044.** 1) $\sqrt{85}$; 2) $3\sqrt{2}$. **1045.** 5. **1046.** 1) 5; 2) 13. **1047.** 25. **1048.** 1) $(-a;\ 0)$, $\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $(a;\ 0)$, $\left(\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ або $(0;\ -a)$, $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2}\right)$, $(0;\ a)$, $\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2}\right)$; 2) *Вказівка*: розгляньте 12 випадків. **1049.** У даних квадратів дві вершини спільні. Якщо вони лежать на осі OY, то абсциси двох інших відповідних вершин квадратів є протилежними числами. Якщо ці спільні вершини лежать на осі OX, то ординати двох інших відповідних вершин квадратів є протилежними числами. **1050.** Так. Наприклад, трикутник з вершинами в точках (1; 1), (2; 1), (1; 2) або (2; 2), (4; 2), (2; 4). *Вказівка*: щоб довести існування фігури, достатньо навести один приклад. **1051.** 13 см. **1052.** *Вказівка*: введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб один з кінців відрізка AB лежав у початку координат. **1053.** 1) Коло із центром (2; 0) і радіусом $2\sqrt{2}$; 2) пряма, що перпендикулярна до відрізка AB й ділить його у відношенні 5 : 2, рахуючи від точки A. **1054.** 1) $a = 12\sqrt{2}$, $d = 24$; 2) $a = 2\sqrt{2}$, $d = 4$. **1055.** *Вказівка*: введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб вершина A містилась у початку координат. **1056.** 1) $a = 12\sqrt{2}$, $d = 24$; 2) $a = 2\sqrt{2}$, $d = 4$. **1057.** 1) Ні; 2) дотикається. **1058.** *Вказівка*: введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб сторона трикутника, до якої проводимо медіану, лежала на осі абсцис, а основа медіани — у початку координат. **1059.** *Вказівка*: введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб одна з вершин паралелограма містилась у початку координат. **1060.** *Вказівка*: введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб одна з вершин трапеції містилась у початку координат. **1061.** Точка M знаходиться на відстані $3\frac{1}{3}$ від центра кола. **1065.** Пряма $x = \frac{a^2+b^2}{2b}$, де b — відстань між точками A і B. *Вказівка*: введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб точка A містилась у початку координат, а точка B лежала на осі абсцис. **1066.** *Вказівка*: введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб одна з вершин містилась у початку координат, а одна зі сторін лежала на додатній півосі OX. **1068.** *Вказівка*: введіть прямокутну декартову систему координат і визначте координати середини третьої сторони трикутника.

2. ВЕКТОРНИЙ МЕТОД

1071. 1) $\overline{a}$ і $\overline{m}$; 2) $\overline{a}$ і $\overline{c}$; 3) $\overline{b}$ і $\overline{d}$; 4) $\overline{d}$ і $\overline{m}$; 5) $\overline{c}$ і $\overline{m}$. **1072.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **1073.** 1), 4). **1075.** Так. **1076.** 1) $\overline{AB} \parallel \overline{MP}$; 2) $\overline{AB} \parallel \overline{MP} = 0$; 5) $\overline{AM} = \overline{MB}$. **1079.** *Вказівка*: нехай $ABCD$ — квадрат. $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$, $\overline{BD} = -\overline{AB} + \overline{AD}$. Знайдіть скалярний добуток цих векторів. **1080.** *Вказівка*: нехай $ABCD$ — прямокутник. $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$, $\overline{BD} = -\overline{AB} + \overline{AD}$. Знайдіть скалярний квадрат цих векторів. **1081.** *Вказівка*: нехай ABC — прямокутний трикутник ($\angle B = 90°$). $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Піднесіть рівність до квадрата. **1084.** *Вказівка*: введіть базис; розкладіть вектори за базисом; скористайтеся тим, що рівні вектори мають рівні координати. **1087.** *Вказівка*: покажіть, що пари векторів $\overline{AE}$ і $\overline{FC}$, $\overline{AF}$ і $\overline{EC}$ — колінеарні. **1088.** *Вказівка*: покажіть, що $\overline{DF} = \overline{CE}$. **1089.** *Вказівка*: покажіть, що $\overline{MP} = \overline{NK}$. **1094.** Сума квадратів сторін паралелограма дорівнює сумі квадратів його діагоналей. **1099.** *Вказівка*: скористайтеся фактом — для того, щоб точка M була точкою перетину медіан трикутника ABC, необхідно й достатньо, щоб $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$. **1100.** *Вказівка*: скористайтеся фактом — для того, щоб точка M була точкою перетину медіан трикутника ABC, необхідно й достатньо, щоб $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$. **1103.** *Вказівка*: знайдіть скалярний добуток векторів $\overline{a}(\sqrt{4a+1};\sqrt{4b+1})$ і $\overline{c}(1;1)$. **1104.** x — будь-яке число, $y = 0$. **1106.** $100\sqrt{2}$. **1107.** $120°$.

ПОВТОРЕННЯ ВИВЧЕНОГО

1114. 1) $K(2; -1)$, $L(1; -3)$, $M(5; -2)$; 2) $K(-2; 1)$, $L(-1; 3)$, $M(-5; 2)$; 3) $K(-2; -1)$, $L(-1; -3)$, $M(-5; -2)$. **1115.** $3-2\sqrt{3}$, $3+2\sqrt{3}$. **1116.** 7 або $\sqrt{53}$. *Вказівка*: розгляньте два випадки. **1117.** 9 кв. од. **1118.** 1) 6 см; 2) 6 см; 3) $6\sqrt{2}$ см. **1119.** 1) $y = -2x - 3$; 2) $y = -2x + 3$; 3) $y = 2x - 3$. **1120.** $C(5; -5)$. **1121.** $\left(2; \frac{5}{3}\right)$. **1123.** 22,5 і 37,5 ліктів. **1124.** $x = 0$, $x = -\frac{2}{3}$. **1125.** 1) Ні; 2) так. **1126.** $\overline{AB} = \frac{\overline{a}}{2} - \frac{\overline{b}}{2}$, $\overline{BC} = \frac{\overline{a}}{2} + \frac{\overline{b}}{2}$. **1127.** $\overline{BD} = -\overline{AB} + \overline{AD}$, $\overline{CO} = \frac{\overline{AB}}{2} - \frac{\overline{AD}}{2}$. **1128.** *Вказівка*: знайдіть скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $2\overline{b} - \overline{a}$. **1129.** $\approx 43^\circ$. **1131.** $\frac{\sqrt{13}}{13}$. **1133.** Коло радіуса 1. **1134.** 1) $\frac{c\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(\alpha+45^\circ)}$; 2) $\frac{\sqrt{2}c\sin\alpha}{2\sin(\alpha+45^\circ)}$, $\frac{\sqrt{2}c\cos\alpha}{2\sin(\alpha+45^\circ)}$. **1135.** $\frac{l\sin\left(45^\circ+\frac{3\alpha}{4}\right)}{\sin\alpha}$. **1136.** $\frac{d\sin\alpha}{\sin\beta}$. **1137.** 1) $\frac{b\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}$; 2) $\frac{b\sin(\alpha+\beta)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}$. **1138.** $\sqrt{7}$ см. **1139.** $\sqrt{7}$ см, $\sqrt{19}$ см. **1140.** 1) 45 см^2; 2) 8 см^2. **1141.** 1) $\frac{25}{3}$ см, $\frac{8}{3}$ см; 2) 3,125 см, 1,5 см. **1142.** 150°, 30°, 30°. **1143.** 1) 15; 2) 8. **1144.** 1) $12(2+\sqrt{3})$ см, $6\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$ см; 2) $16(2-\sqrt{3})$ см, $8\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$ см. **1145.** *Вказівка*: знайдіть радіус описаного кола. **1146.** $a = \frac{2bR}{\sqrt{4R^2+b^2}}$. **1147.** 1) $\frac{10\pi}{3}$ см; 2) $\frac{8\pi}{\sqrt{3}}$ см. **1148.** 80π см. **1149.** $\frac{C^2}{\pi^2\sin\alpha}$. **1150.** 1) $2\sqrt{m^2+n^2}$; 2) $2mn\sqrt{\pi}$. **1151.** 100 см^2. **1152.** 1) 25 см; 2) $\angle A' = 30^\circ$, $\angle B' = 50^\circ$, $\angle C' = 20^\circ$. **1153.** *Вказівка*: доведіть, що діагоналі чотирикутника діляться точкою перетину навпіл і вони рівні. **1157.** 2 см. **1158.** *Вказівка*: нехай $ABCD$ — трапеція ($AB \parallel CD$). Паралельно перенесіть одну з її діагоналей, наприклад BD, так, щоб вершина B перейшла у вершину C. **1159.** 6 см або 4 см. **1160.** 20 см, 28 см, 36 см і 44 см. **1161.** $0{,}75m$.

ГОТУЄМОСЬ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

1. В. **2.** Б. **3.** В. **4.** А. **5.** Б. **6.** В. **7.** А. **8.** А. **9.** *Вказівка*: скористайтесь означенням паралелограма. **10.** *Вказівка*: скористайтесь означенням паралелограма.

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

1. В. **2.** А. **3.** А. **4.** А. **5.** Б. **6.** А. **7.** $\frac{\sqrt{16}}{65}$. **8.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **9.** Г. **10.** Г.

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

1. Г. **2.** Б. **3.** В. **4.** А. **5.** Г. **6.** А. **7.** Г. **8.** В. **9.** 40 см або 42 см. **10.** $24\sqrt{3}$ см^2.

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ. ДОВЖИНА КОЛА. ПЛОЩА КРУГА

1. Б. **2.** В. **3.** В. **4.** А. **5.** В. **6.** Б. **7.** Г. **8.** Б. **9.** 8 см. **10.** 12 см.

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

1. Б. **2.** А. **3.** В. **4.** Б. **5.** Г. **6.** Б. **7.** Г. **8.** Г **9.** 0,6. **10.** 16.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК