О.С. Істер

ГЕОМЕТРІЯ

9

О.С. Істер

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних
закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Київ
«Генеза»
2017

УДК 514(075.3)
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(Наказ Міністерства освіти і науки України
від 20.03.2017 № 417)

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Експерти, які здійснили експертизу підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Мурзенко Н.В., учитель-методист, директор середньої загальноосвітньої школи І–ІІІ ступенів № 11 м. Сєвєродонецька Луганської області;
Строкіна В.І., завідувач навчально-методичного кабінету Новотроїцького районного центру з обслуговування навчальних закладів і установ освіти Новотроїцької районної ради Херсонської області.

Істер О.С.
І-89 Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. — Київ : Генеза, 2017. — 240 с. : іл.
ISBN 978-966-11-0844-7.

Підручник відповідає програмі з математики, містить достатню кількість диференційованих вправ і прикладних задач. Після кожного розділу наведено вправи для його повторення. Для підготовки до контрольної роботи передбачено «Домашню самостійну роботу» та «Завдання для перевірки знань». Для найдопитливіших є низка нестандартних задач у рубриці «Цікаві задачі для учнів неледачих».

УДК 514(075.3)

ISBN 978-966-11-0844-7

Шановні дев'ятикласники та дев'ятикласниці!

У цьому навчальному році ви продовжите вивчати геометрію, а підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе вам у цьому.

Під час вивчення теоретичного матеріалу зверніть увагу на текст, надрукований **жирним** шрифтом. Його треба запам'ятати.

Автор намагався подати теоретичний матеріал підручника простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу у школі його обов'язково треба опрацювати і вдома.

У підручнику ви побачите умовні позначення. Ось що вони означають:

 – означення, важливі геометричні твердження (аксіоми, теореми, властивості);

 – запитання до вивченого теоретичного матеріалу;

 – «ключова» задача, висновки якої використовуються під час розв'язування інших задач;

▲ – закінчення доведення теореми або твердження задачі;

 – вправи для повторення;

 – рубрика «Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»;

 – вправи початкового рівня;

 – вправи середнього рівня;

 – вправи достатнього рівня;

 – вправи високого рівня;

 – вправи підвищеної складності;

 – рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих» та додатковий матеріал.

Чорним кольором позначено номери вправ для розв'язування у класі, а **синім** – для розв'язування вдома.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання «*Домашньої самостійної роботи*», які подано в тестовій формі, та «*Завдання для перевірки знань*». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника – «*Завдання для перевірки знань за курс геометрії 9 класу*» та «*Задачі підвищеної складності*».

Заняття геометрією будуть ще цікавішими, якщо ви розв'язуватимете вправи рубрики «*Цікаві задачі для учнів неледачих*».

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість із них ви розглянете на уроках і під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

Цікаві факти з історії розвитку геометрії як науки ви знайдете в рубриці «*А ще раніше...*».

Бажаю успіхів в опануванні курсу!

Шановні вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації навчання тощо. Вправи, що не розглядалися на уроці, можна використати на додаткових, факультативних та індивідуальних заняттях.

Додаткові вправи у «*Завданнях для перевірки знань*» призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших учнів. Правильне їх розв'язання вчитель може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням, наприклад, під час узагальнюючих уроків з теми або повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

Шановні батьки!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати цей матеріал за підручником удома. Спочатку бажано, щоб вона прочитала теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою та проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього – розв'язати задачі і вправи, що їй посильні, з розглянутого параграфа.

Упродовж опрацювання дитиною курсу геометрії 9 класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання «*Домашньої самостійної роботи*», які подано в тестовій формі, та «*Завдання для перевірки знань*». Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

У кінці підручника «*Задачі підвищеної складності*» допоможуть вашій дитині поглибити знання з геометрії та підготуватися до математичних змагань.

Автор

Розділ 1. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

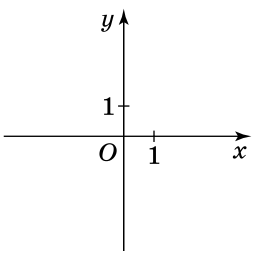
У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** все, що вивчали раніше про координатну площину;
- **дізнаєтеся**, як знаходити синус, косинус і тангенс кутів від 0° до 180°, координати середини відрізка та відстань між двома точками координатної площини, рівняння кола і прямої;
- **навчитеся** розв'язувати геометричні задачі на площині за допомогою методу координат.

§ 1. *КООРДИНАТНА ПЛОЩИНА*

З поняттям *координатної площини* ми ознайомилися в курсі математики 6-го класу, а в курсі алгебри використовували його для побудови графіків функцій.

Пригадаємо, як задають координатну площину.



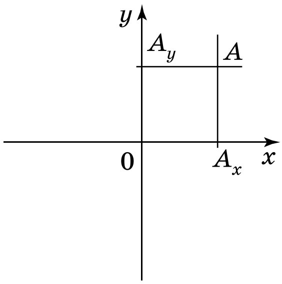
Мал. 1

Нехай на площині вибрано дві взаємно перпендикулярні прямі x і y, що перетинаються в точці O (мал. 1). Ці прямі називають *осями координат*, а точку їх перетину – *початком координат*. Вісь x (зазвичай вона горизонтальна) називають *віссю абсцис*, вісь y – *віссю ординат*.

Початок координат розбиває кожну з осей на дві півосі. Одну з них прийнято називати додатною та зображати зі стрілочкою, а другу – від'ємною. На кожній з осей координат вибирають одиничний відрізок. Початок відліку кожної з осей – число 0 – збігається з точкою O. У такому випадку кажуть, що на площині задано *прямокутну систему координат*.

Площину, на якій задано прямокутну систему координат, називають *координатною площиною*.

Кожній точці A координатної площини можна поставити у відповідність пару чисел – *координати точки*. Для цього через точку A треба провести пряму, паралельну осі y, і пряму, паралельну осі x, які перетнуть осі x і y в деяких точках A_x і A_y відповідно (мал. 2). *Абсцисою* точки A називають число x, модуль якого дорівнює відстані від точки O до точки A_x. Причому, якщо A_x належить додатній півосі, то $x > 0$, а якщо A_x належить від'ємній півосі, то $x < 0$. Якщо ж точка A лежить на осі y, то її абсциса дорівнює нулю. *Ординатою* точки A називають число y, модуль якого дорівнює відстані від точки O до точки A_y. Причому, якщо A_y належить додатній півосі, то $y > 0$, а якщо A_y належить від'ємній півосі, то $y < 0$. Якщо ж точка A лежить на осі x, то її ордината дорівнює нулю.



Мал. 2

Координати точки записують у дужках поряд з назвою точки: $A(x; y)$. На першому місці завжди пишуть абсцису, на другому – ординату. Абсцису точки A можна позначати x_A, а ординату – y_A. Ці позначення зручно використовувати під час розв'язування задач, де кожну координату знаходять окремо. Якщо, наприклад, $A(-2; 3)$, то $x_A = -2$, $y_A = 3$.

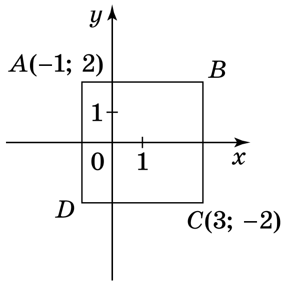
Введені на площині координати x і y називають *декартовими* на честь французького математика Рене Декарта (1596–1650), якому належить ідея введення і застосування координат у математиці.

Задача 1. Сторони прямокутника $ABCD$ паралельні осям координат. Знайти координати точок B і D, якщо $A(-1; 2)$, $C(3; -2)$.

Р о з в' я з а н н я. Розглянемо малюнок 3. Оскільки пряма AB паралельна осі абсцис, то ординати точок A і B однакові: $y_B = y_A = 2$. Аналогічно, оскільки пряма BC паралельна осі ординат, то абсциси точок B і C однакові: $x_B = x_C = 3$.

Отже, $B(3; 2)$.

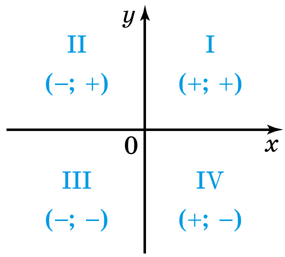
Міркуючи у той самий спосіб, отримаємо: $D(-1; -2)$.



Мал. 3

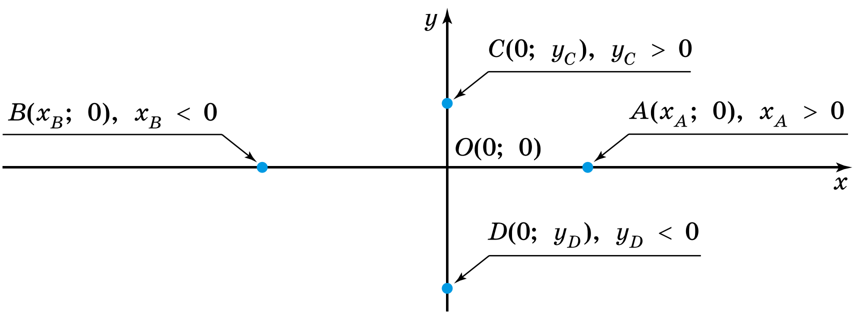
В і д п о в і д ь. $B(3; 2)$, $D(-1; -2)$.

Осі координат розбивають площину на чотири частини, кожну з яких називають *координатною чвертю* або *координатним кутом* (мал. 4). У межах однієї координатної чверті знаки кожної з координат не змінюються. Знаки координат та загальноприйняту нумерацію координатних кутів показано на малюнку 4.



Мал. 4

На малюнку 5 вказано координати точок, які належать осям координат, та координати точки *O*.



Мал. 5

Задача 2. У яких координатних чвертях може лежати точка *B*, якщо добуток її абсциси й ординати є числом:

1) додатним; 2) від'ємним?

Р о з в' я з а н н я. Нехай маємо точку $B(x;\ y)$.

1) $xy > 0$, отже, x і y – числа одного знака, тобто $x > 0$ і $y > 0$ або $x < 0$ і $y < 0$. Тому точка *B* лежить у першій або третій чверті.

2) $xy < 0$, отже, x і y – числа різних знаків, тобто $x > 0$ і $y < 0$ або $x < 0$ і $y > 0$. Тому точка *B* лежить у другій або четвертій чверті.

В і д п о в і д ь. 1) У першій або третій чверті; 2) у другій або четвертій чверті.

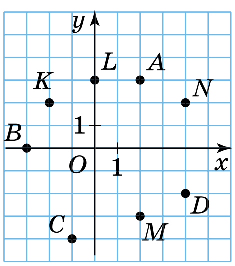
А ще раніше...

Ідея введення координат на площині прийшла до нас із давнини. Перші застосування координат були пов'язані з астрономією і географією, тобто з необхідністю визначати положення світил на небі й точок на поверхні Землі, що використовувалося для складання календарів, зоряних та географічних карт. Відомий давньогрецький астроном, географ та математик Клавдій Птолемей уже на той час використовував довготу та широту як географічні координати. Ідеї прямокутних координат у вигляді прямокутної сітки (палетки) було знайдено у гробниці батька Рамзеса II – фараона Сеті I (який помер близько 1279 р. до н. е.). За допомогою палетки можна було переносити зображення у збільшеному вигляді. Починаючи з XV ст., прямокутну сітку також використовували й художники епохи Відродження.

Термін *абсциса* походить від латинського *abscissus* – той, що відсікається (відрізок на осі x), *ордината* – від латинського *ordinatus* – упорядкований, оскільки ординатами спочатку називали відрізки, паралельні осі y. Ці терміни були вперше застосовані в латинському перекладі робіт відомого давньогрецького математика Аполлонія і які запропонував в 70–80-х роках XVII ст. Готфрід Лейбніц, після чого стали загальновживаними. Лейбніц запропонував абсцису разом з ординатою називати координатами.

1. Що називають осями координат? Початком координат?
2. Як знаходять координати точки?
3. Назвіть абсцису й ординату точки $P(-2; 5)$.
4. Які знаки в координат точки, якщо вона лежить у першій (другій, третій, четвертій) координатній чверті?
5. Чому дорівнює абсциса точки, яка належить осі y?
6. Чому дорівнює ордината точки, яка належить осі x?

1 Початковий рівень



Мал. 6

1. Знайдіть координати точок A, B, C, D на малюнку 6.

2. Знайдіть координати точок K, L, M, N на малюнку 6.

3. Позначте на координатній площині точки $E(-2; 1)$, $F(0; -3)$, $P(4; -2)$, $T(-5; -1)$.

4. Позначте на координатній площині точки $A(2; -3)$, $B(5; 0)$, $C(4; 1)$, $D(-2; 4)$.

5. Які з точок $A(0; -2)$, $B(4; -3)$, $C(2; 0)$, $D(0; 19)$, $E(2; 2)$, $F(-14; 0)$ належать осі абсцис, а які – осі ординат?

6. Які з точок $P(2; -17)$, $T(5; 0)$, $F(0; -2)$, $N(-4; 0)$, $M(-1; -1)$, $K(0; 17)$ належать осі абсцис, а які – осі ординат?

7. Не виконуючи побудови, укажіть, у яких чвертях лежать точки $M(2; -3)$, $N(-4; -5)$, $L(1; 2)$, $K(-9; 4)$.

8. Не виконуючи побудови, укажіть, у яких чвертях лежать точки $A(-2; -3)$, $B(4; 5)$, $C(1; -5)$, $D(-4; 1)$.

2 Середній рівень

9. (Усно.) На малюнку 6 знайдіть точки, у яких однакові:
1) абсциси; 2) ординати.

10. На прямій, паралельній осі x, узято дві точки. Одна з них має ординату $y = -3$. Яка ордината у другої точки?

11. На прямій, паралельній осі y, узято дві точки. Одна з них має абсцису $x = 2$. Яка абсциса у другої точки?

12. З точки $M(-5; 3)$ проведено перпендикуляри до осей координат. Знайдіть координати основ перпендикулярів.

13. З точки $N(2; -3)$ проведено перпендикуляри до осей координат. Знайдіть координати основ цих перпендикулярів.

3 Достатній рівень

14. Сторони прямокутника $KLMN$ паралельні осям координат, $K(4; 5)$, $M(-2; -3)$. Знайдіть координати вершин L і N прямокутника.

15. Катети прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) паралельні осям координат. Знайдіть координати вершини C, якщо $A(2; -3)$, $B(7; 4)$.

16. Що можна сказати про координати точки A, якщо вона належить бісектрисі:
1) першого координатного кута;
2) другого координатного кута?

17. 1) Знайдіть відстані від точок $A(2; -3)$ і $B(-2; -5)$ до координатних осей.
2) Зробіть узагальнення щодо відстаней від точки $M(x; y)$ до координатних осей.

18. Знайдіть відстані від точок $C(-1; 5)$ і $D(3; 4)$ до координатних осей.

19. Точка перетину діагоналей ромба збігається з початком координат, а діагоналі ромба лежать на осях координат.

Довжина однієї діагоналі дорівнює 10 одиниць, а другої – 8 одиниць. Знайдіть координати вершин ромба. Скільки розв'язків має задача?

20. Центр кола, радіус якого дорівнює 3 одиниці, збігається з початком координат. Які координати мають точки перетину кола з осями координат?

4 Високий рівень

21. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 2 одиниці, а його сторони паралельні осям координат. Знайдіть координати вершин квадрата, якщо $A(3;\ 3)$. Розгляньте всі можливі випадки.

22. Знайдіть геометричне місце точок $(x;\ y)$ координатної площини, для яких $|x| = 3$.

23. Знайдіть геометричне місце точок $(x;\ y)$ координатної площини, для яких $|y| = 2$.

Вправи для повторення

2 **24.** Знайдіть площу трапеції, середня лінія якої дорівнює 7 см, а висота – 8 см.

3 **25.** Дві сторони трикутника дорівнюють 4,3 см і 1,2 см, а довжина третьої сторони дорівнює цілому числу сантиметрів. Якого найменшого та якого найбільшого значень може набувати периметр цього трикутника?

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

26. Знайдіть за допомогою калькулятора, таблиць або комп'ютера:

1) $\sin 18°$; 2) $\sin 26°30'$; 3) $\cos 83°$;
4) $\cos 30°15'$; 5) $\mathrm{tg}\, 70°$; 6) $\mathrm{tg}\, 19°45'$.

27. Відомо, що α – гострий кут прямокутного трикутника. Знайдіть α, якщо:

1) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$; 2) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$.

28. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. Знайдіть:

1) $\sin A$; 2) $\cos A$; 3) $\mathrm{tg}\, A$;
4) $\sin B$; 5) $\cos B$; 6) $\mathrm{tg}\, B$.

Цікаві задачі для учнів неледачих

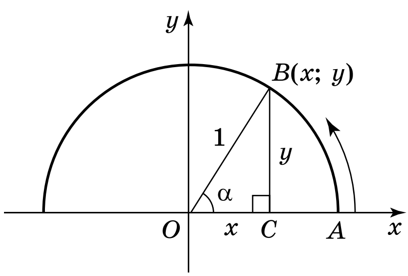
29. (*Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 рік*). З вершини тупого кута B паралелограма $ABCD$ проведено перпендикуляр BO до сторони AD. Коло із центром у точці A проходить через вершину B і перетинає сторону AD у точці K. Відомо, що $AK = 8$ см, $KD = 6$ см, $AO = 7$ см.

1. Знайдіть периметр паралелограма $ABCD$ (у см).
2. Обчисліть довжину діагоналі BD (у см).

§ 2. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС КУТІВ ВІД 0° ДО 180°. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ

Досі ми розглядали синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника як відношення певних його сторін. Тепер сформулюємо означення синуса, косинуса і тангенса для будь-якого кута від 0° до 180°.

Уведемо на площині прямокутну систему координат і проведемо в її першому і другому координатних кутах півколо радіуса 1, центр якого збігається з початком координат (мал. 7). Назвемо його *одиничним півколом*. Позначимо буквою A точку перетину цього півкола з додатним напрямом осі x і домовимося відкладати від променя OA кути проти руху годинникової стрілки. Нехай $\angle AOB = \alpha$ – гострий кут, точка B належить півколу. Проведемо з точки B перпендикуляр BC до осі x. Утворився прямокутний трикутник OBC з гіпотенузою OB, де $OB = 1$.

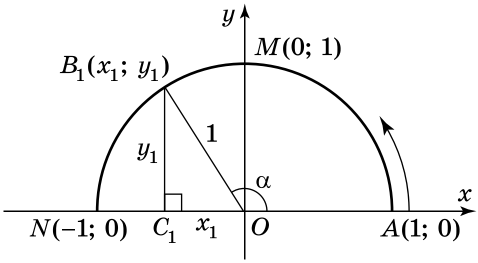


Мал. 7

Значення синуса, косинуса, тангенса гострого кута α виразимо через координати точки B:

$$\sin\alpha = \frac{y}{1} = y; \quad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$

Так само будемо знаходити синус, косинус і тангенс інших кутів від 0° до 180°. Нехай $B_1(x_1;\ y_1)$ – точка одиничного півкола, що лежить у другій чверті (мал. 8).



Мал. 8

Тоді $\angle B_1OA$ – тупий. Маємо:

$$\sin\alpha = \frac{y_1}{1} = y_1;\quad \cos\alpha = \frac{x_1}{1} = x_1;\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1}.$$

Оскільки координати $(x;\ y)$ точок одиничного півкола змінюються в межах $0 \leqslant y \leqslant 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то для довільного α такого, що $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, справджуються нерівності:

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,\quad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Але якщо:

α – гострий, то $\sin\alpha = y > 0$; $\cos\alpha = x > 0$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x} > 0$;

α – тупий, то $\sin\alpha = y > 0$; $\cos\alpha = x < 0$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x} < 0$.

Окрім того, якщо кут α збільшується від 0° до 90°, то його синус збільшується від 0 до 1, а косинус зменшується від 1 до 0. Якщо кут α збільшується від 90° до 180°, то його синус зменшується від 1 до 0, а косинус зменшується від 0 до –1.

Знайдемо значення синуса, косинуса і тангенса кутів 0°, 90° і 180°.

На малюнку 8 куту 0° відповідає точка $A(1;\ 0)$. Тому $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = 0$. Куту 90° відповідає точка $M(0;\ 1)$, тому $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, але $\operatorname{tg} 90°$ – не існує, оскільки на нуль ділити не можна. Куту 180° відповідає точка $N(-1;\ 0)$, тому $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\operatorname{tg} 180° = 0$.

Отже,

якщо $B(x;\ y)$ – точка одиничного кола, яка відповідає куту α (мал. 7), то

$$\sin\alpha = y;\quad \cos\alpha = x;\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$

Із цього означення випливає, що $\mathbf{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Очевидно, що для $\alpha = 90°$ $\mathrm{tg}\,\alpha$ не існує.

Оскільки кожному куту α від $0°$ до $180°$ відповідає єдине значення синуса, косинуса і тангенса, то можна вважати синус, косинус і тангенс функціями з аргументом α. Ці *функції* ($y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\,x$) називають *тригонометричними* і вивчають у курсі алгебри старших класів.

Розглянемо деякі залежності між функціями одного й того самого аргументу, які називають *тригонометричними тотожностями*.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (1)$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо $\triangle BOC$ (див. мал. 7). За теоремою Піфагора: $BC^2 + OC^2 = OB^2$, тобто $y^2 + x^2 = 1$. Тому $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$. Вираз $(\sin\alpha)^2$ та аналогічні йому для зручності прийнято записувати без дужок, наприклад $\sin^2\alpha$. Отже, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. ▲

Рівність $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ називають *основною тригонометричною тотожністю*. Із цієї тотожності можна виразити синус кута через його косинус:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

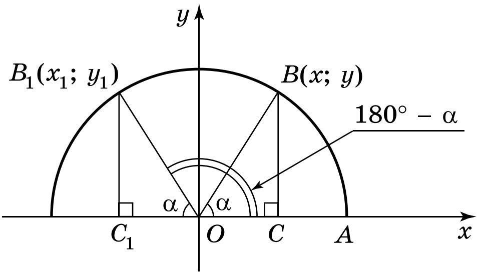
та косинус кута через його синус:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

В останній формулі знак «–» пишуть, якщо кут α – тупий.

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,\ \ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha. \qquad (2)$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо точки $B(x;\ y)$ і $B(x_1;\ y_1)$ одиничного півкола, що відповідають кутам α і $180° - \alpha$ (мал. 9).



Мал. 9

Оскільки $\angle B_1OA = 180° - \alpha$, то $\angle B_1OC_1 = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$. Отже, $\triangle OBC = \triangle OB_1C_1$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому $BC = B_1C_1$ і $OC = OC_1$. Звідки випливає, що абсциси точок B і B_1 є протилежними, а їх ординати – однаковими: $x = -x_1$, $y = y_1$.

Ураховуючи, що $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$, $\sin(180° - \alpha) = y_1$, $\cos(180° - \alpha) = x_1$, матимемо:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha. \blacktriangle$$

$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$. (3)

Д о в е д е н н я. Ураховуючи тотожність (2), маємо:

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha. \blacktriangle$$

Використовуючи формули (2) і (3), можна виразити синус, косинус і тангенс тупого кута $180° - \alpha$ через синус, косинус і тангенс гострого кута α.

Задача 1. Знайти синус, косинус і тангенс кутів 120°, 135° і 150°.

Р о з в' я з а н н я.

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3};$$

$$\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}(180° - 45°) = -\operatorname{tg} 45° = -1;$$

$$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2};$$

$$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 150° = \operatorname{tg}(180° - 30°) = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Систематизуємо відомості з 8 класу та отримані в цьому параграфі у вигляді таблиці.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Синус, косинус і тангенс інших кутів можна знаходити за допомогою таблиць або калькулятора. Для обчислень використовуємо клавіші калькулятора $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$, $\boxed{\mathrm{tg}}$ (на деяких калькуляторах $\boxed{\tan}$). Наприклад, $\sin 124° \approx 0{,}8290$; $\cos 157° \approx$ $\approx -0{,}9205$; $\mathrm{tg}\,178° \approx -0{,}0349$.

За допомогою таблиць або калькулятора можна за даними значеннями $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ або $\mathrm{tg}\,\alpha$ знаходити значення кута α. Для обчислення на калькуляторі використовуємо клавіші $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ і $\boxed{\mathrm{tg}^{-1}}$ (на деяких калькуляторах $\boxed{\tan^{-1}}$) або послідовне натискання клавіші $\boxed{arc}$ і однієї з клавіш $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ або $\boxed{\mathrm{tg}}$ ($\boxed{\tan}$).

Задача 2. Знайти α, якщо:

1) $\cos\alpha = -0{,}3584$; 2) $\sin\alpha = 0{,}2588$.

Розв'язання. 1) $\cos\alpha = -0{,}3584$. За допомогою калькулятора знаходимо значення кута α у градусах: $\alpha = 111°$.

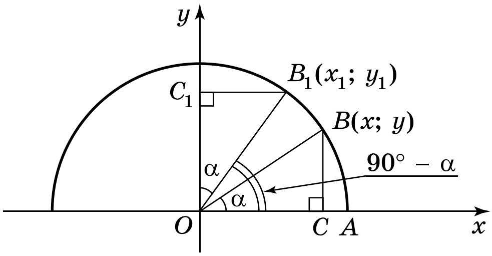
2) $\sin\alpha = 0{,}2588$. За допомогою калькулятора знаходимо значення кута α у градусах: $\alpha = 15°$. Але $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, тому $\sin(180° - 15°) = 0{,}2588$, тобто $\sin 165° = 0{,}2588$. Отже, існують два таких кути, синус яких дорівнює $0{,}2588$, а саме: $\alpha = 15°$ і $\alpha = 165°$.

Відповідь. 1) $111°$; 2) $15°$ або $165°$.

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha. \qquad (4)$$

Доведення. Розглянемо точки $B(x;\, y)$ і $B_1(x_1;\, y_1)$ одиничного півкола, що відповідають кутам α і $90° - \alpha$ (мал. 10).

Оскільки $\angle B_1OA = 90° - \alpha$, то $\angle B_1OC_1 = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Тому $\triangle OBC = \triangle OB_1C_1$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Маємо $OC = OC_1$, $BC = B_1C_1$, тобто $x = y_1$ і $y = x_1$.



Мал. 10

Ураховуючи, що $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$, $\sin(90° - \alpha) = y_1$, $\cos(90° - \alpha) = x_1$, матимемо:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha. \ \blacktriangle$$

Задача 3. Спростити: 1) $\sin^2(90° - \alpha) + \sin^2(180° - \alpha)$;

2) $\dfrac{\cos(90° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} - \mathrm{tg}(180° - \alpha)$.

Р о з в' я з а н н я.

1) $\sin^2(90° - \alpha) + \sin^2(180° - \alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$;

2) $\dfrac{\cos(90° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} - \mathrm{tg}(180° - \alpha) = \dfrac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} - (-\mathrm{tg}\,\alpha) =$

$= -\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha = 0$.

В і д п о в і д ь. 1) 1; 2) 0.

1. Поясніть, як знаходять синус, косинус і тангенс кутів від 0° до 180°.
2. Сформулюйте і доведіть основну тригонометричну тотожність.
3. Доведіть, що $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$; $\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$; $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$.

Початковий рівень

30. Знайдіть за допомогою калькулятора:

1) $\sin 92°$; 2) $\cos 108°$; 3) $\mathrm{tg}\,157°$;
4) $\sin 118°6'$; 5) $\cos 175°30'$; 6) $\mathrm{tg}\,129°24'$.

31. Знайдіть за допомогою калькулятора:

1) $\cos 110°$; 2) $\sin 116°$; 3) $\mathrm{tg}\,138°$;
4) $\cos 120°30'$; 5) $\sin 125°18'$; 6) $\mathrm{tg}\,120°6'$.

32. (Усно.) Який із записів правильний:
1) $\sin 140° = \sin 40°$ чи $\sin 140° = -\sin 40°$;
2) $\cos 140° = \cos 40°$ чи $\cos 140° = -\cos 40°$?

33. (Усно.) 1) Чи може абсциса точки одиничного кола дорівнювати числу $0{,}5$; $-3{,}8$; $\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{8}$; $1\frac{3}{4}$?
2) Чи може ордината точки одиничного кола дорівнювати числу $0{,}2$; 5; $2{,}03$; $-0{,}3$; $\frac{1}{7}$?

34. Обчисліть:
1) $\sin 150° + \operatorname{tg} 135°$; 2) $\cos 150° \cdot \sin 120°$.

35. Обчисліть:
1) $\operatorname{tg} 135° - \cos 120°$; 2) $\sin 135° : \cos 135°$.

2 Середній рівень

36. Чи існує кут α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, для якого:
1) $\cos\alpha = \frac{2}{5}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$; 3) $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$;
4) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$; 5) $\cos\alpha = 1{,}2$; 6) $\sin\alpha = 1{,}2$?

37. Чи існує кут β, де $0° \leqslant \beta \leqslant 180°$, для якого:
1) $\cos\beta = -\frac{4}{9}$; 2) $\sin\beta = -\frac{4}{9}$; 3) $\cos\beta = \frac{4}{9}$;
4) $\sin\beta = \frac{4}{9}$; 5) $\cos\beta = -1{,}3$; 6) $\sin\beta = -1{,}3$?

38. Кут β – гострий. Знайдіть:
1) $\cos\beta$, якщо $\sin\beta = \frac{4}{5}$; 2) $\sin\beta$, якщо $\cos\beta = \frac{5}{13}$.

39. Кут α – гострий. Знайдіть:
1) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = 0{,}6$; 2) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{8}{17}$.

40. Знайдіть за допомогою калькулятора або таблиць гострий кут α, якщо:
1) $\sin\alpha = 0{,}2756$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5498$.

41. Знайдіть за допомогою калькулятора або таблиць гострий кут β, якщо:
1) $\cos\beta = 0{,}6691$; 2) $\operatorname{tg}\beta = 2{,}0965$.

42. Спростіть вираз:

1) $1 - \sin^2\alpha$;
2) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$;
3) $\sin(90° - \alpha) + \cos(180° - \alpha)$;
4) $\dfrac{\cos(90° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)}$.

43. Спростіть вираз:

1) $1 - \cos^2\alpha$;
2) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$;
3) $\cos(90° - \alpha) + \sin(180° - \alpha)$;
4) $\dfrac{\cos(180° - \alpha)}{\sin(90° - \alpha)}$.

3 Достатній рівень

44. Побудуйте гострий кут:

1) синус якого дорівнює $\frac{1}{3}$;
2) тангенс якого дорівнює $\frac{4}{5}$.

45. Побудуйте гострий кут:

1) косинус якого дорівнює $\frac{1}{5}$;
2) тангенс якого дорівнює $\frac{3}{4}$.

46. Запишіть у порядку зростання:

1) $\cos 137°$; $\cos 125°$; $\cos 142°$;
2) $\sin 118°$; $\sin 127°$; $\sin 119°$.

47. Запишіть у порядку спадання:

1) $\sin 142°$; $\sin 148°$; $\sin 138°$;
2) $\cos 119°$; $\cos 137°$; $\cos 109°$.

48. Знайдіть:

1) $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0{,}6$;
2) $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

49. Знайдіть:

1) $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0{,}28$;
2) $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

50. Доведіть тригонометричну тотожність:

1) $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1$;
2) $(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha) = 1 - 2\cos^2\alpha$.

51. Обчисліть:

1) $\cos^2 150° - \sin^2 120° + \operatorname{tg} 135°$;
2) $\operatorname{tg} 120° \cdot \cos 120° + \sin 120°$.

52. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin^2 150° + \cos^2 120° - \operatorname{tg}^2 150°$; 2) $\dfrac{\sin 150°}{\operatorname{tg} 150°} - \cos 150°$.

53. Знайдіть за допомогою калькулятора або таблиць значення кута α, якщо:

1) $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}8807$; 2) $\sin\alpha = 0{,}9272$.

54. Знайдіть за допомогою калькулятора або таблиць значення кута β, якщо:

1) $\operatorname{tg}\beta = -0{,}7002$; 2) $\sin\beta = 0{,}9848$.

Високий рівень

55. Побудуйте кут α, якщо: 1) $\cos\alpha = -\dfrac{3}{7}$; 2) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

56. Побудуйте кут α, якщо: 1) $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{3}{5}$; 2) $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$.

57. Знайдіть суму косинусів усіх кутів трапеції.

58. Обчисліть: 1) $\sin^2 37° + \sin^2 53°$; 2) $5 - \cos 137° - \cos 43°$.

59. Обчисліть: 1) $\cos^2 12° + \cos^2 78°$; 2) $6 + \sin 42° - \sin 138°$.

Вправи для повторення

60. Одна зі сторін паралелограма дорівнює 6 см, а висота, проведена до другої сторони, – 3 см. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його площа дорівнює 24 см^2.

61. Бісектриса трикутника ділить сторону на відрізки, різниця яких 2 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо дві його інші сторони дорівнюють 9 см і 6 см.

62. Коло, вписане у трапецію, ділить точкою дотику бічну сторону на відрізки довжиною a см і b см. Знайдіть висоту трапеції.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

63. Знайдіть відстань між точками A і B координатної прямої, якщо:

1) $A(7)$; $B(4)$; 2) $A(-2)$; $B(9)$;
3) $A(-9)$; $B(-12)$; 4) $A(x_1)$; $B(x_2)$?

64. 1) Побудуйте точки $A(1; 4)$; $B(5; 1)$; $C(1; 1)$ на координатній площині, одиничний відрізок якої дорівнює 1 см.

2) Знайдіть довжини відрізків AB; AC; BC за допомогою лінійки.

3) Як за допомогою обчислень знайти довжину відрізка AB, якщо довжини відрізків AC і BC відомі?

65. 1) Побудуйте на координатній площині точки $A(-2; 4)$ і $B(6; 2)$.

2) Знайдіть, використовуючи лінійку з поділками, координати точки M – середини відрізка AB.

3) Порівняйте координати точки M із середнім арифметичним відповідних координат точок A і B.

Цікаві задачі для учнів неледачих

66. Бічні сторони трапеції дорівнюють 6 см і 8 см, а відстань між серединами її діагоналей дорівнює 5 см. Знайдіть відстань між серединами основ трапеції.

§ 3. КООРДИНАТИ СЕРЕДИНИ ВІДРІЗКА. ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ ІЗ ЗАДАНИМИ КООРДИНАТАМИ

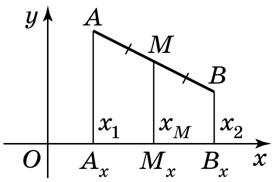
Кожній точці координатної площини відповідає єдина пара чисел $(x; y)$, і навпаки, кожній парі чисел $(x; y)$ відповідає єдина точка координатної площини. У такому випадку кажуть, що існує взаємно однозначна відповідність між точками координатної площини і їх координатами $(x; y)$. Це дає можливість розв’язувати деякі задачі *методом координат*, тобто подавати геометричні співвідношення розташування точок та фігур через алгебраїчні співвідношення між їх координатами. Розділ геометрії, що вивчає такі методи розв’язування, називають *аналітичною геометрією*.

Аналітична геометрія – розділ геометрії, у якому досліджують геометричні фігури та їх властивості засобами алгебри на основі методу координат.

Далі розглянемо найпростіші задачі аналітичної геометрії, повний курс якої вивчають у вищих навчальних закладах.

Координати середини відрізка

Задача 1. Дано точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$. Точка M – середина відрізка AB. Знайти координати точки M.



Мал. 11

Р о з в' я з а н н я. 1) Розглянемо спочатку випадок, коли відрізок AB не паралельний осі y, тобто $x_1 \neq x_2$. Проведемо через точки A, B і M прямі, паралельні осі y (мал. 11). Вони перетинають вісь x у точках $A_x(x_1; 0)$, $B_x(x_2; 0)$ і $M_x(x_M; 0)$.

Оскільки прямі AA_x, BB_x і MM_x паралельні між собою і M – середина AB, то, за теоремою Фалеса, M_x – середина A_xB_x.

Маємо $A_xM_x = M_xB_x$, тобто $|x_1 - x_M| = |x_M - x_2|$.

Тому $x_1 - x_M = x_M - x_2$ або $x_1 - x_M = -(x_M - x_2)$.

З першої рівності маємо формулу $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, а друга – не має змісту, оскільки $x_1 \neq x_2$.

2) Якщо відрізок AB паралельний осі y, то $x_1 = x_2 = x_M$ і формула $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ також справджується.

3) Аналогічно доводимо, що $y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Отже,

координати точки M – середини відрізка AB, де $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, знаходимо за формулами:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Задача 2. Знайти координати точки M – середини відрізка, кінцями якого є точки $A(-5; 8)$ і $B(3; -12)$.

Р о з в' я з а н н я. $x_M = \dfrac{-5 + 3}{2} = -1$; $y_M = \dfrac{8 + (-12)}{2} = -2$.

В і д п о в і д ь. $M(-1; -2)$.

Задача 3. Точка C – середина відрізка AB. Знайти координати точки A, якщо $B(-2; 4)$, $C(8; 0)$.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $C(x_C; y_C)$. Тоді $x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, тобто $8 = \dfrac{x_A - 2}{2}$, звідки $x_A = 18$.

Аналогічно, $y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2}$, тобто $0 = \dfrac{y_A + 4}{2}$, звідки $y_A = -4$.

Отже, $A(18; -4)$.

В і д п о в і д ь. $A(18; -4)$.

Задача 4. Довести, що чотирикутник з вершинами в точках $A(5; -4)$, $B(-4; 1)$, $C(-3; 2)$ і $D(6; -3)$ – паралелограм.

Р о з в' я з а н н я. Нехай точка O – середина діагоналі AC чотирикутника $ABCD$. Тоді

$$x_O = \frac{5 + (-3)}{2} = 1;\ y_O = \frac{-4 + 2}{2} = -1. \text{ Отже, } O(1; -1).$$

Нехай точка Q – середина діагоналі BD чотирикутника $ABCD$. Тоді

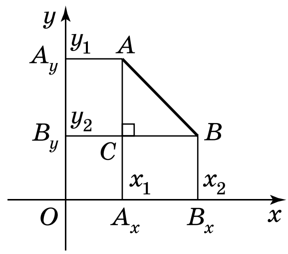
$$x_Q = \frac{-4 + 6}{2} = 1;\ y_Q = \frac{1 + (-3)}{2} = -1. \text{ Отже, } Q(1; -1).$$

Маємо, що середини діагоналей чотирикутника $ABCD$ збігаються і точка $O(1; -1)$ ділить кожну з діагоналей навпіл. Отже, діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Тому $ABCD$ – паралелограм. ▲

Відстань між двома точками

Задача 5. Знайти відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Розглянемо спочатку випадок, коли відрізок AB не паралельний жодній з осей координат, тобто $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$. Проведемо через точки A і B прямі, паралельні осям координат (мал. 12). Вони перетинають вісь x у точках $A_x(x_1; 0)$ і $B_x(x_2; 0)$, а вісь y у точках $A_y(0; y_1)$ і $B_y(0; y_2)$.



Мал. 12

Оскільки A_xB_xBC – прямокутник, то $BC = A_xB_x = |x_1 - x_2|$.

Аналогічно $AC = A_yB_y = |y_1 - y_2|$.

У прямокутному трикутнику ABC за теоремою Піфагора знайдемо гіпотенузу AB:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2, \text{ тому } AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

2) Якщо відрізок AB паралельний осі y, то $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ і $AB = |y_1 - y_2|$. Той самий результат матимемо і за отриманою в попередньому пункті формулою:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|.$$

3) Якщо відрізок AB паралельний осі x, то $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$ і $AB = |x_1 - x_2|$. Той самий результат матимемо і за наведеною для AB формулою.

4) Якщо ж точки A і B збігаються, тобто $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$, то $AB = 0$ і отримана формула для AB знову ж таки справджується. ▲

Отже,

відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ можна знайти за формулою

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Задача 6. Знайти відстань між точками A і B, якщо:
1) $A(4; -2)$, $B(1; 2)$; 2) $A(3; 5)$, $B(7; -1)$.

Р о з в' я з а н н я.

1) $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$;

2) $AB = \sqrt{(3-7)^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} =$
$= 2\sqrt{13}$.

В і д п о в і д ь. 1) 5; 2) $2\sqrt{13}$.

Задача 7. Знайти на осі абсцис точку, яка рівновіддалена від точок $A(2; 7)$ і $B(6; 1)$.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $C(x; 0)$ – шукана точка.
Оскільки за умовою $AC = BC$, то $AC^2 = BC^2$. Маємо:
$AC^2 = (2 - x)^2 + (7 - 0)^2 = 53 - 4x + x^2$;
$BC^2 = (6 - x)^2 + (1 - 0)^2 = 37 - 12x + x^2$.
Враховуючи, що $AC^2 = BC^2$, маємо рівняння:
$53 - 4x + x^2 = 37 - 12x + x^2$, звідки $x = -2$.
Отже, шуканою є точка $C(-2; 0)$.
В і д п о в і д ь. $(-2; 0)$.

А ще раніше...

Метод координат у математиці запропонували французькі математики П. Ферма та Р. Декарт у XVII ст.

Про перше наукове пояснення координатного методу стало відомо в 1637 р. завдяки праці Рене Декарта «Геометрія». Саме тому описану Декартом систему координат почали називати декартовою, а координати точок у цій системі – декартовими координатами.

Р. Декарт
(1596–1650)

У своїй праці Декарт навів велику кількість прикладів, що ілюстрували дієвість методу координат для розв'язування геометричних задач, та отримав результати, про які не знали давні математики. Декарт також висунув припущення про можливість застосування координатного методу не тільки на площині, а й у просторі, проте саме цій ідеї не надав подальшого розвитку.

Аналітичний метод, який запропонував Декарт, взяли на озброєння ван Схоутен, Валліс та багато інших математиків. Вони коментували «Геометрію» Декарта, виправляли його помилки, застосовували метод координат для розв'язування нових математичних задач, у тому числі й у тривимірному просторі. Так, наприклад, Валліс у 1655 р. вперше розглянув конічні перерізи як плоскі криві.

П. Ферма
(1601–1665)

Приблизно в той самий час, коли Декарт опублікував працю «Геометрія», П'єр Ферма оприлюднив мемуари «Вступ до вивчення плоских і тілесних місць», де, зокрема, описав рівняння кривих 2-го порядку (тобто кривих, рівняння яких містять одночлени 2-го степеня відносно x і y), та використав революційний на той час метод перетворення координат для спрощення вигляду рівнянь. Проте робота Ферма не набула такої популярності, як «Геометрія» Декарта, яка більш повно розвивала ті самі ідеї.

Видатний математик та вчений Ісаак Ньютон спирався на координатний метод у своїх роботах з математичного аналізу та геометрії, у яких продовжив дослідження Декарта і Ферма. Зокрема, Ньютон увів класифікацію кривих 3-го порядку, а для кожної кривої 2-го порядку визначив такі характеристики, як діаметр, вісь симетрії, вершини, центр, асимптота, особливі точки тощо.

1. **У чому полягає суть координатного методу?**
2. **Запишіть і доведіть формули координат середини відрізка.**
3. **Запишіть і доведіть формулу відстані між двома точками на координатній площині.**

Початковий рівень

67. Знайдіть координати середини відрізка CD, якщо:
1) $C(-5; 4)$, $D(7; 0)$; 2) $C(2; -8)$, $D(-2; 6)$.

68. Знайдіть координати середини відрізка MN, якщо:
1) $M(4; -5)$, $N(2; 1)$; 2) $M(7; -3)$, $N(-1; 3)$.

69. Знайдіть відстань від початку координат до точки:
1) $A(3; -4)$; 2) $B(5; 12)$.

70. Знайдіть відстань від початку координат до точки:
1) $P(-6; 8)$; 2) $M(8; 15)$.

2 Середній рівень

71. M – середина відрізка AB. Знайдіть координати:
1) точки B, якщо $A(-2; 5)$, $M(4; -7)$;
2) точки A, якщо $B(0; -2)$, $M(5; 1)$.

72. D – середина відрізка AB. Знайдіть координати:
1) точки A, якщо $B(4; 5)$, $D(-1; 7)$;
2) точки B, якщо $A(3; 0)$, $D(4; -2)$.

73. Знайдіть відстань між точками A і B, якщо:
1) $A(-2; 4)$, $B(4; 12)$; 2) $A(4; -5)$, $B(6; -11)$.

74. Знайдіть відстань між точками A і B, якщо:
1) $A(4; -1)$, $B(1; -5)$; 2) $A(1; 7)$, $B(-5; 1)$.

75. Яка відстань більша, AB чи AC, якщо:
1) $A(4; -3)$, $B(0; 0)$, $C(2; -1)$;
2) $A(2; 5)$, $B(8; -3)$, $C(-6; -1)$?

76. Яка відстань більша, MN чи ML, якщо:
1) $M(2; -3)$, $N(2; 2)$, $L(-2; 0)$;
2) $M(3; -1)$, $N(1; 0)$, $L(5; -1)$?

77. Знайдіть периметр трикутника LMN, якщо $L(4; -3)$, $M(4; 5)$, $N(1; 1)$.

78. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $A(0; -2)$, $B(0; -8)$, $C(4; -5)$.

3 Достатній рівень

79. $A(-1; 2)$, $B(0; 6)$, $C(-5; 3)$ – вершини трикутника ABC. Доведіть, що трикутник ABC – рівнобедрений.

80. $K(-2; 2)$, $L(3; -4)$, $M(4; 7)$ – вершини трикутника KLM. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

81. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2; -5)$, $B(-7; 0)$, $C(-6; 1)$, $D(3; -4)$ – паралелограм.

82. Доведіть, що чотирикутник $KLMN$ з вершинами в точках $K(-2; 8)$, $L(3; -3)$, $M(6; 2)$, $N(1; 13)$ – паралелограм.

83. Точки $K(-4; 2)$, $L(3; 5)$, $M(2; 8)$ – вершини паралелограма $KLMN$. Знайдіть координати його четвертої вершини.

84. Точки $A(3; -8)$, $B(0; 11)$, $C(1; -12)$ – вершини паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати його четвертої вершини.

85. Чи є чотирикутник $ABCD$ паралелограмом, якщо:
1) $A(-7; -2)$, $B(-5; 4)$, $C(5; 2)$, $D(3; -4)$;
2) $A(2; 6)$, $B(3; 1)$, $C(-3; 0)$, $D(-4; 4)$?

86. У трикутнику ABC $A(-4;\ 2)$, $B(4;\ 7)$, $C(-2;\ 12)$. Знайдіть довжину середньої лінії, яка паралельна стороні AC.

87. У трикутнику PLK $P(4;\ -6)$, $L(2;\ -11)$, $K(6;\ -7)$. Знайдіть довжину середньої лінії, яка паралельна стороні KL.

88. Знайдіть довжину відрізка AB, кінці якого лежать на осях координат, а серединою його є точка $N(-5;\ 12)$.

89. Знайдіть довжину відрізка MN, кінці якого лежать на осях координат, а серединою його є точка $A(8;\ -15)$.

90. Знайдіть довжину медіани AM трикутника ABC, якщо $A(6;\ 0)$, $B(-3;\ 4)$, $C(7;\ 2)$.

91. Знайдіть довжину медіани BN трикутника ABC, якщо $A(2;\ -1)$, $B(-9;\ 0)$, $C(4;\ 11)$.

92. $ABCD$ – квадрат, $A(-2;\ 4)$, $C(4;\ 10)$. Знайдіть периметр квадрата.

93. $ABCD$ – квадрат, $A(4;\ 5)$, $B(10;\ -3)$. Знайдіть довжину діагоналі квадрата.

94. Відстань між точками $A(5;\ 7)$ і $B(-3;\ y)$ дорівнює 17. Знайдіть y.

95. Відстань між точками $M(3;\ 0)$ і $N(x;\ 24)$ дорівнює 25. Знайдіть x.

96. Знайдіть на осі абсцис точку, рівновіддалену від точок $M(2;\ 5)$ і $N(4;\ 1)$.

97. Знайдіть на осі ординат точку, рівновіддалену від точок $A(3;\ 1)$ і $B(7;\ 5)$.

4 Високий рівень

98. Дано точки $A(2;\ 3)$ і $B(8;\ 11)$. Знайдіть координати точки N, яка ділить відрізок AB у відношенні $1 : 3$, рахуючи від точки A.

99. Дано точки $P(5;\ 0)$ і $N(13;\ 6)$. Знайдіть координати точки D, яка ділить відрізок PN у відношенні $3 : 1$, рахуючи від точки P.

100. Доведіть, що точки $A(-1;\ -2)$, $B(3;\ 2)$ і $C(8;\ 7)$ лежать на одній прямій. Яка з точок лежить між двома іншими?

101. Доведіть, що точки $P(-1;\ -5)$, $L(4;\ 5)$ і $M(2;\ 1)$ лежать на одній прямій. Яка з точок лежить між двома іншими?

102. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-4;\ -1)$, $B(-1;\ 2)$, $C(3;\ -2)$ і $D(0;\ -5)$ – прямокутник.

103. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(1;\ 3)$, $B(-1;\ 9)$, $C(5;\ 7)$ і $D(7;\ 1)$ – ромб.

104. Знайдіть значення x, при якому трикутник з вершинами $A(-4; 0)$, $B(0; 4)$, $C(x; -x)$ – рівносторонній.

105. Доведіть, що трикутник ABC з вершинами в точках $A(-4; 16)$, $B(6; -4)$, $C(3; -5)$ – прямокутний. Знайдіть гострі кути трикутника з точністю до мінути.

106. Доведіть, що трикутник KLM з вершинами в точках $K(6; -1)$, $L(9; -4)$ і $M(12; 5)$ – прямокутний. Знайдіть гострі кути трикутника.

Вправи для повторення

107. Знайдіть периметр і площу прямокутника, одна зі сторін якого дорівнює 8 см, а діагональ – 17 см.

108. Основи рівнобічної трапеції з кутом при основі 60° дорівнюють 16 см і 6 см. Знайдіть діагональ трапеції.

109. Хорда завдовжки 30 см перпендикулярна до діаметра і ділить його на відрізки, різниця між якими 40 см. Знайдіть діаметр кола.

110. Одна зі сторін трикутника та висота, проведена до неї, дорівнюють по 20 см. Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо висота, проведена до однієї з них, дорівнює 16 см.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

111. Виділіть квадрат двочлена у виразі:

1) $x^2 + 6x - 7$; 2) $x^2 - 4x$;

3) $y^2 - 8x + 13$; 4) $y^2 + 3y - 1$.

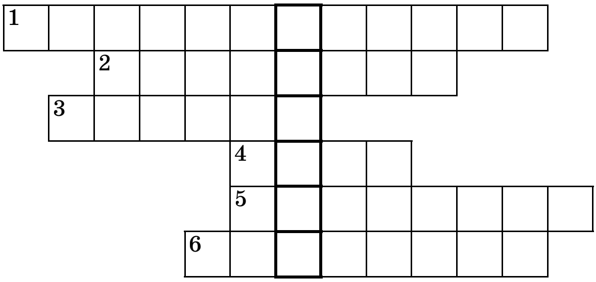
112. Точка Q – центр кола, точка A – належить цьому колу. Знайдіть радіус кола, якщо:

1) $Q(0; 0)$, $A(-3; 0)$; 2) $Q(-2; 3)$, $A(2; 6)$.

113. Відрізок MN – діаметр кола, $M(-4; 2)$, $N(8; 10)$. Знайдіть координати центра кола.

Цікаві задачі для учнів неледачих

114. *Видатні українці.* Запишіть по горизонталі прізвища видатних українців (за потреби використайте додаткову літературу та Інтернет) та отримайте у виділеному стовпчику назву геометричної фігури, з якою ви ознайомитеся в наступному розділі.



1. Видатний український футбольний тренер, багаторічний наставник команди «Динамо» (Київ).

2. Видатна українська письменниця та поетеса, лауреатка Шевченківської премії, премії Антоновичів, премії Петрарки.

3. Український композитор і поет, один із засновників української естрадної музики.

4. Український поет, перекладач, прозаїк, літературознавець, правозахисник.

5. Український письменник, кінорежисер, кінодраматург, художник, класик світового кінематографа.

6. Видатний український учений у галузі ракетобудування й космонавтики, конструктор. Його вважають основоположником практичної космонавтики.

§ 4. РІВНЯННЯ КОЛА

Під час вивчення алгебри ми будували графіки деяких функцій у прямокутній системі координат. Наприклад, графіком функції $y = 2x - 7$ є пряма, графіком функції $y = x^2$ – парабола, а графіком функції $y = -\dfrac{6}{x}$ – гіпербола. Також відомо, що графіком лінійного рівняння з двома змінними, тобто рівняння вигляду $ax + by = c$, є пряма.

Рівняння фігури

Розглянемо поняття рівняння для геометричної фігури.

Рівнянням фігури на координатній площині називають рівняння з двома змінними x і y, якщо виконуються такі дві умови:

1) координати будь-якої точки фігури задовольняють це рівняння;

2) будь-яка пара чисел $(x; y)$, що задовольняє це рівняння, є координатами деякої точки фігури.

Рівняння кола

Знайдемо формулу, що задає коло радіуса r із центром у точці $Q(a; b)$ (мал. 13).

1) Нехай $M(x; y)$ – довільна точка кола.

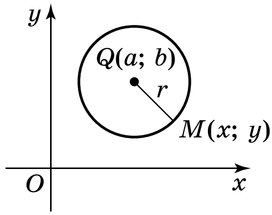
Відстань QM записуємо за формулою відстані між двома точками:

$$QM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Оскільки точка M лежить на колі, то $QM = r$, а $QM^2 = r^2$.

Тому $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Отже, координати x і y кожної точки $M(x; y)$ даного кола задовольняють отримане рівняння.



Мал. 13

2) Розглянемо деяку точку $N(x; y)$, координати якої задовольняють рівняння $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Із цієї рівності випливає, що відстань між точками Q і N дорівнює r. Тому точка N належить колу.

Отже,

рівняння кола із центром у точці $Q(a; b)$ і радіусом r має вигляд:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Зокрема, рівняння кола радіуса r із центром у початку координат має вигляд:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Задача 1. Знайти координати центра і радіус кола, заданого рівнянням $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$.

Р о з в’ я з а н н я. Маємо $(x-(-2))^2 + (y-3)^2 = 5^2$. Отже, центром кола є точка $Q(-2; 3)$, а радіус кола $r = 5$.

В і д п о в і д ь. $Q(-2; 3)$, $r = 5$.

Задача 2. Довести, що рівняння $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 10 = 0$ є рівнянням кола. Знайти координати центра кола і його радіус.

Р о з в’ я з а н н я. Виділимо квадрати двочленів у лівій частині даного рівняння:

$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) - 16 - 9 - 10 = 0,$

$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 35,$

$(x-4)^2 + (y-(-3))^2 = (\sqrt{35})^2.$

Отже, задане рівняння є рівнянням кола із центром у точці $Q(4; -3)$ і радіусом $r = \sqrt{35}$.

В і д п о в і д ь. $(4; -3)$, $\sqrt{35}$.

Задача 3. Скласти рівняння кола з діаметром AB, якщо $A(-5;\ 7)$, $B(3;\ 11)$.

Р о з в' я з а н н я. Нехай точка Q – центр кола. Тоді Q – середина AB. Маємо:

$$x_Q = \frac{-5+3}{2} = -1,\ y_Q = \frac{7+11}{2} = 9.$$

Радіус кола – це відрізок QA:

$$QA = \sqrt{(-1-(-5))^2 + (9-7)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}.$$

Знайдемо рівняння шуканого кола:

$(x-(-1))^2 + (y-9)^2 = (\sqrt{20})^2$,

$(x+1)^2 + (y-9)^2 = 20$.

В і д п о в і д ь. $(x+1)^2 + (y-9)^2 = 20$.

1. Що називають рівнянням фігури на координатній площині?
2. Доведіть, що рівняння кола із центром у точці $(a;\ b)$ і радіусом r має вигляд $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

1 Початковий рівень

115. (Усно.) Які з рівнянь є рівняннями кола:

1) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$; 2) $x^2 + y^3 = 8$;
3) $x^2 + y^2 = 8$; 4) $(x-2)^2 - (y+3)^2 = 7$;
5) $x^2 + (y-2)^2 = 25$; 6) $-x^2 + y^2 = 16$?

116. Знайдіть координати центра та радіус кола, заданого рівнянням:

1) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 100$; 2) $x^2 + (y-4)^2 = 25$;
3) $(x+4)^2 + y^2 = 1$; 4) $x^2 + y^2 = 9$.

117. Знайдіть координати центра та радіус кола, заданого рівнянням:

1) $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 16$; 2) $(x-3)^2 + y^2 = 4$;
3) $x^2 + (y+2)^2 = 81$; 4) $x^2 + y^2 = 49$.

118. Складіть рівняння кола із центром у точці Q і радіусом r, якщо:

1) $Q(1;\ 4)$, $r = 3$; 2) $Q(0;\ -2)$, $r = 5$;
3) $Q(8;\ 0)$, $r = 1$; 4) $Q(0;\ 0)$, $r = 11$.

119. Складіть рівняння кола із центром у точці Q і радіусом r, якщо:

1) $Q(2;\ -3)$, $r = 4$; 2) $Q(0;\ 3)$, $r = 2$;
3) $Q(-7;\ 0)$, $r = 10$; 4) $Q(0;\ 0)$, $r = 7$.

2 Середній рівень

120. Складіть рівняння кола із центром у точці Q, діаметр якого дорівнює d, якщо:
1) $Q(-7;\ 8)$, $d = 9$;   2) $Q(4;\ -19)$, $d = \sqrt{34}$.

121. Складіть рівняння кола із центром у точці Q, діаметр якого дорівнює d, якщо:
1) $Q(4;\ 7)$, $d = 13$;   2) $Q(-2;\ -11)$, $d = \sqrt{26}$.

122. Побудуйте на координатній площині коло, задане рівнянням:
1) $x^2 + y^2 = 16$;   2) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$;
3) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$;   4) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

123. Побудуйте на координатній площині коло, задане рівнянням:
1) $(x + 3)^2 + y^2 = 36$;   2) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

124. Коло задано рівнянням $x^2 + y^2 = 25$. Чи належить цьому колу точка:
1) $A(5;\ 0)$;   2) $B(4;\ -1)$;   3) $C(-3;\ 4)$;
4) $D(0;\ -5)$;   5) $M(4;\ -3)$;   6) $N(-1;\ 5)$?

125. Коло задано рівнянням $x^2 + y^2 = 100$. Чи належить цьому колу точка:
1) $A(0;\ -10)$;   2) $B(9;\ 4)$;   3) $C(6;\ -8)$;
4) $D(-7;\ -2)$;   5) $T(-6;\ 8)$;   6) $P(10;\ 0)$?

126. Складіть рівняння кола із центром у точці $Q(-3;\ 4)$, яке проходить через точку $M(5;\ -2)$.

127. Складіть рівняння кола із центром у точці $Q(1;\ 2)$, яке проходить через точку $P(5;\ 5)$.

128. Складіть рівняння кола, для якого AB є діаметром, якщо $A(3;\ -5)$, $B(-3;\ 3)$.

129. Складіть рівняння кола, для якого AB є діаметром, якщо $A(-1;\ 8)$, $B(11;\ -8)$.

130. На колі $x^2 + y^2 = 169$ знайдіть точки:
1) з абсцисою 12;   2) з ординатою -5;
3) які лежать на осі абсцис;   4) які лежать на осі ординат.

131. На колі $x^2 + y^2 = 289$ знайдіть точки:
1) з абсцисою -8;
2) з ординатою 15;
3) які лежать на осі абсцис;
4) які лежать на осі ординат.

3 Достатній рівень

132. Знайдіть центр і радіус кола, заданого рівнянням:
1) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$;
2) $x^2 + 10x + y^2 - 12y = 0$.

133. Знайдіть центр і радіус кола, заданого рівнянням:
1) $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 7 = 0$;
2) $x^2 - 12x + y^2 - 5 = 0$.

134. Знайдіть відстань між центрами кіл, які задано рівняннями $x^2 + y^2 - 4y = 0$ і $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 7 = 0$.

135. Знайдіть відстань між центрами кіл, які задано рівняннями $x^2 + 8x + y^2 - 16y = 0$ і $x^2 + y^2 + 4x + 1 = 0$.

136. Складіть рівняння кола радіуса 10, що проходить через точку $A(5; -8)$ і центр якого лежить на осі абсцис.

137. Складіть рівняння кола радіуса 5, що проходить через точку $B(-4; 2)$ і центр якого лежить на осі ординат.

138. Коло із центром у точці $Q(2; -1)$ проходить через точку $A(4; 0)$. Чи проходить це коло через точку:
1) $B(0; 2)$; 2) $C(1; 1)$?

139. Коло із центром у точці $Q(-3; 1)$ проходить через точку $M(-2; 5)$. Чи проходить це коло через точку:
1) $N(1; 2)$; 2) $K(4; 4)$?

140. Коло задано рівнянням $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 16$. Не виконуючи малюнка, визначте, які з точок $A(4; -2)$, $B(-3; -5)$, $C(-2; -7)$, $D(5; 1)$ лежать:
1) усередині круга, обмеженого цим колом;
2) на колі;
3) поза кругом, обмеженим цим колом.

4 Високий рівень

141. Складіть рівняння кола із центром, який лежить на бісектрисі другого координатного кута і радіусом 13 та яке проходить через точку $A(1; -8)$.

142. Складіть рівняння кола, що проходить через точку $B(-2; 0)$, центр якого лежить на бісектрисі першого координатного кута, а радіус дорівнює 10.

143. З'ясуйте взаємне розташування двох кіл (дотик, перетин або немає спільних точок):
1) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ і $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 9$;
2) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ і $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 25$.

144. З'ясуйте взаємне розташування двох кіл (дотик, перетин або немає спільних точок):

1) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ і $x^2 + y^2 = 16$;

2) $(x + 1)^2 + (y - 7)^2 = 49$ і $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

145. Складіть рівняння кола, вписаного у трикутник ABC, якщо $A(0; 3)$, $B(4; 0)$, $C(0; 0)$.

Вправи для повторення

146. Середня лінія трапеції дорівнює 16 см. Знайдіть основи трапеції, якщо:

1) вони відносяться як 1 : 3;

2) одна з них на 4 см більша за другу.

147. Бісектриса кута прямокутника ділить його сторону у відношенні 1 : 2, рахуючи від найближчої до цього кута вершини. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 56 см.

148. Знайдіть площу прямокутного трикутника, у якому висота, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 4 см і 9 см.

149. Визначте координати кінців A і B відрізка AB, якщо точки $M(3; 3)$ і $N(2; 6)$ ділять його на три рівні частини.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

150. 1) Що є графіком функції вигляду $y = kx + l$?

2) Побудуйте графіки функцій $y = 2x - 3$; $y = \frac{1}{3}x + 2$; $y = -x + 5$; $y = -0{,}5x - 1$.

151. 1) Що є графіком рівняння вигляду $ax + by = c$, де a і b одночасно не дорівнюють нулю?

2) Побудуйте графіки рівнянь $x - y = 6$; $2x + 3y = 5$; $x = -2$; $y = 5$.

152. Чи належить точка $M(-1; 2)$:

1) графіку функції $y = x + 1$; $y = 1 - x$; $y = -2x$; $y = -1$;

2) графіку рівняння $x + y = 1$; $2x + y = 4$; $3x - 2y = 7$; $4y - x = 9$?

Цікаві задачі для учнів неледачих

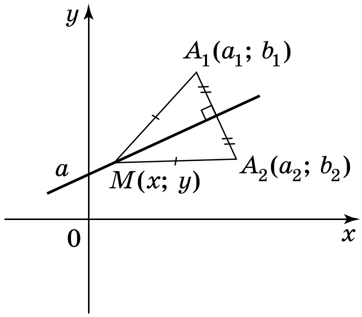
153. (*Задача Стенфордського університету*). Точка лежить у внутрішній області рівностороннього трикутника. Відстані від цієї точки до сторін трикутника дорівнюють a, b і c, а висота трикутника – h. Доведіть, що $a + b + c = h$.

§ 5. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

З курсу алгебри ви знаєте, що пряма є графіком лінійної функції $y = kx + l$ та графіком лінійного рівняння $ax + by = c$. Розглянемо рівняння прямої в геометрії.

Загальне рівняння прямої

Нехай a – довільна пряма на координатній площині (мал. 14).



Мал. 14

1) Виберемо дві точки $A_1(a_1; b_1)$ і $A_2(a_2; b_2)$ так, щоб пряма a була серединним перпендикуляром до відрізка A_1A_2.

Нехай точка $M(x; y)$ – довільна точка прямої a.

За властивістю серединного перпендикуляра маємо: $MA_1 = MA_2$, а отже, $MA_1^2 = MA_2^2$. Тому для точки $M(x; y)$ справджується рівність:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2. \quad (1)$$

Розкривши дужки та звівши подібні доданки, матимемо:

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + (a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2) = 0.$$

Уведемо позначення

$2(a_2 - a_1) = a$, $2(b_2 - b_1) = b$, $a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 = c$,

отримаємо, що будь-яка точка прямої a задовольняє рівняння

$$ax + by + c = 0. \quad (2)$$

Оскільки $A_1(a_1; b_1)$ і $A_2(a_2; b_2)$ – різні точки, то хоча б один з виразів $(a_2 - a_1)$ або $(b_2 - b_1)$ відмінний від нуля. Отже, хоча б один з коефіцієнтів a або b у рівнянні (2) відмінний від нуля.

2) Розглянемо деяку точку $N(x; y)$, координати якої задовольняють рівняння (2). Виконавши алгебраїчні перетворення, які є досить громіздкими, можна переконатися, що координати точки N задовольняють також і рівняння (1). Тому точка N рівновіддалена від точок A_1 і A_2.

Отже, точка N належить прямій, яка є серединним перпендикуляром до відрізка A_1A_2, а тому належить прямій a.

Рівняння прямої у прямокутній системі координат має вигляд

$$ax + by + c = 0,$$

де a, b, c – числа, причому a і b одночасно не дорівнюють нулю.

Рівняння $ax + by + c = 0$ ще називають *загальним рівнянням прямої*.

Задача 1. Знайти точки перетину прямої $3x - 5y - 15 = 0$ з осями координат.

Р о з в' я з а н н я. 1) Нехай точка $A(x; 0)$ – точка перетину прямої з віссю абсцис. Тоді $3x - 5 \cdot 0 - 15 = 0$, звідки $x = 5$. Отже, $A(5; 0)$ – точка перетину прямої з віссю абсцис.

2) Нехай точка $B(0; y)$ – точка перетину прямої з віссю ординат. Тоді $3 \cdot 0 - 5y - 15 = 0$, звідки $y = -3$. Отже, $B(0; -3)$ – точка перетину прямої з віссю ординат.

В і д п о в і д ь. $A(5; 0)$, $B(0; -3)$.

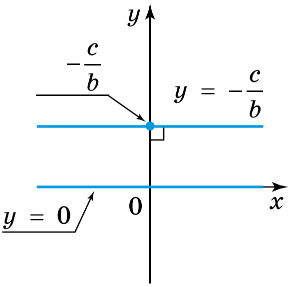
Розташування прямої відносно системи координат

Розглянемо розташування прямої відносно системи координат у деяких окремих випадках.

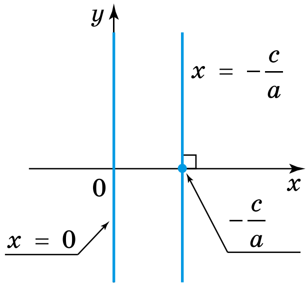
1) $a = 0$, $b \neq 0$. Маємо $by + c = 0$, $y = -\frac{c}{b}$. Усі точки прямої мають одну й ту саму ординату $\left(-\frac{c}{b}\right)$. Тому *пряма* $y = -\frac{c}{b}$ *паралельна осі* x (мал. 15).

Зокрема, якщо $c = 0$, то пряма $y = 0$ збігається з віссю x.

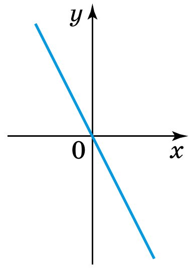
2) $b = 0$, $a \neq 0$. Маємо $ax + c = 0$, $x = -\frac{c}{a}$. Точки прямої мають одну й ту саму абсцису $\left(-\frac{c}{a}\right)$. Тому *пряма* $x = -\frac{c}{a}$ *паралельна осі* y (мал. 16).



Мал. 15



Мал. 16

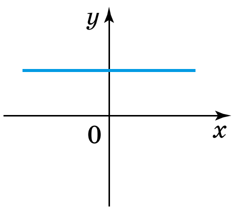
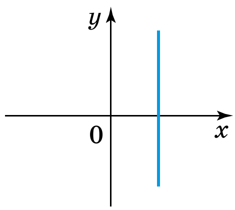
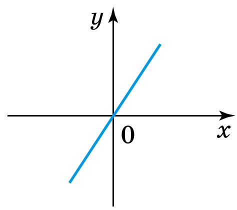


Мал. 17

Зокрема, якщо $c = 0$, то пряма $x = 0$ збігається з віссю y.

3) $c = 0$. Координати точки (0; 0) задовольняють рівняння прямої. Тому *пряма проходить через початок координат* (мал. 17).

Систематизуємо отримані результати в таблицю.

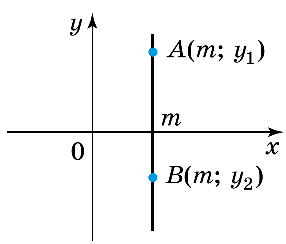
Часткові випадки розташування прямої $ax + by + c = 0$ в декартовій системі координат		
$a = 0,\ b \neq 0$	$a \neq 0,\ b = 0$	$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0$
$y = -\frac{c}{b}$	$x = -\frac{c}{a}$	$y = -\frac{a}{b}x$
		

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

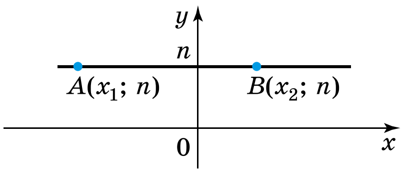
Складемо рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$. Розглянемо випадки.

1) $x_1 = x_2 = m$. Усі точки прямої мають одну й ту саму абсцису, що дорівнює m (мал. 18). Рівняння прямої має вигляд:

$$\boldsymbol{x = m.}$$



Мал. 18

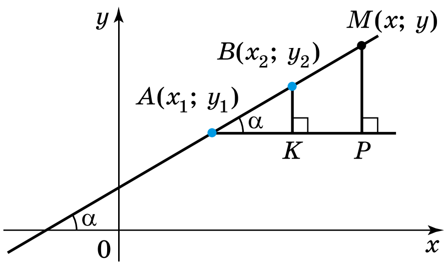


Мал. 19

2) $y_1 = y_2 = n$. Усі точки прямої мають одну й ту саму ординату, що дорівнює n (мал. 19). Рівняння прямої має вигляд:

$$\boldsymbol{y = n}.$$

3) $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Нехай $M(x;\ y)$ – деяка точка прямої. Через точку A проведемо пряму, паралельну осі x, а через точки M і B – прямі, паралельні осі y. Тоді $BK \perp AP$ і $MP \perp AP$ (мал. 20). Позначимо $\angle BAK = \alpha$.



Мал. 20

У трикутнику BAK: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BK}{AK}$, тобто $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

У трикутнику MAP: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{MP}{AP}$, тобто $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$.

Отже, маємо:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}, \text{ тобто } \boldsymbol{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}. \tag{3}$$

Після застосування основної властивості пропорції і спрощення рівняння (3) зводиться до вигляду $ax + by + c = 0$.

Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$, має вигляд:

- $\boldsymbol{x = m}$**, якщо** $\boldsymbol{x_1 = x_2 = m}$**;**
- $\boldsymbol{y = n}$**, якщо** $\boldsymbol{y_1 = y_2 = n}$**;**
- $\boldsymbol{\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$**, якщо** $\boldsymbol{x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2}$**.**

Задача 2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $A(2; -3)$ і $B(4; -5)$.

Р о з в' я з а н н я. Використовуючи формулу (3), маємо:

$$\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-(-3)}{-5-(-3)}; \text{ тобто } \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-2},$$

звідки $-1(x - 2) = y + 3$, остаточно отримаємо: $x + y + 1 = 0$.

В і д п о в і д ь. $x + y + 1 = 0$.

Відповідь легко перевірити, підставивши в отримане рівняння координати кожної із заданих точок.

Кутовий коефіцієнт прямої

Якщо в загальному рівнянні прямої $ax + by + c = 0$ коефіцієнт b не дорівнює нулю, то, виразивши із цього рівняння y, матимемо:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Позначивши $-\frac{a}{b} = k$, $-\frac{c}{b} = l$, отримаємо:

$$\boldsymbol{y = kx + l}.$$

Отже, приходимо до висновку, що пряму можна задавати як рівнянням $ax + by + c = 0$, так і рівнянням $y = kx + l$, оскільки кожне з них є рівнянням прямої.

З'ясуємо геометричний зміст коефіцієнта k у рівнянні прямої. Нехай $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, де $x_1 < x_2$, – дві точки прямої. Оскільки координати точок задовольняють рівняння $y = kx + l$, то $y_1 = kx_1 + l$ і $y_2 = kx_2 + l$. Віднімемо почленно від другого рівняння перше, матимемо: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, звідки

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Але вище ми вже довели, що $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\alpha$ (с. 38, мал. 20). Оскільки пряма AP паралельна осі x, то α – це кут, який утворює пряма AB з додатним напрямом осі x.

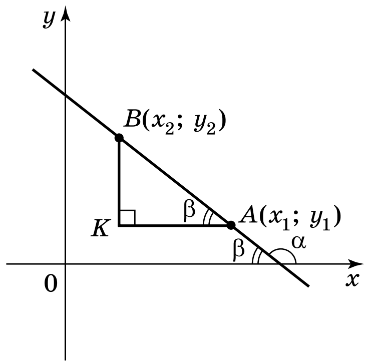
Отже, якщо кут α – гострий, то $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Розглянемо випадок, коли пряма утворює з додатним напрямом осі x тупий кут (мал. 21). Маємо:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{BK}{KA} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Але $\alpha + \beta = 180°$, тоді

$\beta = 180° - \alpha$ і $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.



Мал. 21

За відомою формулою $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$. Тоді

$$-\operatorname{tg}\alpha = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

враховуючи, що $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, знову отримаємо, що $k = \operatorname{tg}\alpha$, де кут α – тупий.

Отже, приходимо до висновку про геометричний зміст коефіцієнта k у рівнянні прямої.

Коефіцієнт k у рівнянні прямої $y = kx + l$ дорівнює тангенсу кута, який утворює ця пряма з додатним напрямом осі x.

Коефіцієнт k у рівнянні прямої $y = kx + l$ називають *кутовим коефіцієнтом прямої*. Причому $k > 0$, якщо пряма утворює гострий кут з додатним напрямом осі x, і $k < 0$, якщо цей кут – тупий.

Задача 3. Довести, що рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, яка проходить через точку $A(x_0;\ y_0)$, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Р о з в’ я з а н н я. Запишемо загальний вигляд прямої з кутовим коефіцієнтом k: $y = kx + l$. Знайдемо коефіцієнт l.

Оскільки пряма проходить через точку $A(x_0;\ y_0)$, то координати цієї точки задовольняють рівняння прямої, тобто:

$$y_0 = kx_0 + l, \text{ звідки } l = y_0 - kx_0.$$

Підставимо значення l в рівняння $y = kx + l$, матимемо: $y = kx + (y_0 - kx_0)$, тобто $y - y_0 = k(x - x_0)$. ▲

Задача 4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-3;\ 5)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут $135°$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $k = \operatorname{tg}\alpha$, то $k = \operatorname{tg} 135° = -1$.

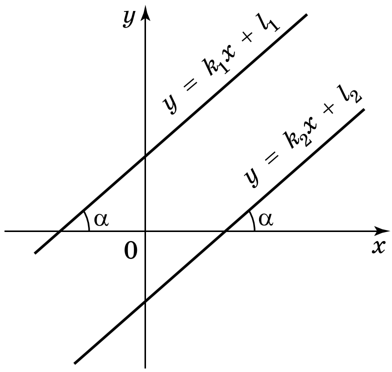
Ураховуючи, що $y - y_0 = k(x - x_0)$, маємо:

$y - 5 = -1(x - (-3))$, тобто $y - 5 = -x - 3$, отже, маємо рівняння: $x + y - 2 = 0$.

В і д п о в і д ь. $x + y - 2 = 0$.

Умова паралельності прямих

Якщо прямі $y = k_1x + l_1$ і $y = k_2x + l_2$ паралельні, то кути, які вони утворюють з додатним напрямом осі x, між собою рівні (мал. 22). Тоді й тангенси цих кутів також рівні, а тому $k_1 = k_2$.



Мал. 22

І навпаки, якщо $k_1 = k_2$, то тангенси кутів, які утворюють прямі з додатним напрямом осі x, рівні, а тому прямі паралельні.

Прямі $y = k_1x + l_1$ і $y = k_2x + l_2$ паралельні тоді і тільки тоді, коли $k_1 = k_2$.

Наприклад, паралельними є прямі $y = 0{,}1x + 5$ і $y = \frac{1}{10}x - 7$, у яких $k = 0{,}1$ і $k = \frac{1}{10}$ відповідно, тобто $k_1 = k_2$.

Координати точки перетину двох прямих

Нехай дано рівняння двох прямих у загальному вигляді: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Знайдемо координати $(x; y)$ точки їх перетину. Оскільки ця точка належить кожній з прямих, то її координати задовольняють кожне з двох рівнянь. Тому координати точки перетину є розв'язком системи рівнянь, якими задано ці прямі.

Задача 5. Знайти точку перетину прямих $2x - y - 5 = 0$ і $4x + 3y - 15 = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Розв'язавши систему $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0, \\ 4x + 3y - 15 = 0, \end{cases}$ отримаємо $x = 3$, $y = 1$. Отже, $(3; 1)$ – точка перетину прямих.

В і д п о в і д ь. $(3; 1)$.

1. Покажіть, як скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
2. Як розташована пряма $ax + by + c = 0$ у координатній площині, якщо $a = 0$? $b = 0$? $c = 0$?
3. Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$?
4. Що таке кутовий коефіцієнт прямої і який його геометричний зміст?
5. За якої умови прямі $y = k_1x + l_1$ і $y = k_2x + l_2$ будуть паралельними?
6. Як знайти координати точки перетину прямих, які задано в загальному вигляді?

1 Початковий рівень

154. (Усно.) Яке з рівнянь є рівнянням прямої:

1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $2x - 3y + 7 = 0$; 3) $x^3 - 2y - 13 = 0$;
4) $x - 2y = 0$; 5) $2x - 9 = 0$; 6) $x + y^2 = 0$?

155. Яке з рівнянь є рівнянням прямої:

1) $2x - 3y = 0$; 2) $4x^2 - 9y^2 = 5$;
3) $2x - y^4 - 15 = 0$; 4) $3x + 7y - 10 = 0$;
5) $3y - 12 = 0$; 6) $2x^2 - y = 0$?

156. Чи належить прямій $x + y - 7 = 0$ точка:

1) $A(3; 4)$; 2) $B(5; 1)$; 3) $C(2; 5)$; 4) $D(0; 8)$?

157. Чи належить прямій $x - y = 0$ точка:

1) $M(5; 5)$; 2) $N(-4; 4)$; 3) $L(0; 0)$; 4) $K(-2; -2)$?

158. Яка з прямих проходить через початок координат:

1) $2x - 3y = 0$; 2) $3x - 2y - 5 = 0$;
3) $3x + 2y = 0$; 4) $2x + 3y - 7 = 0$?

159. (Усно.) Чи перетинаються прямі:

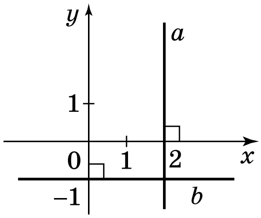
1) $y = 2x - 7$ і $y = 2x + 3$; 2) $y = 3x + 7$ і $y = 4x - 9$?

160. Чи паралельні прямі:

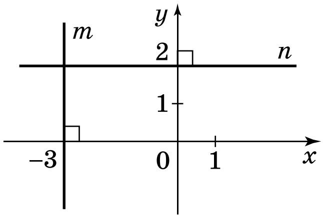
1) $y = 3x - 7$ і $y = -2x + 9$; 2) $y = -4x + 3$ і $y = -4x$?

2 Середній рівень

161. Запишіть рівняння прямих a і b (мал. 23).



Мал. 23



Мал. 24

162. Запишіть рівняння прямих m і n (мал. 24).

163. Знайдіть координати точок перетину прямої $2x - 5y - 10 = 0$ з осями координат.

164. Знайдіть координати точок перетину прямої $3x - 4y + 12 = 0$ з осями координат.

165. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2; 3)$ і паралельна:

1) осі абсцис;

2) осі ординат.

166. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $B(4; -1)$ і паралельна:

1) осі абсцис;

2) осі ординат.

167. Які з точок належать прямій $y = 7$:

1) $A(7; 1)$; 2) $B(1; 7)$; 3) $C(2; 5)$; 4) $D(-10; 7)$?

168. Які з точок належать прямій $x = 3$:

1) $K(1; 3)$; 2) $L(3; 1)$; 3) $M(1; 2)$; 4) $N(3; -8)$?

169. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої MN, якщо:

1) $M(-1; 2)$, $N(0; 9)$; 2) $M(1; 4)$, $N(-1; 6)$.

170. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої AB, якщо:

1) $A(3; -1)$, $B(5; -7)$; 2) $A(2; 9)$, $B(3; 4)$.

171. Запишіть рівняння прямої у вигляді $y = kx + l$ та знайдіть її кутовий коефіцієнт:

1) $2x - y - 5 = 0$; 2) $4x + 3y + 7 = 0$.

172. Запишіть рівняння прямої у вигляді $y = kx + l$ та знайдіть її кутовий коефіцієнт:

1) $3x + y + 7 = 0$; 2) $5x - 2y - 9 = 0$.

Достатній рівень

173. Складіть рівняння прямої, що проходить через точки:
1) $A(2;\ 7)$ і $B(-3;\ 7)$; 2) $M(-2;\ 1)$ і $N(-2;\ -5)$;
3) $C(3;\ 8)$ і $D(1;\ 6)$; 4) $K(-2;\ 5)$ і $L(3;\ -1)$.

174. Складіть рівняння прямої, що проходить через точки:
1) $A(4;\ 7)$ і $B(4;\ 0)$; 2) $C(5;\ -2)$ і $D(7;\ -2)$;
3) $M(-1;\ 2)$ і $N(-3;\ 4)$; 4) $K(-1;\ 5)$ і $L(7;\ 1)$.

175. Складіть рівняння прямої, яка містить медіану AM трикутника ABC, якщо $A(0;\ -2)$, $B(-7;\ 5)$, $C(9;\ 11)$.

176. Складіть рівняння прямої, яка містить медіану CN трикутника ABC, якщо $A(2;\ -3)$, $B(8;\ -7)$, $C(4;\ 0)$.

177. Знайдіть точку перетину прямих
$$2x - 3y = 0 \text{ і } 3x + 4y + 17 = 0.$$

178. Знайдіть точку перетину прямих
$$5x - 4y = 0 \text{ і } 2x + 3y + 23 = 0.$$

179. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(2;\ -1)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює:

1) 3; 2) -2; 3) 0; 4) $\frac{1}{7}$.

180. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(-3;\ 2)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює:

1) 4; 2) -1; 3) 0; 4) $\frac{1}{5}$.

181. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $N(-4;\ -1)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут:
1) $135°$; 2) $60°$.

182. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $B(2;\ 5)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут:
1) $45°$; 2) $120°$.

183. Серед даних прямих укажіть пари паралельних:
1) $2x - 3y + 7 = 0$; 2) $3x - y + 9 = 0$;
3) $x + 2y - 19 = 0$; 4) $6x - 2y + 5 = 0$;
5) $4x - 6y + 9 = 0$; 6) $4x + 8y - 1 = 0$.

184. Серед даних прямих укажіть пари паралельних:
1) $3x + y + 7 = 0$; 2) $2x - y + 7 = 0$;
3) $x - 5y - 1 = 0$; 4) $6x - 3y - 1 = 0$;
5) $9x + 3y - 11 = 0$; 6) $2x - 10y - 3 = 0$.

Високий рівень

185. При якому значенні a точки $A(1; 2)$, $B(-2; 3)$ і $C(a; 4)$ лежать на одній прямій?

186. При якому значенні b точки $M(4; -1)$, $K(5; 2)$ і $N(3; b)$ лежать на одній прямій?

187. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(-1; 2)$ паралельно прямій $4x - 2y + 7 = 0$.

188. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $N(2; -3)$ паралельно прямій $6x + 2y - 5 = 0$.

189. Доведіть, що прямі $y = k_1x + l_1$ і $y = k_2x + l_2$ взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $k_1k_2 = -1$ (*умова перпендикулярності прямих*).

190. Використавши результат задачі № 189, складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1; 3)$ перпендикулярно до прямої $y = \frac{1}{2}x - 7$.

191. Використавши результат задачі № 189, складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(2; -1)$ перпендикулярно до прямої $y = -\frac{1}{3}x + 8$.

Вправи для повторення

192. Обчисліть:
1) $\mathrm{tg}^2 30° + \cos 60°$; 2) $\sin 30° + \cos^2 45°$.

193. Чи є чотирикутник з вершинами в точках $A(-3; 4)$, $B(5; 2)$, $C(7; -4)$, $D(-1; -2)$ паралелограмом?

194. Складіть рівняння кола радіуса 13, що проходить через точку $A(-7; 5)$, якщо його центр належить осі абсцис.

195. Чи дотикаються кола
$(x - 2)^2 + y^2 = 16$ і $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 1$?

Цікаві задачі для учнів неледачих

196. (*Київська міська математична олімпіада, 1990 р.*). Бісектриси AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці O. Доведіть, що коли кут C дорівнює $60°$, то $OA_1 = OB_1$.

Домашня самостійна робота № 1

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Точка $M(-1; -2)$ лежить у ... координатній чверті:

А. першій; **Б.** другій; **В.** третій; **Г.** четвертій.

2. $\sin 150° + \cos 60° = \ldots$

А. 2; **Б.** 1; **В.** 0; **Г.** –1.

3. Укажіть рівняння, що є рівнянням прямої.

А. $x^2 + y^2 = 9$; **Б.** $x - y^3 = 5$;

В. $x + xy + y = 0$; **Г.** $2x - 3y + 9 = 0$.

4. Точки $A(-2; 6)$ і $B(4; 11)$ – кінці відрізка, N – його середина. Укажіть координати точки N.

А. (1; 8,5); **Б.** (2; 17); **В.** (8,5; 1); **Г.** (–3; –2,5).

5. Знайдіть довжину відрізка KL, якщо $K(-1; 2)$, $L(3; -1)$.

А. 3; **Б.** 4; **В.** 5; **Г.** 6.

6. Знайдіть координати точки перетину прямої $4x - 5y - 20 = 0$ з віссю ординат.

А. (0; 4); **Б.** (0; –4); **В.** (5; 0); **Г.** (0; –5).

7. Знайдіть відстань від точки $A(-3; 7)$ до осі абсцис.

А. 3; **Б.** 4; **В.** 7; **Г.** $\sqrt{58}$.

8. $A(-2; 3)$, $B(4; 7)$, $C(-6; -3)$ – вершини паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати вершини D.

А. (–4; 0); **Б.** (–8; 0); **В.** (–12; –3); **Г.** (–12; –7).

9. Визначте радіус кола, якщо воно задано рівнянням $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 7 = 0$.

А. 7; **Б.** $2\sqrt{5}$; **В.** 20; **Г.** $\sqrt{5}$.

10. Знайдіть значення виразу $7 - \cos 110° - \cos 70°$.

А. 6; **Б.** 7; **В.** 8; **Г.** 9.

11. З’ясуйте взаємне розташування двох кіл, заданих рівняннями $(x + 2)^2 + y^2 = 16$ і $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

А. перетинаються; **Б.** мають внутрішній дотик;

В. мають зовнішній дотик; **Г.** не перетинаються.

12. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(3; -1)$ паралельно до прямої $4x - 2y + 7 = 0$.

А. $2x + y - 5 = 0$; **Б.** $2x - y + 5 = 0$;

В. $2x - y - 7 = 0$; **Г.** $2x - y + 7 = 0$.

Завдання для перевірки знань № 1 до § 1–5

1. У якій координатній чверті лежить точка
1) $M(-2;\ 7)$; 2) $K(4;\ -1)$?

2. Обчисліть: 1) $\sin 30° + \cos 120°$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg} 60°$.

3. Яке з рівнянь є рівнянням прямої, а яке – рівнянням кола:
1) $(x - 2)^2 + y^2 = 16$; 2) $4x - 2y - 17 = 0$?

4. Точки $A(-3;\ 4)$ і $B(1;\ 7)$ – кінці відрізка, M – його середина.
1) Знайдіть довжину відрізка AB.
2) Чи належить точка M осі ординат?

5. Знайдіть координати точок перетину прямої $3x - 4y - 24 = 0$ з осями координат.

6. Побудуйте на координатній площині коло, задане рівнянням $(x + 3)^2 + y^2 = 16$.

7. Складіть рівняння кола радіуса 10, яке проходить через точку $A(8;\ -1)$ і центр якого лежить на осі ординат.

8. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-2;\ 3)$, $B(4;\ -3)$, $C(2;\ 7)$, $D(-4;\ 13)$ є паралелограмом.

9. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1;\ 5)$ і паралельна прямій $6x - 3y + 9 = 0$.

Додаткові завдання

10. Знайдіть значення виразу:
1) $\sin^2 23° + \sin^2 67°$; 2) $4 - \cos 118° - \cos 62°$.

11. З’ясуйте взаємне розташування двох кіл:
$(x - 2)^2 + y^2 = 1$ і $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$.

Вправи для повторення розділу 1

До § 1

197. Дано точки $A(0;\ -2)$, $B(-3;\ 4)$, $C(4;\ 5)$, $D(-2;\ 9)$, $E(5;\ 0)$, $F(0;\ 5)$, $G(2;\ -3)$, $H(-2;\ -2)$, $K(-5;\ 0)$, $L(4;\ -1)$, $M(1;\ 3)$, $N(-5;\ 1)$. Випишіть з них ті, які належать:
1) осі абсцис; 2) осі ординат; 3) I чверті;
4) II чверті; 5) III чверті; 6) IV чверті.

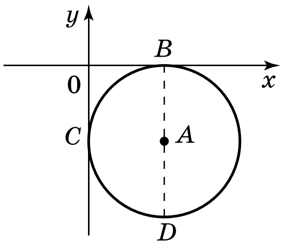
198. На прямій, перпендикулярній до осі y, узято дві точки. Одна з них має ординату $y = 5$. Чому дорівнює ордината другої точки?

199. Через точку $P(-3; -2)$ проведено прямі, паралельні осям координат. Знайдіть координати точок перетину цих прямих з осями координат.

200. Які особливості взаємного розташування двох точок, якщо у них:

1) абсциси однакові, а ординати – різні;

2) ординати однакові, а абсциси – різні?



Мал. 25

201. На малюнку 25 радіус кола дорівнює R. Знайдіть координати точок A, B, C і D.

202. Чи правильне твердження:

1) якщо точки M і N рівновіддалені від осі абсцис, то вони мають рівні між собою ординати;

2) якщо точки M і N мають рівні між собою ординати, то вони однаково віддалені від осі абсцис.

203. Дано точку $A(-3; y)$.

1) Чи може точка A належати осі ординат?

2) За якої умови вона може належати осі абсцис?

3) У яких координатних кутах може лежати точка A залежно від знака y?

204. Дано точки $A(-2; 5)$ і $B(4; 7)$. Чи перетинає відрізок AB:

1) вісь абсцис; 2) вісь ординат?

Відповідь обґрунтуйте.

205. Знайдіть геометричне місце точок координатної площини, для яких:

1) $(|x| - 2)(|y| + 1) = 0$; 2) $(|x| - 5)(|y| - 1) = 0$.

До § 2

206. Обчисліть:

1) $\sin 120° \cdot \operatorname{tg} 120°$; 2) $\cos 180° + \sin 90°$;

3) $\cos 120° + \sin 30°$; 4) $\cos 135° \cdot \sin 135°$.

207. Чи правильно, що:

1) $\operatorname{tg} 45° = -\operatorname{tg} 135°$; 2) $\sin 30° = -\sin 150°$;

3) $\cos 150° = -\cos 30°$; 4) $\sin 60° = \sin 120°$?

208. Порівняйте:

1) $\sin 15°$ і $\sin 43°$; 2) $\cos 18°$ і $\cos 37°$;

3) $\sin 91°$ і $\sin 120°$; 4) $\cos 100°$ і $\cos 170°$.

209. Обчисліть:

1) $\sin^2 17° + \cos^2 17°$; 2) $9 - \cos^2 27° - \sin^2 27°$.

210. Знайдіть знак виразу:

1) $\sin 18°$; 2) $\sin 125°$; 3) $\cos 137°$;
4) $\cos 81°$; 5) $\text{tg}\, 78°$; 6) $\text{tg}\, 92°$.

211. Знайдіть $\cos\alpha$, якщо:

1) $\sin\alpha = 0{,}8$ і $0° < \alpha < 90°$;
2) $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ і $90° < \alpha < 180°$.

212. Спростіть вираз:

1) $\text{tg}^2\alpha(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$; 2) $1 - \cos^2(90° - \alpha)$.

213. Визначте знак різниці:

1) $\cos 127° - \cos 118°$; 2) $\sin 152° - \sin 148°$.

214. Відомо, що $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ і $0° \leqslant \beta \leqslant 180°$. Чи можна стверджувати, що $\alpha = \beta$, якщо:

1) $\cos\alpha = \cos\beta$; 2) $\sin\alpha = \sin\beta$; 3) $\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\beta$?

215. $ABCD$ – паралелограм. Доведіть, що $\sin A = \sin B$.

216. Знайдіть суму квадратів синусів кутів прямокутного трикутника.

217. Доведіть тригонометричну тотожність:

$$\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 - \left(\text{tg}\,\alpha + \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}\right)^2 = \frac{2}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

218. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого синус кута при вершині дорівнює 0,4.

До § 3

219. Знайдіть координати середини відрізка KL, якщо:

1) $K(0;\ 4)$, $L(6;\ -2)$; 2) $K(-3;\ 5)$, $L(3;\ -5)$.

220. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо:

1) $A(-1;\ 12)$, $B(6;\ -12)$; 2) $A(2;\ -7)$, $B(-2;\ -11)$.

221. Точки $C_1(2;\ -3)$ і $B_1\ (3;\ -1)$ – відповідно середини сторін AC і AB трикутника ABC. Вершина A має координати $(3;\ -5)$. Знайдіть координати вершин B і C.

222. Визначте вид трикутника ABC за сторонами (рівнобедрений, рівносторонній чи різносторонній), якщо:

1) $A(1;\ 4)$, $B(2;\ 8)$, $C(-3;\ 5)$;
2) $A(-2;\ 0)$, $B(4;\ 0)$, $C(1;\ 3\sqrt{3})$;
3) $A(2;\ 3)$, $B(-3;\ 1)$, $C(4;\ 5)$.

223. $ABCD$ – паралелограм, $O(4; 7)$ – точка перетину його діагоналей. Знайдіть координати вершин C і D, якщо відомо координати вершин $A(-2; 5)$ і $B(3; -4)$.

224. Знайдіть довжини середніх ліній трикутника ABC, якщо: $A(2; -3)$, $B(6; -1)$, $C(5; -7)$.

225. Знайдіть довжини медіан трикутника ABC, якщо: $A(0; 2)$, $B(6; 0)$, $C(-4; -6)$.

226. На осях координат знайдіть точки, які знаходяться на відстані 5 від точки $A(-3; 4)$.

227. Знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(-5; 2)$ і $B(1; 4)$, якщо її абсциса й ордината між собою рівні.

4 **228.** Дано точки $A(-2; 5)$ і $B(6; 13)$. Знайдіть координати точки F, яка ділить відрізок AB у відношенні $7:1$, починаючи від точки A.

229. Точки $M(-2; 5)$, $N(4; -3)$, $P(0; 1)$ – середини сторін трикутника. Знайдіть координати його вершин.

230. Чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо:

1) $A(3; 4)$, $B(-1; 0)$, $C(-6; -5)$;

2) $A(0; 3)$, $B(4; 8)$, $C(1; 2)$?

Якщо відповідь позитивна, то визначте, яка з точок лежить між двома іншими.

231. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(1; 0)$, $B(4; -4)$, $C(8; -1)$ і $D(5; 3)$ є квадратом.

232. Знайдіть точку перетину серединного перпендикуляра до відрізка AB з віссю ординат, якщо $A(-4; 2)$, $B(0; -2)$.

233. Доведіть, що всі кути трикутника з вершинами в точках $A(0; 4)$, $B(2; 3)$ і $C(1; 5)$ – гострі.

234. Обчисліть кути трикутника з вершинами в точках $A(4; -1)$, $B(-1; 0)$, $C(2; 2)$.

До § 4

1 **235.** Які з рівнянь є рівняннями кола? Знайдіть для цих кіл координати центра та радіус:

1) $x^3 + y = 4$;
2) $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 9$;
3) $x^2 + y^2 = 1$;
4) $x^2 - y^2 = 1$;
5) $x^2 + (y - 9)^2 = 25$;
6) $(x + 7)^2 + y^2 = 16$.

2 **236.** Складіть рівняння кола із центром у точці Q, діаметр якого дорівнює d:

1) $Q(0; -17)$, $d = 0{,}6$;
2) $Q(-4; 5)$, $d = 4\sqrt{5}$.

237. Коло задано рівнянням $(x - 1)^2 + y^2 = 16$. Чи належить цьому колу точка:
1) $A(5; 0)$; 2) $B(-2; 3)$; 3) $C(1; 4)$;
4) $D(0; -3)$; 5) $M(-3; 0)$; 6) $N(1; -4)$?

238. Точка Q – центр кола, а QA – його радіус. Складіть рівняння кола, якщо $Q(0; 4)$, $A(5; 16)$.

239. Складіть рівняння кола із центром у точці $(-3; -4)$, яке проходить через початок координат.

240. Складіть рівняння кола із центром у початку координат, яке проходить через точку $(-3; -4)$.

3 **241.** Які з точок належать колу із центром $Q(2; -1)$, радіус якого дорівнює 5:
1) $A(3; -8)$; 2) $B(5; -5)$; 3) $C(0; 4)$; 4) $D(6; -4)$?

242. У яких точках коло $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$ перетинає:
1) вісь абсцис;
2) вісь ординат?

243. Складіть рівняння кола із центром $A(-4; 5)$, яке дотикається:
1) до осі абсцис;
2) до осі ординат.

244. Коло дотикається до координатних осей. Складіть рівняння цього кола, якщо до осі абсцис воно дотикається в точці $A(2; 0)$.

4 **245.** Знайдіть координати центра кола, радіус якого дорівнює 3 і яке дотикається до осей координат. Скільки розв'язків має задача?

246. Складіть рівняння кола, яке дотикається до координатних осей і проходить через точку $A(2; 1)$.

247. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(0; -3)$ і $B(9; 0)$, якщо центр кола лежить на осі абсцис.

248. На осі абсцис знайдіть точки, з яких відрізок AB видно під прямим кутом, якщо $A(6; 0)$, $B(14; 6)$.

249. Знайдіть геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до трьох точок $A(0; 0)$, $B(1; 1)$ і $C(2; 2)$ дорівнює 7.

250. З'ясуйте взаємне розташування двох кіл (дотик, перетин або немає спільних точок):
1) $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ і $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$;
2) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ і $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$.

До § 5

251. Чи належить прямій $2x + y = 0$ точка:

1) $A(2; 1)$; 2) $B(-1; 2)$;

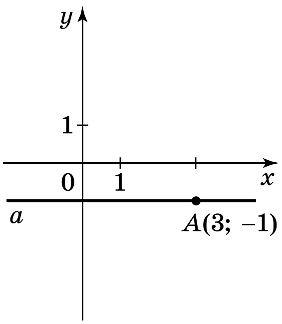
3) $C(0; 0)$; 4) $D(1; -3)$?

252. Назвіть кутовий коефіцієнт прямої:

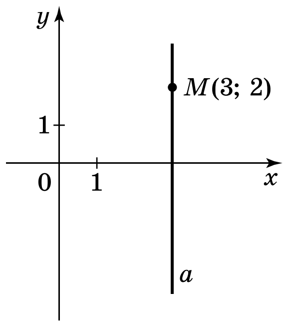
1) $y = 2x - 7$; 2) $y = -x + 3$;

3) $y = \frac{1}{2}x - 17$; 4) $y = -0{,}01x$.

253. Запишіть рівняння прямої a (мал. 26 і 27).



Мал. 26



Мал. 27

254. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої, якщо вона утворює з додатним напрямом осі абсцис кут: 1) 45°; 2) 120°.

255. Наведіть приклад рівняння прямої, яка:

1) паралельна прямій $y = 2x - 7$;

2) перетинає пряму $y = -3x + 5$;

3) паралельна прямій $2x - y - 9 = 0$;

4) перетинає пряму $3x + 2y - 15 = 0$.

256. Запишіть рівняння прямих, кожна з яких паралельна осі ординат і відтинає на осі абсцис відрізок, довжина якого дорівнює 2.

257. Складіть рівняння прямих, що містять сторони трикутника, вершинами якого є точки $A(2; -3)$, $B(2; -5)$, $C(3; 7)$.

258. Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку:

1) $A(0; 7)$; 2) $B(-2; 0)$;

3) $C(-3; 4)$; 4) $D(-1; -8)$.

259. Чому дорівнюють коефіцієнти a і b у рівнянні прямої $ax + by - 1 = 0$, яка проходить через точки $(3; 2)$ і $(2; 3)$?

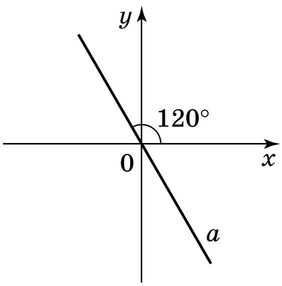
260. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $C(2; -1)$ і:

1) має кутовий коефіцієнт $-\frac{1}{3}$;

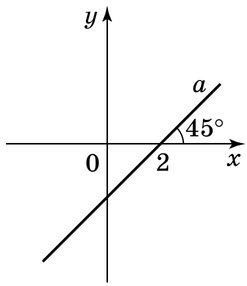
2) утворює з додатним напрямом осі абсцис кут $30°$.

261. Чи проходить пряма $x - 2y = 0$ через точку перетину прямих $2x + y - 5 = 0$ і $x - y - 1 = 0$?

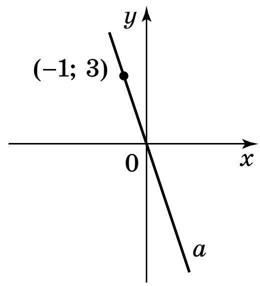
262. Складіть рівняння прямої a (мал. 28–30).



Мал. 28



Мал. 29



Мал. 30

263. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(-2; 3)$ і паралельна прямій $y = 3x + 7$.

264. Знайдіть периметр трикутника, обмеженого віссю абсцис і прямими $4x - 3y = 0$ і $8x - 15y + 72 = 0$.

265. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1; 2)$ паралельно прямій MN, де $M(1; 4)$, $N(3; 6)$.

266. Складіть рівняння прямих, що містять сторони ромба, якщо його діагоналі завдовжки 8 і 4 лежать на осях координат, причому більша діагональ лежить на осі абсцис.

267. Складіть рівняння дотичних до кола радіуса 5 із центром у точці $Q(-2; 1)$, які паралельні осі абсцис.

268. Три вершини прямокутника знаходяться в точках $(0; 4)$, $(8; 4)$ і $(8; -2)$. У яких точках коло $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$ перетинає сторони прямокутника?

269. Використовуючи результат задачі № 189 (с. 45), складіть рівняння прямої, що проходить через точку $B(1; -1)$ перпендикулярно до прямої:

1) $2x - y + 7 = 0$; 2) MN, де $M(0; 2)$, $N(-2; 4)$.

270. Складіть рівняння прямої, що містить висоту AH трикутника з вершинами в точках $A(0; 3)$, $B(1; -3)$, $C(4; -9)$.

Розділ 2 ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

У цьому розділі ви:

- **ознайомитеся** з поняттями векторної величини і вектора;
- **дізнаєтеся** про модуль, напрям і координати вектора, колінеарність векторів;
- **навчитеся** будувати вектор, який дорівнює даному вектору, сумі або різниці векторів, добутку вектора на число; знаходити модуль вектора за його координатами; координати вектора, який є сумою або різницею даних векторів; скалярний добуток векторів.

§ 6. *ВЕКТОР. МОДУЛЬ І НАПРЯМ ВЕКТОРА. КОЛІНЕАРНІ ВЕКТОРИ. РІВНІСТЬ ВЕКТОРІВ*

Є величини, які цілком характеризуються своїм числовим значенням. Прикладами таких величин є довжина, площа, маса, час, температура тощо. Такі величини називають *скалярними величинами*, або, коротше, *скалярами*.

Проте є величини, які, окрім числового значення, задаються ще й напрямом. Такими є, наприклад, фізичні величини: сила, переміщення матеріальної точки, швидкість, прискорення. Щоб охарактеризувати рух автомобіля, часто недостатньо знати, з якою швидкістю він рухається; треба знати ще й у якому напрямі.

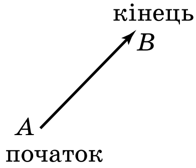
Величини, що характеризуються не тільки числовим значенням, а й напрямом, називають *векторними величинами*, або *векторами*.

Зображають вектори в математиці напрямленим відрізком.

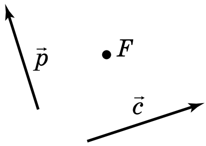
Відрізок, для якого визначено напрям, називають *напрямленим відрізком*, або *вектором*.

Вектор зручно зображувати відрізком зі стрілкою, яка показує напрям вектора (мал. 31). Вектор позначають двома великими латинськими літерами, першу з яких вважають *початком* вектора, а другу – його *кінцем*, та стрілкою над ними. Вектор, зображений на малюнку 31, записують так: $\overrightarrow{AB}$. Літера A – початок вектора $\overrightarrow{AB}$, літера B – його кінець.

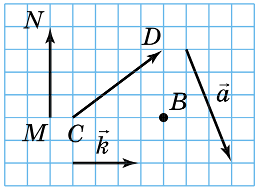
Інколи вектори позначають однією малою латинською літерою, наприклад вектори $\vec{p}$ і $\vec{c}$ (мал. 32).



Мал. 31



Мал. 32



Мал. 33

Вектор, у якого початок і кінець збігаються, називають *нульовим вектором*, або *нуль-вектором*. Такий вектор зображують точкою. Якщо, наприклад, точку, що зображує нульовий вектор, позначити літерою F, то цей нульовий вектор можна називати $\overrightarrow{FF}$ (мал. 32). Нульовий вектор позначають ще символом $\vec{0}$. Нульовий вектор напряму не має.

Модулем **(*довжиною* або *абсолютною величиною*) вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка *AB*.**

Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ позначають: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, вектора $\vec{p}$: $|\vec{p}|$. Довжина нульового вектора дорівнює нулю: $|\vec{0}| = 0$.

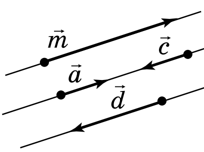
Задача 1. Знайти модулі векторів, зображених на малюнку 33, якщо сторона клітинки дорівнює одиниці вимірювання відрізків.

Р о з в' я з а н н я. $\left|\overrightarrow{MN}\right| = 4$; $|\vec{k}| = 3$; $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$; $\left|\overrightarrow{BB}\right| = |\vec{0}| = 0$.

Колінеарними **називають два ненульових вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.**

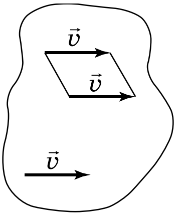
Наприклад, на малюнку 34 колінеарними є пари векторів $\vec{a}$ і $\vec{m}$, $\vec{a}$ і $\vec{c}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ тощо. Для колінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{m}$ використовують запис: $\vec{a} \parallel \vec{m}$.

Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.



Мал. 34

Колінеарні вектори бувають *співнапрямленими*, тобто мають однаковий напрям (вектори $\vec{a}$ і $\vec{m}$ на мал. 34), або *протилежно напрямленими* (вектори $\vec{a}$ і $\vec{d}$ на мал. 34). Записують так: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{m}$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{d}$.



Мал. 35

Розглянемо поняття рівності векторів.

Нехай тіло рухається з певною швидкістю в певному напрямі (мал. 35). Тоді всі точки цього тіла рухаються із цією швидкістю в цьому напрямі. Тому всі напрямлені відрізки (вектори) $\vec{v}$, якими зображено швидкості цих точок, є співнапрямленими і мають однакові модулі. Такі вектори називають *рівними*.

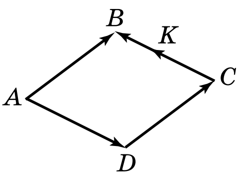
Два вектори називають *рівними,* якщо вони співнапрямлені і їх модулі між собою рівні.

Рівність векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MN}$ записують так: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$.

Задача 2. $ABCD$ – ромб (мал. 36). Чи рівні вектори:

1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{CB}$; 4) $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{CK}$?

Р о з в' я з а н н я.



Мал. 36

1) Так, оскільки $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$ і $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$.

2) Оскільки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ не є співнапрямленими, то вони не є рівними.

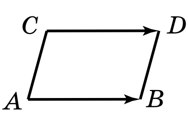
3) $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{CB}$ також не є рівними, оскільки не є співнапрямленими.

4) $\overrightarrow{CB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CK}$, але $|\overrightarrow{CB}| \neq |\overrightarrow{CK}|$, тому вектори $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{CK}$ теж не є рівними.

В і д п о в і д ь. 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) ні.

Задача 3. Точки A, B, C і D не лежать на одній прямій. Тоді, якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $ABDC$ – паралелограм. І навпаки, якщо $ABDC$ – паралелограм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Доведіть.

Д о в е д е н н я.



Мал. 37

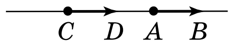
1) Нехай $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ та $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ не лежать на одній прямій (мал. 37). Тоді $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ і $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. За ознакою паралелограма, ураховуючи, що точки B і D лежать по один бік від прямої AC, отримаємо, що $ABDC$ – паралелограм.

2) Нехай $ABDC$ – паралелограм, тоді $AB \parallel CD$ і $AB = CD$ (мал. 37). Тому $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ і $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. Отже, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. ▲

Розглянемо *як від заданої точки відкласти вектор, що дорівнює даному*. Якщо дано вектор $\overrightarrow{AB}$ і точку C, то відкласти вектор $\overrightarrow{AB}$ від точки C означає побудувати вектор $\overrightarrow{CD}$ такий, що $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Задача 4. Від точки C відкласти вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{AB}$.

Р о з в' я з а н н я. *1-й випадок.* Точка C лежить на прямій AB (мал. 38). Відкладемо від точки C в тому ж напрямі, що й у вектора $\overrightarrow{AB}$, відрізок CD (точка D належить прямій AB), який дорівнює відрізку AB. Тоді $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.



Мал. 38

2-й випадок. Точка C не лежить на прямій AB (мал. 37). Будуємо паралелограм $ABDC$. Тоді $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ (див. доведення попередньої задачі).

Зауважимо, в обох випадках побудована точка D є єдиною.

А ще раніше...

Цікавість до векторів з'явилась у математиків XIX ст. у зв'язку з розвитком механіки й фізики, проте витоки числення з напрямленими відрізками виникли в далекому минулому.

Математики часів Піфагора та математики більш пізніх часів намагалися зводити вирішення питань арифметики й алгебри до розв'язування задач геометричним шляхом. Таким чином було покладено початок геометричній теорії відношень Евдокса (408–355 рр. до н. е.), а пізніше – геометричної алгебри.

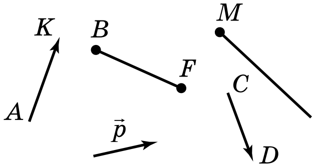
Евдокс Книдський

Сам термін *вектор* (від латинського *vector*, що можна перекласти як «той, що веде», «той, що переносить») запропонував Гамільтон. Він же описав і деякі операції векторного аналізу. Незабаром, завдяки роботам Геббса (кінець XIX ст.) та Хевісайда (початок XX ст.), векторний аналіз, як частина математики, набув сучасного вигляду.

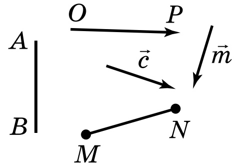
1. Які величини називають скалярними?
2. Які величини називають векторними?
3. Що називають вектором?
4. Яка точка є початком вектора $\overrightarrow{MN}$, а яка – кінцем цього вектора?
5. Як позначають вектори?
6. Що називають модулем вектора $\overrightarrow{AB}$?
7. Які вектори називають колінеарними?
8. Якими можуть бути колінеарні вектори?
9. Які вектори називають рівними?
10. Що означає відкласти вектор $\overrightarrow{CD}$ від точки X?

1 Початковий рівень

271. Запишіть вектори, зображені на малюнку 39.



Мал. 39



Мал. 40

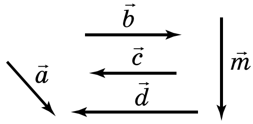
272. Запишіть вектори, зображені на малюнку 40.

273. Позначте в зошиті точки A, B і C, що не лежать на одній прямій. Накресліть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CA}$.

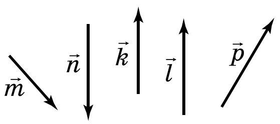
274. Позначте в зошиті точки P, L і K, що не лежать на одній прямій. Накресліть вектори $\overrightarrow{PL}$, $\overrightarrow{PK}$ і $\overrightarrow{KL}$.

275. За малюнком 41 запишіть усі пари:
1) колінеарних векторів;
2) співнапрямлених векторів;
3) протилежно напрямлених векторів.

276. За малюнком 42 запишіть усі пари:
1) колінеарних векторів;
2) співнапрямлених векторів;
3) протилежно напрямлених векторів.



Мал. 41



Мал. 42

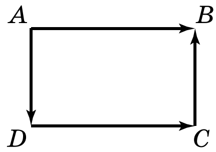
2 Середній рівень

277. Накресліть довільний вектор $\overrightarrow{MN}$. Накресліть вектор $\overrightarrow{AB}$, співнапрямлений з вектором $\overrightarrow{MN}$, та вектор $\overrightarrow{CD}$, протилежно напрямлений вектору $\overrightarrow{MN}$.
1) Виконайте відповідні записи за допомогою символів.
2) Чи є колінеарними вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$?
3) Співнапрямленими чи протилежно напрямленими є вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$?

278. Накресліть довільний вектор $\vec{a}$. Накресліть вектор $\vec{b}$, співнапрямлений з вектором $\vec{a}$, та вектор $\vec{c}$, протилежно напрямлений вектору $\vec{a}$.

1) Виконайте відповідні записи за допомогою символів.
2) Чи є колінеарними вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$?
3) Співнапрямлені чи протилежно напрямлені вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$?

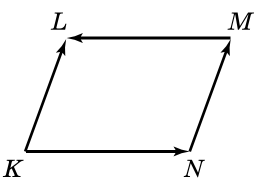
279. На малюнку 43 $ABCD$ – прямокутник. Укажіть рівні вектори та вектори, що мають рівні модулі. Виконайте відповідні записи.



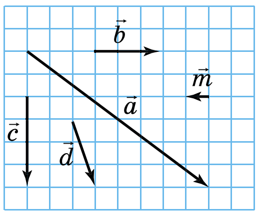
Мал. 43

280. На малюнку 44 $KLMN$ – паралелограм. Укажіть рівні вектори та вектори, що мають рівні модулі. Виконайте відповідні записи.

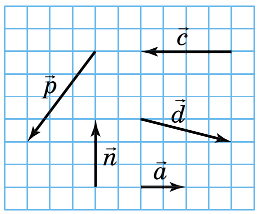
281. Знайдіть модулі векторів, зображених на малюнку 45, якщо сторона клітинки дорівнює одиниці вимірювання відрізків.



Мал. 44



Мал. 45



Мал. 46

282. Знайдіть модулі векторів, зображених на малюнку 46, якщо сторона клітинки дорівнює одиниці вимірювання відрізків.

283. Накресліть два вектори, що:
1) мають рівні модулі і неколінеарні;
2) мають рівні модулі і співнапрямлені;
3) мають рівні модулі і протилежно напрямлені.
У якому випадку накреслені вектори рівні?

284. Дано вектор $\overrightarrow{CD}$. Від точки A відкладіть вектор $\overrightarrow{AB}$ такий, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

285. Дано вектор $\overrightarrow{AB}$. Від точки M відкладіть вектор $\overrightarrow{MN}$ такий, що $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$.

3 Достатній рівень

286. $KLMN$ – ромб, O – точка перетину його діагоналей. Укажіть вектор, рівний вектору: 1) $\overrightarrow{LM}$; 2) $\overrightarrow{KL}$; 3) $\overrightarrow{OK}$; 4) $\overrightarrow{NO}$.

287. $ABCD$ – квадрат, O – точка перетину його діагоналей. Укажіть вектор, рівний вектору: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{DA}$; 3) $\overrightarrow{BO}$; 4) $\overrightarrow{OA}$.

288. (Усно.) Чи можуть бути рівними вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$, якщо точки A і B різні?

289. Дано точки $A(-2;\ 1)$, $B(0;\ 2)$, $M(1;\ -1)$. Відкладіть від точки M вектор $\overrightarrow{MN}$, що дорівнює вектору $\overrightarrow{AB}$. Якими є координати точки N?

290. Дано точки $C(1;\ -3)$, $D(-1;\ -2)$, $P(3;\ -1)$. Відкладіть від точки P вектор $\overrightarrow{PK}$, що дорівнює вектору $\overrightarrow{CD}$. Якими є координати точки K?

291. У прямокутнику $ABCD$ $AB = 3$, $BC = 4$, M – середина BC. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AM}$.

292. У квадраті $ABCD$ діагональ AC дорівнює $4\sqrt{2}$, N – середина AD. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{BN}$.

293. (Усно.) Чи правильне твердження:

1) якщо $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$;
2) якщо $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \parallel \vec{b}$;
3) якщо $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$;
4) якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$;
5) якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$?

4 Високий рівень

294. Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо:

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$;

2) $\overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ – неколінеарні.

295. У чотирикутнику $ABCD$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, точка E – середина BC. Пряма AE перетинає промінь DC у точці F. Серед векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CF}$ укажіть усі пари:

1) колінеарних векторів;
2) співнапрямлених векторів;
3) протилежно напрямлених векторів;
4) рівних векторів;
5) векторів, що мають рівні модулі.

296. У чотирикутнику $ABCD$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Через точку O перетину його діагоналей проведено пряму, що перетинає сторони BC і AD у точках E і F відповідно, причому $BE \neq EC$. Серед векторів $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{CF}$ укажіть усі пари:

1) колінеарних векторів;
2) співнапрямлених векторів;
3) протилежно напрямлених векторів;
4) рівних векторів;
5) векторів, що мають рівні модулі.

Вправи для повторення

297. Точка M – середина відрізка AB. Знайдіть координати точки: 1) A, якщо $M(-2; 5)$, $B(0; -7)$;
2) B, якщо $A(7; -1)$, $M(1,5; 2,5)$.

298. Знайдіть на осі абсцис точку A, відстань від якої до точки $B(7; 5)$ дорівнює 13.

299. Дано відрізки a і b ($a > b$). Використовуючи метричні співвідношення у прямокутному трикутнику, побудуйте відрізок:

1) $x = \sqrt{ab}$; 2) $y = \sqrt{a(a-b)}$.

Цікаві задачі для учнів неледачих

300. Якого найменшого значення може набувати вираз $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$? При яких значеннях x і y досягається це значення?

§ 7. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА

Якщо на площині ввести систему координат, то кожний вектор можна задати парою чисел – *координатами вектора*.

Координатами вектора $\overrightarrow{AB}(x; y)$ **з початком** $A(x_1; y_1)$ **і кінцем** $B(x_2; y_2)$ **називають числа** $x = x_2 - x_1$ **і** $y = y_2 - y_1$.

Записують вектор $\overrightarrow{AB}$, указуючи його координати, так: $\overrightarrow{AB}(x; y)$. Наприклад, $\overrightarrow{KL}(3; -4)$, $\vec{a}(0; -2)$.

Задача 1. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:
1) $A(-2; 5)$, $B(7; 3)$; 2) $A(-4; 8)$, $B(-4; 10)$.

Р о з в' я з а н н я. 1) За означенням координат вектора маємо: $x = 7 - (-2) = 9$; $y = 3 - 5 = -2$, отже, $\overrightarrow{AB}(9; -2)$.

2) Аналогічно, $x = -4 - (-4) = 0$; $y = 10 - 8 = 2$, отже, $\overrightarrow{AB}(0; 2)$.

В і д п о в і д ь. 1) $(9; -2)$; 2) $(0; 2)$.

Координатами вектора можуть бути будь-які дійсні числа. Обидві координати нуль-вектора дорівнюють нулю: $\vec{0}(0; 0)$.

Відстань AB між точками $A(x_1;\ y_x)$ і $B(x_2;\ y_2)$ знаходять за формулою $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Оскільки $x_2 - x_1 = x$ і $y_2 - y_1 = y$, то

модуль вектора $\overrightarrow{AB}(x;\ y)$ дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Отже, $\left|\overrightarrow{AB}(x;\ y)\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Задача 2. Знайти модуль вектора: 1) $\overrightarrow{MN}(3;\ -4)$; 2) $\overrightarrow{CD}(4;\ -1)$.

Р о з в' я з а н н я.

1) $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$; 2) $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$.

В і д п о в і д ь. 1) 5; 2) $\sqrt{17}$.

Задача 3. Модуль вектора $\vec{p}(-6;\ y)$ дорівнює 10. Знайти y.

Р о з в' я з а н н я. $\left|\vec{p}\right| = \sqrt{(-6)^2 + y^2} = \sqrt{36 + y^2}$.

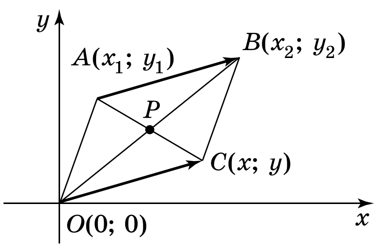
За умовою $\sqrt{36 + y^2} = 10$; тобто $36 + y^2 = 100$.

Розв'язавши отримане рівняння, матимемо $y_{1,2} = \pm 8$.

В і д п о в і д ь. 8 або -8.

Т е о р е м а (про рівність векторів). **У рівних векторів відповідні координати рівні,** і навпаки, **якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо вектор $\overrightarrow{AB}$, де $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$; тоді $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.



Мал. 47

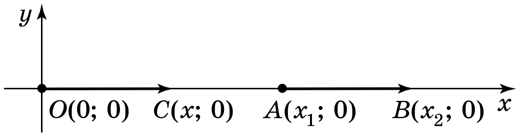
1) Нехай вектор $\overrightarrow{AB}$ не лежить на жодній з координатних осей (мал. 47). Відкладемо від точки $O(0;\ 0)$ вектор $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$, де $C(x;\ y)$. Тоді $\overrightarrow{OC}(x;\ y)$. У паралелограмі $ABCO$ точка $P(x_0;\ y_0)$ – точка перетину діагоналей. Тоді за формулою координат середини відрізка:

$$x_0 = \frac{x_1 + x}{2} = \frac{x_2 + 0}{2} \text{ і } y_0 = \frac{y_1 + y}{2} = \frac{y_2 + 0}{2}.$$

Звідки маємо: $x_1 + x = x_2$, $y_1 + y = y_2$, а тому $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, тобто $\overrightarrow{OC}(x_0 - x_1; y_0 - y_1)$. Отже, відповідні координати векторів $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{AB}$ рівні.

Якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ лежить на осі x (мал. 48), то очевидно, що $x - 0 = x_2 - x_1$, тобто $x = x_2 - x_1$, отже, відповідні координати векторів $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{AB}$ рівні.

Аналогічно доводимо у випадку, коли $\overrightarrow{AB}$ лежить на осі y.



Мал. 48

2) Нехай відповідні координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{OC}$ рівні (мал. 47), тобто $x = x_2 - x_1$; $y = y_2 - y_1$. Тому $x + x_1 = x_2$; $y + y_1 = y_2$.

У чотирикутнику $ABCO$ точка P_1 – середина AC; $x_{P_1} = \frac{x_1 + x}{2}$; $y_{P_1} = \frac{y_1 + y}{2}$; точка P_2 – середина BO; $x_{P_2} = \frac{x_2}{2}$; $y_{P_2} = \frac{y_2}{2}$.

Але $x + x_1 = x_2$ і $y + y_1 = y_2$, тому точки P_1 і P_2 – збігаються, тобто середини діагоналей чотирикутника $ABCO$ збігаються. При цьому точка P_1 ділить кожну з них навпіл. Отже $ABCO$ – паралелограм, а тому $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$.

Якщо вектори $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{AB}$ лежать на осі x і $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$ (мал. 48), то очевидно, що $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{AB}|$, а тому й $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$, оскільки вектори $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{AB}$ співнапрямлені.

Аналогічно доводимо у випадку, коли $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{AB}$ лежать на осі y. ▲

Задача 4. Дано точки $M(-3; 4)$, $N(5; -7)$, $C(4; -2)$, $D(x; y)$. Знайти x і y, якщо $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CD}$.

Р о з в' я з а н н я. $\overrightarrow{MN}(5 - (-3); -7 - 4)$, тобто $\overrightarrow{MN}(8; -11)$, $\overrightarrow{CD}(x - 4; y - (-2))$, тобто $\overrightarrow{CD}(x - 4; y + 2)$.

Але $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CD}$, тому $x - 4 = 8$ і $y + 2 = -11$, тобто $x = 12$, $y = -13$.

В і д п о в і д ь. $x = 12$; $y = -13$.

1. Що таке координати вектора?
2. Як знайти модуль вектора $\overrightarrow{AB}(x; y)$?
3. Доведіть, що рівні вектори мають рівні координати, а вектори з відповідно рівними координатами – рівні.

1 Початковий рівень

301. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:
1) $A(-3; 5)$, $B(4; -7)$; 2) $A(2; -7)$, $B(2; 3)$.

302. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{CD}$, якщо:
1) $C(4; -7)$, $D(8; -2)$; 2) $C(5; -1)$, $D(1; -1)$.

303. Знайдіть модуль вектора:
1) $\vec{a}(-3; 4)$; 2) $\vec{b}(12; 5)$.

304. Знайдіть модуль вектора:
1) $\vec{m}(6; -8)$; 2) $\vec{n}(8; 15)$.

305. Дано: $\vec{m}(x; -5)$, $\vec{n}(4; y)$, $\vec{m} = \vec{n}$. Знайти: x і y.

306. Дано: $\vec{a}(7; y)$, $\vec{b}(x; -2)$, $\vec{a} = \vec{b}$. Знайти: x і y.

2 Середній рівень

307. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{CD}$ та його модуль:
1) $C(5; -4)$, $D(4; -7)$; 2) $C(-2; 5)$, $D(0; 8)$.

308. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$ та його модуль:
1) $A(7; -2)$, $B(6; 0)$; 2) $A(2; 7)$, $B(4; 11)$.

309. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MN}$, якщо:
1) $A(5; 7)$, $B(6; -1)$, $M(8; -2)$, $N(9; -10)$;
2) $A(6; -1)$, $B(0; -2)$, $M(4; 5)$, $N(-2; 6)$?

310. Чи рівні вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{PK}$, якщо:
1) $C(4; -2)$, $D(8; -5)$, $P(7; -1)$, $K(3; -4)$;
2) $C(0; 4)$, $D(7; 0)$, $P(-3; 2)$, $K(4; -2)$?

311. Порівняйте модулі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
1) $\vec{a}(4; 1)$, $|\vec{b}| = 4$; 2) $\vec{a}(2; 1)$, $\vec{b}(-1; 2)$.

312. Порівняйте модулі векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$, якщо:
1) $|\vec{c}| = 3$, $\vec{d}(-3; 1)$; 2) $\vec{c}(-1; 4)$, $\vec{d}(4; 1)$.

313. Дано точки $C(2; -3)$, $D(4; -5)$, $M(3; 5)$, $N(x; y)$. Знайдіть x і y, якщо $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MN}$.

314. Дано точки $A(2; -5)$, $B(3; -6)$, $C(x; y)$, $D(0; 5)$. Знайдіть x і y, якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

3 Достатній рівень

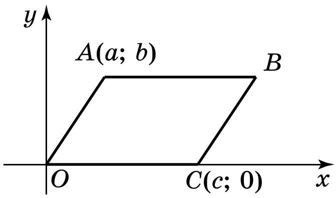
315. Вектор $\vec{a}(4; -7)$ відкладено від точки $P(-2; 5)$. Знайдіть координати кінця вектора.

316. Вектор $\vec{b}(-3; 2)$ відкладено від точки $M(4; -1)$. Знайдіть координати кінця вектора.

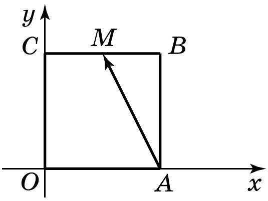
317. Точка $A(-2; 7)$ – кінець вектора $\vec{c}(7; -5)$. Знайдіть координати початку вектора.

318. Точка $B(1; -8)$ – кінець вектора $\vec{d}(-3; 0)$. Знайдіть координати початку вектора.

319. Знайдіть координати вершини B паралелограма $ABCO$ (мал. 49).



Мал. 49



Мал. 50

320. Сторона квадрата дорівнює 6 (мал. 50). Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AM}$, де M – середина BC.

321. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, якщо $A(2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(2; -2)$, $D(4; -5)$.

322. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $KLMN$ є паралелограмом, якщо $K(0; -2)$, $L(3; 0)$, $M(7; 2)$, $N(4; 0)$.

323. Модуль вектора $\vec{a}(x; -3)$ дорівнює 5. Знайдіть x.

324. Модуль вектора $\vec{b}(-8; y)$ дорівнює 10. Знайдіть y.

4 Високий рівень

325. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(4; 2)$, $B(5; 5)$, $C(4; 8)$ і $D(3; 5)$ – ромб.

326. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(-1; 4)$, $B(-1; 0)$, $C(4; 0)$ і $D(4; 4)$ – прямокутник.

327. Модуль вектора $\vec{a}(x; y)$ дорівнює $\sqrt{10}$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, якщо координата x цього вектора на 2 більша за координату y.

328. Модуль вектора $\vec{b}(x;\ y)$ дорівнює $\sqrt{5}$. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, якщо їх сума дорівнює 1.

329. Знайдіть рівняння координат усіх таких точок B, що вектор $\overrightarrow{AB}$ має той самий модуль, що і вектор $\vec{a}(2;\ -3)$, якщо $A(4;\ 5)$.

Вправи для повторення

330. Чи можуть сторони трикутника бути пропорційні числам:

1) 5, 7, 2; 2) 5, 6, 7; 3) 11, 8, 2?

331. Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 14 см і 17 см. Знайдіть периметр подібного йому трикутника, сума найбільшої і найменшої сторін якого дорівнює 70 см.

332. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить висоту, проведену до основи, у відношенні $5:3$. Знайдіть периметр трикутника, якщо його бічна сторона на 3 см менша від основи.

Цікаві задачі для учнів неледачих

333. Дано трапецію $ABCD$ з основами AD і BC. Бісектриса кута ABC перетинає середню лінію трапеції в точці N, а основу AD – у точці K. Чи можна знайти градусну міру кута ANB? У разі позитивної відповіді знайдіть градусну міру цього кута.

§ 8. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ВЕКТОРІВ

Як і числа, вектори можна додавати і віднімати. Результатом додавання або віднімання векторів є вектор.

***Сумою векторів** $\vec{a}(x_1;\ y_1)$ **і** $\vec{b}(x_2;\ y_2)$ **називають вектор** $\vec{c}(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$.*

Наприклад, сумою векторів $\vec{a}(-5;\ 2)$ і $\vec{b}(4;\ -11)$ є вектор $\vec{c}(-5 + 4;\ 2 + (-11))$, тобто $\vec{c}(-1;\ -9)$.

Для суми векторів справджуються рівності:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (*переставна властивість додавання*);
$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (*сполучна властивість додавання*).

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати, що стоять у лівій і правій частинах рівностей. Ці координати рівні між собою, а вектори з відповідно рівними координатами рівні.

Задача 1. При якому значенні x модуль вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ буде найменшим, якщо $\vec{a}(-2; 3)$, $\vec{b}(x; 4)$, $\vec{c}(3; 8)$?

Р о з в’ я з а н н я. Нехай $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Тоді $\vec{d}(-2 + x + 3; 3 + 4 + 8)$, тобто $\vec{d}(x + 1; 15)$. Знайдемо його модуль: $\left|\vec{d}\right| = \sqrt{(x+1)^2 + 15^2}$. Модуль вектора $\vec{d}$ буде найменшим, коли вираз $(x + 1)^2$ набуватиме найменшого значення. Це значення дорівнює 0 і досягається, якщо $x = -1$.

В і д п о в і д ь. $x = -1$.

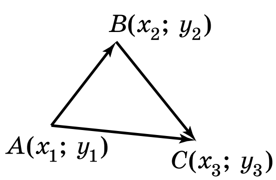
Т е о р е м а (правило трикутника додавання векторів). **Які б не були точки A, B і C, справджується рівність:**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

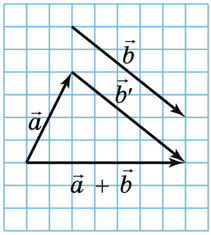
Д о в е д е н н я. Нехай $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ – дані точки (мал. 51). Тоді $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $\overrightarrow{BC}(x_3 - x_2; y_3 - y_2)$, $\overrightarrow{AC}(x_3 - x_1; y_3 - y_1)$. Позначимо $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, маємо:

$$\vec{m}(x_2 - x_1 + x_3 - x_2; y_2 - y_1 + y_3 - y_2) = \vec{m}(x_3 - x_1; y_3 - y_1).$$

Отже, $\vec{m} = \overrightarrow{AC}$, тому $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. ▲



Мал. 51

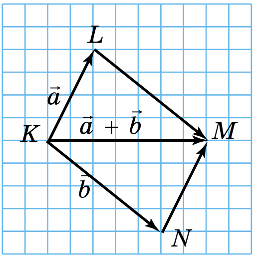


Мал. 52

Отже, приходимо до правила побудови суми двох довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – *правила трикутника* (мал. 52):

1) від кінця вектора $\vec{a}$ відкладаємо вектор $\vec{b}'$, що дорівнює вектору $\vec{b}$;

2) будуємо вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}'$; цей вектор і є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Мал. 53

Суму двох векторів можна знаходити і за *правилом паралелограма* (мал. 53):

1) відкладаємо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від спільного початку (точки K);

2) будуємо на даних векторах паралелограм;

3) будуємо вектор, що є діагоналлю паралелограма, яка виходить з точки K; цей вектор і буде сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

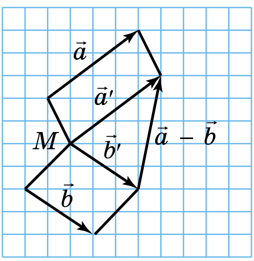
Справді $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{KM}$, але $\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{KN}$, тому $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{KM}$; $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{KM}$.

Зауважимо, що за правилом трикутника можна знайти суму будь-яких двох векторів, а за правилом паралелограма – лише неколінеарних.

Різницею векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ називають вектор $\vec{d}(x_3; y_3)$ такий, що $\vec{d}+\vec{b}=\vec{a}$.

Маємо: $x_3+x_2=x_1$, $y_3+y_2=y_1$.
Тоді $x_3=x_1-x_2$, $y_3=y_1-y_2$.
Отже,

різницею векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ буде вектор $\vec{d}(x_1-x_2; y_1-y_2)$.

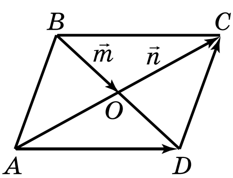


Мал. 54

Оскільки $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (мал. 51), то $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$. Звідси отримаємо правило *побудови різниці двох векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 54):

1) відкладаємо від однієї точки вектор $\vec{a}'$, що дорівнює вектору $\vec{a}$, і вектор $\vec{b}'$, що дорівнює вектору $\vec{b}$;

2) будуємо вектор, початок якого збігається з кінцем вектора $\vec{b}'$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{a}'$, що і є різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Мал. 55

Задача 2. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (мал. 55), $\overrightarrow{BO}=\vec{m}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{n}$. Виразити вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{DC}$ через вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$.

Р о з в' я з а н н я.

1) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{m}+\vec{n}$.

Але $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, тому $\overrightarrow{AD} = \vec{m} + \vec{n}$.

2) $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC}$, звідси $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Але $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$, тому $\overrightarrow{DC} = \vec{n} - \vec{m}$.

Відповідь. $\overrightarrow{AD} = \vec{m} + \vec{n}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{n} - \vec{m}$.

А ще раніше...

У «Началах» Евкліда дії додавання і віднімання зводилися до додавання і віднімання відрізків, а дія множення – до побудови прямокутника на відрізках, довжини яких дорівнюють довжинам множників.

У 1587 р. голландською мовою було опубліковано трактат фламандського вченого С. Стевена «Початки статики». У ньому автор розглянув додавання двох взаємно перпендикулярних сил та прийшов до висновку, що для розв'язування цієї задачі необхідно скористатися «паралелограмом сил». Також С. Стевен увів стрілки для позначення сил.

Значно пізніше французький математик Луї Пуансо (1777–1859) у праці «Елементи статики», що вийшла в 1803 р., розробив теорію векторів, що відповідають силам, які діють у різних напрямах.

1. Який вектор називають сумою векторів $\vec{a}(x_1;\ y_1)$ і $\vec{b}(x_2;\ y_2)$?
2. Сформулюйте і доведіть теорему про правило трикутника додавання векторів.
3. Сформулюйте правило трикутника для додавання векторів.
4. Сформулюйте правило паралелограма для додавання векторів.
5. Що називають різницею двох векторів?
6. Як знайти різницю векторів $\vec{a}(x_1;\ y_1)$ і $\vec{b}(x_2;\ y_2)$?
7. Сформулюйте правило побудови різниці двох векторів.

1 Початковий рівень

334. Знайдіть суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(2;\ -5)$, $\vec{b}(4;\ 7)$; 2) $\vec{a}(-3;\ 8)$, $\vec{b}(3;\ -11)$.

335. Знайдіть суму $\vec{c} + \vec{d}$, якщо:

1) $\vec{c}(4;\ -7)$, $\vec{d}(-2;\ 5)$; 2) $\vec{c}(4;\ -7)$, $\vec{d}(-6;\ 7)$.

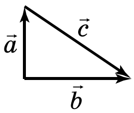
336. Знайдіть різницю $\vec{c} - \vec{d}$, якщо:

1) $\vec{c}(8;\ -5)$, $\vec{d}(4;\ 0)$; 2) $\vec{c}(2;\ -3)$, $\vec{d}(5;\ -2)$.

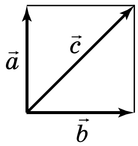
337. Знайдіть різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(4;\ -2)$, $\vec{b}(5;\ -7)$; 2) $\vec{a}(-2;\ 5)$, $\vec{b}(4;\ 0)$.

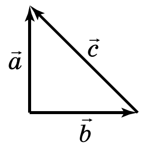
338. (Усно.) На яких з малюнків 56–60 вектор $\vec{c}$ є сумою $\vec{a} + \vec{b}$, а на яких – різницею $\vec{a} - \vec{b}$?



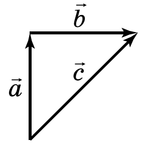
Мал. 56



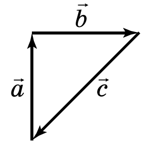
Мал. 57



Мал. 58



Мал. 59



Мал. 60

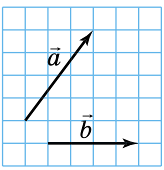
2 Середній рівень

339. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 61). Побудуйте вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

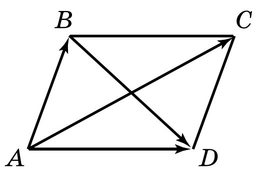
340. Накресліть два неколінеарних вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$. Побудуйте вектор $\vec{m} = \vec{c} + \vec{d}$.

341. Накресліть два неколінеарних вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$. Побудуйте вектор $\vec{p} = \vec{m} - \vec{n}$.

342. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 61). Побудуйте вектор $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.



Мал. 61



Мал. 62

343. Дано паралелограм $ABCD$ (мал. 62). Виразіть вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$.

344. Дано: $\vec{a}(2;\ 1)$; $\vec{b}(x;\ y)$; $\vec{c}(-2;\ 5)$; $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Знайти: x і y.

345. Дано: $\vec{a}(3;\ -1)$; $\vec{b}(x;\ y)$; $\vec{c}(0;\ 2)$; $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$. Знайти: x і y.

3 Достатній рівень

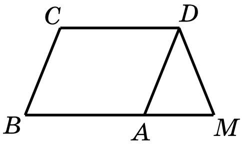
346. $ABCD$ – паралелограм. Знайдіть суму:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$;
2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$;
4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}$.

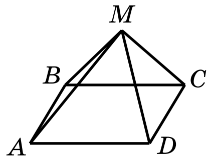
347. $ABCD$ – паралелограм. Знайдіть суму:

1) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$;
2) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$.

348. $ABCD$ – паралелограм (мал. 63). Доведіть, що
$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{CB}$.



Мал. 63



Мал. 64

349. $ABCD$ – паралелограм (мал. 64). Доведіть, що $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AM}$.

350. Доведіть, що для будь-яких точок K, L, M, T справджується рівність $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LT} + \overrightarrow{TK}$.

351. Дано точки $A(0; -8)$ і $B(10; 0)$. Знайдіть координати точки K такої, що $\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

352. Дано точки $C(6; 0)$ і $D(0; -18)$. Знайдіть координати точки A такої, що $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

4 Високий рівень

353. Дано вектори $\vec{a}(-2; 5)$, $\vec{b}(3; -4)$, $\vec{c}(x; 8)$. При якому значенні x модуль вектора $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ буде найменшим?

354. Дано вектори $\vec{p}(4; -3)$, $\vec{m}(9; y)$, $\vec{n}(-2; 5)$. При якому значенні y модуль вектора $\vec{p} + \vec{m} - \vec{n}$ буде найменшим?

Вправи для повторення

2 **355.** $ABCD$ – трапеція з основами AB і CD. Укажіть усі пари:
1) співнапрямлених векторів;
2) протилежно напрямлених векторів.

3 **356.** Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 8 см, а висота, проведена до меншої сторони, дорівнює 4 см. Знайдіть висоту, проведену до більшої сторони.

4 **357.** Знайдіть значення виразу $\dfrac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{3\sin\alpha + \cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = 5$.

Цікаві задачі для учнів неледачих

358. (*Національна олімпіада Швеції, 1982 р.*) Доведіть, що коли для деякої точки O, яка лежить у внутрішній області чотирикутника $ABCD$, площі трикутників ABO, BCO, CDO і DAO рівні між собою, то ця точка належить хоча б одній з діагоналей AC або BD.

§ 9. МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Знаючи, що таке сума векторів, можна розглядати суми вигляду $\vec{a} + \vec{a}$, $\vec{m} + \vec{m} + \vec{m}$ тощо. Такі суми, як і в алгебрі, будемо записувати у вигляді добутків $2\vec{a}$, $3\vec{m}$ тощо.

Результатом множення вектора на число є вектор.

Добутком вектора $\vec{a}(x;\ y)$ **на число** λ **називають вектор** $\lambda\vec{a}(\lambda x;\ \lambda y)$.

Наприклад, добутком вектора $\vec{a}(-5;\ 4)$ на число -1 є вектор $-\vec{a}(5;\ -4)$, на число 2 – вектор $2\vec{a}(-10;\ 8)$, на число 3 – вектор $3\vec{a}(-15;\ 12)$.

Для добутку вектора на число справджуються *властивості*:

для будь-яких вектора $\vec{a}$ і чисел α і β

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a};$$

для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і числа α

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати лівої і правої частин рівностей. Ці координати між собою рівні, а отже, рівні і вектори.

За означенням суми, різниці векторів та добутку вектора на число можна визначити координати будь-якого вектора, записаного у вигляді алгебраїчної суми векторів, координати яких відомо.

Задача 1. Дано вектори $\vec{a}(2;\ -5)$ і $\vec{b}(-4;\ 1)$. Знайти координати вектора: 1) $\vec{m} = 2\vec{a} + 7\vec{b}$; 2) $\vec{n} = 9\vec{a} - \vec{b}$.

Р о з в' я з а н н я. Розв'язання зручно записати так:

1) $$\begin{array}{r} 2\vec{a}(4;\ -10) \\ +\ 7\vec{b}(-28;\ 7) \\ \hline \vec{m}(-24;\ -3) \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} 9\vec{a}(18;\ -45) \\ -\ \vec{b}(-4;\ 1) \\ \hline \vec{n}(22;\ -46) \end{array}$$

В і д п о в і д ь. 1) $\vec{m}(-24;\ -3)$; 2) $\vec{n}(22;\ -46)$.

Т е о р е м а (про добуток вектора на число). **Модуль вектора $\lambda\vec{a}$ дорівнює $|\lambda||\vec{a}|$. Вектор $\lambda\vec{a}$ співнапрямлений з вектором $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежно напрямлений вектору $\vec{a}$, якщо $\lambda < 0$.**

Д о в е д е н н я. Побудуємо в координатній площині вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, що відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\lambda\vec{a}$, де точка O – початок координат (мал. 65).

Нехай вектор $\vec{a}$ має координати $\vec{a}(x_0;\ y_0)$, тоді маємо: $\lambda\vec{a}(\lambda x_0;\ \lambda y_0)$, $A(x_0;\ y_0)$, $B(\lambda x_0;\ \lambda y_0)$.

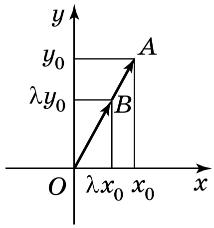
Складемо рівняння прямої OA:

$$\frac{x-0}{x_0-0}=\frac{y-0}{y_0-0},$$

спростивши яке, отримаємо: $y_0x - x_0y = 0$.

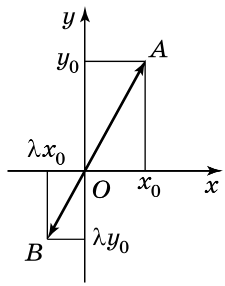
Координати точки B задовольнятимуть це рівняння. Справді:

$$y_0 \cdot \lambda x_0 - x_0 \cdot \lambda y_0 = 0.$$



Мал. 65

Це означає, що точка B належить прямій OA. У випадку, коли вона належить променю OA, її координати λx_0 і λy_0 мають відповідно ті самі знаки, що й координати x_0 і y_0 точки A (мал. 65). У випадку ж, коли точка B лежить на доповняльному до OA промені, її координати λx_0 і λy_0 матимуть знаки, протилежні до знаків координат x_0 і y_0 точки A (мал. 66).



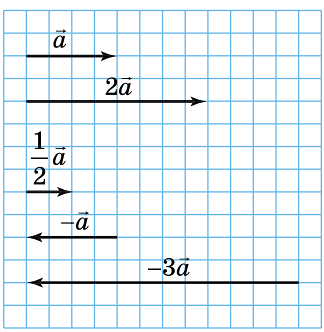
Мал. 66

Якщо $\lambda > 0$, то точка B лежатиме на промені OA, а якщо $\lambda < 0$, то точка B лежатиме на доповняльному до OA промені. Тому якщо $\lambda > 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\lambda\vec{a}$ – співнапрямлені, а якщо $\lambda < 0$, то вони – протилежно напрямлені.

Знайдемо модуль вектора $\lambda\vec{a}$:

$$|\lambda\vec{a}| = \sqrt{(\lambda x_0)^2 + (\lambda y_0)^2} = \sqrt{\lambda(x_0^2 + y_0^2)} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = |\lambda||\vec{a}|.$$ ▲

На малюнку 67 для даного вектора $\vec{a}$ побудовано вектори $2\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-\vec{a}$, $-3\vec{a}$.



Мал. 67

Із цього прикладу та доведеної теореми випливає важливий висновок:

вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, можна подати у вигляді $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, де $\lambda \neq 0$, і навпаки, якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, $\lambda \neq 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – *колінеарні.*

Нехай дано вектори $\vec{a}(x_1;\ y_1)$ і $\vec{b}(x_2;\ y_2)$. Якщо вони колінеарні, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, $x_2 = \lambda x_1$ і $y_2 = \lambda y_1$. Тоді (якщо $x_1 \neq 0$ і $y_1 \neq 0$) маємо, що $\lambda = \frac{x_2}{x_1}$ і $\lambda = \frac{y_2}{y_1}$, тому $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$, тобто *координати колінеарних векторів пропорційні*.

Отже, приходимо до *умови колінеарності векторів*:

Нехай $\vec{a}(x_1;\ y_1)$ і $\vec{b}(x_2;\ y_2)$ – довільні вектори. Тоді якщо:

1) $x_1 = x_2 = 0$, то вектори $\vec{a}(0;\ y_1)$ і $\vec{b}(0;\ y_2)$ – колінеарні; причому, якщо $\frac{y_2}{y_1} > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; а якщо $\frac{y_2}{y_1} < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$;

2) $y_1 = y_2 = 0$, то вектори $\vec{a}(x_1;\ 0)$ і $\vec{b}(x_2;\ 0)$ – колінеарні; причому, якщо $\frac{x_2}{x_1} > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; а якщо $\frac{x_2}{x_1} < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$;

3) $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, якщо $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \lambda$, причому, якщо $\lambda > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; а якщо $\lambda < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Задача 2. При якому значенні x вектори $\vec{a}(2;\ -7)$ і $\vec{b}(x;\ 21)$ колінеарні? Співнапрямлені чи протилежно напрямлені ці вектори?

Розв'язання. Нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$, тоді $\frac{x}{2} = \frac{21}{-7}$, звідки $x = -6$. Оскільки $\frac{-6}{2} = \frac{21}{-7} = -3 < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Відповідь. $x = -6$; протилежно напрямлені.

1. Який вектор називають добутком вектора $\vec{a}(x;\ y)$ на число λ?
2. Сформулюйте і доведіть теорему про добуток вектора на число.
3. Сформулюйте умови колінеарності векторів.

1 Початковий рівень

359. Дано: $\vec{a}(2; -4)$. Знайдіть:

1) $2\vec{a}$; 2) $-3\vec{a}$; 3) $4\vec{a}$; 4) $-\vec{a}$; 5) $0,5\vec{a}$; 6) $-10\vec{a}$.

360. Дано: $\vec{b}(-6; 2)$. Знайдіть:

1) $3\vec{b}$; 2) $-2\vec{b}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $-\vec{b}$; 5) $10\vec{b}$; 6) $-5\vec{b}$.

361. Співнапрямлені чи протилежно напрямлені вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо: 1) $\vec{a} = 2\vec{b}$; 2) $\vec{b} = -3\vec{a}$?

362. Співнапрямлені чи протилежно напрямлені вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо: 1) $\vec{n} = -2\vec{m}$; 2) $\vec{m} = 3\vec{n}$?

2 Середній рівень

363. Накресліть вектор $\vec{b}$. Побудуйте вектор:

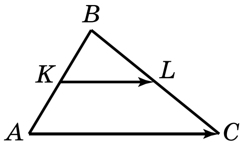
1) $2\vec{b}$; 2) $-\vec{b}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $-3\vec{b}$; 5) $2,5\vec{b}$; 6) $-1,5\vec{b}$.

364. Накресліть вектор $\vec{a}$. Побудуйте вектор:

1) $3\vec{a}$; 2) $-\vec{a}$; 3) $-\frac{1}{2}\vec{a}$; 4) $2\vec{a}$; 5) $-3,5\vec{a}$; 6) $1,5\vec{a}$.

365. На малюнку 68 KL – середня лінія трикутника ABC. Виразіть:

1) $\overrightarrow{AC}$ через $\overrightarrow{KL}$; 2) $\overrightarrow{KL}$ через $\overrightarrow{AC}$.



Мал. 68

366. Дано вектори $\vec{m}(-1; 2)$ і $\vec{n}(3; 1)$. Знайдіть координати вектора:

1) $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$; 2) $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$;
3) $\vec{c} = 2\vec{m} + 5\vec{n}$; 4) $\vec{d} = 5\vec{m} - 3\vec{n}$.

367. Дано вектори $\vec{a}(1; -5)$ і $\vec{b}(4; -1)$. Знайдіть координати вектора:

1) $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{n} = \vec{a} - 3\vec{b}$;
3) $\vec{k} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$; 4) $\vec{l} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$.

368. Чи колінеарні вектори:

1) $\vec{a}(2; -3)$ і $\vec{b}(6; -9)$; 2) $\vec{a}(-1; 5)$ і $\vec{b}(2; 10)$?

369. Чи колінеарні вектори:

1) $\vec{m}(-3; 1)$ і $\vec{n}(9; 3)$; 2) $\vec{m}(4; -1)$ і $\vec{b}(8; -2)$?

370. Дано вектор $\vec{a}(-6; 8)$. Знайдіть модуль вектора:

1) $-\vec{a}$; 2) $3\vec{a}$.

371. Дано вектор $\vec{b}(3; -4)$. Знайдіть модуль вектора:

1) $-\vec{b}$; 2) $4\vec{b}$.

372. (Усно.) Чи завжди колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$?

373. Серед векторів $\vec{a}(1;\ -2)$, $\vec{b}(-2;\ 4)$, $\vec{c}(4;\ -8)$, $\vec{d}(-0{,}2;\ 0{,}4)$ знайдіть пари співнапрямлених і пари протилежно напрямлених векторів.

374. Серед векторів $\vec{m}(-1;\ 3)$, $\vec{n}(3;\ -9)$, $\vec{k}(-0{,}1;\ 0{,}3)$, $\vec{l}(30;\ -90)$ знайдіть пари співнапрямлених і пари протилежно напрямлених векторів.

3 Достатній рівень

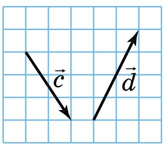
375. Дано: $\vec{a}(-2;\ 3)$, $\vec{b}(-5;\ 1)$. Знайдіть модуль вектора:

1) $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$; 2) $\vec{d} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.

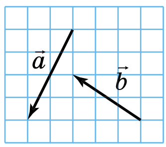
376. Дано: $\vec{c}(-1;\ 4)$, $\vec{d}(-6;\ 7)$. Знайдіть модуль вектора:

1) $\vec{a} = 2\vec{c} + \vec{d}$; 2) $\vec{b} = 3\vec{c} - 2\vec{d}$.

377. Дано вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ (мал. 69). Побудуйте вектор $\vec{a} = 2\vec{c} + \dfrac{1}{2}\vec{d}$.



Мал. 69



Мал. 70

378. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 70). Побудуйте вектор $\vec{c} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$.

379. При якому значенні m вектори колінеарні:

1) $\vec{a}(-4;\ 5)$ і $\vec{b}(-12;\ m)$; 2) $\vec{c}(m;\ -1)$ і $\vec{d}(-4;\ 2)$?

Співнапрямлені чи протилежно напрямлені ці вектори?

380. При якому значенні n вектори колінеарні:

1) $\vec{a}(1;\ n)$ і $\vec{b}(-4;\ 8)$; 2) $\vec{c}(12;\ 9)$ і $\vec{d}(n;\ 3)$?

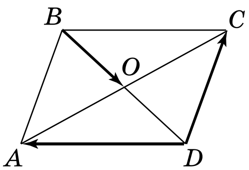
Співнапрямлені чи протилежно напрямлені ці вектори?

381. При якому значенні p вектори $\vec{a}(1;\ p)$ і $\vec{b}(p;\ 16)$ протилежно напрямлені?

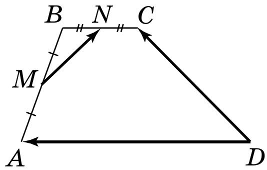
382. При якому значенні t вектори $\vec{c}(t;\ 4)$ і $\vec{d}(1;\ t)$ співнапрямлені?

383. Дано паралелограм $ABCD$ (мал. 71). Виразіть вектор $\overrightarrow{BO}$ через вектори $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{DC}$.

384. M і N – середини сторін AB і BC трапеції $ABCD$ (мал. 72). Доведіть, що $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA})$.



Мал. 71



Мал. 72

4 Високий рівень

385. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, колінеарного вектору $\vec{b}(-8;\ 6)$, якщо $|\vec{a}| = 5$.

386. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, колінеарного вектору $\vec{a}(5;\ -12)$, якщо $|\vec{b}| = 26$.

387. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-1;\ 4)$, $B(5;\ 7)$, $C(5;\ 2)$, $D(-3;\ -2)$ є трапецією.

388. Доведіть, що точки $A(5;\ -1)$, $B(6;\ 2)$ і $C(8;\ 8)$ лежать на одній прямій.

389. На колі $x^2 + y^2 = 1$ знайдіть таку точку A, щоб вектор $\overrightarrow{OA}$, де O – початок координат, був співнапрямлений з вектором $\vec{c}(3;\ -4)$.

Вправи для повторення

2 **390.** AB – діаметр кола, радіус якого дорівнює 5 см, точка C належить колу. Знайдіть довжину медіани CM трикутника ABC.

3 **391.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 16 см, а гострий кут – 60°. Знайдіть діагональ трапеції та її площу.

4 **392.** Хорда AB ділить коло у відношенні $2:3$. У точці A до кола проведено дотичну. Знайдіть кути між дотичною і хордою.

Цікаві задачі для учнів неледачих

393. До катетів прямокутного трикутника провели медіани завдовжки 3 см і 4 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

§ 10. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Розглянемо ще одну операцію з векторами – скалярний добуток векторів.

Скалярним добутком **векторів $\vec{a}(x_1;\ y_1)$ і $\vec{b}(x_2;\ y_2)$ називають число $x_1x_2 + y_1y_2$.**

Позначають скалярний добуток векторів так само, як добуток чисел або змінних: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$.

Задача 1. Знайти скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(-2;\ 7)$ і $\vec{b}(4;\ 1)$; 2) $\vec{c}(0;\ 8)$ і $\vec{d}(-2;\ 5)$.

Р о з в' я з а н н я. 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 4 + 7 \cdot 1 = -1$;

2) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \cdot (-2) + 8 \cdot 5 = 40$.

В і д п о в і д ь. 1) -1; 2) 40.

Знайдемо скалярний добуток рівних між собою векторів. Нехай дано вектор $\vec{a}(x_1;\ y_1)$. Тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = x_1x_1 + y_1y_1 = x_1^2 + y_1^2 = \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 = \left|\vec{a}\right|^2.$$

Скалярний добуток вектора самого на себе $\vec{a} \cdot \vec{a}$ позначають $\vec{a}^2$ і називають *скалярним квадратом вектора*.

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

З останньої рівності випливає, що $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

З означення скалярного добутку векторів випливають такі *властивості*:

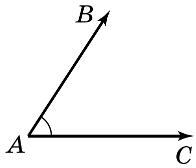
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

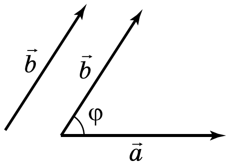
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Для доведення цих властивостей достатньо порівняти числа, яким відповідно дорівнюватимуть ліва і права частини рівностей.

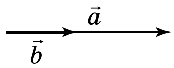
Кутом між векторами $\overrightarrow{AB}$ **і** $\overrightarrow{AC}$ **називають кут *BAC*** (мал. 73). ***Кутом між двома ненульовими векторами,*** **які не мають спільного початку, називають кут між векторами, що дорівнюють даним і мають спільний початок** (мал. 74).



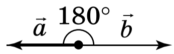
Мал. 73



Мал. 74



Мал. 75



Мал. 76

Кут між співнапрямленими векторами дорівнює нулю (мал. 75), кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180° (мал. 76).

Т е о р е м а (про скалярний добуток векторів). **Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх модулів на косинус кута між ними:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – задані вектори, а φ – кут між ними. Доведемо, що

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Розглянемо скалярний квадрат вектора $\vec{a} + \vec{b}$. Враховуючи властивості скалярного добутку векторів, матимемо:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b})\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b})\vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}\vec{a} + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 =$$
$$= \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2.$$

Враховуючи властивості скалярного квадрата, отримаємо:

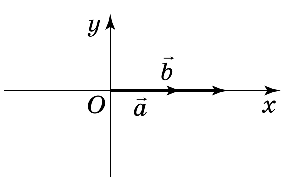
$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2; \text{ звідки } \vec{a}\vec{b} = \frac{|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{2},$$

тобто скалярний добуток векторів залежить від довжини векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{a} + \vec{b}$, а тому не залежить від вибору системи координат.

Виберемо таку систему координат, щоб додатний напрям осі абсцис збігався з напрямом вектора $\vec{a}$. Тоді $\vec{a}(|\vec{a}|;\ 0)$.

Якщо φ = 0° (мал. 77), то $\vec{b}(|\vec{b}|;\ 0)$ і тоді

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| + 0 \cdot 0 = |\vec{a}||\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 0°.$$



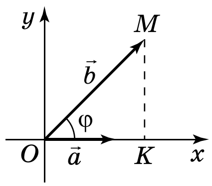
Мал. 77

Нехай $0° < \varphi < 90°$ (мал. 78). Тоді $MK = |\vec{b}| \sin\varphi$, $OK = |\vec{b}| \cos\varphi$, а тому $\vec{b}(|\vec{b}|\cos\varphi;\ |\vec{b}|\sin\varphi)$. Маємо:

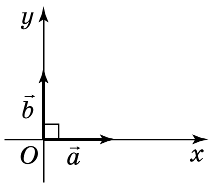
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + 0 \cdot |\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Якщо $\varphi = 90°$ (мал. 79), то

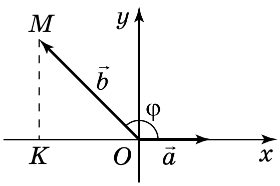
$$\vec{b}(0;\ |\vec{b}|) \text{ і } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot 0 + 0 \cdot |\vec{b}| = 0 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90°.$$



Мал. 78



Мал. 79



Мал. 80

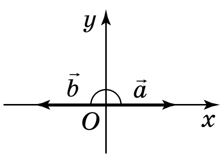
Якщо $90° < \varphi < 180°$ (мал. 80), то

$MK = |\vec{b}|\sin(180° - \varphi) = |\vec{b}|\sin\varphi$,

$OK = |\vec{b}|\cos(180° - \varphi) = -|\vec{b}|\cos\varphi$.

Оскільки друга координата вектора $\vec{b}$ дорівнює числу, протилежному довжині відрізка OK, то координатами вектора $\vec{b}$ є пара чисел $(|\vec{b}|\cos\varphi;\ |\vec{b}|\sin\varphi)$, а тому

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + 0 \cdot |\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$



Мал. 81

Якщо $\varphi = 180°$ (мал. 81), то координатами вектора $\vec{b}$ є пара чисел $(-|\vec{b}|;\ 0)$. Тому

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot (|-\vec{b}|) + 0 \cdot 0 = -|\vec{a}||\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 180°.$$

Отже, для будь-яких значень $0° \leqslant \varphi \leqslant 180°$ маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi. \ \blacktriangle$$

Н а с л і д о к 1. **Якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.**

Н а с л і д о к 2. **Якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вони перпендикулярні.**

Домовимося кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначати так:

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) \text{ або } (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Задача 2. При якому значенні x вектори $\vec{a}(x; -3)$ і $\vec{b}(6; 10)$ взаємно перпендикулярні?

Р о з в' я з а н н я. Щоб вектори були взаємно перпендикулярними, їх скалярний добуток має дорівнювати нулю. Маємо: $6x + (-3) \cdot 10 = 0$, звідки $x = 5$.

В і д п о в і д ь. $x = 5$.

Скалярний добуток векторів дає змогу знайти косинус кута між ненульовими векторами $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$. Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$, де $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, то

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$; $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$; $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$, то

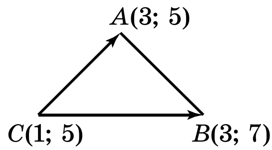
$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Косинус кута φ між ненульовими векторами $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ можна обчислити за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

За косинусом кута між векторами можна знайти і градусну міру кута (за таблицями або за допомогою калькулятора).

Задача 3. Знайти градусну міру кута C трикутника ABC, якщо $A(3; 5)$, $B(3; 7)$, $C(1; 5)$.



Мал. 82

Р о з в' я з а н н я. Кут C трикутника ABC збігається з кутом між векторами $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$ (мал. 82), тобто $\angle C = \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. Маємо:

$\overrightarrow{CA}(3 - 1; 5 - 5)$, тобто $\overrightarrow{CA}(2; 0)$;

$\overrightarrow{CB}(3 - 1; 7 - 5)$, тобто $\overrightarrow{CB}(2; 2)$.

Тоді $\cos C = \dfrac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \dfrac{2 \cdot 2 + 0 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 0^2}\sqrt{2^2 + 2^2}} = \dfrac{4}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

звідки $\angle C = 45°$.

В і д п о в і д ь. 45°.

Задача 4. Дано: $|\vec{c}| = 3$; $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{c}, \vec{b}) = 120°$.

Знайти: $|4\vec{c} - 3\vec{b}|$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$, то

$$|4\vec{c} - 3\vec{b}| = \sqrt{(4\vec{c} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{(4\vec{c} - 3\vec{b})(4\vec{c} - 3\vec{b})} =$$

$$= \sqrt{16\vec{c}^2 - 12\vec{b} \cdot \vec{c} - 12\vec{c} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2} =$$

$$= \sqrt{16|\vec{c}|^2 - 24\vec{b} \cdot \vec{c} + 9|\vec{b}|^2} = \sqrt{16|\vec{c}|^2 - 24|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos 120° + 9|\vec{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{16 \cdot 3^2 - 24 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 \cdot 2^2} = \sqrt{252} = 2\sqrt{63}.$$

В і д п о в і д ь. $2\sqrt{63}$.

1. Що називають скалярним добутком векторів?
2. Що називають скалярним квадратом вектора $\vec{a}$? Чому він дорівнює?
3. Що називають кутом між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$?
4. Сформулюйте і доведіть теорему про скалярний добуток векторів.
5. Сформулюйте наслідки із цієї теореми.
6. Як знайти косинус кута між векторами?

1 Початковий рівень

394. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(-2; 1)$ і $\vec{b}(0; 3)$; 2) $\vec{c}(1; -3)$ і $\vec{d}(-2; 1)$.

395. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(1; -4)$ і $\vec{b}(5; 0)$; 2) $\vec{c}(2; -1)$ і $\vec{d}(1; 3)$.

396. Знайдіть $\vec{m}^2$, якщо:

1) $\vec{m}(-1; -2)$; 2) $\vec{m}(4; 1)$.

397. Знайдіть $\vec{n}^2$, якщо:

1) $\vec{n}(3; -1)$; 2) $\vec{n}(0; -5)$.

398. Дано: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$; $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$; $\vec{a} \cdot \vec{d} = 5$. Який з векторів $\vec{b}$, $\vec{c}$ або $\vec{d}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$?

399. Використовуючи транспортир, накресліть два вектори, що мають спільний початок і кут між якими дорівнює 140°.

400. Використовуючи транспортир, накресліть два вектори, які мають спільний початок і кут між якими дорівнює 50°.

2 Середній рівень

401. Дано вектори $\vec{c}(-2;\ 5)$ і $\vec{d}(x;\ 4)$. При якому значенні x $\vec{c}\cdot\vec{d}=16$?

402. Дано вектори $\vec{a}(3;\ y)$ і $\vec{b}(-1;\ 5)$. При якому значенні y $\vec{a}\cdot\vec{b}=7$?

403. Дано: $\angle(\vec{a},\ \vec{b})=\varphi$. Знайдіть $\vec{a}\cdot\vec{b}$, якщо:

1) $|\vec{a}|=5$; $|\vec{b}|=2$; $\varphi=30°$;
2) $|\vec{a}|=4$; $|\vec{b}|=1$; $\varphi=60°$;
3) $|\vec{a}|=2$; $|\vec{b}|=1$; $\varphi=135°$;
4) $|\vec{a}|=10$; $|\vec{b}|=5$; $\varphi=180°$.

404. Дано: $\angle(\vec{c},\ \vec{d})=\varphi$. Знайдіть $\vec{c}\cdot\vec{d}$, якщо:

1) $|\vec{c}|=2$; $|\vec{d}|=4$; $\varphi=0°$;
2) $|\vec{c}|=1$; $|\vec{d}|=6$; $\varphi=45°$;
3) $|\vec{c}|=2$; $|\vec{d}|=1$; $\varphi=120°$;
4) $|\vec{c}|=3$; $|\vec{d}|=8$; $\varphi=150°$.

405. Доведіть, що вектори $\vec{m}(-1;\ 10)$ і $\vec{n}(20;\ 2)$ взаємно перпендикулярні.

406. Доведіть, що вектори $\vec{p}(4;\ -3)$ і $\vec{q}(6;\ 8)$ взаємно перпендикулярні.

407. Чи є взаємно перпендикулярними вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$, якщо:

1) $\vec{c}(1;\ 5)$, $\vec{d}(-5;\ -1)$;
2) $\vec{c}(2;\ 3)$, $\vec{d}(-6;\ 4)$?

408. Чи є взаємно перпендикулярними вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(2;\ -1)$, $\vec{b}(1;\ 2)$;
2) $\vec{a}(0;\ 4)$, $\vec{b}(2;\ 3)$?

3 Достатній рівень

409. При якому значенні x вектори $\vec{a}(-2;\ 5)$ і $\vec{b}(x;\ 4)$ взаємно перпендикулярні?

410. При якому значенні y вектори $\vec{a}(10;\ y)$ і $\vec{b}(-4;\ 5)$ взаємно перпендикулярні?

411. Дано вектори $\vec{a}(3;\ 0)$ і $\vec{b}(2;\ 2)$. Обчисліть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

412. Дано вектори $\vec{a}(1;\ 0)$ і $\vec{b}(-2;\ 2)$. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

413. Знайдіть кути трикутника, вершинами якого є точки $A(-3;\ 0)$, $B(0;\ 4)$ і $C(4;\ 1)$. З'ясуйте вид трикутника.

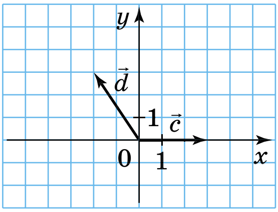
414. Знайдіть косинуси кутів трикутника KLM, де $K(0;\ 6)$, $L(-8;\ 0)$ і $M(3;\ 2)$. З'ясуйте вид трикутника.

415. $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два ненульових вектори. Знайдіть кут між ними, якщо:

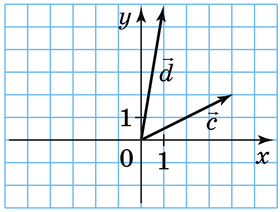
1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$; 2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$;

3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$; 4) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

416. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$, зображених на малюнках 83 і 84.



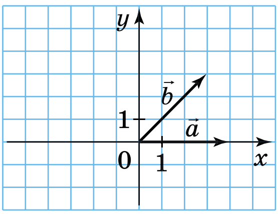
Мал. 83



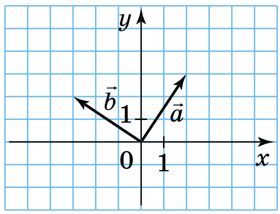
Мал. 84

ISBN 978-96

417. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на малюнках 85 і 86.



Мал. 85



Мал. 86

418. Дано: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$. Знайти:

1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $(\vec{a} - \vec{b})\vec{a}$; 3) $\vec{b}(\vec{a} + \vec{b})$; 4) $\vec{a}(3\vec{a} - 4\vec{b})$.

419. Дано: $\angle(\vec{c}, \vec{d}) = 60°$, $|\vec{c}| = 6$, $|\vec{d}| = 1$. Знайти:

1) $\vec{c}\vec{d}$; 2) $\vec{c}(\vec{c} + \vec{d})$; 3) $(\vec{d} - \vec{c})\vec{d}$; 4) $\vec{c}(4\vec{c} + 3\vec{d})$.

420. Дано: $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 4$. Чи може $\vec{a}\vec{b}$ дорівнювати:

1) -12; 2) -6; 3) -14; 4) 0; 5) 11; 6) $12\frac{1}{2}$?

4 Високий рівень

421. Дано: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150°$. Знайти:

1) $|\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$.

422. Дано: $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$.

Знайти: 1) $|\vec{a} + \vec{b}|$; 2) $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$.

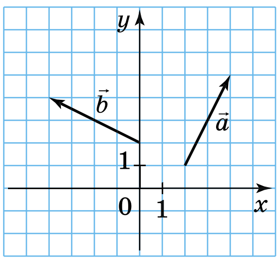
423. Відомо, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, а вектори $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{a}$ взаємно перпендикулярні. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

424. Відомо, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$. Доведіть, що вектори $\vec{a}$ і $2\vec{b} - \vec{a}$ взаємно перпендикулярні.

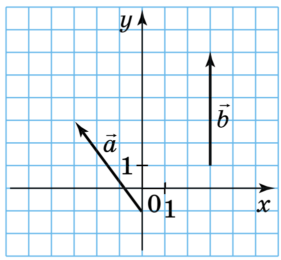
425. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, колінеарного вектору $\vec{b}(-1; 4)$, якщо $\vec{a}\vec{b} = -34$.

426. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, колінеарного вектору $\vec{a}(3; -1)$, якщо $\vec{a}\vec{b} = 30$.

427. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на малюнку 87.



Мал. 87



Мал. 88

428. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на малюнку 88.

429. Знайдіть координати вектора $\vec{d}$, перпендикулярного до вектора $\vec{c}(-2; 1)$, якщо $|\vec{d}| = 3|\vec{c}|$.

430. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, перпендикулярного до вектора $\vec{d}(1; -5)$, модуль якого дорівнює модулю вектора $\vec{d}$.

431. Відомо, що $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 1$. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ і $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Вправи для повторення

432. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{CD}$ та його модуль, якщо: 1) $C(5; -2)$, $D(-1; -10)$; 2) $C(0; -5)$, $D(7; 0)$.

433. При якому значенні m вектори $\vec{a}(m; -2)$ і $\vec{b}(-8; m)$ колінеарні?

434. Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо $A(3;\ 1)$, $B(7;\ 4)$, $C(4;\ 0)$, $D(0;\ -3)$.

435. Чи лежать точки $A(-2;\ 3)$, $B(0;\ 4)$ і $C(8;\ 8)$ на одній прямій?

Цікаві задачі для учнів неледачих

436. Точки K і L – середини сторін AB і CD опуклого чотирикутника $ABCD$, $KL = \dfrac{AD + BC}{2}$. Доведіть, що $AD \parallel BC$.

Домашня самостійна робота № 2

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Дано: $\vec{a}(-2;\ 5)$, $\vec{b}(4;\ 1)$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Які координати у вектора $\vec{c}$?

А. $(-6;\ 4)$; **Б.** $(-2;\ 6)$; **В.** $(2;\ 6)$; **Г.** $(2;\ 4)$.

2. Дано: $\vec{c}(5;\ -1)$, $\vec{d}(2;\ 3)$, $\vec{m} = \vec{c} - \vec{d}$. Які координати у вектора $\vec{m}$?

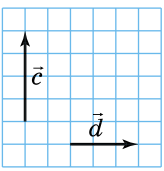
А. $(3;\ 2)$; **Б.** $(3;\ -4)$; **В.** $(-3;\ -4)$; **Г.** $(7;\ -4)$.

3. Чому дорівнює скалярний добуток векторів $\vec{a}(2;\ -5)$ і $\vec{b}(1;\ -2)$?

А. -4; **Б.** 0; **В.** -8; **Г.** 12.

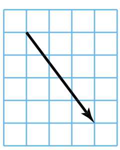
4. Знайдіть модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(-4;\ 6)$, $B(0;\ 9)$.

А. 5; **Б.** 6; **В.** 8; **Г.** 9.

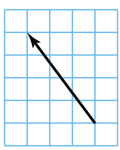


Мал. 89

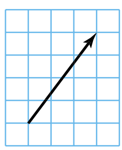
5. Укажіть вектор, що є сумою векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$, зображених на малюнку 89.



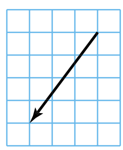
А.



Б.



В.



Г.

6. Знайдіть координати вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a}(-2;\ 4)$, $\vec{b}(3;\ 7)$.

А. $(-5;\ -3)$; **Б.** $(-3;\ 19)$; **В.** $(-15;\ -9)$; **Г.** $(-9;\ 5)$.

7. Дано вектори $\vec{a}(x;\ -2)$ і $\vec{b}(6;\ 12)$. При якому значенні x вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні?

А. 4; **Б.** -1; **В.** 1; **Г.** -4.

8. Дано вектори $\vec{c}(3;\ -8)$ і $\vec{d}(12;\ y)$. При якому значенні y вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ перпендикулярні?

А. 4,5; **Б.** 32; **В.** –32; **Г.** –4,5.

9. Дано вектори $\vec{a}(-2;\ 0)$ і $\vec{b}(3;\ -3)$. Знайдіть $\angle(\vec{a},\ \vec{b})$.

А. 45°; **Б.** 60°; **В.** 120°; **Г.** 135°.

10. Модуль вектора $\vec{p}(x;\ y)$ дорівнює 5. Знайдіть координати вектора $\vec{p}$, якщо координата x цього вектора на 1 менша від координати y.

А. (3; 4); **Б.** (3; 4) або (–4; –3);
В. (–4; –3); **Г.** (4; 3).

11. Чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(7;\ 15)$, $B(5;\ 9)$, $C(7;\ 3)$, $D(9;\ 9)$ є...

А. квадратом; **Б.** трапецією;
В. ромбом; **Г.** прямокутником.

12. Дано: $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a},\ \vec{b}) = 45°$. Знайти: $|2\vec{a} - \vec{b}|$.

А. 5; **Б.** 4; **В.** $4\sqrt{2} - 1$; **Г.** 3.

Завдання для перевірки знань № 2 до § 6–10

1. Позначте в зошиті точки A, K і L, що не лежать на одній прямій. Накресліть вектори $\overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{AL}$.

2. Дано вектори $\vec{a}(-2;\ 4)$ і $\vec{b}(7;\ 1)$. Знайдіть координати вектора:

1) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

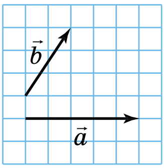
3. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}(4;\ -7)$ і $\vec{b}(2;\ 1)$.

4. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$ та його модуль, якщо $A(-2;\ 4)$, $B(2;\ 1)$.

5. Дано вектори $\vec{m}(-1;\ 4)$ і $\vec{n}(4;\ 5)$. Знайдіть координати вектора $\vec{p} = 3\vec{m} - 5\vec{n}$.

6. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 90). Побудуйте вектори:

1) $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$.



Мал. 90

7. Дано вектори $\vec{a}(x;\ -2)$ і $\vec{b}(5;\ 10)$. При якому значенні x вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

1) колінеарні; 2) перпендикулярні?

8. Дано вектори $\vec{a}(0;\ -3)$ і $\vec{b}(1;\ -1)$. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

9. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник з вершинами в точках $A(4;\ 8)$, $B(10;\ 10)$, $C(16;\ 8)$, $D(10;\ 6)$ – ромб.

Додаткові завдання

10. Доведіть, що точки $A(5; -7)$, $B(6; -9)$ і $C(3; -3)$ лежать на одній прямій.

11. Відомо, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 30°$. Знайдіть $|4\vec{a} - 3\vec{b}|$.

Вправи для повторення розділу 2

До § 6

437. Укажіть початок і кінець вектора:

1) $\overrightarrow{MN}$; 2) $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{PP}$.

438. Позначте три точки A, B і K, що не лежать на одній прямій. Накресліть деякі три вектори, початок і кінець яких збігаються з якими-небудь двома із цих точок. Запишіть усі вектори, що утворилися, і назвіть початок і кінець кожного з них.

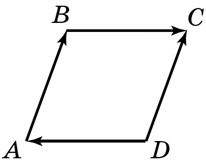
439. Накресліть два протилежно напрямлених вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, вектор $\vec{c}$, співнапрямлений з вектором $\vec{a}$, та вектор $\vec{d}$, співнапрямлений з вектором $\vec{b}$.

1) Виконайте відповідні записи за допомогою символів $\uparrow\uparrow$ і $\uparrow\downarrow$.

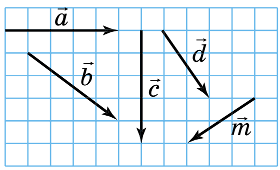
2) Чи є колінеарними вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$?

3) Співнапрямлені чи протилежно напрямлені вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$?

440. На малюнку 91 $ABCD$ – ромб. Укажіть рівні вектори та вектори, що мають рівні модулі. Виконайте відповідні записи.



Мал. 91



Мал. 92

441. 1) Знайдіть модулі векторів, зображених на малюнку 92, якщо сторона клітинки дорівнює одиниці вимірювання відрізків.

2) Які з них мають однакові модулі? Виконайте відповідні записи.

442. $ABCD$ – паралелограм, O – точка перетину його діагоналей. Укажіть вектор, що дорівнює вектору:

1) $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{OA}$; 4) $\overrightarrow{DO}$.

443. $ABCD$ – прямокутна трапеція ($\angle A = \angle B = 90°$), $\angle C = 45°$, $AB = 5$, $BC = 12$. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{BD}$.

444. 1) Чи правильне твердження: «Якщо вектори не є рівними, то їх модулі також не є рівними»?
2) Чи правильне обернене твердження?

445. ABC – прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$), $\angle A = 45°$. Чи правильне твердження:
1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$; 2) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}|$; 3) $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{AC}|$; 4) $|\overrightarrow{BC}| < |\overrightarrow{AB}|$?

446. $ABCD$ – ромб, $|\overrightarrow{AC}| = 12$, $|\overrightarrow{BD}| = 16$. Від вершини A відкладено вектор $\overrightarrow{AE}$ так, що $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$. Знайдіть $|\overrightarrow{EC}|$.

До § 7

447. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо:
1) $M(2; -5)$, $N(4; -1)$; 2) $M(-3; 5)$, $N(-2; 0)$.

448. Знайдіть модуль вектора:
1) $\vec{c}(-4; -3)$; 2) $\vec{d}(-12; 5)$.

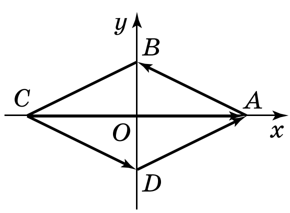
449. Чи рівні вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\vec{b}$, якщо:
1) $C(-2; 3)$, $D(4; 7)$, $\vec{b}(6; -4)$;
2) $C(0; 5)$, $D(4; 4)$, $\vec{b}(4; -1)$?

450. Серед векторів $\vec{a}(-2; 5)$, $\vec{b}(1; 4)$, $\vec{c}(\sqrt{3}; \sqrt{6})$, $\vec{d}(-5; 2)$, $\vec{e}(3; 0)$, $\vec{f}(-4; 1)$ знайдіть ті, що мають рівні модулі.

451. Дано точки $K(5; -7)$, $L(4; 0)$, $M(x; 5)$, $N(0; y)$. Знайдіть x і y, якщо $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN}$.

452. Дано точки $A(-2; 3)$ і $B(4; -5)$. Знайдіть координати точки C такої, що:
1) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$.

453. У ромбі $ABCD$ $AC = 8$, $BD = 6$ (мал. 93). Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{CA}$.



Мал. 93

454. Дано три вершини $A(2; -3)$, $B(4; -7)$ і $C(-5; 3)$ паралелограма $ABCD$. Знайдіть за допомогою векторів координати вершини D.

455. Модуль вектора $\vec{m}(x; x)$ дорівнює $3\sqrt{2}$. Знайдіть x.

456. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник з вершинами $A(5; 7)$, $B(6; 4)$, $C(3; 3)$, $D(2; 6)$ – квадрат.

457. Модуль вектора $\vec{c}(x;\ y)$ дорівнює $\sqrt{17}$. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, якщо його координата y в 4 рази більша за координату x.

До § 8

458. Знайдіть $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$, якщо:

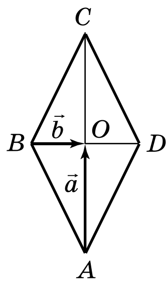
1) $\vec{a}(4;\ 0)$, $\vec{b}(0;\ -5)$; 2) $\vec{a}(2;\ -3)$, $\vec{b}(4;\ 3)$.

459. Накресліть два неколінеарних вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$. Знайдіть їх суму за правилом:

1) трикутника; 2) паралелограма.

460. Накресліть вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AK}$. Побудуйте різницю цих векторів.

461. Дано: $\vec{a}(2;\ -1)$, $\vec{b}(3;\ 5)$, $\vec{c}(x;\ y)$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Знайти: x, y.



Мал. 94

462. $ABCD$ – ромб (мал. 94), O – точка перетину його діагоналей. Виразіть вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CD}$ через вектори $\overrightarrow{AO}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{BO}=\vec{b}$.

463. Не виконуючи малюнка, знайдіть суму:

1) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$.

464. Чи може бути нульовим вектором сума трьох векторів, модулі яких дорівнюють:

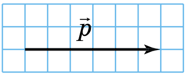
1) 3; 7; 10; 2) 2; 9; 10; 3) 13; 5; 6?

До § 9

465. Дано: $\vec{c}(9;\ -3)$. Знайдіть координати вектора:

1) $2\vec{c}$; 2) $-\vec{c}$; 3) $\frac{1}{3}\vec{c}$; 4) $-4\vec{c}$; 5) $10\vec{c}$; 6) $-0{,}1\vec{c}$.

466. На малюнку 95 задано вектор $\vec{p}$. Побудуйте вектор:



Мал. 95

1) $0{,}5\vec{p}$; 2) $-\vec{p}$; 3) $1{,}5\vec{p}$;

4) $-2\vec{p}$; 5) $3\vec{p}$; 6) $-\frac{1}{3}\vec{p}$.

467. Дано вектори $\vec{c}(-1;\ 2)$ і $\vec{d}(0;\ -1)$. Знайдіть координати вектора:

1) $\vec{c}+10\vec{d}$; 2) $5\vec{c}-\vec{d}$; 3) $7\vec{c}+2\vec{d}$; 4) $3\vec{c}-4\vec{d}$.

468. Дано: $\vec{a}(-2;\ 3)$, $\vec{b}(4;\ 2)$. Порівняйте модулі векторів $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{d}=2\vec{a}-0{,}5\vec{b}$.

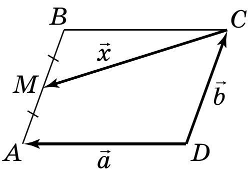
469. При яких значеннях x вектори $\vec{a}(1; x)$ і $\vec{b}(x; 9)$ колінеарні? Співнапрямлені чи протилежно напрямлені ці вектори?

470. AM – медіана трикутника ABC. Доведіть, що

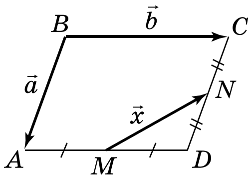
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

471. На площині задано вектор $\vec{a}$. Відомо, що $|\vec{a}| = 10$. На яке число треба помножити цей вектор, щоб отримати протилежно напрямлений йому вектор, модуль якого дорівнює 5?

472. $ABCD$ – паралелограм (мал. 96 і 97). Виразіть вектор $\vec{x}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Мал. 96



Мал. 97

473. Дано ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, причому $2\vec{a} - 3\vec{b} = 4\vec{a} - 9\vec{b}$. Доведіть, що $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні.

4 **474.** Відомо, що $\vec{a} = 3\vec{c} - 5\vec{d}$, $\vec{b} = 2\vec{c} - 3\vec{d}$. Знайдіть координати векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$, якщо $\vec{a}(-3; 8)$, $\vec{b}(-1; 6)$.

475. Доведіть, що $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, де M – точка перетину медіан трикутника ABC.

476. При якому значенні x точки $A(1; -2)$, $B(3; -8)$ і $C(x; -14)$ лежать на одній прямій?

До § 10

1 **477.** Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(-2; 3)$ і $\vec{b}(6; 4)$; 2) $\vec{c}(-2; 1)$ і $\vec{d}(0; 4)$.

У якій із цих пар вектори є взаємно перпендикулярними?

478. Знайдіть $\vec{p}^2$, якщо:

1) $\vec{p}(-2; 0)$; 2) $\vec{p}(1; 5)$.

479. Використовуючи транспортир, накресліть вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, кут між якими дорівнює 80°.

2 **480.** Дано: $\vec{a}(m; 2)$, $\vec{b}(-3; m)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$. Знайти m.

481. Нехай $\varphi = \angle(\vec{p}, \vec{q})$. Знайдіть $\vec{p} \cdot \vec{q}$, якщо:

1) $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 6$, $\varphi = 60°$; 2) $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 9$, $\varphi = 135°$.

482. Доведіть, що ненульові вектори $\vec{a}(m; n)$ і $\vec{b}(-n; m)$ взаємно перпендикулярні.

483. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{c}(3; -4)$ і $\vec{d}(15; 8)$.

484. Дано вектори $\vec{a}(2; y)$ і $\vec{b}(4; -1)$. При яких значеннях y кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

1) гострий; 2) прямий; 3) тупий?

485. Знайдіть кути трикутника з вершинами в точках $A(-1; 2)$, $B(-1; 5)$ і $C(3; 2)$.

486. Відомо, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 40°$. Знайдіть кут між векторами:

1) $4\vec{a}$ і $5\vec{b}$; 2) $-\vec{a}$ і $7\vec{b}$;

3) $\frac{1}{10}\vec{a}$ і $-\frac{1}{8}\vec{b}$; 4) $-13\vec{a}$ і $-2017\vec{b}$.

487. Дано: $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{b}| = 2$. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}\vec{b} = 2$; 2) $\vec{a}\vec{b} = 1$; 3) $\vec{a}\vec{b} = 0$;

4) $\vec{a}\vec{b} = -\sqrt{3}$; 5) $\vec{a}\vec{b} = -1$; 6) $\vec{a}\vec{b} = -2$.

488. Відомо, що $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ і $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Знайдіть $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 7\vec{b})$.

489. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ і $(\vec{a} + 2\vec{b})(4\vec{a} + 3\vec{b}) = 5$.

490. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{q} - 2\vec{p}$, якщо $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$ і $\vec{p} \perp \vec{q}$.

Найвеличніший арифметик своєї епохи

Понад тридцять років тому в науковій термінології набули широкого вжитку такі терміни, як «діаграма Вороного», «клітина Вороного», «розбиття Вороного», «мозаїка Вороного». В Англії поняття «Voronoi diagram» уведене у шкільну програму.

Георгій Феодосійович Вороний – один з найяскравіших представників України в історії математики кін. XIX – поч. XX ст. Його наукові праці присвячені теорії чисел у всіх її трьох напрямах: аналітичному, алгебраїчному та геометричному. Вороного справедливо вважають найвеличнішим арифметиком своєї епохи, а його працю про кількість точок під гіперболою (1903 р.) – віхою, з якої почалася сучасна аналітична теорія чисел. Із часом з'ясувалося, що його дослідження знайшли застосування в різних галузях прикладних наук: кристалографії, фізиці, астрономії, хімії, мікробіології, комп'ютерній графіці, проблемах штучного інтелекту, офтальмології.

Народився Георгій Вороний 28 квітня 1868 р. в с. Журавка Полтавської губернії (нині Чернігівська обл.). Його батько Феодосій Вороний був магістром філології, викладачем, просвітником.

Середню освіту Георгій здобув у гімназії, а у 1885 р. вступив на математичне відділення Петербурзького університету. Після блискучої здачі у 1889 р. випускних іспитів його залишили при університеті для здобуття звання професора. У 1894 р. Вороний захистив магістерську дисертацію та став професором Варшавського університету, а у 1897 р. блискуче захистив докторську дисертацію. Ці дослідження було відзначено премією ім. академіка Буняковського. Пропрацював Г. Вороний як науковець і педагог у стінах Варшавського університету аж до останніх днів свого життя.

Творчу і педагогічну діяльність Георгія Феодосійовича високо оцінили математики, обравши його у 1898 р. членом Московського математичного товариства. У 1904 р., виступивши з доповідями на Міжнародному конгресі математиків у м. Хейдельберг (Німеччина), Вороний стає знаним у світі.

У 1907 р. Вороного обирають членом-кореспондентом Російської академії наук. Але на той час він був уже невиліковно хворим, і невдовзі (20 листопада 1908 р.) пішов з життя. За заповітом його поховали в рідній Журавці.

Упродовж усього свого життя Г.Ф. Вороний не поривав зв'язків з батьковою хатою, часто приїздив у рідні краї. Ще й дотепер можна почути приємні спогади односельців про сердечну й дуже порядну родину Вороних. Середню загальноосвітню школу в с. Журавка названо на честь Г.Ф. Вороного.

Інститут математики НАН України, починаючи з 1993 р., раз на п'ять років проводить Міжнародні конференції, присвячені сучасному стану розвитку напрямів науки, закладених у працях Вороного, а ще раніше видав у трьох томах повне зібрання наукових праць Георгія Вороного.

Пишаймося тим грандіозним внеском, який зробив український математик Г.Ф. Вороний в одне з найоригінальніших творінь людського духу – математику. Його основоположні праці з теорії чисел увійшли у світову математичну скарбницю як символ честі і доблесті людського розуму.

Розділ 3 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

У цьому розділі ви:

- **дізнаєтеся** про теорему косинусів і теорему синусів; про існування різних формул для знаходження площ трикутника і паралелограма;
- **навчитеся** розв'язувати трикутники і прикладні задачі; знаходити площі трикутника, паралелограма, ромба, використовуючи різні формули.

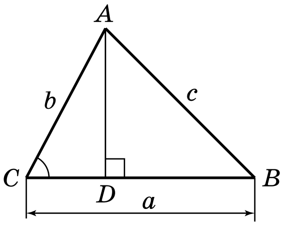
§ 11. ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ

Доведемо одну з найважливіших теорем про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.

Теорема косинусів. **Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.**

Доведення. Нехай у трикутнику ABC $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (мал. 98). Доведемо, що

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$



Мал. 98

Очевидно, що $\angle C$ може бути прямим, гострим або тупим. Розглянемо всі три випадки.

1) Нехай $\angle C$ – прямий. Тоді $\cos C = 0$ і формула, яку треба довести, набуває вигляду: $c^2 = a^2 + b^2$, тобто маємо теорему Піфагора для трикутника ABC.

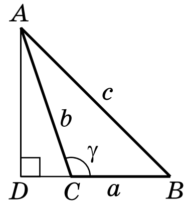
2) Нехай $\angle C$ – гострий. Тоді у трикутнику ABC є ще хоча б один гострий кут, нехай це буде $\angle B$. Проведемо у трикутнику ABC висоту AD. Оскільки кути B і C – гострі, то точка D належить стороні BC. Тоді у прямокутному трикутнику ADC: $AD = b\sin C$, $CD = b\cos C$, а $BD = BC - CD = a - b\cos C$.

У прямокутному трикутнику ADB (за теоремою Піфагора):

$$c^2 = AB^2 = AD^2 + DB^2 = (b\sin C)^2 + (a - b\cos C)^2 = b^2\sin^2 C +$$
$$+ a^2 - 2ab\cos C + b^2\cos^2 C = a^2 + b^2(\sin^2 C + \cos^2 C) - 2ab\cos C.$$

Але $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$, тому $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

3) Нехай кут $\angle C$ – тупий (мал. 99). Позначимо $\angle ACB = \gamma$. Проведемо у трикутнику ABC висоту AD. У цьому випадку точка D лежатиме на продовженні променя BC, тому $\angle ACD = 180° - \gamma$.



Мал. 99

У прямокутному трикутнику ADC:

$AD = b\sin ACD = b\sin(180° - \gamma) = b\sin\gamma$;

$DC = b\cos ACD = b\cos(180° - \gamma) = -b\cos\gamma$.

Маємо: $BD = BC + CD = a - b\cos\gamma$. Далі доводимо так, як у випадку, коли $\angle C$ – гострий. ▲

Зауважимо, що теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів для прямокутного трикутника, тому її інколи називають *узагальненою теоремою Піфагора*.

Отже, у довільному трикутнику ABC виконуються рівності:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,}$$
$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,}$$
$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.}$$

За допомогою теореми косинусів можна, наприклад, знайти невідому сторону трикутника, якщо відомо дві його інші сторони й один з кутів.

Задача 1. Дано: $\triangle ABC$, $AC = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle C = 60°$.
Знайти: AB.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$ (мал. 98). За теоремою косинусів маємо: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. Тоді $c = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60°} = \sqrt{49} = 7$ (см).

В і д п о в і д ь. 7 см.

Задача 2. Дано: $\triangle ABC$, $AB = 7$ см, $BC = 5$ см, $\angle C = 120°$.
Знайти: AC.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $AB = c$, $BC = a$, $AB = c$ (мал. 99). За теоремою косинусів маємо: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, тобто $7^2 = 5^2 + b^2 - 2 \cdot 5 \cdot b \cdot \cos 120°$.

Спростивши останню рівність, отримаємо квадратне рівняння $b^2 + 5b - 24 = 0$, розв'язавши яке, матимемо: $b_1 = 3$; $b_2 = -8$. Число -8 не задовольняє змісту задачі, оскільки $b > 0$. Отже, $AC = 3$ см.

В і д п о в і д ь. 3 см.

Якщо відомо три сторони трикутника, то за теоремою косинусів можна знайти косинус будь-якого з його кутів, а отже, і сам кут.

Наприклад, косинус кута C можна знайти за формулою, виразивши $\cos C$ з формули теореми косинусів:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Задача 3. Знайти міру найбільшого з кутів трикутника, довжини сторін якого дорівнюють $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ і 4 см.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки у трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, то найбільшим кутом трикутника буде кут, що лежить проти сторони завдовжки 4 см.

Нехай $a = \sqrt{2}$ см, $b = \sqrt{8}$ см, $c = 4$ см.

Тоді за формулою косинуса кута маємо:

$$\cos C = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{8})^2 - 4^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = -\frac{3}{4}.$$

Використовуючи калькулятор (або таблиці), знайдемо, що $\angle C \approx 138°35'$.

В і д п о в і д ь. $138°35'$.

Отже, теорема косинусів допомагає розв'язувати трикутники.

Теорема косинусів є зручною і для визначення виду трикутника. Щоб установити, гострокутним, прямокутним або тупокутним є трикутник, досить знайти знак косинуса його найбільшого кута. З формули косинуса кута зрозуміло, що знак косинуса кута залежить від знака чисельника дробу, оскільки знаменник завжди додатний. Тому знак виразу $a^2 + b^2 - c^2$ дозволяє визначити знак косинуса кута трикутника, а отже, і вид цього кута (гострий, прямий чи тупий).

Якщо c – найбільша сторона трикутника, то для з'ясування виду трикутника достатньо порівняти з нулем значення виразу $a^2 + b^2 - c^2$. Таким чином,

якщо c – найбільша сторона трикутника і
$a^2 + b^2 - c^2 > 0$, то $\angle C$ – гострий, а трикутник – гострокутний;
$a^2 + b^2 - c^2 = 0$, то $\angle C$ – прямий, а трикутник – прямокутний;
$a^2 + b^2 - c^2 < 0$, то $\angle C$ – тупий, а трикутник – тупокутний.

Задача 4. Визначити вид трикутника зі сторонами $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 7$ см.

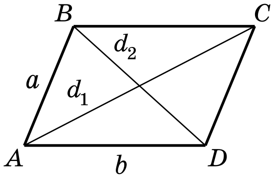
Р о з в' я з а н н я. $a^2 + b^2 - c^2 = 4^2 + 6^2 - 7^2 = 3 > 0$, отже, трикутник гострокутний.

В і д п о в і д ь. Гострокутний.

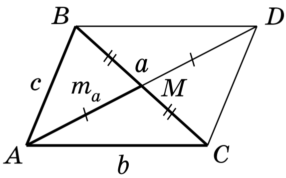
Розглянемо важливу *властивість діагоналей паралелограма*.

Задача 5. Довести, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

Д о в е д е н н я. Нехай $ABCD$ – паралелограм, $AB = a$, $AD = b$, $AC = d_1$, $BD = d_2$ (мал. 100).



Мал. 100



Мал. 101

З трикутника ABD за теоремою косинусів:
$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos BAD$.
З трикутника ABC за теоремою косинусів:
$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos ABC = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \angle BAD) =$
$= a^2 + b^2 + 2ab\cos BAD$.

Додавши почленно ці дві рівності, маємо:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2). \blacktriangle$$

Задача 6. AM – медіана трикутника ABC. Довести *формулу медіани трикутника*:

$$AM = m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Р о з в' я з а н н я. Продовжимо медіану AM на відрізок $MD = AM$ (мал. 101). Оскільки в чотирикутнику $ABDC$ $AM = MD$ (за побудовою) і $BM = MC$ (за умовою), то $ABDC$ – паралелограм (за ознакою). Тоді $AD = 2m_a$.

За доведеною вище властивістю діагоналей паралелограма маємо:

$AD^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$, тобто $(2m_a)^2 + a^2 = 2(c^2 + b^2)$.

Звідки: $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - 2a^2$, тоді $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

Отже,

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}. \blacktriangle$$

Зауважимо, що в деяких задачах, зокрема тих, розв'язування яких зводиться до розв'язування рівнянь, доцільно використовувати формулу медіани трикутника у вигляді:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

А ще раніше...

Можна вважати, що теорему косинусів було доведено ще в «Началах» Евкліда. У 12-му та 13-му реченнях другої книги Евклід узагальнює теорему Піфагора і виводить формулу, якою записує квадрат сторони, яка лежить проти гострого або тупого кута трикутника. Ці формули для кожної зі сторін, які довів Евклід, еквівалентні формулам теореми косинусів:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B;$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Формули, подібні до цих, використовували також александрійські математики Герон (І ст.) і Пап (ІІІ ст.), учені Індії (Брахмагупта, Бхаскара) та країн Близького та Середнього Сходу (Ал-Біруні), а також деякі європейські математики XIII–XV ст., зокрема Леонардо Пізанський (Фібоначчі).

Уперше теорему косинусів сформулював словами видатний математик Франсуа Вієт у своїй праці «Математичні таблиці» (1579 р.). У сучасних же позначеннях відповідну формулу Вієта можна записати так:

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{1}{\sin(90^\circ - C)}.$$

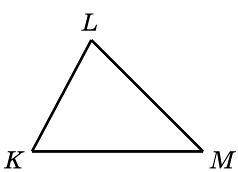
Сучасного вигляду теоремі косинусів у 1801 р. надав французький математик Лазар Карно (1753–1823).

1. Сформулюйте і доведіть теорему косинусів.
2. Запишіть рівності, що випливають з теореми косинусів.
3. Як знайти косинус кута трикутника, якщо відомо три його сторони?
4. Як визначити вид трикутника, якщо відомо три його сторони?

1 Початковий рівень

491. Запишіть теорему косинусів для:

1) сторони MN трикутника MNL;
2) сторони PF трикутника PFT.



Мал. 102

492. На малюнку 102 зображено $\triangle KLM$. Які з рівностей є правильними:

1) $LM^2 = KL^2 + KM^2 + 2KL \cdot KM \cdot \cos K$;
2) $KM^2 = KL^2 + LM^2 - 2KL \cdot LM \cdot \cos L$;
3) $KL^2 = KM^2 + ML^2 - 2KM \cdot ML \cdot \cos K$;
4) $LM^2 = KL^2 + KM^2 - 2KL \cdot KM \cdot \cos K$?

493. Запишіть формули для обчислення косинусів кутів K і M трикутника KLM (мал. 102), вважаючи, що його сторони відомо.

2 Середній рівень

494. Знайдіть сторону AB трикутника ABC, якщо:

1) $AC = 13$ см, $BC = 4$ см, $\cos C = -\frac{5}{13}$;

2) $AC = 7$ см, $BC = 3$ см, $\cos C = \frac{1}{3}$;

3) $BC = 10$ см, $CA = 16$ см, $\angle C = 60°$;

4) $BC = 7\sqrt{3}$ см, $CA = 1$ см, $\angle C = 150°$.

495. Знайдіть сторону BC трикутника ABC, якщо:

1) $AC = 11$ см, $AB = 20$ см, $\cos A = \frac{4}{5}$;

2) $AC = 4$ см, $AB = 3$ см, $\cos A = -\frac{1}{4}$;

3) $AC = 5\sqrt{3}$ см, $AB = 13$ см, $\angle A = 30°$;

4) $AC = 3$ см, $AB = 5$ см, $\angle A = 120°$.

496. Сторони паралелограма дорівнюють 4 см і 5 см, а кут між ними – 60°. Знайдіть діагоналі паралелограма.

497. Сторони паралелограма дорівнюють 3 см і 4 см, а кут між ними – 120°. Знайдіть діагоналі паралелограма.

498. Знайдіть косинуси кутів трикутника, сторони якого дорівнюють 5 см, 6 см і 7 см.

499. Знайдіть косинуси кутів трикутника, сторони якого дорівнюють 4 см, 5 см і 8 см.

500. У трикутнику ABC $AB = 1$ см, $BC = 2$ см, $AC = \sqrt{3}$ см. Знайдіть градусну міру кожного з кутів трикутника.

501. У трикутнику ABC $AB = \sqrt{2}$ см, $BC = 2$ см, $AC = \sqrt{10}$ см. Знайдіть градусну міру найбільшого кута трикутника.

502. Знайдіть градусну міру найменшого кута трикутника, сторони якого дорівнюють 4 см, 8 см і $4\sqrt{3}$ см.

503. Визначте вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний), якщо відомо три його сторони:

1) 4 см, 5 см і 6 см;

2) 6 см, 8 см і 10 см;

3) 7 см, 8 см і 13 см.

504. Визначте вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний), якщо відомо три його сторони:
1) 2 см, 8 см і 9 см;
2) 7 см, 24 см і 25 см;
3) 4 см, 7 см і 8 см.

505. Дві сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 7 см, а одна з діагоналей – 8 см. Знайдіть другу діагональ паралелограма.

506. Діагоналі паралелограма дорівнюють 6 см і 8 см, а одна зі сторін – 4 см. Знайдіть другу сторону паралелограма.

507. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 24 см і 26 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до більшої сторони.

508. Сторони трикутника дорівнюють 5 см, 6 см і 7 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до меншої сторони.

3 Достатній рівень

509. Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см. Дві інші його сторони утворюють кут $60°$, а їх різниця дорівнює 3 см. Знайдіть периметр трикутника.

510. Сторони трикутника, одна з яких на 4 см більша за другу, утворюють кут $120°$, а третя сторона дорівнює 14 см. Знайдіть периметр трикутника.

511. Дві сторони трикутника відносяться як $3:5$, а кут між ними дорівнює $120°$. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 30 см.

512. Периметр трикутника дорівнює 60 см. Дві його сторони відносяться як $5:8$, а кут між ними дорівнює $60°$. Знайдіть сторони трикутника.

513. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 8 см, а кут проти меншої з них – $60°$. Знайдіть третю сторону трикутника.

514. Дві сторони трикутника дорівнюють $3\sqrt{2}$ см і 5 см, а кут проти більшої з них – $45°$. Знайдіть третю сторону трикутника.

515. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо вони відносяться як $4:7$, а сторони паралелограма дорівнюють 7 см і 9 см.

516. Знайдіть сторони паралелограма, якщо вони відносяться як $2:3$, а діагоналі паралелограма дорівнюють 17 см і 19 см.

517. Діагоналі паралелограма дорівнюють 7 см і 11 см, а одна зі сторін на 1 см більша за другу. Знайдіть периметр паралелограма.

518. Одна з діагоналей паралелограма на 2 см більша за другу. Знайдіть ці діагоналі, якщо сторони паралелограма дорівнюють 7 см і 11 см.

519. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 4 см, а медіана, проведена до неї, – 3 см. Знайдіть основу трикутника.

520. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 9 см, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює 4 см. Знайдіть третю сторону трикутника.

521. Доведіть, що коли для трикутника ABC справджується рівність $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, то $\angle A = 60°$.

522. Доведіть, що коли для трикутника ABC справджується рівність $b^2 = a^2 + c^2 + ac$, то $\angle B = 120°$.

523. Одна зі сторін трикутника дорівнює 13 см. Сума двох інших сторін дорівнює 23 см. Знайдіть ці сторони, якщо вони утворюють кут 60°.

524. Середня за довжиною сторона трикутника на 1 см більша за меншу сторону і на 1 см менша за більшу сторону. Косинус середнього за величиною кута трикутника дорівнює $\frac{2}{3}$. Знайдіть периметр трикутника.

4 Високий рівень

525. Дві сторони трикутника дорівнюють 10 см і 12 см, а синус кута між ними дорівнює 0,6. Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

526. Дві сторони трикутника дорівнюють 10 см і 7 см, а синус кута між ними дорівнює 0,8. Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

527. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 11 см, а медіана, проведена до третьої сторони, на 8 см менша за цю сторону. Знайдіть периметр трикутника.

528. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 9 см, а медіана, проведена до третьої сторони, відноситься до цієї сторони як 2 : 7. Знайдіть периметр трикутника.

529. У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см. На сторонах AB і AC узято такі точки M і N відповідно, що $AM = 3$ см, $AN = 5$ см. Знайдіть довжину відрізка MN.

530. У трикутнику KLM $KL = 7$ см, $KM = 9$ см, $LM = 11$ см. На сторонах KL і KM узято такі точки A і B відповідно, що $KA = 2$ см, $KB = 3$ см. Знайдіть довжину відрізка AB.

531. У трикутнику ABC $AB = 20$ см, AP і BN – медіани трикутника; $AP = 42$ см, $BN = 36$ см. Знайдіть третю медіану трикутника.

532. Більша діагональ ромба дорівнює d, а один з його кутів дорівнює $60°$. Знайдіть периметр ромба.

Вправи для повторення

533. $\triangle ABC$ – прямокутний ($\angle C = 90°$). Знайдіть невідомі сторони (з точністю до сотих сантиметра) та кути трикутника, якщо:

1) $AB = 12$ см, $\angle A = 37°$; 2) $BC = 16$ см, $\angle B = 49°$.

534. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45°$. Знайдіть:

1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}(\vec{a} + \vec{b})$; 3) $\vec{b}(\vec{a} - \vec{b})$; 4) $\vec{a}(2\vec{a} + 5\vec{b})$.

535. Хорда завдовжки 30 см перпендикулярна до діаметра і ділить його на відрізки у відношенні $1 : 9$. Знайдіть радіус кола.

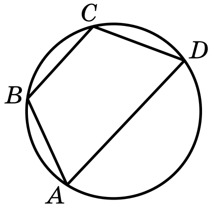
536. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 40 см, а висота, проведена до основи, – 10 см. Знайдіть площу трикутника.

537. Кут між медіаною і висотою, проведеними з вершини прямого кута прямокутного трикутника, дорівнює α. Знайдіть катети трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює c.

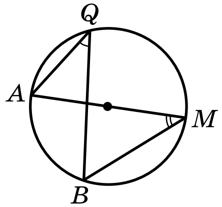
Розв’яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

538. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло (мал. 103). Знайдіть $\angle A$, якщо $\angle C = 130°$.

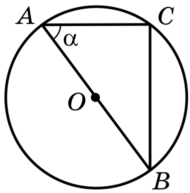
539. На малюнку 104 $\angle AQB = 40°$. Знайдіть $\angle AMB$.



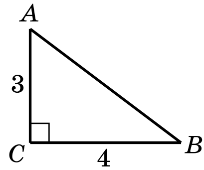
Мал. 103



Мал. 104



Мал. 105



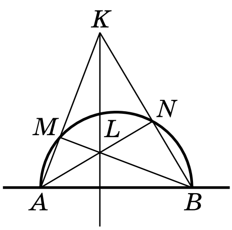
Мал. 106

540. AB – діаметр кола, $\angle BAC = \alpha$, $OB = R$ (мал. 105). Знайдіть BC.

541. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $AC = 3$, $BC = 4$ (мал. 106). Знайти: 1) AB; 2) $\sin A$, $\sin B$; 3) радіус описаного кола R; 4) відношення $\dfrac{AB}{\sin C}$, $\dfrac{AC}{\sin B}$, $\dfrac{BC}{\sin A}$. Переконайтеся, що $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{BC}{\sin A} = 2R$.

Цікаві задачі для учнів неледачих

542. На відрізку AB, як на діаметрі, побудовано півколо (мал. 107). Промені AK і BK перетинають півколо відповідно в точках M і N; AN і BM перетинаються в точці L. Знайдіть кут між прямими KL і AB.



Мал. 107

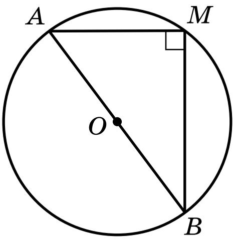
§ 12. ТЕОРЕМА СИНУСІВ

Л е м а. **Якщо AB – хорда кола, радіус якого дорівнює R, а M – будь-яка точка кола, то**

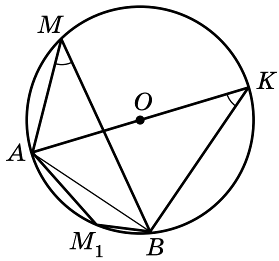
$$\frac{AB}{\sin \angle AMB} = 2R.$$

Д о в е д е н н я. 1) Якщо $AB = 2R$ – діаметр кола (мал. 108), то $\angle AMB = 90°$ при будь-якому розташуванні точки M на колі. Тоді, ураховуючи співвідношення у прямокутному трикутнику,

$$\frac{AB}{\sin \angle AMB} = \frac{2R}{\sin 90°} = 2R.$$



Мал. 108



Мал. 109

2) Нехай AB – не є діаметром кола, а M – точка, що належить більшій дузі кола (мал. 109). Проведемо діаметр AK. Тоді $\angle AMB = \angle AKB$ (як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу). $\angle ABK = 90°$ (як кут, що спирається на діаметр).

У трикутнику ABK ($\angle B = 90°$) $\sin\angle AKB = \dfrac{AB}{AK}$, тому

$\sin\angle AMB = \dfrac{AB}{2R}$, звідки $\dfrac{AB}{\sin\angle AMB} = 2R$.

3) Нехай AB – не є діаметром, а точка M_1 належить меншій дузі кола, тоді $\angle M + \angle M_1 = 180°$. Маємо:

$\angle AM_1B = 180° - \angle AMB$,

тому $\sin\angle AM_1B = \sin(180° - \angle AMB) = \sin\angle AMB$.

Отже, у цьому випадку також справджується рівність

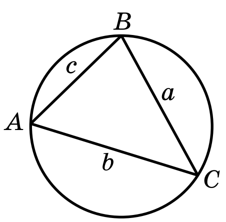
$$\frac{AB}{\sin\angle AMB} = 2R. \blacktriangle$$

Тепер доведемо важливу теорему про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.

Т е о р е м а с и н у с і в. **Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних до них кутів.**

Д о в е д е н н я. Нехай ABC – довільний трикутник, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (мал. 110). Доведемо, що

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$



Мал. 110

Опишемо коло радіуса R навколо даного трикутника. За доведеною лемою:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R; \quad \frac{b}{\sin B} = 2R; \quad \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Отже, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$. $\blacktriangle$

Н а с л і д о к (узагальнена теорема синусів). **У будь-якому трикутнику відношення сторони до синуса протилежного їй кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника:**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = D.$$

Скориставшися теоремою синусів, можна довести відоме з курсу геометрії 7 класу твердження:

У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти більшого кута лежить більша сторона.

Доведіть це твердження самостійно.

За допомогою теореми синусів можна розв'язувати трикутники. Наприклад, за двома даними кутами трикутника і стороною, що лежить проти одного з них, можна знайти сторону, що лежить проти другого кута.

Задача 1. Дано: $\triangle ABC$ $BC = 7\sqrt{2}$ см; $\angle A = 45°$; $\angle B = 60°$. Знайти сторону AC.

Р о з в' я з а н н я. За теоремою синусів маємо (мал. 110):

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}, \text{ тобто } \frac{7\sqrt{2}}{\sin 45°} = \frac{AC}{\sin 60°};$$

$$\text{звідки } AC = \frac{7\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 7\sqrt{3} \text{ (см).}$$

В і д п о в і д ь. $7\sqrt{3}$ см.

Також за двома сторонами трикутника і кутом, що лежить проти однієї з них, можна знайти кут, що лежить проти другої сторони.

Задача 2. У трикутнику ABC $AB = 1$ см, $BC = \sqrt{2}$ см. Знайти $\angle A$, якщо: 1) $\angle C = 45°$; 2) $\angle C = 30°$.

Р о з в' я з а н н я. Позначимо $AB = c$, $BC = a$.

1) За теоремою синусів маємо:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}, \text{ тобто } \frac{1}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{2}}{\sin A},$$

звідки $\sin A = \sqrt{2}\cdot\sin 45° = 1$. Тоді $\angle A = 90°$.

2) Аналогічно $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin A}$, тобто $\dfrac{1}{\sin 30°} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin A}$,

$$\text{звідки } \sin A = \sqrt{2}\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Маємо: $\angle A = 45^\circ$ або $\angle A = 135^\circ$. Зауважимо, що в обох випадках $\angle A + \angle C < 180^\circ$, тому задача має два розв'язки.

В і д п о в і д ь. 1) 90°; 2) 45° або 135°.

Задачі, у яких треба знайти радіус кола, описаного навколо трикутника, часто можна розв'язати за допомогою наслідка з теореми синусів (узагальненої теореми синусів).

Задача 3. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 5 см, $\sqrt{7}$ см і $2\sqrt{3}$ см.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $a = 5$ см, $b = \sqrt{7}$ см, $c = 2\sqrt{3}$ см. Знайдемо косинус кута B:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5^2 + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тому $\angle B = 30^\circ$.

За узагальненою теоремою синусів $\frac{b}{\sin B} = 2R$, тому

$$R = \frac{\sqrt{7}}{2\sin 30^\circ} = \sqrt{7} \text{ (см)}.$$

В і д п о в і д ь. $\sqrt{7}$ см.

А ще раніше...

Ал-Біруні
(973–1048)

Індійські вчені, як і вчені з мусульманських країн, у IX–X ст. зводили розв'язування трикутників до розв'язування прямокутних трикутників, отже, не мали потреби в теоремі синусів, тому і не знали її. Теорему синусів довів лише в XI ст. математик і астроном Ал-Біруні. А вже з XVI ст. її починають використовувати європейські математики.

У 1799 р. французький математик Жан Луї Лагранж (1736–1813) вивів теорему синусів з теореми косинусів. Інший французький математик Огюстен Луї Коші (1789–1857) у своїй праці «Курс аналізу», що була опублікована в 1821 р., вивів теорему косинусів з теореми синусів.

1. Сформулюйте і доведіть лему, подану в цьому параграфі.
2. Сформулюйте і доведіть теорему синусів.
3. Сформулюйте наслідок з теореми синусів.

1 Початковий рівень

543. У трикутнику проти сторони a лежить кут $50°$, а проти сторони b – кут $40°$. Які з рівностей правильні:

1) $\dfrac{a}{\cos 50°} = \dfrac{b}{\cos 40°}$; 2) $\dfrac{a}{\sin 50°} = \dfrac{b}{\sin 40°}$;

3) $\dfrac{a}{\sin 40°} = \dfrac{b}{\sin 50°}$; 4) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin 50°}{\sin 40°}$?

544. У трикутнику проти сторони b лежить кут $80°$, а проти сторони c – кут $70°$. Заповніть порожні клітинки:

1) $\dfrac{b}{\sin \square} = \dfrac{c}{\sin \square}$; 2) $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin \square}{\sin \square}$.

545. У трикутнику ABC $\sin A = 0{,}2$, $\sin B = 0{,}4$, $a = 10$ см. Знайдіть b.

546. У трикутнику ABC $a = 2$ см, $b = 6$ см, $\sin A = 0{,}3$. Знайдіть $\sin B$.

2 Середній рівень

547. У трикутнику ABC $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$. Знайдіть відношення сторони BC до сторони AC.

548. У трикутнику ABC $\angle B = 30°$, $\angle C = 60°$. Знайдіть відношення сторони AC до сторони AB.

549. У трикутнику OKP $OP = 3\sqrt{2}$ см, $\angle K = 30°$, $\angle P = 45°$. Знайдіть OK.

550. У трикутнику OKP $OK = 4\sqrt{3}$ см, $\angle K = 60°$, $\angle P = 30°$. Знайдіть OP.

551. У трикутнику ABC $AB = \sqrt{2}$ см, $\angle A = 15°$, $\angle C = 135°$. Знайдіть AC.

552. У трикутнику ABC $\angle A = 120°$, $\angle B = 15°$, $BC = 8\sqrt{3}$ см. Знайдіть AB.

553. У трикутнику ABC $AB = 7\sqrt{3}$ см, $\angle C = 120°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

554. У трикутнику ABC $BC = 6$ см, $\angle A = 30°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

555. За допомогою наслідка з теореми синусів знайдіть радіус кола, описаного навколо:

1) рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює a;
2) прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює c.

556. За допомогою наслідка з теореми синусів знайдіть сторони рівностороннього трикутника за радіусом R описаного кола.

557. Доведіть, що в будь-якому трикутнику сторона, що лежить проти кута 30°, дорівнює радіусу кола, описаного навколо цього трикутника.

558. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, катет якого дорівнює 18 см, а прилеглий до нього кут – 30°.

Достатній рівень

559. У трикутнику ABC $AB = \sqrt{2}$ см, $AC = 1$ см, $\angle C = 45°$. Знайдіть $\angle B$.

560. У трикутнику ABC $AB = 1$ см, $BC = \sqrt{2}$ см, $\angle A = 135°$. Знайдіть $\angle C$.

561. У трикутнику ABC $BC = \sqrt{3}$ см, $AB = \sqrt{2}$ см, $\angle C = 45°$. Знайдіть $\angle A$.

562. У трикутнику ABC $AC = 2$ см, $BC = \sqrt{2}$ см, $\angle A = 30°$. Знайдіть $\angle B$.

563. Сторона трикутника відноситься до радіуса описаного навколо трикутника кола як $\sqrt{2}:1$. Знайдіть кут, що лежить проти цієї сторони.

564. Сторона трикутника дорівнює радіусу описаного навколо нього кола. Знайдіть кут, що лежить проти цієї сторони.

565. Радіус описаного навколо рівнобічної трапеції кола дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть довжину діагоналі трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 135°.

566. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 8 см, а кут між ними – 60°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

567. Дві сторони трикутника дорівнюють $2\sqrt{3}$ см і 4 см, а кут між ними – 30°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

Високий рівень

568. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, у якого кут при основі дорівнює 30°, а основа більша за бічну сторону на 2 см.

569. Сторона AB трикутника ABC на 1 см більша за сторону AC. Знайдіть сторони AB і AC, якщо $\angle C = 60°$, $\angle B = 45°$.

570. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 8 см. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо вона відноситься до радіуса описаного кола як $\sqrt{3} : 1$. Скільки розв'язків має задача?

571. Одна з діагоналей паралелограма дорівнює d і ділить його кут на частини, міри яких дорівнюють α і β. Знайдіть периметр паралелограма.

572. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює m, а кут при основі – α. Знайдіть довжину бісектриси кута при основі.

573. У прямокутному трикутнику довжина гіпотенузи дорівнює c, а градусна міра одного з гострих кутів – α. Знайдіть довжину бісектриси трикутника, що виходить з вершини прямого кута.

Вправи для повторення

574. Два кути трикутника дорівнюють 37° і 62°. Знайдіть усі зовнішні кути трикутника.

575. Один з кутів паралелограма вдвічі менший за інший. Знайдіть меншу діагональ паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 5 см і 8 см.

576. Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює a, а одна з діагоналей – d.

577. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a см і b см. Знайдіть відношення площ, на які ділить трикутник висота, проведена до гіпотенузи.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

578. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$. Розв'яжіть трикутник, якщо:

1) $AB = 8$ см, $\angle A = 30°$;
2) $AC = 4$ см, $\angle B = 45°$;
3) $AC = 10$ см, $\angle A = 60°$;
4) $AC = 2$ см, $BC = 2\sqrt{3}$ см;
5) $AB = 2$ см, $BC = \sqrt{3}$ см;
6) $AC = 3$ см, $AB = 6$ см.

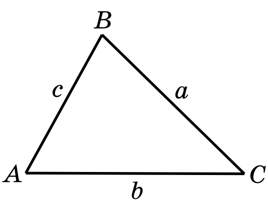
579. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$. Розв'яжіть цей трикутник (сторони у завданнях 1–3 знайдіть із точністю до сотих сантиметра, гострі кути у завданнях 4–6 – із точністю до градуса).

1) $AB = 10$ см, $\angle B = 37°$;
2) $BC = 7$ см, $\angle A = 83°$;
3) $BC = 6$ см, $\angle B = 18°$;
4) $AC = 10$ см, $BC = 6$ см;
5) $AB = 8$ см, $AC = 5$ см;
6) $BC = 3$ см, $AB = 7$ см.

Цікаві задачі для учнів неледачих

580. (*Всеукраїнська математична олімпіада, 1965 р.*) З деякої точки кола, описаного навколо прямокутника, проведено перпендикуляри до його діагоналей. Довести, що відстань між основами цих перпендикулярів не залежить від положення точки на колі.

§ 13. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ. ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ



Мал. 111

Нагадаємо, що розв'язати трикутник – означає знайти невідомі його сторони і кути за якими-небудь відомими сторонами і кутами. Раніше ми розв'язували прямокутні трикутники.

Під час розв'язування довільного трикутника ABC, де $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (мал. 111), використовують такі співвідношення:

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$;

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$;

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$;

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ (теорема косинусів);

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (теорема синусів).

Розглянемо чотири види задач на розв'язування трикутників. Невідомі сторони будемо знаходити з точністю до сотих, а невідомі кути – із точністю до мінути.

1. Розв'язування трикутників за двома сторонами і кутом між ними

Задача 1. Дано сторони трикутника a і b та кут C між ними. Знайти сторону c та кути A і B.

Розв'язання у загальному вигляді	Приклад
Д а н о: a, b, $\angle C$. З н а й т и: c, $\angle A$, $\angle B$. Р о з в' я з а н н я. 1. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$. 2. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Далі знаходимо кут A за допомогою калькулятора або таблиць. 3. $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$.	Д а н о: $a = 4$, $b = 7$, $\angle C = 40°$. З н а й т и: c, $\angle A$, $\angle B$. Р о з в' я з а н н я. 1. $c = \sqrt{4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7\cos 40°} \approx 4{,}70$. 2. $\cos A \approx \dfrac{7^2 + 4{,}70^2 - 4^2}{2 \cdot 7 \cdot 4{,}7} \approx 0{,}8372$, $\angle A \approx 33°09'$. 3. $\angle B \approx 180° - (33°09' + 40°) = 106°51'$.

2. Розв'язування трикутників за стороною і двома кутами

Задача 2. Дано сторону трикутника a і кути B і C. Знайти сторони трикутника b і c і кут A.

Розв'язання у загальному вигляді	Приклад
Д а н о: a, $\angle B$, $\angle C$. З н а й т и: $\angle A$, b, c. Р о з в' я з а н н я. 1. $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$. 2. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$; $b = \dfrac{a\sin B}{\sin A}$. 3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$; $c = \dfrac{a\sin C}{\sin A}$.	Д а н о: $a = 8$, $\angle B = 40°$, $\angle C = 80°$. З н а й т и: $\angle A$, b, c. Р о з в' я з а н н я. 1. $\angle A = 180° - (40° + 80°) = 60°$. 2. $b = \dfrac{8\sin 40°}{\sin 60°} \approx 5{,}94$. 3. $c = \dfrac{8\sin 80°}{\sin 60°} \approx 9{,}10$.

3. *Розв'язування трикутників за трьома сторонами*

Задача 3. Дано три сторони a, b і c трикутника ($|b - c| < a < b + c$). Знайти три кути A, B і C трикутника.

Розв'язання у загальному вигляді	**Приклад**
Дано: a, b, c. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Розв'язання. 1. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Далі знаходимо кут A за допомогою калькулятора або таблиць. 2. $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Далі знаходимо кут B за допомогою калькулятора або таблиць. 3. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$.	Дано: $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Розв'язання. 1. $\cos A = \dfrac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \dfrac{2}{3}$; $\angle A \approx 48°11'$. 2. $\cos B = \dfrac{7^2 + 9^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \dfrac{11}{21}$; $\angle B \approx 58°25'$. 3. $\angle C \approx 180° - (48°11' + 58°25') =$ $= 73°24'$.

4. *Розв'язування трикутників за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них*

Задача 4. Дано сторони трикутника a, b і кут A. Знайти сторону c трикутника та кути B і C.

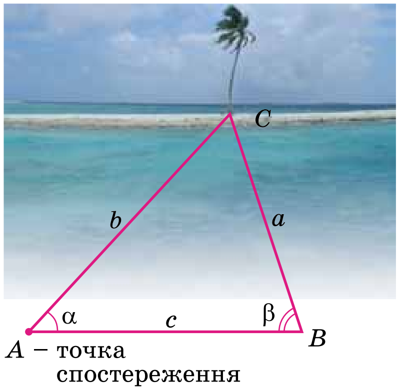
Розв'язання у загальному вигляді	**Приклад**
Дано: a, b, $\angle A$. Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$. Розв'язання. *I спосіб.* 1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. З цього рівняння знаходимо c. Задача може мати два, один або не мати жодного розв'язку. 2. $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Далі знаходимо кут B за допомогою калькулятора або таблиць. 3. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$.	Дано: $a = 10$, $b = 8$, $\angle A = 70°$. Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$. Розв'язання. *I спосіб.* 1. $10^2 = 8^2 + c^2 - 2 \cdot 8 \cdot c \cdot \cos 70°$. $c^2 - 5{,}47c - 36 = 0$; $c_1 \approx 9{,}33$; $c_2 \approx -3{,}86$ не задовольняє змісту задачі. Отже, $c \approx 9{,}33$. 2. $\cos B \approx \dfrac{10^2 + 9{,}33^2 - 8^2}{2 \cdot 10 \cdot 9{,}33} \approx 0{,}659$; $\angle B \approx 48°45'$. 3. $\angle C \approx 180° - (70° + 48°45') = 61°15'$.

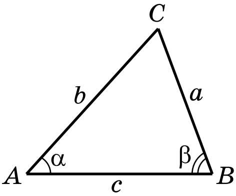
II спосіб. 1. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$; $\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$. Може існувати два, один або не існувати жодного кута, що задовольняли б останню рівність та нерівність $\angle A + \angle B < 180°$. 2. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$. 3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$; $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$.	*II спосіб.* 1. $\sin B = \dfrac{8 \sin 70°}{10} \approx 0{,}7518$; $\angle B \approx 48°45'$ або $\angle B \approx 180° - 48°45' = 131°15'$. Оскільки $\angle A + \angle B = 70° + 131°15' > 180°$, то $\angle B = 131°15'$ не є розв'язком задачі. 2. $\angle C \approx 180° - (70° + 48°45') = 61°15'$. 3. $c \approx \dfrac{10 \sin 61°15'}{\sin 70°} \approx 9{,}33$.

Ця задача, на відміну від трьох попередніх, які завжди мають єдиний розв'язок, може мати один, два або не мати жодного розв'язку.

Уміння розв'язувати трикутники допоможе і для розв'язування прикладних задач.

Задача 5 (*Вимірювання відстані до недоступної точки*). Знайти відстань від точки спостереження A до недоступної точки C (мал. 112).





Мал. 112

Р о з в' я з а н н я. Цю задачу ми вже розв'язували у 8-му класі за допомогою подібності трикутників. Розглянемо тепер інший спосіб – за допомогою теореми синусів.

1) Позначимо на місцевості точку B і виміряємо довжину відрізка AB. Нехай $AB = c$. Потім виміряємо (наприклад, за допомогою астролябії) кути A і B, нехай $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

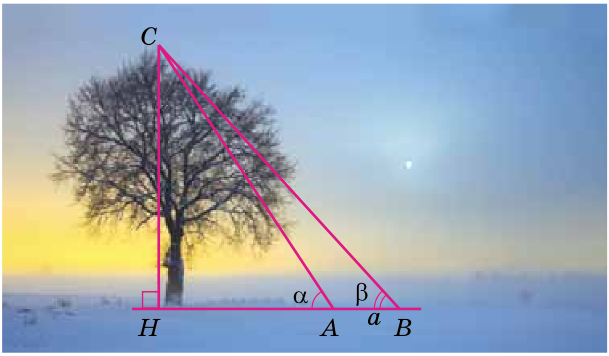
2) За теоремою синусів:

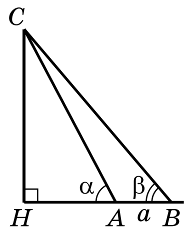
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

3) $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$, тому $\sin C = \sin(180° - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$. Остаточно отримаємо:

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Задача 6 (*Вимірювання висоти предмета, основа якого недоступна*). Знайти висоту дерева CH, якщо точка H – недоступна (мал. 113).





Мал. 113

Р о з в' я з а н н я. Цю задачу ми також розв'язували у 8-му класі за допомогою співвідношень між сторонами і кутами в прямокутних трикутниках CHA і CHB. Розглянемо ще один спосіб розв'язування.

1) На прямій, що проходить через основу предмета – точку H, виберемо дві точки A і B, відстань між якими дорівнює a. Виміряємо кути CAH і CBH, нехай $\angle CAH = \alpha$, $\angle CBH = \beta$.

2) Із трикутника ABC:

$$\frac{CA}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}.$$

Оскільки $\angle CAB = 180° - \alpha$, то $\angle ACB = 180° - (\beta + 180° - \alpha) = \alpha - \beta$.

Тоді $CA = \dfrac{a \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

3) Із трикутника CHA: $CH = AC \cdot \sin \alpha$. Тоді $CH = \dfrac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

1. Які співвідношення між сторонами і кутами трикутника використовуємо під час розв'язування трикутників?
2. Як розв'язати трикутник: 1) за двома сторонами і кутом між ними; 2) за стороною і двома кутами; 3) за трьома сторонами; 4) за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них?

2 Середній рівень

У задачах № 581–586, 592, 593 невідомі сторони знайдіть з точністю до сотих сантиметра, кути в разі використання калькулятора – з точністю до мінути або з точністю до градуса у разі використання таблиць.

581. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за двома сторонами і кутом між ними:
1) $AB = 7$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 60°$;
2) $AC = 8$ см, $BC = 9$ см, $\angle C = 46°$;
3) $BC = 10$ см, $AB = 6$ см, $\angle B = 117°$;
4) $AB = 3$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 129°$.

582. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за двома сторонами і кутом між ними:
1) $AC = 5$ см, $BC = 7$ см, $\angle C = 42°$;
2) $BC = 8$ см, $AB = 9$ см, $\angle B = 62°$;
3) $AB = 9$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 120°$;
4) $AC = 8$ см, $BC = 4$ см, $\angle C = 147°$.

583. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за стороною і двома кутами:
1) $AB = 8$ см, $\angle A = 37°$, $\angle B = 30°$;
2) $AC = 10$ см, $\angle A = 45°$, $\angle C = 92°$;
3) $BC = 6$ см, $\angle B = 12°$, $\angle A = 18°$;
4) $AB = 7$ см, $\angle A = 57°$, $\angle C = 62°$.

584. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за стороною і двома кутами:
1) $AC = 5$ см, $\angle A = 150°$, $\angle C = 8°$;
2) $BC = 4$ см, $\angle B = 108°$, $\angle A = 23°$;
3) $AB = 12$ см, $\angle B = 56°$, $\angle C = 94°$;
4) $AC = 9$ см, $\angle A = 63°$, $\angle C = 67°$.

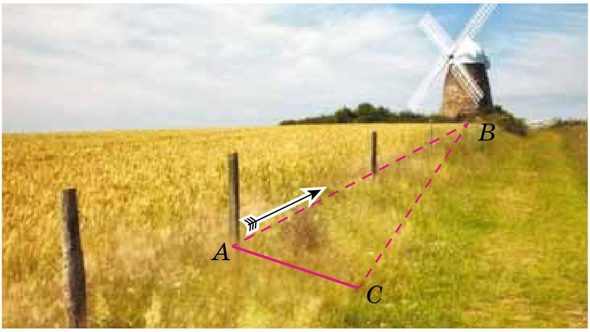
585. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за трьома сторонами:
1) $AB = 3$ см, $AC = 8$ см, $BC = 7$ см;
2) $AB = 9$ см, $AC = 8$ см, $BC = 13$ см.

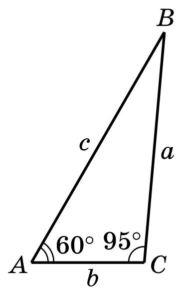
586. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за трьома сторонами:
1) $AB = 3$ см, $AC = 5$ см, $BC = 7$ см;
2) $AB = 10$ см, $AC = 6$ см, $BC = 7$ см.

587. Сторона паралелограма дорівнює 7 см і утворює з його діагоналлю завдовжки 8 см кут 67°. Знайдіть другу сторону паралелограма та його кути.

588. Діагональ паралелограма дорівнює 8 см і утворює кути 37° і 42° зі сторонами паралелограма. Знайдіть кути та сторони паралелограма.

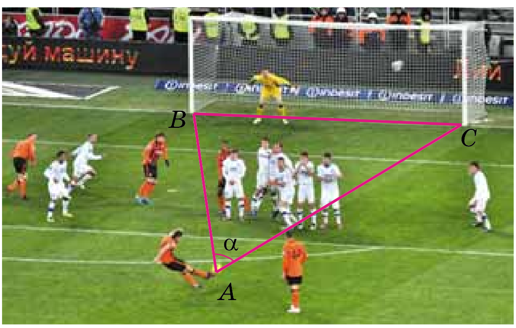
589. Щоб знайти відстань AB до млина (мал. 114), виміряли відстань AC = 36 м, $\angle A$ = 60° і $\angle C$ = 95°. Знайдіть відстань AB з точністю до сотих метра.

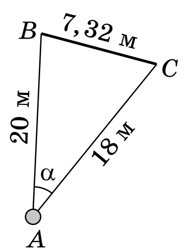




Мал. 114

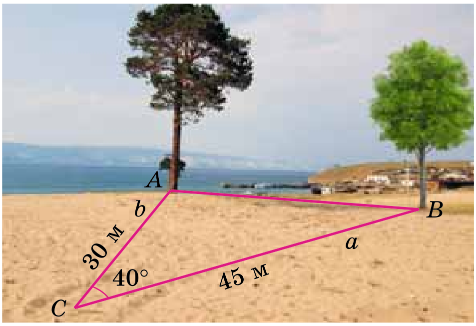
590. Футбольний м'яч знаходиться в точці A футбольного поля на відстанях 18 м і 20 м від основ B і C стійок воріт (мал. 115). Футболіст спрямовує м'яч у ворота. Знайдіть кут α (з точністю до градуса), під яким м'яч влучає у ворота, якщо ширина воріт дорівнює 7,32 м.

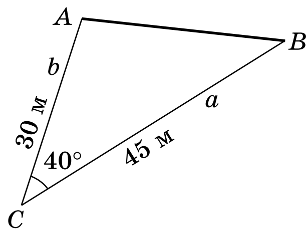




Мал. 115

591. Дальномір – прилад для знаходження відстані до об'єкта без безпосередніх вимірювань на місцевості. Використовується у фотографії, геодезії, військовій справі, астрономії. За допомогою дальноміра було виміряно відстані $AC = 30$ м і $BC = 45$ м, а за допомогою астролябії $\angle ACB = 40°$ (мал. 116). Більшою чи меншою за 30 м є відстань між двома недоступними точками A і B?





Мал. 116

3 Достатній рівень

592. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них:
1) $AC = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle A = 80°$;
2) $AC = 10$ см, $AB = 7$ см, $\angle B = 60°$;
3) $BC = 2$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 61°$;
4) $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, $\angle B = 30°$.

593. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них:
1) $AB = 12$ см, $BC = 5$ см, $\angle C = 120°$;
2) $AC = 8$ см, $BC = 9$ см, $\angle A = 40°$;
3) $AC = 4$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 50°$;
4) $BC = 6$ см, $AC = 5$ см, $\angle B = 17°$.

594. Сторона паралелограма дорівнює 6 см і утворює з діагоналями паралелограма кути 27° і 48°. Знайдіть другу сторону і кути паралелограма.

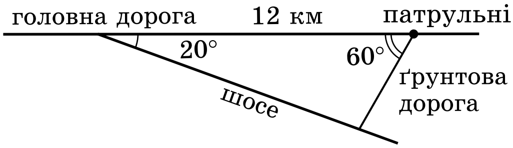
595. Діагоналі паралелограма дорівнюють 8 см і 10 см і перетинаються під кутом 70°. Знайдіть сторони і кути паралелограма.

596. AD і BC – основи рівнобічної трапеції $ABCD$, $AC = 6$ см, $\angle BAC = 52°$, $\angle CAD = 20°$. Знайдіть сторони і кути трапеції.

597. AD і BC – основи рівнобічної трапеції $ABCD$, $BD = 8$ см, $\angle ABD = 49°$, $\angle DBC = 62°$. Знайдіть сторони і кути трапеції.

4 Високий рівень

598. О 8:00 порушник правил дорожнього руху повернув з головної дороги і помчав уздовж шосе зі швидкістю 150 км/год. О 8:01 екіпаж патрульної поліції отримав наказ затримати порушника й помчав йому наперерız ґрунтовою дорогою зі швидкістю 80 км/год (мал. 117). Чи встигнуть патрульні зупинити порушника на перехресті шосе і ґрунтової дороги?

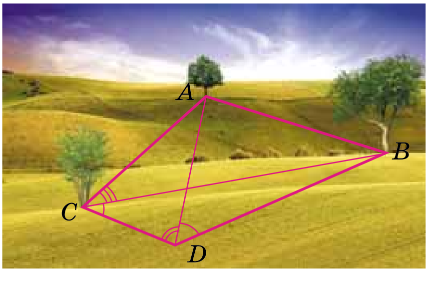


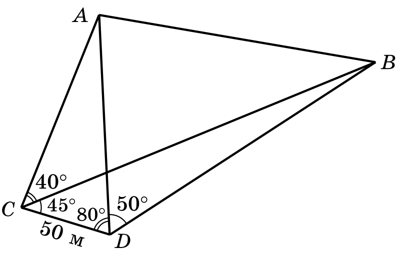
Мал. 117

599. З точки до прямої проведено дві похилі, які утворюють з прямою кути 50° і 70°. Відстань між основами похилих дорівнює 6 см. Знайдіть кут між похилими та довжини похилих із точністю до сотих сантиметра. Скільки випадків слід розглянути?

600. З точки до прямої проведено дві похилі, відстань між основами яких 7 см. Одна з них дорівнює 5 см і утворює з прямою кут 60°. Знайдіть другу похилу (з точністю до сотих см), кут між похилими та кут, що утворює друга похила з прямою (з точністю до градуса). Скільки випадків слід розглянути?

601. Щоб за відсутності дальноміра знайти відстань між двома недоступними точками A і B, вибрали дві доступні точки C і D, провели вимірювання й отримали, що $CD = 50$ м, $\angle ADB = 50°$, $\angle ADC = 80°$, $\angle ACB = 40°$, $\angle BCD = 45°$ (мал. 118). Знайдіть відстань AB (з точністю до метра).





Мал. 118

Вправи для повторення

602. Знайдіть діагональ квадрата, площа якого дорівнює 36 см^2.

603. Одна зі сторін прямокутника вдвічі більша за іншу, а його діагональ дорівнює 10 см. Знайдіть площу й периметр прямокутника.

604. Сусідні сторони паралелограма дорівнюють a і b, а його гострий кут дорівнює α. Знайдіть модуль різниці квадратів діагоналей паралелограма.

605. Складіть рівняння прямої, що є серединним перпендикуляром до відрізка AB, якщо $A(-3; 2)$, $B(5; 0)$.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

606. Знайдіть площу трикутника, сторона якого довжини a, а висота, проведена до неї, дорівнює h_a, якщо:
1) $a = 5$ см, $h_a = 8$ см; 2) $a = 4$ см, $h_a = 22$ мм.

607. Знайдіть площу паралелограма, сторона якого довжини a, а висота, проведена до неї, дорівнює h_a, якщо:
1) $a = 2$ см, $h_a = 3$ см; 2) $a = 8$ см, $h_a = 0{,}5$ дм.

Цікаві задачі для учнів неледачих

608. У трикутнику ABC $\angle C = 120°$, H – ортоцентр трикутника, O – центр описаного кола. Точка M – середина дуги ACB. Доведіть, що $HM = MO$.

§ 14. ФОРМУЛИ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

Нагадаємо, що у 8-му класі ми знаходили площу S трикутника за формулою

$$S = \frac{1}{2} a h_a,$$

де a – сторона трикутника; h_a – висота, проведена до неї.

Доведемо ще кілька формул для знаходження площі трикутника.

Т е о р е м а 1 (формула площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними). **Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними.**

Д о в е д е н н я. Нехай у трикутнику ABC $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$, S – площа трикутника. Доведемо, що

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Проведемо у трикутнику висоту AK, $AK = h$. Тоді

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

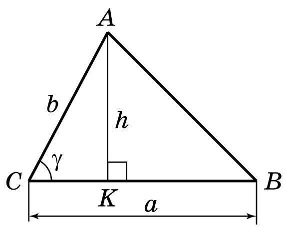
Якщо кут C – гострий (мал. 119), то із трикутника ACK маємо: $h = AK = AC\sin C = b\sin\gamma$.

Якщо кут C – тупий (мал. 120), то із трикутника ACK маємо: $h = AK = AC\sin ACK = b\sin(180 - \gamma) = b\sin\gamma$.

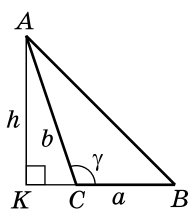
Якщо кут C – прямий (мал. 121), то $h = AK = AC = b = b \cdot 1 = b\sin 90° = b\sin\gamma$.

Отже, в усіх випадках $h = b\sin\gamma$, тобто

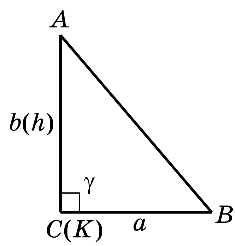
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma. \blacktriangle$$



Мал. 119

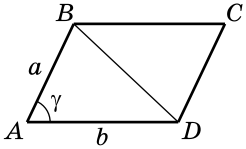


Мал. 120



Мал. 121

Н а с л і д о к. Площа паралелограма дорівнює добутку двох його сусідніх сторін на синус кута між ними.



Мал. 122

Д о в е д е н н я. У паралелограмі $ABCD$ проведемо діагональ BD (мал. 122). Оскільки $\triangle ABD = \triangle CDB$ (за трьома сторонами), то $S_{ABD} = S_{CDB}$. Тому

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2}ab\sin\gamma = ab\sin\gamma. \blacktriangle$$

Задача 1. Знайти площу рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює a.

Р о з в' я з а н н я. Нагадаємо, що ми вже знаходили площу рівностороннього трикутника у 8-му класі за формулою $S = \frac{1}{2}ah_a$. Знайдемо тепер площу цього трикутника й іншим способом, тобто за доведеною вище формулою.

Оскільки всі кути рівностороннього трикутника дорівнюють по 60°, маємо:

$$S = \frac{1}{2}a^2 \sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

В і д п о в і д ь. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Задача 2. Знайти площу трикутника, сторони якого дорівнюють 5 см, $\sqrt{3}$ см, $\sqrt{13}$ см.

Р о з в' я з а н н я. Нехай $a = 5$ см, $b = \sqrt{3}$ см, $c = \sqrt{13}$ см, $\angle C = \gamma$ (мал. 119).

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ тому } \gamma = 30°.$$

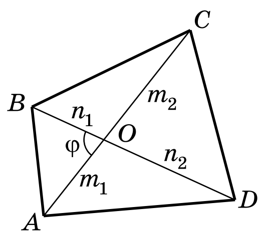
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{3}\sin 30° = \frac{5\sqrt{3}}{4} \text{ (см}^2\text{)}.$$

В і д п о в і д ь. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ см^2.

Зауважимо, що коли по косинусу кута неможливо знайти точне значення міри кута, тобто якщо кут γ виявиться не табличним, то знаходити сам кут γ не потрібно. Адже для знаходження площі достатньо знайти значення синуса кута, скориставшися формулою $\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma}$.

Задача 3. Довести, що площа будь-якого опуклого чотирикутника дорівнює половині добутку діагоналей чотирикутника на синус кута між ними.

Д о в е д е н н я. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AC = d_1$, $BD = d_2$, $\angle AOB = \varphi$, де O – точка перетину діагоналей (мал. 123), S – площа чотирикутника. Доведемо, що $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$.



Мал. 123

1) Нехай $AO = m_1$, $OC = m_2$, $BO = n_1$, $OD = n_2$. Тоді $AC = m_1 + m_2$, $BD = n_1 + n_2$.

Очевидно, що $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}$.

2) За доведеною вище формулою: $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}m_1n_1\sin\varphi$;

$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}n_1m_2\sin(180° - \varphi) = \frac{1}{2}n_1m_2\sin\varphi$;

$S_{\triangle COD} = \frac{1}{2}m_2n_2\sin\varphi$;

$S_{\triangle DOA} = \frac{1}{2}m_1n_2\sin(180° - \varphi) = \frac{1}{2}m_1n_2\sin\varphi$.

3) Маємо: $S = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle DOA} =$

$= \frac{1}{2}\sin\varphi(n_1m_1 + n_1m_2 + m_2n_2 + m_1n_2) =$

$= \frac{1}{2}(n_1(m_1 + m_2) + n_2(m_1 + m_2))\sin\varphi =$

$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(n_1 + n_2)\sin\varphi = \frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\varphi =$

$= \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$. ▲

Т е о р е м а 2 (формула Герона). **Площу S трикутника зі сторонами a, b і c можна знайти за формулою:**

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника.

Д о в е д е н н я. Скористаємося формулою $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

За теоремою косинусів: $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab}$.

Тоді $\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \sqrt{(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)} =$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)\left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{(c^2 - (a^2 - 2ab + b^2))(a^2 - 2ab + b^2 - c^2)}}{2ab} =$$

$$= \frac{\sqrt{(c^2 - (a-b)^2)((a+b)^2 - c^2)}}{ab} =$$

$$= \frac{1}{2ab}\sqrt{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)} =$$

$$= \frac{1}{2ab}\cdot\sqrt{16\cdot\frac{c-a+b}{2}\cdot\frac{c+a-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2}}.$$

Але $\frac{c+b-a}{2} = \frac{a+b+c-2a}{2} = \frac{a+b+c}{2} - a = p - a.$

Аналогічно $\frac{c+a-b}{2} = p - b,\ \frac{a+b-c}{2} = p - c.$

Тоді $\sin\gamma = \frac{1}{2ab}\cdot 4\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

Отже,

$$S = \frac{1}{2}ab\cdot\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \ \blacktriangle$$

Зауважимо, що формулою Герона зручно користуватися у випадку, коли довжини сторін a, b і c є раціональними числами.

Якщо ж серед сторін трикутника є хоч одна, довжина якої – ірраціональне число, то зручніше використовувати метод, запропонований для розв'язування задачі 2 у цьому параграфі.

За допомогою формули Герона, якщо відомо сторони, можна знаходити висоти трикутника, зокрема, використовуючи формулу:

$$h_a = \frac{2S}{a},$$

де $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, a – сторона, до якої проведено висоту.

Із цієї формули висоти приходимо до висновку, що

найбільшою висотою трикутника є та, що проведена до найменшої сторони; найменшою висотою є та, що проведена до найбільшої сторони.

Задача 4. Знайти найбільшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 25 см, 29 см і 6 см.

Р о з в' я з а н н я. Знайдемо площу S трикутника за формулою Герона. Оскільки $p = \frac{25+29+6}{2} = 30$ (см), то

$$S = \sqrt{30(30-25)(30-29)(30-6)} = 60\ (\text{см}^2).$$

Найбільшою висотою даного трикутника є та, що проведена до сторони завдовжки 6 см. Отже,

$$h = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 60}{6} = 20 \text{ (см)}.$$

В і д п о в і д ь. 20 см.

Т е о р е м а 3 (формула площі трикутника за радіусом описаного кола). **Площу S трикутника можна знайти за формулою**

$$\boldsymbol{S = \frac{abc}{4R},}$$

де a, b, c – сторони трикутника; R – радіус кола, описаного навколо трикутника.

Д о в е д е н н я. Скористаємося формулою $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

За узагальненою теоремою синусів: $2R = \frac{c}{\sin\gamma}$, де γ – кут, протилежний до сторони c трикутника. Звідси $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$.

Маємо: $S = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$. ▲

З доведеної формули отримаємо формулу для обчислення радіуса кола, описаного навколо трикутника:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Зауважимо, що цю формулу доцільно використовувати, коли відомо довжини всіх трьох сторін трикутника.

Радіус R кола, описаного навколо прямокутного трикутника, зручно знаходити за вивченою раніше формулою:

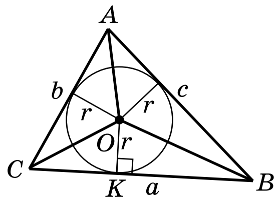
$$R = \frac{c}{2},$$

де c – гіпотенуза трикутника.

Т е о р е м а 4 (формула площі трикутника за радіусом вписаного кола). **Площу S трикутника можна знайти за формулою**

$$\boldsymbol{S = rp,}$$

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника; r – радіус кола, вписаного у трикутник.



Мал. 124

Д о в е д е н н я. Нехай O – центр кола, вписаного у $\triangle ABC$ (мал. 124), а точка K – точка дотику кола до сторони BC, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Оскільки $OK \perp BC$, то OK є висотою трикутника OBC. Тоді

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}ar.$$

Аналогічно $S_{\triangle AOC} = \dfrac{1}{2}br;\ S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}cr.$

Тоді $S = S_{\triangle OBC} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}ar + \dfrac{1}{2}br + \dfrac{1}{2}cr =$

$= \dfrac{1}{2}(a + b + c) \cdot r = \dfrac{a + b + c}{2} \cdot r = pr.$ ▲

Н а с л і д о к. **Площу S будь-якого описаного многокутника можна знайти за формулою**

$$S = rp,$$

де p – півпериметр многокутника; r – радіус кола, вписаного у многокутник.

З доведеної формули випливає формула для обчислення радіуса кола, вписаного у трикутник або в описаний многокутник:

$$r = \frac{S}{p}.$$

Радіус r кола, вписаного у прямокутний трикутник, зручно знаходити за формулою

$$r = \frac{a + b - c}{2},$$

де a і b – катети трикутника, c – його гіпотенуза.

Доведіть цю формулу самостійно.

Задача 5. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см. Знайти радіус R кола, описаного навколо трикутника, та радіус r кола, вписаного у трикутник.

Р о з в' я з а н н я. Знайдемо півпериметр трикутника:

$p = \dfrac{4 + 13 + 15}{2} = 16$ (см), та його площу за формулою Герона

$S = \sqrt{16(16 - 4)(16 - 13)(16 - 15)} = 24$ (см^2).

Отже, $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{4 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot 24} = \dfrac{65}{8} = 8{,}125$ (см),

$r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{24}{16} = 1{,}5$ (см).

Відповідь. $R = 8{,}125$ см, $r = 1{,}5$ см.

А ще раніше...


Герон Александрійський

Грецький математик Герон Александрійський, який жив у I ст. до н. е., багато уваги приділяв проблемам геодезії та практичному застосуванню геометрії і механіки. Хоча його праці мали більш енциклопедичний характер, Герона вважають видатним механіком того часу. Недарма за ним закріпилося прізвисько «Герон-механік».

Однією з праць Герона була «Геометрика», що є фактично збірником формул та відповідних їм завдань. У ній містилися вправи на обчислення площ квадратів, прямокутників і трикутників. У цій праці Герон наводить методику обчислення площі трикутника зі сторонами 13, 14 і 15, а в іншій своїй праці, яка має назву «Метрика», наводить доведення формули:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-a)}.$$

Саме тому цю формулу для обчислення площі трикутника за трьома його сторонами прийнято називати формулою Герона, проте вона була відома Архімеду ще у III ст. до н. е.

Відомі на той час правила для обчислення площ застосовували також грецькі, латинські й середньовічні землеміри і техніки.

1. Сформулюйте і доведіть теорему про формулу площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними.
2. Сформулюйте і доведіть формулу Герона.
3. Які співвідношення між сторонами трикутника і висотами, проведеними до них, ви знаєте?
4. Сформулюйте і доведіть формули знаходження площ трикутників за його радіусами вписаного та описаного кіл.
5. Запишіть формули для обчислення радіуса кола, описаного навколо трикутника, і радіуса кола, вписаного у трикутник.

1 Початковий рівень

609. (Усно.) Укажіть формули, за якими можна знайти площу трикутника:

1) $S = ab\sin\gamma$;
2) $S = \frac{1}{2}ah_a$;
3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
4) $S = \frac{a+b}{2}h$;
5) $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$;
6) $S = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

610. (Усно.) Укажіть формули, за якими можна знайти площу паралелограма:

1) $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$; 2) $S = ah_a$; 3) $S = \frac{1}{2}ah_a$; 4) $S = ab\sin\gamma$.

611. a і b – сторони трикутника, γ – кут між ними. Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $\gamma = 30°$;
2) $a = 7$ см, $b = 8$ см, $\gamma = 120°$.

612. a і b – сторони трикутника, γ – кут між ними. Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $\gamma = 45°$;
2) $a = 6$ см, $b = 2$ см, $\gamma = 150°$.

613. a і b – сторони паралелограма, γ – кут між ними. Знайдіть площу паралелограма, якщо:
1) $a = 7$ см, $b = 6$ см, $\gamma = 60°$;
2) $a = 6$ см, $b = 13$ см, $\gamma = 135°$.

614. Сторони паралелограма a і b, γ – кут між ними. Знайдіть площу паралелограма, якщо:
1) $a = 8$ см, $b = 6$ см, $\gamma = 30°$;
2) $a = 9$ см, $b = 12$ см, $\gamma = 120°$.

2 Середній рівень

615. Доведіть, що площу S ромба, сторона якого дорівнює a, а один з кутів – α, можна знайти за формулою $S = a^2\sin\alpha$.

616. Обчисліть площу ромба:
1) сторона якого дорівнює 4 см, а гострий кут – 45°;
2) сторона якого дорівнює 8 см, а тупий кут – 150°.

617. Обчисліть площу ромба:
1) сторона якого дорівнює 6 см, а гострий кут – 60°;
2) сторона якого дорівнює 10 см, а тупий кут – 135°.

618. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а кут при основі – 75°. Знайдіть площу трикутника.

619. Знайдіть площу рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює 8 см.

620. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 11 см, 25 см і 30 см.

621. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 4 см, 51 см і 53 см.

622. Знайдіть площу прямокутника, діагональ якого дорівнює 10 см, а кут між діагоналями – 30°.

623. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, діагональ якої дорівнює 8 см, а кут між діагоналями – 60°.

624. Знайдіть сторону BC трикутника ABC, якщо $AB = 8$ см, $\angle B = 45°$, $S_{ABC} = 6\sqrt{2}$ см².

625. Площа паралелограма дорівнює 24 см², одна з його сторін – 8 см, а один з кутів – 30°. Знайдіть невідому сторону паралелограма.

626. Дві сторони гострокутного трикутника дорівнюють 7 см і 16 см, а його площа дорівнює 28 см². Обчисліть кут між даними сторонами.

627. Дві сторони гострокутного трикутника дорівнюють 8 см і 10 см. Обчисліть кут між цими сторонами, якщо площа трикутника дорівнює $20\sqrt{2}$ см².

3 Достатній рівень

628. Знайдіть найменшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см.

629. Знайдіть найбільшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 5 см, 29 см і 30 см.

630. Висоти паралелограма дорівнюють 6 см і 8 см, а кут між сторонами дорівнює 30°. Знайдіть площу паралелограма.

631. Висота ромба дорівнює 8 см, а гострий кут – 60°. Знайдіть площу ромба.

632. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 150°, а його площа – 25 см². Знайдіть сторони трикутника.

633. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює $30°$, а його площа – 9 см^2. Знайдіть сторони трикутника.

634. Доведіть, що діагоналі паралелограма ділять його на чотири рівновеликих трикутники.

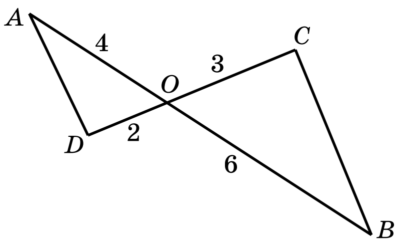
635. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 25 см, 29 см і 36 см.

636. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 13 см, 40 см і 51 см.

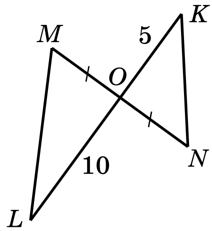
637. Знайдіть радіус кола, вписаного у трикутник зі сторонами 5 см, 5 см і 6 см.

638. Знайдіть радіус кола, вписаного у трикутник зі сторонами 5 см, 5 см і 8 см.

639. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O (мал. 125), $AO = 4$ см, $BO = 6$ см, $CO = 3$ см, $DO = 2$ см. Знайдіть відношення площ трикутників AOD і COB.



Мал. 125



Мал. 126

640. Відрізки MN і KL перетинаються в точці O (мал. 126), $MO = ON$, $KL = 5$ см, $LO = 10$ см. Знайдіть відношення площ трикутників KON і MOL.

641. Кути ромба відносяться як $1 : 3$. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 10 см.

4 Високий рівень

642. Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R, а два його кути – α і β. Знайдіть площу трикутника.

643. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 14 см і 22 см, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює 12 см.

644. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 16 см і 30 см, а медіана, проведена до більшої із цих сторін, дорівнює 25 см.

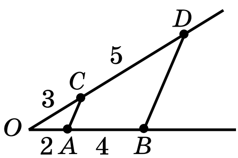
645. Розгляньте рівнобедрений трикутник з кутом 2α при вершині і бічною стороною a. Знайдіть площу цього трикутника двома способами та доведіть формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

646. У трикутнику ABC $AB = 10$ см, $AC = 6$ см. У якому відношенні бісектриса кута A ділить площу трикутника ABC?

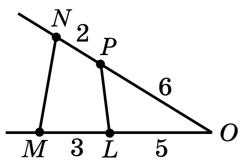
647. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 3, $\sqrt{5}$ і $\sqrt{10}$ см.

648. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 4, $\sqrt{11}$ і $\sqrt{13}$ см.

649. На сторонах OB і OD кута O відкладено відрізки $OA = 2$ см, $AB = 4$ см, $OC = 3$ см і $CD = 5$ см (мал. 127). Знайдіть відношення площі трикутника OBD до площі чотирикутника $ABDC$.



Мал. 127



Мал. 128

650. На сторонах OM і ON кута O відкладено відрізки $OL = 5$ см, $LM = 3$ см, $OP = 6$ см і $PN = 2$ см (мал. 128). Знайдіть відношення площі трикутника OLP до площі чотирикутника $MNPL$.

Вправи для повторення

651. Дві сторони трикутника дорівнюють $\sqrt{3}$ см і 2 см, а кут між ними дорівнює 30°. Знайдіть третю сторону трикутника.

652. Розв’яжіть $\triangle ABC$, якщо:

1) $AB = 8$ см, $BC = 7$ см, $\angle B = 82°$;

2) $AC = 5$ см, $\angle A = 32°$, $\angle C = 80°$.

653. Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см, дві інші утворюють кут 60°, а їх різниця дорівнює 5 см. Знайдіть периметр трикутника.

654. Дві сторони трикутника дорівнюють $\sqrt{3}$ см і 5 см. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо вона дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника. Скільки розв’язків має задача?

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

655. Знайдіть суму кутів опуклого:
1) дев'ятикутника; 2) двадцятикутника.

656. Усі кути опуклого восьмикутника між собою рівні. Знайдіть градусну міру одного із цих кутів.

657. Чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює:
1) 1620°; 2) 2000°?

658. 1) Сторона рівностороннього трикутника дорівнює 5 см. Знайдіть його периметр.
2) Периметр квадрата дорівнює 28 см. Знайдіть його сторону.

659. Побудуйте рівносторонній трикутник і квадрат. Навколо кожної із цих фігур опишіть коло і в кожну з них впишіть коло.

Цікаві задачі для учнів неледачих

660. Доведіть, що в будь-якому опуклому чотирикутнику сума довжин діагоналей менша від периметра.

Домашня самостійна робота № 3

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. У трикутнику проти сторони a лежить кут 70°, а проти сторони b – кут 80°. Укажіть правильну рівність.

А. $\frac{a}{\cos 70°} = \frac{b}{\cos 80°}$; **Б.** $\frac{a}{\sin 70°} = \frac{b}{\sin 80°}$;

В. $\frac{a}{70°} = \frac{b}{80°}$; **Г.** $\frac{a}{\sin 80°} = \frac{b}{\sin 70°}$.

2. Сторони трикутника завдовжки a і b утворюють між собою кут γ. Якщо $a = 6$ см, $b = 10$ см, $\gamma = 45°$, то площа трикутника дорівнює ...

А. $15\sqrt{2}$ см²; **Б.** $30\sqrt{2}$ см²; **В.** 60 см²; **Г.** $60\sqrt{2}$ см².

3. Сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 5 см, а один з його кутів – 120°. Знайдіть площу паралелограма.

А. 40 см²; **Б.** $40\sqrt{3}$ см²; **В.** $10\sqrt{3}$ см²; **Г.** $20\sqrt{3}$ см².

4. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 15 см, а кут між ними – 60°. Знайдіть третю сторону трикутника.

А. 14 см; **Б.** 13 см; **В.** 17 см; **Г.** $\sqrt{379}$ см.

5. У трикутнику ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$, $BC = 8\sqrt{2}$ см. Знайдіть AC.

А. 8 см; **Б.** $8\sqrt{3}$ см; **В.** 16 см; **Г.** $16\sqrt{2}$ см.

6. Знайдіть найбільший кут трикутника, сторони якого дорівнюють 7 см, 8 см і 13 см.

А. 90°; **Б.** 120°; **В.** 135°; **Г.** 150°.

3 **7.** Одна зі сторін трикутника дорівнює 14 см, дві інші утворюють кут 120°, а їх різниця дорівнює 4 см. Знайдіть периметр трикутника.

А. 30 см; **Б.** 32 см; **В.** 28 см; **Г.** 34 см.

8. У трикутнику ABC $\angle B = 30°$, $AC = 2\sqrt{2}$ см, $BC = 4$ см. Знайдіть $\angle A$.

А. 30°; **Б.** 45°; **В.** 60°; **Г.** 45° або 135°.

9. Знайдіть найменшу висоту трикутника зі сторонами завдовжки 11 см, 13 см і 20 см.

А. 12 см; **Б.** $10\frac{2}{13}$ см; **В.** $6\frac{3}{5}$ см; **Г.** $13\frac{1}{5}$ см.

4 **10.** У трикутнику ABC $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см. На сторонах AB і AC відповідно взято точки K і L такі, що $AK = 2$ см, $AL = 5$ см. Знайдіть довжину відрізка KL.

А. 4 см; **Б.** $\sqrt{17}$ см; **В.** $\sqrt{41}$ см; **Г.** 5 см.

11. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 16 см. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо її відношення до радіуса описаного кола дорівнює $\sqrt{3} : 1$.

А. 14 см; **Б.** 16 см; **В.** 14 см або $2\sqrt{97}$ см; **Г.** 18 см.

12. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 9 см, а медіана, що проведена до третьої сторони, – 4 см. Знайдіть менший з відрізків, на які бісектриса трикутника ділить цю сторону.

А. 6,125 см; **Б.** 6,5 см; **В.** 6 см; **Г.** 7,875 см.

Завдання для перевірки знань № 3 до § 11–14

1 **1.** У трикутнику проти сторони a лежить кут 20°, а проти сторони b – кут 70°. Які з рівностей правильні:

1) $\frac{a}{\sin 70°} = \frac{b}{\sin 20°}$; 2) $\frac{a}{\sin 20°} = \frac{b}{\sin 70°}$;

3) $\frac{a}{\cos 20°} = \frac{b}{\cos 70°}$; 4) $\frac{a}{b} = \frac{\sin 20°}{\sin 70°}$?

2. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 9 см, а кут між ними – 60°. Знайдіть площу трикутника.

3. Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 5 см, а один з кутів – 135°. Знайдіть площу паралелограма.

2 **4.** Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 10 см, а кут між ними дорівнює 120°. Знайдіть третю сторону трикутника.

5. У трикутнику ABC $AB = 6\sqrt{2}$, $\angle C = 30°$, $\angle A = 45°$. Знайдіть довжину сторони BC.

6. Розв'яжіть $\triangle ABC$, якщо $AB = 8$ см, $AC = 9$ см, $BC = 5$ см (невідомі кути знайдіть з точністю до градуса).

3 **7.** Одна зі сторін трикутника дорівнює 13 см, дві інші утворюють кут 60°, а їх різниця дорівнює 7 см. Знайдіть периметр трикутника.

8. Знайдіть найбільшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см.

4 **9.** Дві сторони трикутника дорівнюють $6\sqrt{2}$ см і 2 см. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо вона відноситься до радіуса описаного кола як $\sqrt{2} : 1$. Скільки розв'язків має задача?

Додаткові завдання

4 **10.** У трикутнику ABC $AB = 7$ см, $BC = 6$ см, $AC = 5$ см. На сторонах BC і CA відповідно позначено точки M і N так, що $CM = 5$ см, $CN = 3$ см. Знайдіть довжину відрізка MN.

11. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 16 см і 38 см, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює 25 см.

Вправи для повторення розділу 3

До § 11

1 **661.** Сторони трикутника a, b, c лежать відповідно проти кутів A, B, C. Які з рівностей правильні:

1) $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; 2) $\cos C = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{2ab}$;

3) $\cos B = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$; 4) $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$?

662. Знайдіть сторону AC трикутника ABC, якщо:
1) $AB = 8$ см, $BC = 15$ см, $\angle B = 60°$;
2) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 120°$.

663. Знайдіть середній за величиною кут трикутника зі сторонами 3 см, 7 см і 8 см.

664. Одна з бічних сторін трапеції дорівнює 10 см і утворює з меншою основою кут 120°. Знайдіть діагоналі трапеції, якщо її основи дорівнюють 6 см і 16 см.

665. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а кут при основі – 30°. Знайдіть основу трикутника.

666. Знайдіть медіану рівнобедреного трикутника, проведену до бічної сторони, якщо основа трикутника дорівнює 6 см, а бічна сторона – 8 см.

667. Знайдіть суму квадратів діагоналей ромба, сторона якого дорівнює 10 см.

668. Дві сторони трикутника відносяться як $\sqrt{3} : 2$, а кут між ними 30°. Знайдіть ці сторони, якщо третя сторона дорівнює 5 см.

669. Дві сторони трикутника 6 см і 14 см, а кут проти більшої з них дорівнює 120°. Знайдіть периметр трикутника.

670. Визначте вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний), якщо відношення його сторін дорівнює $10 : 14 : 19$.

671. Для трикутника ABC справджується рівність $c^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab$. Знайдіть градусну міру кута C.

672. Дві сторони трикутника дорівнюють 8 см і 3 см, а кут між ними – 60°. Знайдіть довжину медіани, проведеної до третьої сторони трикутника.

673. Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см і лежить проти кута 60°. Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо одна з його середніх ліній дорівнює 3 см.

674. У трикутнику зі сторонами 3 см, 4 см і 6 см проведено медіану до більшої сторони. Визначте косинус кута, що утворює ця медіана з меншою стороною трикутника.

675. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює m, а кут при основі – α. Знайдіть довжину медіани, проведеної до бічної сторони трикутника.

676. Сторони гострокутного трикутника ABC дорівнюють a, b і c. Знайдіть довжину проекції сторони b на сторону a.

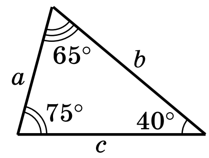
677. Навколо чотирикутника, сторони якого в порядку слідування дорівнюють a, b, c і d, можна описати коло. Знайдіть косинус кута між сторонами a і b.

678. Доведіть, що в будь-якому трикутнику відношення суми квадратів сторін до суми квадратів медіан дорівнює $\frac{4}{3}$.

679. Для медіан трикутника m_1, m_2, m_3 справджується рівність $m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2$. Доведіть, що трикутник прямокутний.

До § 12

680. Запишіть теорему синусів для трикутника, зображеного на малюнку 129.



Мал. 129

681. У трикутнику ABC $\angle A = 45°$, $\angle B = 75°$. Знайдіть відношення довжини сторони BC до довжини сторони AB.

682. У трикутнику ABC $\angle A = 120°$, $\angle B = 45°$, $AC = 8\sqrt{6}$ см. Знайдіть BC.

683. У трикутнику ABC $AC = 6\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

684. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 12 см, а кут при основі – 30°.

685. Кути трикутника пропорційні числам 1, 2, 3. Знайдіть відношення сторін трикутника.

686. Дві сторони гострокутного трикутника дорівнюють $10\sqrt{2}$ см і $10\sqrt{3}$ см, а радіус кола, описаного навколо трикутника, – 10 см. Знайдіть кути трикутника.

687. У трикутнику ABC $AC = 10$ см, $BC = 7$ см. Чи можливо, що:

1) $\sin B = \frac{2}{3}$; 2) $\sin A = \frac{4}{5}$?

688. Сторона трикутника у $\sqrt{3}$ разів більша за радіус кола, описаного навколо трикутника. Знайдіть кут, що лежить проти цієї сторони.

689. Два кути трикутника дорівнюють α і β. Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R. Знайдіть периметр трикутника.

690. Доведіть, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну йому сторону на частини, обернено пропорційні синусам прилеглих до неї кутів.

691. Сторони трикутника дорівнюють 2 см, 3 см і 4 см. Знайдіть радіус кола, що проходить через кінці більшої сторони і середину меншої сторони.

692. У трикутнику ABC $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$, $AC = b$. Знайдіть довжину бісектриси трикутника AL.

693. Сторона квадрата дорівнює a. Знайдіть радіус кола, що проходить через вершину квадрата, середину сторони, що не містить цієї вершини, і точку перетину діагоналей квадрата.

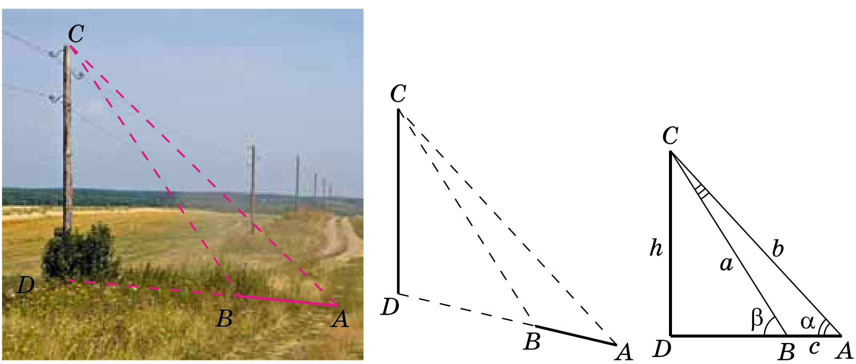
До § 13

2 **694.** Розв'яжіть трикутник ABC, якщо:

1) $BC = 3$ см, $AB = 4$ см, $\angle B = 58°$;
2) $AB = 7$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 139°$;
3) $BC = 4$ см, $\angle B = 48°$, $\angle C = 115°$;
4) $AB = 10$ см, $\angle A = 9°$, $\angle C = 97°$;
5) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $AC = 7$ см;
6) $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 6$ см.

Невідомі сторони знайдіть із точністю до сотих сантиметра, а невідомі кути – із точністю до мінути (у разі використання калькулятора) або з точністю до градуса (у разі використання таблиць).

695. Щоб знайти висоту CD стовпа лінії електропередачі, основа якого недоступна, виміряли відстань $AB = 2$ м та кути A і B: $\angle A = 35°$; $\angle B = 60°$ (мал. 130). Знайдіть висоту стовпа CD двома способами (знайшовши спочатку BC або знайшовши спочатку AC).



Мал. 130

696. Розв'яжіть $\triangle ABC$, якщо:
1) $AB = 7$ см, $AC = 8$ см, $\angle B = 50°$;
2) $AB = 4$ см, $BC = 5$ см; $\angle A = 110°$;
3) $BC = 2$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 35°$;
4) $AB = 7$ см, $BC = 8$ см, $\angle C = 60°$.
Невідомі сторони знайдіть із точністю до сотих сантиметра, а невідомі кути – із точністю до мінути (у разі використання калькулятора) або з точністю до градуса (у разі використання таблиць).

697. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 10 см. Кут між діагоналлю трапеції і бічною стороною дорівнює 60°, а між діагоналлю і основою – 40°. Знайдіть основи трапеції і її діагональ.

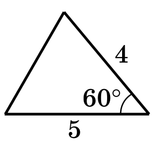
698. Розв'яжіть трикутник ABC, якщо:
1) $BC = 10$ см, $AC = 15$ см, CM – медіана, $CM = 11$ см;
2) $BC = 12$ см, AH – висота, $AH = 6$ см, AM – медіана, $AM = 10$ см.

699. Спортивний літак летить по замкненому маршруту, траєкторія якого має форму трикутника, у якого два кути дорівнюють 100° і 50°. Відстань, що є довжиною сторони, яка лежить проти третього кута, літак долає за 1 год. За який час літак подолає весь маршрут, якщо його швидкість є сталою? Відповідь округліть до хвилин.

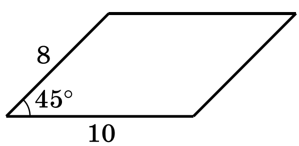
700. Три дороги утворюють трикутник ABC, у якого $\angle A = 20°$, $\angle B = 145°$, причому AB – шосе, AC і BC – ґрунтові дороги. Швидкість по шосе вдвічі більша за швидкість по ґрунтовій дорозі. Водій хоче якнайшвидше потрапити з пункту A в пункт C. Який маршрут має обрати водій?

До § 14

701. Знайдіть площі трикутника і паралелограма, зображених на малюнках 131 і 132.



Мал. 131



Мал. 132

702. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $AB = 6$ см, $AC = 10$ см, а зовнішній кут при вершині A дорівнює 30°.

703. Знайдіть гострий кут ромба, сторона якого дорівнює 6 см, а площа – 18 см^2.

704. Обчисліть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює $8\sqrt{3}$ см, а кут між бічними сторонами – 120°.

705. Знайдіть середню за довжиною висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 26 см, 28 см і 30 см.

706. Сторони паралелограма дорівнюють 16 см і 10 см, а кут між висотами паралелограма, проведеними з однієї вершини, – 120°. Знайдіть площу паралелограма.

707. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, і радіус кола, вписаного у трикутник, якщо сторони трикутника дорівнюють 8 см, 26 см і 30 см.

708. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а висота, проведена до неї, – 16 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

709. Одна зі сторін трикутника вдвічі більша за іншу, а кут між цими сторонами дорівнює 60°. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо його площа $8\sqrt{3}$ см^2.

710. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 4 см, а його площа – $3\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

711. Площа трикутника 5 см^2, а дві його сторони дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть площі трикутників, на які він ділиться бісектрисою кута між даними сторонами.

712. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють $\sqrt{5}$ см, $\sqrt{6}$ см і $\sqrt{7}$ см.

713. AM – медіана трикутника ABC. Знайдіть площу трикутника AMB, якщо $AB = 16$ см, $AC = 10$ см, $\angle BAC = 120°$.

714. Три кола, радіуси яких дорівнюють 6 см, 7 см і 8 см, попарно дотикаються одне до одного. Знайдіть площу трикутника, вершинами якого є центри даних кіл.

715. У трикутник зі сторонами 12 см, 50 см і 58 см вписано коло, а центр кола з'єднано з вершинами трикутника. Знайдіть площі трьох отриманих трикутників.

716. Діагоналі паралелограма дорівнюють 40 см і 74 см, а одна з його сторін – 51 см. Знайдіть площу паралелограма.

717. Основи трапеції дорівнюють 25 см і 4 см, а бічні сторони – 13 см і 20 см. Знайдіть висоту трапеції.

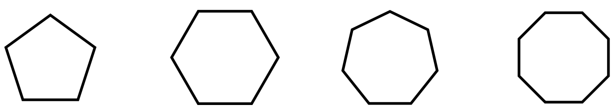
Розділ 4 ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

У цьому розділі ви:
- **пригадаєте** формули довжини кола і площі круга;
- **ознайомитеся** з поняттями правильного многокутника, сектора і сегмента круга;
- **дізнаєтеся** формули радіусів вписаних і описаних кіл для правильних многокутників, довжини дуги кола, площ сектора і сегмента;
- **навчитеся** будувати правильні многокутники.

§ 15. ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ. ФОРМУЛИ РАДІУСІВ ВПИСАНИХ І ОПИСАНИХ КІЛ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОКУТНИКІВ

Правильним многокутником **називають опуклий многокутник, у якого всі сторони між собою рівні і всі кути між собою рівні.**

Прикладами правильних многокутників є рівносторонній трикутник і квадрат. На малюнку 133 зображено правильні п'ятикутник, шестикутник, семикутник і восьмикутник.



Мал. 133

Оскільки сума кутів будь-якого опуклого n-кутника дорівнює $180°(n - 2)$, а всі кути правильного многокутника рівні між собою, то неважко знайти міру такого кута.

Якщо α_n – кут правильного многокутника, то

$$\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}.$$

Наприклад, кут правильного трикутника $\alpha_3 = \dfrac{180°(3-2)}{3} = 60°$;

правильного чотирикутника (квадрата) $\alpha_4 = \dfrac{180°(4-2)}{4} = 90°$, це узгоджується з тим, що відомо з попередніх класів.

Задача 1. Знайти кількість вершин правильного многокутника, якщо його зовнішній кут дорівнює 45°.

Р о з в’ я з а н н я. Оскільки зовнішній кут правильного многокутника дорівнює 45°, то легко знайти його внутрішній кут: $\alpha_n = 180° - 45° = 135°$.

Маємо рівняння: $135° = \dfrac{180°(n-2)}{n}$, звідки $n = 8$.

В і д п о в і д ь. 8.

Задачу 1 можна було б розв’язати іншим способом, якщо знати формулу, яка пов’язує градусну міру зовнішнього кута правильного многокутника β_n з кількістю його вершин (сторін). Маємо:

$$\beta_n = 180° - \alpha_n = 180° - \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{180°n - 180°n + 360°}{n} =$$

$$= \frac{360°}{n}.$$

Отже,

якщо β_n – зовнішній кут правильного n-кутника, то

$$\beta_n = \frac{360°}{n}.$$

За цією формулою задачу 1 можна розв’язати простіше. Дійсно, $n = \dfrac{360°}{\beta_n} = \dfrac{360°}{45°} = 8$.

Нагадаємо, що

коло називають описаним навколо многокутника, якщо всі його вершини лежать на колі;

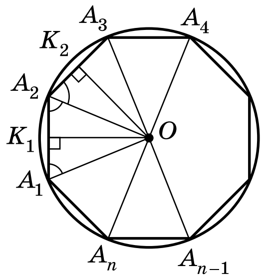
коло називають вписаним у многокутник, якщо всі його сторони дотикаються до кола.

Т е о р е м а (про коло, описане навколо правильного многокутника, і коло, вписане в нього). **Якщо многокутник правильний, то навколо нього можна описати коло і в нього можна вписати коло.**

Д о в е д е н н я. Нехай $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ – правильний n-кутник (мал. 134).

1) З вершин A_1 і A_2 проведемо бісектриси кутів n-кутника. Нехай вони перетнулися в точці O. Трикутник A_1OA_2 – рівнобедрений, бо $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{\alpha_n}{2}$.

2) Сполучимо точку O з вершиною A_3, $\angle OA_2A_3 = \frac{\alpha_n}{2}$ (бо A_2O – бісектриса кута $A_1A_2A_3$). Тоді $\triangle A_1A_2O = \triangle A_3A_2O$ (за двома сторонами і кутом між ними). Отже, $A_1O = A_2O = A_3O$.



Мал. 134

3) Сполучаючи всі вершини даного n-кутника з точкою O і встановлюючи послідовно рівність кожної наступної пари трикутників, отримаємо, що $A_1O = A_2O = A_3O = \ldots = A_{n-1}O = A_nO$. Це означає, що всі вершини цього правильного n-кутника рівновіддалені від точки O, а тому точка O є центром описаного навколо нього кола, а OA_1 – радіусом цього кола.

4) Проведемо висоти OK_1 і OK_2 в рівних між собою рівнобедрених трикутниках A_1A_2O і A_3A_2O до основ A_1A_2 і A_2A_3 відповідно. $\triangle OK_1A_1 = \triangle OK_2A_2$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому $OK_1 = OK_2$.

5) Аналогічно доводимо, що рівними між собою є висоти всіх рівнобедрених трикутників, вершиною яких є точка O, а основою – сторона правильного многокутника. Усі сторони даного правильного многокутника рівновіддалені від точки O, а тому точка O – центр кола, вписаного в цей многокутник, а OK_1 – радіус цього кола. ▲

Наслідок 1. **Центри вписаного і описаного кіл правильного многокутника збігаються.**

Цю точку називають *центром правильного многокутника*. На малюнку 134 точка O – центр многокутника.

Наслідок 2. **Коло, вписане у правильний многокутник, дотикається до сторін многокутника у їх серединах.**

Кут між двома радіусами описаного кола, кінцями яких є сусідні вершини правильного многокутника, називають *центральним кутом правильного многокутника*.

На малюнку 134 центральними кутами правильного n-кутника є кути A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, ..., $A_{n-1}OA_n$, A_nOA_1. Усі вони рівні між собою (за доведеною теоремою) і дорівнюють по $\frac{360^\circ}{n}$.

Нехай γ_n – центральний кут правильного n-кутника, тоді

$\gamma_n = \dfrac{360°}{n}$, де γ_n – центральний кут правильного n-кутника.

Задача 2. Знайти площу правильного n-кутника, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює R.

Р о з в’ я з а н н я. Нехай S_n – площа правильного n-кутника, S_1 – площа трикутника A_1OA_2 (мал. 134).

Тоді $S_n = n \cdot S_1$. Знайдемо S_1:

$$S_1 = \frac{1}{2} OA_1 \cdot OA_2 \cdot \sin A_1OA_2 = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360°}{n}.$$

Маємо: $S_n = n \cdot \dfrac{1}{2} R^2 \sin \dfrac{360°}{n} = \dfrac{n}{2} R^2 \sin \dfrac{360°}{n}$.

В і д п о в і д ь. $\dfrac{n}{2} R^2 \sin \dfrac{360°}{n}$.

Оскільки в правильний многокутник можна вписати коло, то його площу S_n за наслідком з теореми про площу трикутника за радіусом вписаного кола можна знайти і так:

$S_n = pr$,

де p – півпериметр n-кутника; r – радіус вписаного в нього кола.

Нехай $A_1A_2 = a_n$ – сторона правильного n-кутника, $OA_1 = R$ – радіус описаного навколо нього кола, $OK_1 = r$ – радіус вписаного в нього кола (мал. 134).

Тоді $A_1K_1 = \dfrac{a_n}{2}$, $\angle A_1OK_1 = \dfrac{\angle A_1OA_2}{2} = \dfrac{360°}{n} : 2 = \dfrac{180°}{n}$.

Із трикутника A_1OK_1:

1) $r = OK_1 = \dfrac{A_1K_1}{\operatorname{tg} \angle A_1OK_1} = \dfrac{a_n}{2 \operatorname{tg} \dfrac{180°}{n}}$.

2) $R = OA_1 = \dfrac{A_1K_1}{\sin \angle A_1OK_1} = \dfrac{a_n}{2 \sin \dfrac{180°}{n}}$.

3) $r = OK_1 = OA_1 \cos \angle A_1OK_1 = R \cos \dfrac{180°}{n}$.

Систематизуємо отримані формули в таблицю та подамо в ній також формули радіусів вписаного й описаного кіл правильного трикутника, чотирикутника (квадрата), шестикутника.

Загальна формула	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
$r = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$	$r = \dfrac{a_3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$r = \dfrac{a_4}{2}$	$r = \dfrac{a_6\sqrt{3}}{2}$
$R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$	$R = \dfrac{a_3}{\sqrt{3}} = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$R = \dfrac{a_4}{\sqrt{2}} = \dfrac{a_4\sqrt{2}}{2}$	$R = a_6$
$r = R\cos\dfrac{180^\circ}{n}$	$r = \dfrac{R}{2}$	$r = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$	$r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Запам'ятовувати ці формули необов'язково, але треба вміти їх виводити.

Задача 3. Знайти радіуси вписаного й описаного кіл правильного трикутника, якщо їх різниця дорівнює 6 см. Чому дорівнює сторона цього трикутника?

Р о з в' я з а н н я. Нехай $R = x$ см, тоді $r = (x - 6)$ см.

Оскільки в правильному трикутнику $r = \dfrac{R}{2}$, то маємо рівняння: $x - 6 = \dfrac{x}{2}$, звідки $x = 12$ (см).

Отже, $R = 12$ см, $r = 6$ см, $a_3 = R\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ (см).

В і д п о в і д ь. $R = 12$ см, $r = 6$ см, $a_3 = 12\sqrt{3}$ см.

Розглянемо, як за допомогою циркуля і лінійки без поділок побудувати правильні трикутник, чотирикутник і шестикутник, вписані в коло.

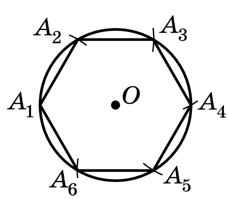
Задача 4. Побудувати правильний шестикутник, вписаний в коло.

Р о з в' я з а н н я. Ураховуючи, що $a_6 = R$, побудову виконаємо у такій послідовності.

1) Проведемо довільне коло (мал. 135).

2) Позначимо на колі довільну точку A_1 – одну з вершин правильного шестикутника.

3) З точки A_1, як із центра радіусом, що дорівнює радіусу кола, зробимо на колі по обидва боки від точки A_1 засічки й отримаємо точки A_2 і A_6.



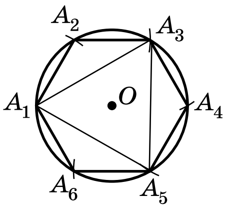
Мал. 135

4) Продовжуємо робити засічки від отриманих точок тим самим радіусом, отримуючи вершини A_3, A_4, A_5, і сполучаємо їх.

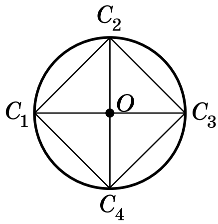
Отримаємо правильний шестикутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Задача 5. Побудувати правильний трикутник, вписаний в коло.

Р о з в' я з а н н я. Для побудови правильного вписаного трикутника треба відрізками сполучити вершини правильного вписаного шестикутника через одну (мал. 136). Отримаємо правильний трикутник $A_1A_3A_5$.



Мал. 136



Мал. 137

Задача 6. Побудувати правильний чотирикутник (квадрат), вписаний у коло.

Р о з в' я з а н н я. Для побудови вписаного чотирикутника (квадрата) достатньо через центр кола провести дві взаємно перпендикулярні прямі. Вони перетнуть коло у вершинах квадрата (мал. 137). Маємо квадрат $C_1C_2C_3C_4$.

А ще раніше...

У стародавніх єгипетських та вавилонських пам'ятках зустрічаються правильні чотирикутники, п'ятикутники і восьмикутники у вигляді зображень на стінах та прикрас, які висічено з каменя.

Давньогрецькі математики виявляли цікавість до правильних многокутників та їх побудови ще із часів Піфагора. Поділ кола на деяку кількість рівних частин для побудови правильних многокутників мав важливе значення для піфагорійців.

Учення про правильні многокутники, що розпочалося у школі Піфагора та продовжило розвиватися у V–IV ст. до н. е., було систематизовано Евклідом у четвертій книзі «Начал». За допомогою циркуля і лінійки Евклід умів будувати правильні n-кутники для n = 3, 4, 5, 6, 15. Крім того, Евклід визначив два критерії побудови правильних многокутників. Перший полягав у тому, що коли відомо, як побудувати правильний n-кутник, то можна побудувати і правильний $2n$-кутник, для чого, очевидно, кожну з дуг, що міститься між двома сусідніми вершинами правильного n-кутника, треба ділити навпіл. Евклід указав і другий критерій. Якщо відомо, як будувати правильні многокутники з кількістю сторін j і s, а j і s – взаємно прості числа, то можна побудувати правильний многокутник з $j \times s$ сторонами. Таким чином, можна дійти висновку, що давні вчені вміли будувати многокутники з $2^m \cdot 3^{k_1} \cdot 5^{k_2}$ сторонами, де m – ціле невід'ємне число, а k_1 і k_2 набувають значень 0 або 1.

Остаточне розв'язання задачі про те, як можна побудувати правильні n-кутники за допомогою тільки циркуля і лінійки, належить видатному німецькому математику Карлу Фрідріху Гаусу (1777–1855). У віці 19 років Гаус довів, що за допомогою циркуля і лінійки можна поділити коло на просте число N рівних частин, таке, що обчислюється за формулою $N = 2^{2^n} + 1$, де n – натуральне число або нуль.

Після цього, у 1801 р., Гаус засобами алгебри довів, що за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати лише такі правильні n-кутники, де число n можна розкласти на множники у вигляді:

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots \cdot p_m,$$

де k – ціле невід'ємне число, а $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – прості числа вигляду $2^{2^t} + 1$ (де t – ціле невід'ємне число)[1].

Відкриття Гауса наблизило математиків до висновку, що, окрім раніше відомих правильних многокутників, які можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки, з кількістю вершин, що дорівнює 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, …, за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати й правильні многокутники, кількість вершин яких дорівнює 17, 34, 68, 126, 252, 257, … . Натомість неможливо за допомогою лише циркуля і лінійки побудувати правильний многокутник, у якого 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 27, 28, … вершин.

1. Що називають правильним многокутником?
2. Чому дорівнює кут правильного n-кутника?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про коло, описане навколо правильного многокутника, і коло, вписане в нього.
4. Сформулюйте наслідки із цієї теореми.
5. Що називають центром правильного многокутника, центральним кутом правильного многокутника?
6. Доведіть формули радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників.

1 Початковий рівень

718. (Усно.) Які з наведених многокутників є правильними:

1) паралелограм; 2) рівносторонній трикутник;
3) ромб; 4) рівнобедрений трикутник;
5) квадрат; 6) рівнобічна трапеція?

[1] Ці числа називають простими числами Ферма. На сьогодні відомо лише пять простих чисел Ферма: 3, 5, 17, 257, 65537.

719. Знайдіть центральний кут правильного:
1) шестикутника; 2) двадцятикутника.

720. Знайдіть центральний кут правильного:
1) трикутника; 2) десятикутника.

721. Центральний кут правильного многокутника дорівнює 15°. Знайдіть кількість сторін многокутника.

722. Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його центральний кут дорівнює 10°.

2 Середній рівень

723. (Усно.) Чи правильне твердження:
1) будь-який правильний многокутник опуклий;
2) будь-який опуклий многокутник є правильним?

724. (Усно.) Які з тверджень правильні, а які – неправильні:
1) якщо чотирикутник не є квадратом, то він не може бути правильним;
2) многокутник є правильним, якщо він опуклий і всі його сторони між собою рівні;
3) серед прямокутників є правильні чотирикутники;
4) трикутник є правильним, якщо всі його кути між собою рівні?

725. Чи правильне твердження:
1) серед трапецій є правильні чотирикутники;
2) терміни «рівносторонній трикутник» і «правильний трикутник» означають одне й те саме;
3) будь-який чотирикутник, у якого всі сторони між собою рівні, є правильним;
4) якщо многокутник не є опуклим, то він не може бути правильним?

726. Знайдіть міру кута правильного n-кутника, якщо:
1) $n = 8$; 2) $n = 15$.

727. Знайдіть міру кута правильного:
1) дев'ятикутника; 2) дванадцятикутника.

728. Знайдіть міру зовнішнього кута правильного:
1) п'ятикутника; 2) тридцятикутника.

729. Знайдіть міру зовнішнього кута правильного n-кутника, якщо: 1) $n = 10$; 2) $n = 36$.

730. Скільки сторін має правильний многокутник, якщо його кут дорівнює 165°?

731. Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його кут дорівнює $108°$.

732. Який найбільший центральний кут може бути у правильного многокутника?

733. Сторона правильного трикутника дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть радіуси вписаного та описаного навколо нього кіл.

734. Сторона квадрата дорівнює 2 см. Знайдіть радіуси вписаного та описаного навколо нього кіл.

735. Знайдіть сторону правильного шестикутника, описаного навколо кола з радіусом $2\sqrt{3}$ см.

736. Знайдіть сторону правильного трикутника, вписаного в коло з радіусом $8\sqrt{3}$ см.

737. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в коло з радіусом $7\sqrt{2}$ см.

738. Накресліть коло, радіус якого 4 см. Впишіть в коло правильний шестикутник.

739. Накресліть коло, радіус якого 3 см. Впишіть в коло правильний трикутник.

740. Накресліть коло, діаметр якого 5 см. Впишіть в коло квадрат.

741. Скільки сторін має правильний многокутник, якщо його зовнішній кут дорівнює $30°$?

742. Зовнішній кут правильного многокутника дорівнює $20°$. Знайдіть, скільки у многокутника вершин.

3 Достатній рівень

743. Зовнішній кут правильного многокутника становить $\frac{2}{7}$ від внутрішнього. Скільки вершин у цього многокутника?

744. Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, зовнішній кут якого на $108°$ менший за внутрішній.

745. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює $2\sqrt{6}$ см. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в це коло.

746. Сторона квадрата, описаного навколо кола, дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.

747. Впишіть у коло правильний восьмикутник.

748. Впишіть у коло правильний дванадцятикутник.

Високий рівень

749. Радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює 12 см, а радіус вписаного в нього кола – $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть кількість сторін многокутника та його сторону.

750. Радіус кола, вписаного у правильний многокутник, дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а радіус кола, описаного навколо нього, – 4 см. Знайдіть кількість вершин многокутника та його сторону.

751. Сторона правильного восьмикутника дорівнює $4\sqrt{2-\sqrt{2}}$ см. Знайдіть його площу.

752. Сторона правильного дванадцятикутника дорівнює $3\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см. Знайдіть його площу.

753. Кути квадрата, сторона якого дорівнює $(2+\sqrt{2})$ см, зрізали так, що утворився правильний восьмикутник. Знайдіть його сторону.

Вправи для повторення

754. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:
1) 7 см і 24 см; 2) $6a$ см і $8a$ см.

755. Знайдіть косинуси кутів трикутника, сторони якого дорівнюють 7 см, 8 см і 10 см.

756. Дві хорди перетинаються всередині круга. Відрізки, на які точка перетину хорд ділить одну з них, дорівнюють 4 см і 9 см. Знайдіть відрізки, на які ця точка ділить другу хорду, якщо:
1) вони між собою рівні;
2) один з них на 16 см більший за інший.

757. Периметр трапеції дорівнює 108 см, а точка дотику вписаного в неї кола ділить бічну сторону на відрізки завдовжки 4 см і 16 см. Знайдіть площу трапеції.

Розв’яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

758. *Практичне завдання.* 1) Візьміть стакан (циліндр, підставку для ручок циліндричної форми тощо) та за допомогою нитки обведіть цей предмет. Знайдіть довжину C нитки.

2) Поставте цей предмет на аркуш паперу й обведіть олівцем. Знайдіть центр отриманого кола, а потім його діаметр d (або знайдіть діаметр за допомогою штангенциркуля).

3) Знайдіть відношення $C : d$ з точністю до тисячних. Систематизуйте дані, що отримали, в таблицю:

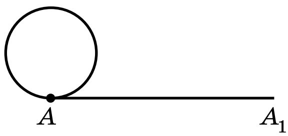
№ досліду	Довжина нитки C, см	Діаметр d, см	Відношення $C : d$
1			
2			
3			

Цікаві задачі для учнів неледачих

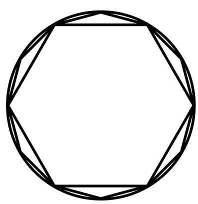
759. Відстані від точки перетину медіан до вершин гострих кутів прямокутного трикутника дорівнюють $6\sqrt{73}$ і $12\sqrt{13}$ см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

§ 16. ДОВЖИНА КОЛА. ДОВЖИНА ДУГИ КОЛА

Наочне уявлення про *довжину кола* можна отримати таким чином. Уявімо, що коло виготовлено з тонкої нитки, яка не розтягується. Розріжемо нитку в деякій точці A і вирівняємо її (мал. 138). Матимемо відрізок AA_1, довжина якого є довжиною кола.



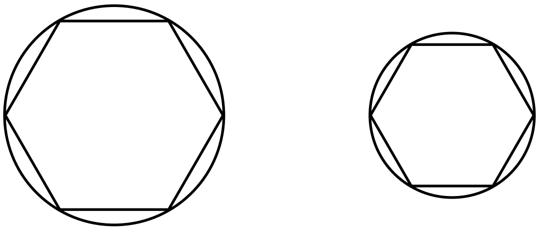
Мал. 138


Мал. 139

Периметр будь-якого правильного многокутника, вписаного в коло, є наближеним значенням довжини цього кола. Що більшою є кількість сторін многокутника, то точнішим буде це наближене значення (мал. 139). Так, наприклад, периметр правильного вписаного в коло дванадцятикутника менше відрізняється від довжини кола, ніж периметр правильного шестикутника, вписаного в те саме коло. Якщо кількість сторін правильного многокутника збільшувати необмежено, то його периметр буде необмежено наближатися до довжини кола.

Доведемо важливу властивість довжини кола.

Т е о р е м а (про відношення довжини кола до його діаметра). **Відношення довжини кола до його діаметра є сталим для всіх кіл.**



Мал. 140

Д о в е д е н н я. Розглянемо два довільних кола, радіуси яких R і R', а довжини кіл C і C' (мал. 140).

1) У кожне з кіл впишемо правильний n-кутник з однаковою кількістю сторін. Нехай сторони цих n-кутників a_n і a'_n, їх периметри P_n і P'_n.

2) Маємо:

$$P_n = na_n = n \cdot 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \text{ і } P'_n = na'_n = n \cdot 2R'\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

3) Тоді:

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}.$$

4) Ця рівність є пропорцією при будь-якому значенні n. Якщо n збільшувати необмежено, то периметри многокутників P_n і P'_n необмежено наближатимуться до довжин кіл C і C'. Тому:

$$\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}, \text{ звідси } \frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Отже, відношення довжини кола до його діаметра є числом, сталим для всіх кіл. ▲

Відношення довжини кола до його діаметра прийнято позначати грецькою літерою π (читають «пі»):

$$\frac{C}{2R} = \pi.$$

Число π ірраціональне, його наближене значення $\pi \approx 3{,}1416$. Для практичних потреб наближене значення найчастіше використовують з точністю до сотих: $\pi \approx 3{,}14$.

З рівності $\frac{C}{2R} = \pi$ отримаємо, що

довжина кола, радіус якого дорівнює *R*, обчислюється за формулою

$$C = 2\pi R.$$

А враховуючи, що діаметр кола дорівнює $2R$, маємо формулу довжини кола: $C = \pi d$, де d – діаметр.

Задача 1. Знайти довжину кола, радіус якого дорівнює:

1) 5 см; 2) 0,8 дм.

Р о з в' я з а н н я. 1) $C = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$ (см);
2) $C = 2\pi \cdot 0{,}8 = 1{,}6\pi$ (дм).

В і д п о в і д ь. 1) 10π см; 2) $1{,}6\pi$ дм.

Задача 2. Знайти радіус кола, довжина якого дорівнює:

1) 12π см; 2) 8 дм.

Р о з в' я з а н н я. 1) $R = \frac{C}{2\pi} = \frac{12\pi}{2\pi} = 6$ (см).

2) $R = \frac{C}{2\pi} = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$ (дм).

В і д п о в і д ь. 1) 6 см; 2) $\frac{4}{\pi}$ дм.

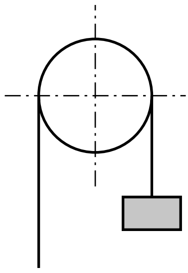
Задача 3. Вантаж піднімають за допомогою блока (мал. 141). На скільки підніметься вантаж за 10 обертів блока, якщо діаметр блока 15 см?

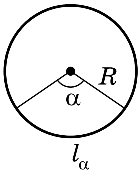
Р о з в' я з а н н я. Оскільки $d = 15$ см, то довжина кола блока: $C = \pi d = 15\pi$ см.

Якщо блок зробить 10 обертів, то підніме вантаж на висоту:

$10 \cdot 15\pi = 150\pi \approx 150 \cdot 3{,}14 = 471$ (см) $= 4{,}71$ (м).

В і д п о в і д ь. 4,71 м.


Мал. 141



Мал. 142

Знайдемо *формулу* для обчислення *довжини дуги кола*, що відповідає центральному куту α, якщо радіус кола дорівнює R (мал. 142).

Оскільки довжина кола дорівнює $2\pi R$, то довжина дуги, що відповідає центральному куту 1°, складає $\frac{1}{360}$ від довжини кола, тобто $l_{1^\circ} = \frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Тоді довжину дуги l_α можна обчислити за формулою:

$$l_\alpha = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha,$$ **де α – градусна міра дуги.**

Задача 4. Радіус кола дорівнює 4 см. Знайти довжину дуги, що відповідає центральному куту: 1) 20°; 2) 270°.

Р о з в' я з а н н я. 1) $l_{20^\circ} = \frac{\pi \cdot 4}{180} \cdot 20 = \frac{4\pi}{9}$ (см);

2) $l_{270^\circ} = \frac{\pi \cdot 4}{180} \cdot 270 = 6\pi$ (см).

В і д п о в і д ь. 1) $\frac{4\pi}{9}$ см; 2) 6π см.

Задача 5. Довжина дуги кола дорівнює 3π см, а її градусна міра – 36°. Знайти радіус кола.

Р о з в' я з а н н я. $3\pi = \frac{\pi \cdot R}{180} \cdot 36$, звідки $R = 15$ см.

В і д п о в і д ь. 15 см.

А ще раніше...

І в далекому минулому людям доводилося розв'язувати задачі на обчислення довжини кола.

У різні часи значення відношення довжини кола C до його діаметра d, які використовували під час обчислень, різнилися. Наприклад, у Стародавньому Єгипті (≈ 3500 років тому) це значення дорівнювало 3,16, а стародавні римляни вважали, що 3,12. Досить точно значення цього відношення визначив давньогрецький учений Архімед (бл. 287–212 р. до н. е.). Він довів, що $3\frac{10}{17} < \frac{C}{d} < 3\frac{1}{7}$, тобто що $3{,}1408... < \frac{C}{d} < 3{,}1428...$

Першим використовувати грецьку літеру π для значення відношення довжини кола до його діаметра запропонував англійський математик

Вільям Джонс у 1706 р., але загальновживаним це позначення стало завдяки працям видатного німецького математика Леонарда Ейлера (1707–1783), який обчислив число π з точністю до 153 десяткових знаків.

У наш час за допомогою сучасних комп'ютерів обчислено понад 200 мільярдів десяткових знаків числа π.

1. Як можна отримати уявлення про довжину кола?
2. Сформулюйте і доведіть теорему про відношення довжини кола до його діаметра.
3. Чому дорівнює це відношення?
4. Як обчислити довжину кола?
5. Як обчислити довжину дуги кола градусної міри α, якщо радіус кола дорівнює R?

1 Початковий рівень

760. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює:
1) 5 см; 2) 12 см; 3) 2,3 дм; 4) 0,4 м.

761. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює:
1) 7 см; 2) 1,5 см; 3) 4 дм; 4) 0,2 м.

762. Знайдіть довжину кола, діаметр якого дорівнює:
1) 4 см; 2) 8 дм; 3) 3,5 см; 4) 1,6 м.

763. Знайдіть довжину кола, діаметр якого дорівнює:
1) 6 дм; 2) 14 см; 3) 2,8 см; 4) 0,7 м.

764. У скільки разів збільшиться довжина кола, якщо його радіус збільшити у:
1) 2 рази; 2) 5 разів?

765. У скільки разів зменшиться довжина кола, якщо його радіус зменшити у:
1) 3 рази; 2) 10 разів?

2 Середній рівень

766. Знайдіть довжину кола, діаметр якого на 6 см більший за радіус.

767. Знайдіть довжину кола, радіус якого на 8 см менший за діаметр.

768. Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює:
1) 4π см; 2) 7π дм; 3) 6 см; 4) $4\pi^2$ дм.

769. Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює:
1) 6π дм; 2) π см; 3) 8 дм; 4) $6\pi^2$ см.

770. Радіус кола дорівнює 20 см. Знайдіть довжину дуги градусної міри α, якщо α дорівнює:
1) $1°$; 2) $10°$; 3) $45°$; 4) $120°$; 5) $225°$; 6) $300°$.

771. Радіус кола дорівнює 10 см. Знайдіть довжину дуги градусної міри β, якщо β дорівнює:
1) $1°$; 2) $20°$; 3) $90°$; 4) $135°$; 5) $240°$; 6) $330°$.

772. На котушку радіуса 2 см намотано 10 витків нитки. Знайдіть довжину нитки.

773. На котушку діаметром 1 м намотано 15 витків дроту. Знайдіть довжину дроту.

3 Достатній рівень

774. Радіус кола зменшили на 4 см. На скільки зменшиться довжина кола?

775. Радіус кола збільшили на 5 см. На скільки збільшиться довжина кола?

776. Знайдіть радіус кола, у якому дуга, що відповідає центральному куту $20°$, має довжину 2π см.

777. Довжина дуги дорівнює 18π см, а її градусна міра – $120°$. Знайдіть радіус кола.

778. Довжина дуги кола радіуса 18 см дорівнює 4π см. Знайдіть градусну міру дуги.

779. Знайдіть градусну міру дуги кола, якщо її довжина дорівнює 6π см, а радіус кола – 15 см.

780. Хвилинна стрілка годинника, установленого на вежі, має довжину 2,5 м. Дугу якої довжини описує кінець стрілки за 25 хв? (Округліть з точністю до сотих метра.)

781. Діаметр вала колодязя 30 см, а глибина колодязя 7,6 м. Скільки повних обертів корби треба зробити, щоб витягти відро води?

782. На котушку радіуса 3,6 см намотано 1,4 м мотузки. Скільки зроблено повних витків?

783. Хорда завдовжки $6\sqrt{2}$ см стягує дугу кола, градусна міра якої $90°$. Знайдіть довжину кола.

784. Хорда завдовжки 8 см стягує дугу кола, градусна міра якої $60°$. Знайдіть довжину кола.

785. Знайдіть довжину кола, вписаного в ромб, сторона якого дорівнює 8 см, а гострий кут – $30°$.

786. Знайдіть довжину кола, описаного навколо прямокутного трикутника з катетами 6 см і 8 см.

4 Високий рівень

787. За даною хордою a знайдіть довжину її дуги, якщо градусна міра дуги дорівнює:

1) $60°$; 2) $90°$; 3) $120°$.

788. За даною довжиною дуги, що дорівнює 2π см, знайдіть її хорду, якщо градусна міра дуги:

1) $60°$; 2) $90°$; 3) $120°$.

789. Знайдіть довжину кола, описаного навколо трапеції, сторони якої дорівнюють 6 см, 6 см, 6 см і 12 см.

790. У колі проведено дві паралельні хорди, довжини яких 12 см і 16 см. Відстань між хордами 14 см. Знайдіть довжину кола.

791. Три кола з радіусами 2 см, 3 см і 27 см попарно дотикаються одне до одного. Знайдіть довжину кола, що проходить через центри даних кіл.

Вправи для повторення

2 **792.** Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:

1) $AB : BC : CA = 3 : 4 : 5$, $A_1B_1 = 6$ см, $B_1C_1 = 8$ см, $C_1A_1 = 10$ см;

2) $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$, $\angle A_1 = 20°$, $\angle B_1 = 70°$, $\angle C_1 = 90°$?

3 **793.** Розв'яжіть трикутник ABC, у якого $\angle C = 90°$:

1) $AC = 6$ см, $BC = 4$ см; 2) $AB = 7$ см, $BC = 2$ см.

Гострі кути трикутника знайдіть з точністю до мінути.

794. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 26 см і 30 см. Знайдіть:

1) площу трикутника; 2) висоти трикутника;

3) радіус кола, вписаного у трикутник;

4) радіус кола, описаного навколо трикутника.

4 **795.** Кути правильного трикутника зрізали так, що отримали правильний шестикутник. Знайдіть сторону трикутника, якщо сторона шестикутника дорівнює a см.

Цікаві задачі для учнів неледачих

796. (*Олімпіада Нью-Йорка, 1977 р.*) Нехай a, b, c – сторони трикутника, P – його периметр. Доведіть, що

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{P^2}{3}.$$

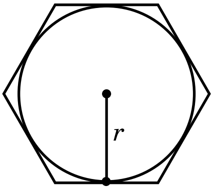
§ 17. ПЛОЩА КРУГА ТА ЙОГО ЧАСТИН

Нагадаємо, що *кру́гом* називають частину площини, обмежену колом, об'єднану із самим колом.

Т е о р е м а (про площу круга). **Площа S круга, радіус якого дорівнює r, обчислюється за формулою:**

$$S = \pi r^2.$$

Д о в е д е н н я. Опишемо навколо кола правильний n-кутник, нехай P_n – периметр n-кутника, S_n – його площа (мал. 143).



Мал. 143

1) За наслідком з теореми про площу трикутника за радіусом вписаного кола маємо:

$$S_n = \frac{P_n}{2} \cdot r.$$

2) Якщо n збільшувати необмежено, то периметр многокутника необмежено наближатиметься до довжини C кола, а площа многокутника необмежено наближатиметься до площі S круга. Тоді:

$$S = \frac{C}{2} \cdot r = \frac{2\pi r}{2} \cdot r = \pi r^2. \blacktriangle$$

Задача 1. Знайти площу круга, радіус якого дорівнює:

1) 3 см; 2) $\frac{7}{\sqrt{\pi}}$ дм.

Р о з в' я з а н н я. 1) $S = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$ (см²);

2) $S = \pi\left(\frac{7}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = \frac{49\pi}{\pi} = 49$ (дм²).

В і д п о в і д ь. 1) 9π см²; 2) 49 дм².

Задача 2. Знайти радіус круга, площа якого дорівнює:

1) 16π см²; 2) 7 дм².

Р о з в' я з а н н я. 1) $r^2 = \frac{S}{\pi} = \frac{16\pi}{\pi} = 16$, отже, $r = 4$ см.

2) $r^2 = \frac{S}{\pi} = \frac{7}{\pi}$, отже, $r = \sqrt{\frac{7}{\pi}}$ дм.

В і д п о в і д ь. 1) 4 см; 2) $\sqrt{\frac{7}{\pi}}$ дм.

Задача 3. Дві водопровідні труби, діаметр яких 10 см, треба замінити однією трубою тієї самої пропускної спроможності. Яким має бути діаметр цієї труби?

Р о з в' я з а н н я. 1) Радіус кожної з двох труб $r = 5$ см.

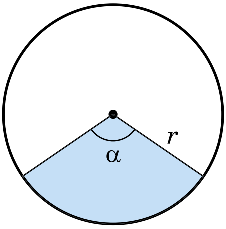
2) Переріз кожної з труб $S = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ (см^2).

3) Переріз нової труби має дорівнювати сумі перерізів двох старих, тобто $25\pi \cdot 2 = 50\pi$ (см^2).

4) Нехай R – радіус нової труби. Тоді $50\pi = \pi R^2$, $R = 5\sqrt{2} \approx$ $\approx 7{,}07$ (см).

Тоді діаметр цієї труби 14,14 см.

В і д п о в і д ь. 14,14 см.



Мал. 144

Частину круга, обмежену двома його радіусами, називають *сектором*. На малюнку 144 зображено два сектори, один з яких зафарбований, а другий – ні. Знайдемо *формулу площі сектора* кола радіуса r, що відповідає центральному куту градусної міри α. Оскільки площа круга дорівнює πr^2, то площа сектора, що відповідає центральному куту $1°$, складає $\frac{1}{360}$ від площі круга і дорівнює $\frac{\pi r^2}{360}$. Тому

площа сектора, що відповідає центральному куту градусної міри α, обчислюється за формулою

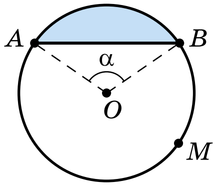
$$S_\alpha = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha.$$

Задача 4. Знайдіть площу сектора круга радіуса 6 см, якщо відповідний сектору центральний кут дорівнює:
1) $30°$; 2) $225°$.

Р о з в' я з а н н я. 1) $S_{30°} = \frac{\pi \cdot 6^2}{360} \cdot 30 = 3\pi$ (см^2);

2) $S_{225°} = \frac{\pi \cdot 6^2}{360} \cdot 225 = 22{,}5\pi$ (см^2).

В і д п о в і д ь. 1) 3π см^2; 2) $22{,}5\pi$ см^2.



Мал. 145

Частину круга, обмежену хордою і відповідною їй дугою, називають *сегментом*. На малюнку 145 зображено два сегменти, один з яких обмежено хордою AB і дугою AB, а другий – хордою AB і дугою AMB. Якщо градусна міра центрального кута, що відповідає сегменту, менша за 180°, то площу сегмента знаходимо як різницю площ відповідного сектора і трикутника AOB. Якщо градусна міра центрального кута, що відповідає сегменту, більша за 180°, то площу сегмента знаходимо як суму площ відповідного сектора і трикутника AOB (мал. 145). Сегмент, якому відповідає розгорнутий кут, є півкругом, і його площа дорівнює $\frac{\pi r^2}{2}$, де r – радіус круга.

Отже,

площа сегмента, що не є півкругом, обчислюється за формулою

$$S_{\text{сегм.}} = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha \pm S_{AOB}.$$

Задача 5. Кінці хорди ділять коло у відношенні 1 : 2. Знайдіть площі двох сегментів, що утворилися, якщо радіус круга дорівнює 12 см.

Р о з в' я з а н н я. Нехай на малюнку 145 менша з дуг, що утворилися, дорівнює $x°$, тоді більша дорівнює $(2x)°$. Маємо $x° + (2x)° = 360°$, звідси $x = 120°$. Отже, меншому із сегментів відповідає центральний кут 120°, а більшому – 240°.

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin AOB = \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \sin 120^\circ = 36\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Позначимо площі сегментів S_1 і S_2. Матимемо:

$$S_1 = \frac{\pi \cdot 12^2}{360} \cdot 120 - 36\sqrt{3} = 48\pi - 36\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_2 = \frac{\pi \cdot 12^2}{360} \cdot 240 + 36\sqrt{3} = 96\pi + 36\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

В і д п о в і д ь. $(48\pi - 36\sqrt{3})$ см²; $(96\pi + 36\sqrt{3})$ см².

А ще раніше...

Задачі щодо обчислення площі круга, як і задачі щодо знаходження довжини кола, виникли в давнину.

У папірусі Ахмеса (≈ 2 тис. років до н. е.) указано, що площею S круга слід вважати площу квадрата, сторона якого дорівнює $\frac{8}{9}$ діаметра, тобто:

$$S = \left(\frac{8}{9} \cdot 2R\right)^2 = \frac{256}{81} R^2.$$

Це означає, що на той час значенням відношення довжини кола до його діаметра (у сучасних позначеннях – число π) вважали число $\frac{256}{81} \approx 3{,}1605...$

У творах Герона «Метрика» і «Геометрика» є багато вправ на обчислення діаметра і довжини кола, площі круга, сегмента і сектора круга.

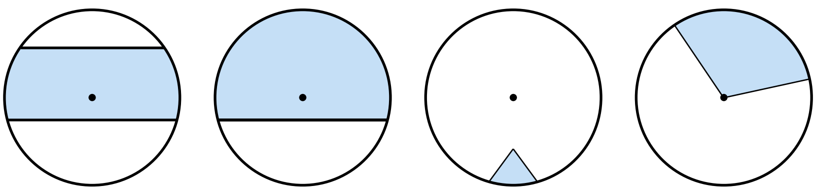
Термін *сегмент* латинського походження (*segmentum* – відрізок) і є дослівним перекладом відповідного грецького терміна, який використовував ще Евклід. Термін *сектор* також латинського походження (*sector* – резець).

Крім задачі на знаходження площі круга, видатні геометри Давньої Греції намагалися розв'язати також і задачу про квадратуру круга, тобто за допомогою циркуля і лінійки побудувати квадрат, площа якого дорівнює площі даного круга. Лише в XIX ст. було доведено, що задачу про квадратуру круга неможливо розв'язати, тому під виразом *квадратура круга* мають на увазі задачу, яку неможливо розв'язати.

1. Сформулюйте і доведіть теорему про площу круга.
2. Що називають сектором?
3. За якою формулою обчислюють площу сектора?
4. Що називають сегментом?
5. За якою формулою обчислюють площу сегмента?

1 Початковий рівень

797. (Усно.) На якому з малюнків 146–149 зафарбована фігура є сектором, а на якому – сегментом?



Мал. 146 Мал. 147 Мал. 148 Мал. 149

798. Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює:

1) 2 см; 2) 5 дм; 3) 1,4 см; 4) $\frac{2}{5}$ м.

799. Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює:

1) 4 дм; 2) 7 см; 3) $\frac{1}{3}$ см; 4) 0,8 м.

800. Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює:
1) 6 см; 2) 1,4 дм.

801. Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює:
1) 12 дм; 2) 1,6 дм.

2 Середній рівень

802. Знайдіть площу круга, радіус якого на 10 см менший за діаметр.

803. Знайдіть площу круга, діаметр якого на 12 дм більший за радіус.

804. Площа одного круга в 9 разів більша за площу другого. Знайдіть відношення їх радіусів.

805. Радіус круга збільшили втричі. У скільки разів збільшиться площа круга?

806. Площа круга дорівнює 25π см^2. Знайдіть радіус круга.

807. Площа круга дорівнює 121π см^2. Знайдіть радіус круга.

808. Знайдіть площу круга, довжина кола якого дорівнює 20π см.

809. Знайдіть площу круга, довжина кола якого дорівнює 18π дм.

810. Знайдіть площу сектора круга радіуса 8 см, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює:
1) $36°$; 2) $60°$;
3) $135°$; 4) $225°$.

811. Знайдіть площу сектора круга радіуса 6 см, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює:
1) $18°$; 2) $75°$;
3) $150°$; 4) $240°$.

812. Площа круга чисельно дорівнює довжині кола, що його обмежує. Знайдіть радіус круга.

3 Достатній рівень

813. (Усно.) 1) Чи може сегмент круга бути водночас сектором?
2) За якої умови сегмент круга можна розрізати на сектори?

814. Знайдіть площу круга, описаного навколо правильного трикутника зі стороною $4\sqrt{3}$ см.

815. Знайдіть площу круга, вписаного у правильний трикутник зі стороною $2\sqrt{3}$ см.

816. Знайдіть площу круга, вписаного у квадрат, площа якого дорівнює 8 $см^2$.

817. Знайдіть площу круга, описаного навколо квадрата, площа якого дорівнює 12 $см^2$.

818. Знайдіть площу кільця, розміщеного між двома концентричними колами, радіуси яких дорівнюють 2 см і 5 см.

819. Визначте площу тієї частини круга, що лежить поза вписаним у нього квадратом зі стороною 10 см.

820. Знайдіть площу тієї частини круга, що лежить поза вписаним у нього прямокутним трикутником з катетами 12 см і 16 см.

821. Знайдіть радіус круга, якщо площа сектора цього круга дорівнює 180π $см^2$, а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює $72°$.

822. Знайдіть радіус круга, якщо площа сектора цього круга дорівнює 12π $см^2$, а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює $120°$.

823. Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 12 см, а центральний кут, що відповідає сегменту, дорівнює:

1) $30°$; 2) $120°$; 3) $225°$.

824. Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 6 см, а центральний кут, що відповідає сегменту, дорівнює:

1) $45°$; 2) $90°$; 3) $210°$.

4 Високий рівень

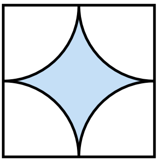
825. Кінці хорди завдовжки $6\sqrt{3}$ см ділять коло у відношенні $1:2$. Знайдіть площі двох утворених сегментів.

826. Кінці хорди завдовжки 12 см ділять коло у відношенні $1:5$. Знайдіть площі двох утворених сегментів.

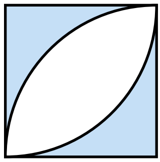
827. Знайдіть площу круга, вписаного в рівнобічну трапецію, основи якої дорівнюють 5 см і 3 см.

828. У рівнобічну трапецію вписано круг, площа якого дорівнює 48π $см^2$. Знайдіть площу трапеції, якщо її гострий кут дорівнює $60°$.

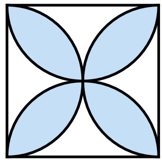
829. Знайдіть площі зафарбованих фігур на малюнках 150–152, якщо сторона квадрата дорівнює a.



Мал. 150



Мал. 151



Мал. 152

Вправи для повторення

830. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Невідомі сторони знайдіть з точністю до сотих:
1) $AB = 5$ см, $\angle A = 72°$; 2) $BC = 4$ см, $\angle B = 15°$.

831. Скільки вершин має правильний многокутник, якщо різниця його внутрішнього і зовнішнього кутів дорівнює 100°?

832. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 8 см, а кут між ними – 60°. Знайдіть найменшу висоту трикутника.

833. Побудуйте трапецію з основами a і b та діагоналями d_1 і d_2.

Цікаві задачі для учнів неледачих

834. (*Всеукраїнська математична олімпіада, 1985 р.*) Точки A, B, C і D є вершинами опуклого чотирикутника. П'ять із шести можливих відстаней між парами цих точок дорівнюють 1, 1, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 3. Знайдіть шосту відстань.

Домашня самостійна робота № 4

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Центральний кут правильного шестикутника дорівнює...

А. 30°; **Б.** 45°; **В.** 60°; **Г.** 120°.

2. Довжина кола, радіус якого 6 см, дорівнює...

А. 12 см; **Б.** 12π см; **В.** 6π см; **Г.** 24π см.

3. Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює 10 см.

А. 25 см^2; **Б.** 100π см^2; **В.** 20π см^2; **Г.** 25π см^2.

2 **4.** Чому дорівнює градусна міра внутрішнього кута правильного вісімнадцятикутника?

А. 100°; **Б.** 155°; **В.** 160°; **Г.** 165°.

5. Радіус кола дорівнює 9 см. Знайдіть довжину дуги, градусна міра якої 240°.

А. 12π см; **Б.** 6π см; **В.** 9π см; **Г.** 18π см.

6. Знайдіть площу сектора круга, радіус якого 6 см, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює 100°.

А. 20π см^2; **Б.** 10π см^2; **В.** 36π см^2; **Г.** $\frac{5}{3}\pi$ см^2.

3 **7.** Зовнішній кут правильного многокутника складає $\frac{1}{4}$ від внутрішнього. Знайдіть, скільки сторін у цього многокутника.

А. 9; **Б.** 10; **В.** 12; **Г.** 16.

8. Хорда, довжина якої $8\sqrt{2}$ см, стягує дугу кола, градусна міра якої 90°. Знайдіть довжину кола.

А. 8π см; **Б.** 32π см;

В. $8\sqrt{2}\pi$ см; **Г.** 16π см.

9. Знайдіть площу кільця, розміщеного між двома концентричними колами, радіуси яких дорівнюють 7 см і 4 см.

А. 3π см^2; **Б.** 9π см^2;

В. 33π см^2; **Г.** 45π см^2.

4 **10.** Радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює 6 см, а радіус кола, вписаного у правильний многокутник, – $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть кількість сторін многокутника.

А. 3; **Б.** 4; **В.** 6; **Г.** 8.

11. За довжиною дуги, що дорівнює 4π см, знайдіть її хорду, якщо дуга містить 120°.

А. 6 см; **Б.** 12 см; **В.** $6\sqrt{2}$ см; **Г.** $6\sqrt{3}$ см.

12. Кінці хорди, завдовжки 6 см, ділять коло у відношенні 1 : 5. Знайдіть площу меншого з утворених сегментів.

А. 36π см^2; **Б.** $(6\pi - 9\sqrt{3})$ см^2;

В. $(6\pi + 9\sqrt{3})$ см^2; **Г.** 6π см^2.

Завдання для перевірки знань № 4 до § 15–17

1. Знайдіть центральний кут правильного двадцятикутника.

2. Знайдіть довжину кола, діаметр якого дорівнює 6 см.

3. Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює 8 дм.

4. Знайдіть міри внутрішнього та зовнішнього кутів правильного тридцятикутника.

5. Радіус кола дорівнює 12 см. Знайдіть довжину дуги, що відповідає центральному куту $150°$.

6. Знайдіть площу сектора круга радіуса 4 см, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює $45°$.

7. Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, у якого зовнішній кут на $90°$ менший за внутрішній.

8. Хорда, довжина якої $4\sqrt{3}$ см, стягує дугу кола, градусна міра якої $120°$. Знайдіть довжину кола.

9. Знайдіть площу круга, вписаного в рівнобічну трапецію з основами 6 см і 10 см.

Додаткові завдання

10. Радіус кола, вписаного у правильний многокутник, дорівнює $3\sqrt{2}$ см, а радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, – 6 см. Знайдіть кількість сторін многокутника та його сторону.

11. Кінці хорди, довжиною $6\sqrt{2}$ см, ділять коло у відношенні $1 : 3$. Знайдіть площі сегментів, що утворилися.

Вправи для повторення розділу 4

До § 15

835. Знайдіть центральний кут правильного:

1) чотирикутника; 2) п’ятнадцятикутника.

836. Знайдіть міри внутрішнього та зовнішнього кутів правильного шістнадцятикутника.

837. Сторона правильного шестикутника дорівнює 4 см. Знайдіть радіуси вписаного та описаного навколо нього кіл.

838. Знайдіть сторону правильного трикутника, описаного навколо кола з радіусом $10\sqrt{3}$ см.

839. Радіус кола, описаного навколо квадрата, дорівнює $8\sqrt{2}$ см. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей квадрат.

840. Яким може бути найменший кут правильного многокутника?

841. Доведіть, що центральний кут правильного многокутника дорівнює його зовнішньому куту.

842. Сума зовнішніх кутів правильного многокутника, взятих по одному при кожній вершині, разом з одним із внутрішніх кутів дорівнює 528°. Знайдіть кількість сторін многокутника.

843. Сторона шестикутника, вписаного в коло, дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону трикутника, описаного навколо цього кола.

844. Радіус кола, вписаного у правильний шестикутник, дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть меншу діагональ шестикутника.

845. $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – правильний шестикутник. Продовження сторін A_1A_2 і A_4A_3 перетнулися в точці K. Знайдіть градусну міру кута A_2KA_3.

846. Знайдіть радіуси вписаного у правильний шестикутник та описаного навколо нього кіл, якщо їх сума дорівнює $8\sqrt{3}$ см.

847. Опишіть навколо даного кола правильний:
1) трикутник; 2) шестикутник.

848. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є для одного з них стороною вписаного квадрата, а для другого – стороною правильного вписаного шестикутника. Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо радіус меншого з них дорівнює r (розгляньте два можливих випадки розташування кіл).

849. Знайдіть відношення площ квадрата, правильного трикутника і правильного шестикутника, вписаних в одне й те саме коло.

850. У правильний трикутник зі стороною, що дорівнює a, вписано коло, у яке вписано правильний шестикутник. Знайдіть площу шестикутника.

851. Дано відрізок завдовжки a. Побудуйте правильний шестикутник, сторона якого дорівнює $a\sqrt{2}$.

852. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин вписаного в нього квадрата є величиною сталою. Знайдіть цю величину, якщо радіус кола дорівнює R.

До § 16

853. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює:

1) $\frac{2}{\pi}$ см; 2) π см.

854. У скільки разів збільшиться або зменшиться довжина кола, якщо радіус кола:

1) збільшити у 8 разів; 2) зменшити в 6 разів?

855. Побудуйте коло, довжина якого 8π см.

856. Знайдіть діаметр кола, довжина якого дорівнює:

1) 18π см; 2) 9π дм; 3) 10 см; 4) $4\pi^2$ дм.

857. Радіус кола дорівнює 1 см. Знайдіть довжину дуги, градусна міра якої:

1) 30°; 2) 60°; 3) 150°;
4) 270°; 5) 315°; 6) 345°.

858. Довжина першого кола на 8π см більша за довжину другого. На скільки сантиметрів радіус першого кола більший за радіус другого?

859. Знайдіть довжину кола, якщо його дуга градусної міри 120° має довжину 8 см.

860. Діаметр ведучого колеса електровоза 1,6 м. Знайдіть швидкість електровоза (у км/год), якщо ведуче колесо за одну хвилину робить 120 обертів. Відповідь округліть до десятих.

861. Кінці хорди ділять коло у відношенні 1 : 5, при цьому більша дуга має довжину 20π см. Знайдіть довжину хорди.

862. Довжина сторони правильного шестикутника дорівнює a. У шестикутник вписано коло. Знайдіть довжину дуги кола між точками його дотику до сусідніх сторін шестикутника.

863. Знайдіть довжину кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою 8 см і бічною стороною 5 см.

864. Периметр прямокутної трапеції 60 см, а більша бічна сторона 17 см. Знайдіть довжину кола, уписаного у трапецію.

865. З вала зняли шар стружки завтовшки 0,3 см. Знайдіть довжину кола вала до обробки, якщо довжина кола після обробки склала 14,5 см.

866. За даною хордою a знайдіть довжину її дуги, градусна міра якої: 1) 30°; 2) 150°.

867. За даною довжиною дуги l знайдіть її хорду, якщо градусна міра дуги: 1) $135°$; 2) $240°$.

868. Навколо кола радіуса r описано трикутник, кути якого відносяться як $1:2:3$. Знайдіть довжини дуг, кінцями яких є точки дотику.

До § 17

869. Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює:

1) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ см; 2) $\frac{1}{\pi}$ дм.

870. Площа круга дорівнює 196π см^2. Знайдіть діаметр круга.

871. Площа круга дорівнює 10 дм^2. Знайдіть з точністю до десятих дециметра радіус круга.

872. Площі двох кругів відносяться як $9:16$. Чому дорівнює відношення їх радіусів?

873. Яку частину площі круга становить площа сектора, якщо відповідний сектору центральний кут дорівнює:

1) $10°$; 2) $36°$; 3) $108°$;
4) $150°$; 5) $230°$; 6) $315°$?

874. Знайдіть градусну міру центрального кута, що відповідає сектору, площа якого складає:

1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{7}{12}$

від площі круга.

875. Довжини двох кіл дорівнюють $a\pi$ см і $3a\pi$ см. Чому дорівнює відношення площ обмежених ними кругів?

876. Знайдіть площу круга, вписаного в рівносторонній трикутник, площа якого дорівнює $9\sqrt{3}$ см^2.

877. Знайдіть відношення площі круга до площі вписаного в нього квадрата.

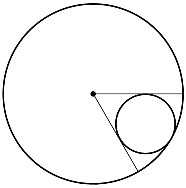
878. Знайдіть радіус круга, якщо площа сектора цього круга дорівнює 10π см^2, а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює $225°$.

879. Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 18 см, а центральний кут, що відповідає сегменту, дорівнює:

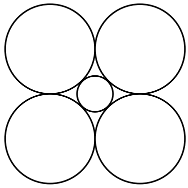
1) $60°$; 2) $135°$; 3) $150°$;
4) $240°$; 5) $300°$; 6) $330°$.

880. Кінці хорди, довжина якої $8\sqrt{2}$ см, ділять коло у відношенні $1:3$. Знайдіть площі двох утворених сегментів.

881. У круговий сектор, дуга якого містить $60°$, вписано коло радіуса r см, як показано на малюнку 153 (коло дотикається до радіусів і дуги, що обмежують сектор). Знайдіть площу сектора.



Мал. 153



Мал. 154

882. Навколо круга радіуса r розташовано чотири однакових круги, кожний з яких дотикається до даного круга, і кожні два сусідніх круга дотикаються між собою (мал. 154). Знайдіть площу одного із цих кругів.

883. Знайдіть площу кільця, що міститься між двома концентричними колами, довжини яких дорівнюють C_1 і C_2 $(C_1 > C_2)$.

884. У крузі радіуса R по різні боки від центра проведено дві паралельні між собою хорди, одна з яких стягує дугу $60°$, друга – $120°$. Знайдіть площу частини круга, що міститься між хордами.

Розділ 5 ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** поняття подібності трикутників та рівності фігур;
- **дізнаєтеся** про переміщення (рух) і його властивості, симетрію відносно точки і прямої, поворот, паралельне перенесення, перетворення подібності;
- **навчитеся** виконувати перетворення фігур, знаходити площі подібних фігур.

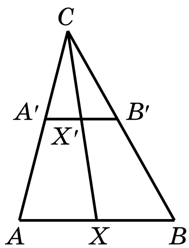
§ 18. ПЕРЕМІЩЕННЯ (РУХ) ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. РІВНІСТЬ ФІГУР

Перетворення фігур

Будь-яку геометричну фігуру можна розглядати як множину точок. Наприклад, відрізок – це множина точок прямої, що лежать між двома її точками, разом із цими точками.

Іноді між точками двох геометричних фігур можна встановлювати певну відповідність.

Нехай $A'B'$ – середня лінія трикутника ABC, що паралельна стороні AB (мал. 155). Уважатимемо, що кожній точці X сторони AB трикутника ABC відповідає точка X' середньої лінії $A'B'$, що лежить на промені CX. Наприклад, точці A відповідає точка A', точці B – точка B'. Точку X', яка відповідає точці X, називають *образом* точки X, точку X при цьому називають *прообразом* точки X'.



Мал. 155

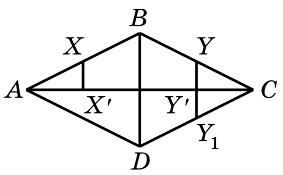
За встановленою відповідністю кожній точці X відрізка AB відповідає певна точка X' відрізка $A'B'$. При цьому кожна точка відрізка $A'B'$ є відповідною деякій точці відрізка AB. Окрім цього, різним точкам відрізка AB відповідають різні точки відрізка $A'B'$. Множиною всіх точок, які відповідають точкам відрізка AB, є відрізок $A'B'$. Таким чином, отримали перетворення відрізка AB у відрізок $A'B'$.

Перетворенням фігури F у фігуру F′ **називають таку відповідність, при якій:**
1) кожній точці фігури *F* відповідає певна точка фігури *F′*;
2) кожна точка фігури *F′* є образом деякої точки фігури *F*;
3) різним точкам фігури *F* відповідають різні точки фігури *F′*.

Кажуть, що фігура F' є *образом фігури* F для даного перетворення, а фігура F є *прообразом* фігури F'.

Зауважимо, що не кожна відповідність між точками двох фігур є перетворенням.

Задача 1. Чи є перетворенням відповідність, при якій кожній точці X ромба $ABCD$ ставиться у відповідність точка X' – точка перетину діагоналі ромба AC з перпендикуляром, проведеним через точку X до прямої, що містить AC?



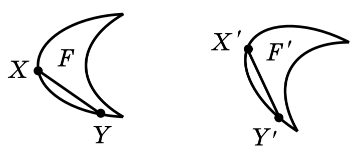
Мал. 156

Р о з в’ я з а н н я. Для даної відповідності кожній точці X ромба $ABCD$ відповідає єдина точка X' діагоналі ромба AC (мал. 156). Але водночас кожній точці Y' діагоналі AC (за винятком точок A і C) відповідають дві точки ромба Y і Y_1. Тому дана відповідність не є перетворенням.

В і д п о в і д ь. Ні.

Переміщення (рух) та його властивості

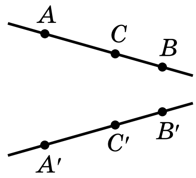
Перетворення однієї фігури в іншу називають *переміщенням (рухом),* якщо воно зберігає відстань між точками, тобто переводить будь-які дві точки *X* і *Y* першої фігури в точки *X′* і *Y′* другої так, що *XY* = *X′Y′* (мал. 157).



Мал. 157

Розглянемо основні *властивості* переміщення.

Т е о р е м а 1 (властивість переміщення). **Точки, що лежать на прямій, під час переміщення переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розташування.**



Мал. 158

Д о в е д е н н я. 1) Нехай точки A, B і C лежать на одній прямій. Тоді одна з них лежить між двома іншими, наприклад, точка C лежить між точками A і B (мал. 158). Тоді:

$$AB = AC + CB.$$

2) Деяке переміщення переводить точку A в точку A', точку B – у точку B', точку C – у точку C'. Оскільки переміщення зберігає відстані між будь-якими двома точками, то:

$$A'B' = AB,\ \ A'C' = AC,\ \ C'B' = CB.$$

Тому:

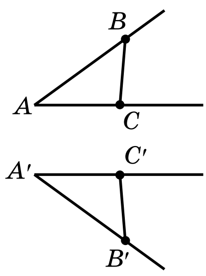
$$A'B' = A'C' + C'B'.$$

3) З останньої рівності випливає, що точки A', B' і C' лежать на одній прямій, причому точка C' лежить між точками A' і B'. ▲

Н а с л і д о к. **Під час переміщення прямі переходять у прямі, промені – у промені, відрізки – у відрізки.**

Т е о р е м а 2 (властивість переміщення). **Під час переміщення кут переходить у рівний йому кут.**

Д о в е д е н н я. Нехай маємо нерозгорнутий кут BAC. Під час переміщення два промені AB і AC, що виходять із спільної точки і не лежать на одній прямій, переходять у деякі два промені $A'B'$ і $A'C'$ (мал. 159).



Мал. 159

Оскільки переміщення зберігає відстані між будь-якими двома точками, то $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.

Тоді $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (за трьома сторонами).

З рівності трикутників випливає, що $\angle BAC = \angle B'A'C'$. ▲

Рівність фігур

Використовуючи поняття переміщення, можна сформулювати загальне означення рівності геометричних фігур.

Дві фігури називають *рівними,* якщо при переміщенні вони переходять одна в одну.

Відомі нам з попередніх класів означення рівності відрізків, кутів і трикутників не суперечать наведеному загальному означенню рівних фігур.

Із цього означення випливає, що:

1) *якщо фігура F дорівнює фігурі F_1, то і F_1 дорівнює F*;

2) *якщо фігура F дорівнює фігурі F_1, а F_1 дорівнює F_2, то F дорівнює F_2*;

3) *якщо фігура F дорівнює фігурі F_1, то існує деяке переміщення, що переводить фігуру F у фігуру F_1*.

Які саме види переміщень існують, ми розглянемо у наступних параграфах.

Задача 2. $\triangle ABC$ – рівнобедрений з основою AB. Чи існує переміщення, при якому: 1) відрізок AC переходить у відрізок BC; 2) кут A переходить у кут B?

Р о з в' я з а н н я. Оскільки трикутник рівнобедрений з основою AB, то $AC = BC$ і $\angle A = \angle B$. Тому існує переміщення, що переводить відрізок AC у відрізок BC, і існує переміщення, що переводить кут A в кут B.

В і д п о в і д ь. 1) Так; 2) так.

1. Що називають перетворенням фігури F у фігуру F'?
2. Яке перетворення фігури називають переміщенням?
3. Сформулюйте і доведіть властивості переміщення.
4. Які фігури називають рівними?
5. Які висновки можна зробити із загального означення рівності фігур?

Початковий рівень

885. Чи існує переміщення, яке переводить відрізок AB у відрізок $A'B'$, якщо:

1) $AB = 5$ см; $A'B' = 5$ см; 2) $AB = 4$ см; $A'B' = 7$ см?

886. Чи існує переміщення, яке переводить відрізок MN у відрізок $M'N'$, якщо:

1) $MN = 6$ см; $M'N' = 4$ см; 2) $MN = 7$ см; $M'N' = 7$ см?

887. Чи існує переміщення, яке переводить кут D в кут D', якщо:

1) $\angle D = 60°$; $\angle D' = 62°$; 2) $\angle D = 30°$; $\angle D' = 30°$?

888. Чи існує переміщення, яке переводить кут A в кут A', якщо:

1) $\angle A = 100°$; $\angle A' = 100°$; 2) $\angle A = 98°$; $\angle A' = 85°$?

2 Середній рівень

889. При переміщенні трикутник ABC перейшов у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть кути трикутника $A'B'C'$, якщо трикутник ABC – рівнобедрений з кутом A при вершині і $\angle A = 20°$.

890. При переміщенні прямокутний трикутник ABC з катетами $AC = 3$ см і $BC = 4$ см перейшов у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть сторони трикутника $A'B'C'$.

891. $ABCD$ – паралелограм. Чи існує переміщення, при якому:
1) сторона AB переходить у сторону CD;
2) кут BAD переходить у кут BCD?

892. $KLMN$ – ромб. Чи існує переміщення, при якому:
1) сторона KL переходить у сторону KN;
2) кут KLN переходить у кут MNL?

3 Достатній рівень

893. Нехай маємо два кола зі спільним центром O. Кожній точці X першого кола відповідає точка X' другого кола, яка лежить на промені OX. Чи буде ця відповідність між точками двох кіл перетворенням?

894. Коло із центром у точці O вписано у квадрат. Кожній точці X кола відповідає точка X' квадрата, яка лежить на промені OX. Чи буде ця відповідність між точками кола і квадрата перетворенням?

895. Чи існує переміщення, при якому відрізок MN переходить у відрізок KL, якщо $M(-2; 3)$, $N(2; 0)$, $K(5; 1)$, $L(0; 2)$?

896. Чи існує переміщення, при якому відрізок AB переходить у відрізок CD, якщо $A(0; 5)$, $B(6; -3)$, $C(4; 5)$, $D(-1; 0)$?

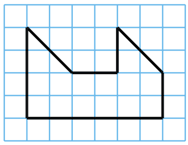
4 Високий рівень

897. Чи існує переміщення, яке переводить коло $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ у коло $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$?

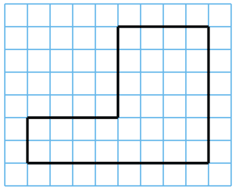
898. Чи існує переміщення, яке переводить коло $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ у коло $x^2 + y^2 + 8x = 0$?

899. Розділіть фігуру, зображену на малюнку 160, на дві рівні частини.

900. Розділіть фігуру, зображену на малюнку 161, на дві рівні частини.



Мал. 160



Мал. 161

Вправи для повторення

901. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них на 30° більший за інший.

902. Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см, дві інші утворюють кут 60°, а їх різниця дорівнює 3 см. Знайдіть площу трикутника.

903. Два кола з радіусами 4 см і 9 см мають зовнішній дотик. Спільна зовнішня дотична дотикається до кіл у точках A і B. Знайдіть AB.

904. У правильному п'ятикутнику $ABCDE$ діагоналі AD і BE перетинаються в точці O. Знайдіть кут DOE.

Цікаві задачі для учнів неледачих

905. На колі навмання розташували 5 точок. Доведіть, що:

1) існує принаймні три трійки точок, що є вершинами тупокутних трикутників;

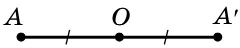
2) існує таке розташування точок, при якому тупокутних трикутників буде точно три.

§ 19. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ

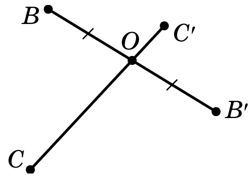
Дві точки A і A' називають *симетричними відносно точки O*, якщо O є серединою відрізка AA' (мал. 162).

Точкою, симетричною точці O, буде сама точка O.

На малюнку 163 точки B і B' симетричні відносно точки O, а точки C і C' не є симетричними відносно точки O.



Мал. 162



Мал. 163

Щоб побудувати точку A', симетричну точці A відносно точки O:

1) проводимо промінь AO;

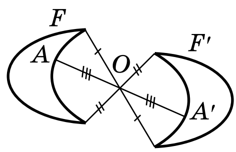
2) по інший бік від точки O відкладаємо на ньому відрізок $OA' = OA$ (див. мал. 162).

Задача 1. Точки $A(x; 2)$ і $A'(-3; y)$ симетричні відносно точки $O(4; -5)$. Знайти x і y.

Р о з в' я з а н н я. Точка O – середина відрізка AA'. За формулами середини відрізка: $4 = \frac{x + (-3)}{2}$ і $-5 = \frac{2 + y}{2}$, звідси: $x = 11$, $y = -12$.

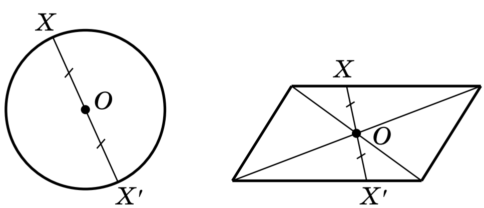
В і д п о в і д ь. $x = 11$, $y = -12$.

Якщо кожна точка фігури F симетрична деякій точці фігури F' відносно точки O, і навпаки, то фігури F і F' називають *симетричними відносно точки O* (мал. 164). Таке перетворення фігури F у фігуру F' називають *перетворенням симетрії відносно точки O*.



Мал. 164

Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то фігуру F називають *центрально-симетричною*, а точку O – її *центром симетрії.*



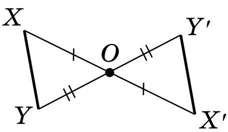
Мал. 165

Прикладами центрально-симетричних фігур є коло і паралелограм (мал. 165). Центром симетрії кола є центр кола, а центром симетрії паралелограма – точка перетину його діагоналей.

Симетрію відносно точки називають ще *центральною симетрією.*

Т е о р е м а (про перетворення симетрії відносно точки). **Перетворення симетрії відносно точки є переміщенням.**

Д о в е д е н н я. Нехай X і Y – дві довільні точки фігури F, а перетворення симетрії відносно точки O переводить їх у точки X' і Y' (мал. 166).



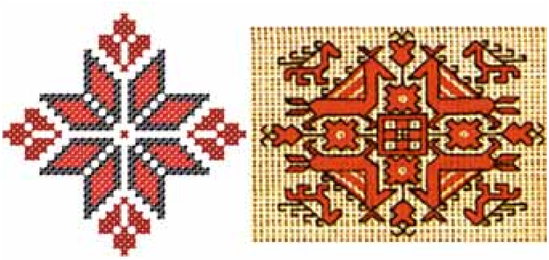
Мал. 166

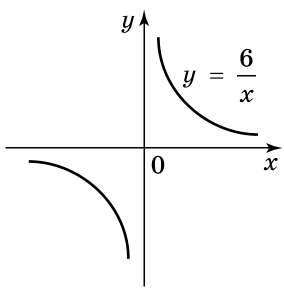
Оскільки $XO = X'O$, $YO = Y'O$ (за означенням симетрії) і $\angle XOY = \angle X'OY'$ (як вертикальні), то $\triangle XOY = \triangle X'OY'$ (за двома сторонами і кутом між ними).

Тому $XY = X'Y'$. Це означає, що симетрія відносно точки O є переміщенням. (Випадок, коли точки X, Y і O лежать на одній прямій, розгляньте самостійно). ▲

Приклади центрально-симетричних фігур трапляються у природі, техніці, побуті (мал. 167). Наприклад, центрально симетричними є орнаменти на килимах, вишивках тощо (мал. 168). В алгебрі, наприклад, графіком функції $y = \frac{6}{x}$ є гіпербола, симетрична відносно початку координат (мал. 169).

Мал. 167


Мал. 168

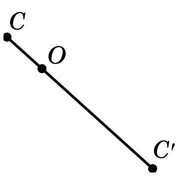


Мал. 169

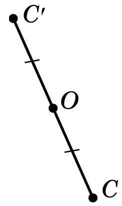
1. Які точки називають симетричними відносно даної точки?
2. Яке перетворення називають симетрією відносно даної точки?
3. Яку фігуру називають центрально-симетричною?
4. Яку точку називають центром симетрії фігури?
5. Доведіть, що перетворення симетрії відносно точки є переміщенням.
6. Наведіть приклади фігур, що мають центр симетрії.

1 Початковий рівень

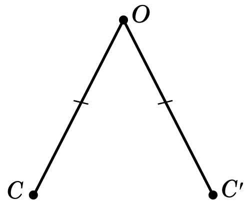
906. (Усно.) На якому з малюнків 170–173 точки C і C' симетричні відносно точки O?



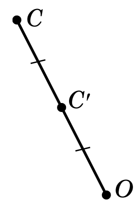
Мал. 170



Мал. 171



Мал. 172



Мал. 173

907. Дано дві точки O і A. Побудуйте точку A', симетричну точці A відносно точки O.

908. Дано дві точки O і B. Побудуйте точку B', симетричну точці B відносно точки O.

2 Середній рівень

909. Дано відрізок AB, $A(-2; 3)$, $B(4; 5)$. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку AB відносно початку координат, та запишіть координати його кінців.

910. Дано відрізок MN, кінці якого мають координати $M(-2; -1)$, $N(4; -3)$. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку MN відносно початку координат, та запишіть координати його кінців.

911. Серед точок $A(-2; 3)$, $B(2; 3)$, $C(-2; -3)$, $D(2; -3)$ укажіть пари точок, які симетричні відносно початку координат.

912. Чи симетричні точки $A(-2; 3)$ і $B(4; -7)$ відносно точки $O(1; 2)$?

913. Які координати має точка O, відносно якої симетричні точки $M(-4; 5)$ і $N(8; -1)$?

914. Точки $A(x; -3)$ і $A'(5; y)$ симетричні відносно точки $O(7; 1)$. Знайдіть x і y.

915. Точки $B(5; y)$ і $B'(x; -7)$ симетричні відносно точки $O(-3; 4)$. Знайдіть x і y.

916. Чи має центр симетрії:

1) відрізок; 2) промінь; 3) пряма; 4) коло?

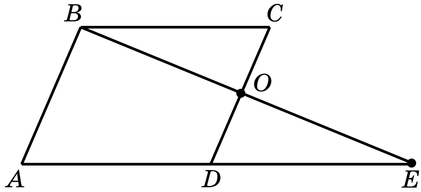
Якщо так, то вкажіть центр симетрії.

3 Достатній рівень

917. $ABCD$ – паралелограм (мал. 174). Точка E симетрична точці A відносно точки D. Доведіть, що:

1) точки C і D симетричні відносно точки O;

2) точки B і E симетричні відносно точки O.



Мал. 174

918. $ABCD$ – паралелограм (мал. 174). Точка E симетрична точці B відносно точки O. Доведіть, що:

1) точки C і D симетричні відносно точки O;

2) точки A і E симетричні відносно точки D.

919. Запишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ відносно:

1) початку координат; 2) точки $O(-1; 5)$.

920. Запишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 9$ відносно:

1) початку координат; 2) точки $O(2; -3)$.

4 Високий рівень

921. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $2x - y + 5 = 0$ відносно:

1) початку координат; 2) точки $O(1; 3)$.

922. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $x + 2y - 3 = 0$ відносно:

1) початку координат; 2) точки $O(-1; -2)$.

Вправи для повторення

923. З точки до прямої проведено перпендикуляр і похилу, що вдвічі більша за перпендикуляр. Знайдіть кут між похилою і прямою.

924. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, бічна сторона якої перпендикулярна до діагоналі й дорівнює меншій основі.

925. Площа прямокутного трикутника в 4 рази менша за площу квадрата, який побудовано на гіпотенузі. Знайдіть гострі кути трикутника.

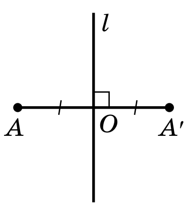
Цікаві задачі для учнів неледачих

926. Знайдіть довжини сторін AB і AC трикутника ABC, якщо $BC = 8$ см, а довжини висот, проведених до AC і BC, дорівнюють відповідно 6,4 см і 4 см. Скільки випадків слід розглянути?

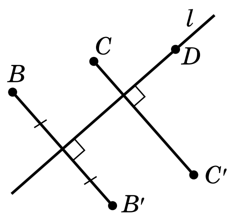
§ 20. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ПРЯМОЇ

Дві точки A і A' називають *симетричними відносно прямої l,* якщо ця пряма є серединним перпендикуляром до відрізка AA' (мал. 175).

Якщо точка A лежить на прямій l, то її вважають симетричною самій собі відносно прямої l.



Мал. 175



Мал. 176

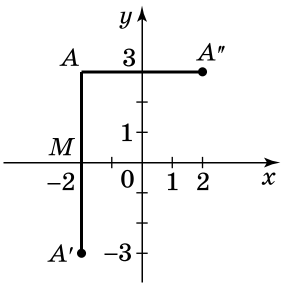
На малюнку 176 точки B і B' симетричні відносно прямої l, точки C і C' не симетричні відносно прямої l, а точка D симетрична сама собі відносно прямої l.

Щоб побудувати точку A', симетричну точці A відносно прямої l:

1) проводимо перпендикуляр AO з точки A до прямої l;

2) на його продовженні з іншого боку від прямої l відкладаємо відрізок $OA' = OA$ (див. мал. 175).

Задача 1. Знайдіть координати точок, симетричних точці $A(-2; 3)$ відносно осей координат.



Мал. 177

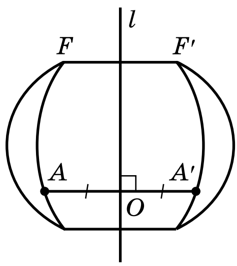
Р о з в' я з а н н я. Нехай точка A' симетрична точці A відносно осі x (мал. 177). Тоді $AA' \perp x$ і точка M середина відрізка AA'. Тому абсциса точки A' дорівнює абсцисі точки A, а ординати цих точок – протилежні числа. Отже, $A'(-2; -3)$.

Нехай точка A'' симетрична точці A відносно осі y. Міркуючи аналогічно, матимемо $A''(2; 3)$.

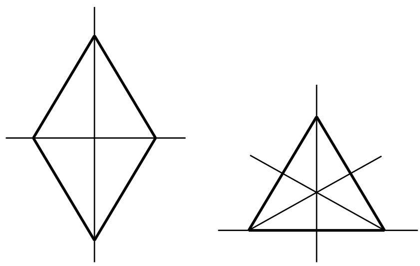
В і д п о в і д ь. $A'(-2; -3)$ і $A''(2; 3)$.

Якщо кожна точка фігури F відносно прямої l симетрична деякій точці фігури F', і навпаки, то фігури F і F' називають *симетричними відносно прямої* l (мал. 178).

Якщо перетворення симетрії відносно прямої l переводить фігуру F у себе, то фігуру F називають *симетричною відносно прямої* l, а пряму l – її *віссю симетрії*.



Мал. 178



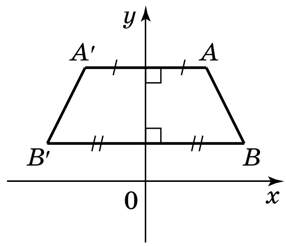
Мал. 179

Прикладами фігур, які мають вісь симетрії, є ромб і рівносторонній трикутник (мал. 179). Ромб має дві осі симетрії, а рівносторонній трикутник – три.

Симетрію відносно прямої називають ще *осьовою симетрією*.

Т е о р е м а (про перетворення симетрії відносно прямої). **Перетворення симетрії відносно прямої є переміщенням.**

Д о в е д е н н я. Виберемо систему координат так, щоб вісь симетрії збігалася з віссю y. Нехай $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ – дві довільні точки фігури F, а A' і B' – точки, симетричні відповідно точкам A і B відносно прямої y (мал. 180).



Мал. 180

Тоді можемо вказати координати точок A' і B': $A'(-x_1;\ y_1)$ і $B'(-x_2;\ y_2)$ (див. розв'язання задачі 1 цього параграфа).

Маємо:

$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2;$

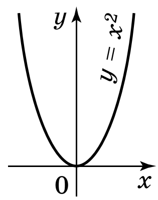
$A'B'^2 = (-x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$

Тому $AB^2 = A'B'^2$, отже, $AB = A'B'$, тобто симетрія відносно прямої є переміщенням. ▲

Мал. 181

Фігури, симетричні відносно прямої, оточують нас у повсякденному житті, є у природі, техніці тощо (мал. 181).

В алгебрі симетрія відносно прямої трапляється під час побудови графіків. Наприклад, графік функції $y = x^2$ симетричний відносно осі ординат (мал. 182).



Мал. 182

А ще раніше...

Слово «*симетрія*» – грецького походження (*сим* – з, *метрон* – міра) і дослівно означає «співмірність». У давнину цей термін застосовували в архітектурі та мистецтві, маючи на увазі гармонійність, рівновагу, красу.

Пізнаючи в буденному житті явища природи, люди помічали симетричну форму листя та метеликів, спіралі раковин, будови кристалів тощо, а також симетрію будови тіла людини.

Вчення про симетрію веде свій початок з давнини, про що свідчать геометричні орнаменти, які збереглися на кам'яних плитах, посудинах тощо. Багатовікові спостереження людини за симетрією мінералів, рослин, тварин та досвід застосування симетрії в будівництві і мистецтві привели до створення вчення про симетрію.

Про симетрію у трактаті «Про архітектуру» писав римський інженер Вітрувій (I ст.). Симетрію вивчали і застосовували архітектори й художники епохи Відродження, зокрема видатні італійські живописці Леонардо да Вінчі та Рафаель Санті; нею займалися вчені Луї Пастер (1822–1895), П’єр і Жак Кюрі та інші.

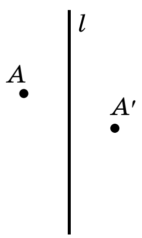
У геометрію елементи вчення про симетрію ввів французький математик А.М. Летанур (1752–1833).

У наші часи вчення про симетрію є основою науки кристалографії та широко застосовується в науці, техніці й промисловості.

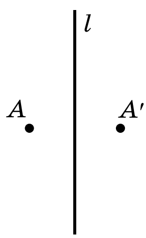
1. Які точки називають симетричними відносно даної прямої?
2. Яке перетворення називають симетрією відносно прямої?
3. Яку фігуру називають симетричною відносно даної прямої?
4. Як називають пряму, відносно якої фігура є симетричною?
5. Доведіть, що перетворення симетрії відносно прямої є переміщенням.
6. Наведіть приклади фігур, що мають вісь симетрії.

Початковий рівень

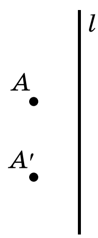
927. **(Усно.)** На якому з малюнків 183–186 точки A і A' симетричні відносно прямої l?



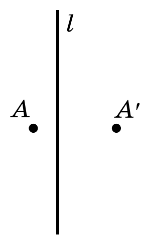
Мал. 183



Мал. 184



Мал. 185



Мал. 186

928. Дано пряму l і точку M, що їй не належить. Побудуйте точку, симетричну точці M відносно прямої l.

929. Дано пряму l і точку N, що їй не належить. Побудуйте точку N', симетричну точці N відносно прямої l.

2 Середній рівень

930. Дано відрізок CD, кінці якого мають координати $C(-4; 1)$, $D(2; -3)$. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку CD відносно осі абсцис, та запишіть координати його кінців.

931. Дано відрізок AB, кінці якого мають координати $A(2; 5)$, $B(3; -1)$. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку AB відносно осі ординат, та запишіть координати його кінців.

932. Серед точок $A(-2; 5)$, $B(-2; -5)$, $C(2; 5)$, $D(2; -5)$ укажіть пари точок, симетричних відносно осі ординат.

933. Серед точок $M(3; -4)$, $N(-3; 4)$, $K(-3; -4)$, $L(3; 4)$ укажіть пари точок, симетричних відносно осі абсцис.

934. Накресліть трикутник ABC. Побудуйте трикутник, симетричний трикутнику ABC відносно прямої BC.

935. Накресліть прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AB. Побудуйте трикутник, симетричний трикутнику ABC відносно прямої AC.

936. Скільки осей симетрії має:

1) відрізок; 2) промінь; 3) пряма;
4) коло; 5) прямокутник, що не є квадратом;
6) квадрат?

3 Достатній рівень

937. Знайдіть x і y, якщо точки $A(x; -2)$ і $A'(3; y)$ симетричні відносно:

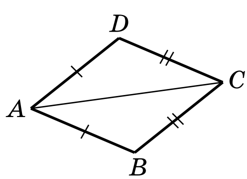
1) осі абсцис; 2) осі ординат.

938. Знайдіть x і y, якщо точки $A(-5; y)$ і $A'(x; 6)$ симетричні відносно:

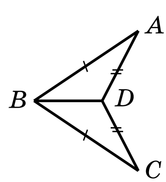
1) осі абсцис; 2) осі ординат.

939. На малюнку 187 $AD = AB$, $CD = CB$. Доведіть, що точки B і D симетричні відносно прямої AC.

940. На малюнку 188 $AB = BC$, $AD = DC$. Доведіть, що точки A і C симетричні відносно прямої BD.



Мал. 187



Мал. 188

941. Осі координат є осями симетрії ромба. Середина однієї зі сторін ромба – точка $N(-2; 3)$. Знайдіть координати вершин ромба.

942. Осі координат є осями симетрії квадрата. Середина однієї зі сторін квадрата – точка $M(2; -2)$. Знайдіть координати вершин квадрата.

Високий рівень

943. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $2x - 3y - 6 = 0$ відносно:

1) осі абсцис; 2) осі ординат.

944. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $4x - y + 8 = 0$ відносно:

1) осі абсцис; 2) осі ординат.

Вправи для повторення

945. Периметр ромба дорівнює 24 см, а один з його кутів дорівнює $60°$. Знайдіть діагоналі ромба.

946. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, периметр якого дорівнює 36 см, а основа менша за бічну сторону на 3 см.

947. Знайдіть відношення площі правильного шестикутника, вписаного в коло, до площі квадрата, описаного навколо цього кола.

Цікаві задачі для учнів неледачих

948. (*Київська математична олімпіада, 1993 р.*) Дано три ненульових вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, які попарно неколінеарні. Довести, що коли вектор $\vec{a} + \vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{c}$, а вектор $\vec{b} + \vec{c}$ колінеарний вектору $\vec{a}$, то вектор $\vec{a} + \vec{c}$ колінеарний вектору $\vec{b}$. Знайдіть суму векторів $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

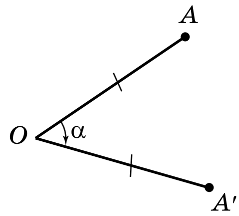
§ 21. ПОВОРОТ

Поворотом **навколо точки *O* на кут α називають перетворення, при якому точка *A* переходить у точку *A′* так, що *OA* = *OA′* і $\angle AOA' = \alpha$** (мал. 189).

Після повороту точка O переходить у себе. Точку O називають *центром повороту*, а кут AOA' – *кутом повороту*.

Поворот можна виконати у двох напрямах: за годинниковою стрілкою і проти годинникової стрілки.

На малюнку 189 виконано поворот точки A навколо точки O на кут α за годинниковою стрілкою.



Мал. 189

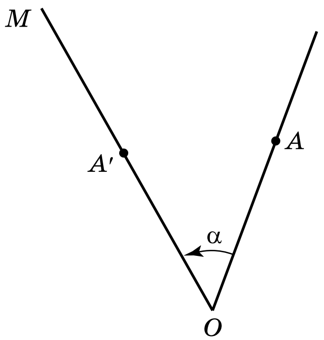
Щоб побудувати точку A', у яку переходить точка A внаслідок повороту в заданому напрямі (за годинниковою стрілкою або проти) навколо центру повороту (точки O) на кут α:

1) проводимо промінь OA;

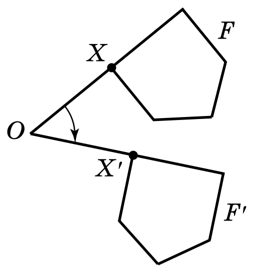
2) від променя OA в заданому напрямі відкладаємо кут AOM, що дорівнює куту α;

3) на промені OM позначаємо точку A', таку, що $OA = OA'$ (мал. 190).

На малюнку 190 виконано поворот точки A навколо точки O на кут α проти годинникової стрілки.



Мал. 190



Мал. 191

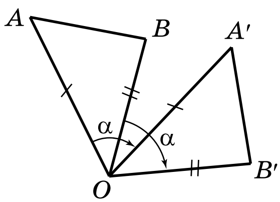
Зауважимо, що поворот на 180° навколо точки O як за годинниковою стрілкою, так і проти годинникової стрілки є симетрією відносно точки O.

Якщо задано кут α, центр і напрям повороту, то навколо центра повороту можна виконати поворот будь-якої фігури F. Для цього кожну точку X фігури F треба повернути навколо центра повороту на заданий кут α, отримавши у такий спосіб точку X' фігури F' (мал. 191). У такому разі кажуть, що поворот навколо точки O на кут α відображає фігуру F у фігуру F'.

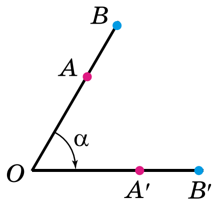
Т е о р е м а (про поворот навколо точки). **Перетворення повороту є переміщенням.**

Д о в е д е н н я. Нехай при повороті навколо точки O на кут α точки A і B фігури F переходять відповідно в точки A' і B' фігури F'. Тоді $OA = OA'$, $OB = OB'$ і $\angle AOA' = \angle BOB'$.

1) Нехай точки A, B і O не лежать на одній прямій (мал. 192). Тоді $\angle AOB = \angle A'OB'$ (бо кожний із цих кутів дорівнює різниці кутів α і BOA'). Тому $\triangle AOB = \triangle A'OB'$ (за двома сторонами і кутом між ними), звідси $AB = A'B'$.



Мал. 192



Мал. 193

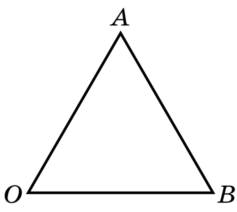
2) Нехай точки A, B і O лежать на одній прямій (мал. 193). Тоді $AB = OB - OA = OB' - OA' = A'B'$.

Отже, в обох випадках $AB = A'B'$. ▲

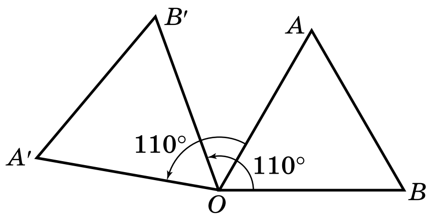
Задача. Трикутник AOB – рівносторонній (мал. 194).

1) Побудувати відрізок $A'B'$, у який переходить відрізок AB при повороті навколо точки O на кут 110° проти годинникової стрілки.

2) Знайти градусну міру кута AOB'.



Мал. 194



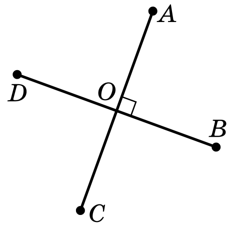
Мал. 195

Р о з в' я з а н н я. 1) Побудову зображено на малюнку 195.
2) $\angle AOB' = \angle B'OB - \angle AOB = 110° - 60° = 50°$.
В і д п о в і д ь. 2) 50°.

1. Що називають поворотом навколо точки O на кут α?
2. Що називають центром повороту; кутом повороту?
3. Доведіть, що перетворення повороту є переміщенням.

1 Початковий рівень

949. У яку точку при повороті на кут 90° за годинниковою стрілкою навколо точки O (мал. 196) переходить точка:
1) B; 2) D; 3) A; 4) C?



Мал. 196

950. У яку точку при повороті на кут 90° проти годинникової стрілки навколо точки O (мал. 196) переходить точка:
1) A; 2) D; 3) B; 4) C?

951. Стрілки годинника показують 11 год. Який час покаже годинник, якщо хвилинна стрілка здійснить поворот на 120°?

952. Стрілки годинника показують 8 год. Який час покаже годинник, якщо хвилинна стрілка здійснить поворот на 60°?

2 Середній рівень

953. Дано точки A і O. Побудуйте точку A', у яку переходить точка A при повороті навколо точки O:
1) за годинниковою стрілкою на 80°;
2) проти годинникової стрілки на 130°.

954. Дано точки B і O. Побудуйте точку B', у яку переходить точка B при повороті навколо точки O:
1) проти годинникової стрілки на 70°;
2) за годинниковою стрілкою на 100°.

955. У яку точку переходить точка $B(0; -3)$ при повороті відносно початку координат на:
1) 90° проти годинникової стрілки;
2) 90° за годинниковою стрілкою;
3) 180°?

956. У яку точку переходить точка $A(2; 0)$ при повороті відносно початку координат на:
1) 90° за годинниковою стрілкою;
2) 90° проти годинникової стрілки;
3) 180°?

3 Достатній рівень

957. Накресліть трикутник ABC. Виконайте поворот трикутника на 60° за годинниковою стрілкою навколо вершини B.

958. Накресліть трикутник ABC. Виконайте поворот трикутника на $110°$ проти годинникової стрілки навколо вершини C.

959. Побудуйте точки, у які переходять точки $A(3; -1)$, $B(-2; 2)$, $C(1; 2)$, $D(-4; -4)$ при повороті на $90°$ проти годинникової стрілки навколо початку координат. Укажіть координати одержаних точок.

960. Побудуйте точки, у які переходять точки $M(-4; 2)$, $N(1; -1)$, $K(4; 3)$, $L(-2; -2)$ при повороті на $90°$ за годинниковою стрілкою навколо початку координат. Укажіть координати одержаних точок.

961. На який найменший кут треба повернути квадрат відносно його центра симетрії, щоб він перейшов сам у себе?

Високий рівень

962. Точка $A(m; -3)$ переходить у точку $A'(n; 4)$ при повороті навколо початку координат на $90°$ за годинниковою стрілкою. Знайдіть m і n.

963. Точка $B(4; m)$ переходить у точку $B'(-3; n)$ при повороті навколо початку координат на $90°$ проти годинникової стрілки. Знайдіть m і n.

964. Знайдіть координати точки A', у яку переходить точка $A(2; 0)$ при повороті навколо початку координат на кут $45°$ за годинниковою стрілкою.

965. Знайдіть координати точки B', у яку переходить точка $B(0; 2)$ при повороті навколо початку координат на кут $45°$ проти годинникової стрілки.

966. Дано відрізок AB. За допомогою циркуля і лінійки виконайте поворот навколо його середини на $120°$ за годинниковою стрілкою.

Вправи для повторення

967. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 25 см, а один з катетів – 20 см.

968. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 9 см і 13 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якого сума найбільшої і найменшої сторін дорівнює 84 см.

969. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $45°$, $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$. Знайдіть $|\vec{a} - 2\vec{b}|$.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

970. 1) Вектор $\vec{m}(-2;\ 3)$ відкладено від точки $L(4;\ 5)$. Знайдіть координати кінця вектора.

2) Вектор $\vec{m}(a;\ b)$ відкладено від точки $K(x;\ y)$. Знайдіть координати кінця вектора.

971. 1) Точка $M(4;\ -3)$ – кінець вектора $\vec{d}(-5;\ 0)$. Знайдіть координати початку вектора.

2) Точка $C(x';\ y')$ – кінець вектора $\vec{d}(a;\ b)$. Знайдіть координати початку вектора.

Цікаві задачі для учнів неледачих

972. Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає описане навколо нього коло в точці D. Знайдіть довжини хорд DC і DB, якщо $DI = l$, де I – центр кола, вписаного у трикутник.

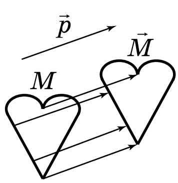
§ 22. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ

Нехай дано вектор $\vec{p}$.

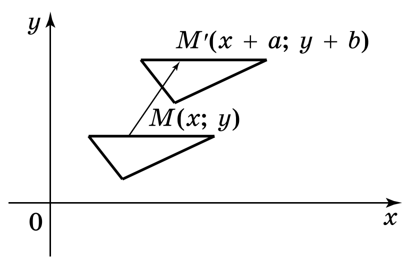
***Паралельним перенесенням* на вектор $\vec{p}$ називають таке перетворення, при якому кожній точці M відповідає така точка M', що $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$** (мал. 197).

Якщо координати вектора відомі, то можна дати інше означення паралельного перенесення на вектор $\vec{p}(a;\ b)$.

***Паралельним перенесенням* називають таке перетворення фігури, при якому її довільна точка $M(x;\ y)$ переходить у точку $M'(x + a;\ y + b)$, де a і b – одні й ті самі для всіх точок фігури** (мал. 198).



Мал. 197



Мал. 198

Якщо точка M' має координати $(x'; y')$, то отримаємо *формули паралельного перенесення*:

$$x' = x + a,\ \ y' = y + b.$$

Задача 1. Паралельне перенесення задано формулами $x' = x + 2$, $y' = y - 3$. З'ясуйте:

1) у яку точку при цьому паралельному перенесенні переходить точка $A(5; 4)$;

2) яка точка при цьому паралельному перенесенні переходить у точку $B'(-7; -3)$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Нехай точка $A(5; 4)$ переходить у точку $A'(x'; y')$, тоді $x' = 5 + 2$, $x' = 7$, $y' = 4 - 3$, $y' = 1$. Отже, $A'(7; 1)$.

2) Нехай у точку $B'(-7; -3)$ перейшла точка $B(x; y)$, тоді $-7 = x + 2$, звідки $x = -9$ і $-3 = y - 3$, звідки $y = 0$. Отже, $B(-9; 0)$.

В і д п о в і д ь. 1) $A'(7; 1)$; 2) $B(-9; 0)$.

Задача 2. Знайти формули, що задають паралельне перенесення, при якому точка $C(2; -5)$ переходить у точку $C'(4; 9)$.

Р о з в' я з а н н я. Щоб знайти значення a і b, у формули паралельного перенесення $x' = x + a$ і $y' = y + b$ підставимо значення відповідних координат точок C і C'. Матимемо:

$4 = 2 + a$ і $9 = -5 + b$; звідки $a = 2$ і $b = 14$.

Отже, формули паралельного перенесення мають вигляд: $x' = x + 2$, $y' = y + 14$.

В і д п о в і д ь. $x' = x + 2$, $y' = y + 14$.

Т е о р е м а (про паралельне перенесення). **Паралельне перенесення є переміщенням.**

Д о в е д е н н я. Нехай при деякому паралельному перенесенні точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ фігури F переходять відповідно в точки $A'(x_1 + a; y_1 + b)$ і $B'(x_2 + a; y_2 + b)$ фігури F'.

Тоді за формулою відстані між двома точками:

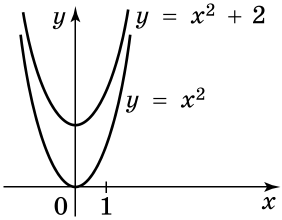
$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2;$$

$$A'B'^2 = (x_1 + a - (x_2 + a))^2 + (y_1 + b - (y_2 + b))^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

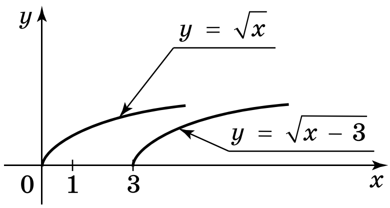
Отже, $AB^2 = A'B'^2$, а тому $AB = A'B'$. ▲

Однакові малюнки, що періодично повторюються на шпалерах, тканинах, вишитих рушниках, секції огорожі, паркетна підлога з малюнками, які повторюються, зовнішній вигляд поверхів багатоповерхівок є прикладами паралельного перенесення у повсякденному житті.

За допомогою паралельного перенесення будують графіки функцій в алгебрі. Наприклад, щоб побудувати графік функції $y = x^2 + 2$, треба для графіка функції $y = x^2$ виконати паралельне перенесення на дві одиниці вгору (мал. 199), а щоб побудувати графік функції $y = \sqrt{x - 3}$, треба графік функції $y = \sqrt{x}$ паралельно перенести на три одиниці праворуч (мал. 200).



Мал. 199



Мал. 200

1. Що називають паралельним перенесенням (сформулюйте два означення)?
2. Які формули задають паралельне перенесення?
3. Доведіть, що паралельне перенесення є переміщенням.
4. Наведіть приклади паралельного перенесення з життя.
5. Наведіть приклади паралельного перенесення в алгебрі.

1 Початковий рівень

973. (Усно.) Які з тверджень правильні:

1) існує паралельне перенесення, при якому більша основа трапеції переходить у меншу;

2) при паралельному перенесенні коло переходить у коло того самого радіуса;

3) при паралельному перенесенні прямокутний трикутник переходить у рівносторонній;

4) існує паралельне перенесення, при якому сторона паралелограма переходить у паралельну їй сторону?

974. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x - 2$; $y' = y + 5$. У які точки при цьому паралельному перенесенні переходять точки:

1) $O(0; 0)$; 2) $A(3; -1)$; 3) $B(2; -5)$; 4) $C(10; 1)$?

975. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x + 1$, $y' = y - 2$. У які точки при цьому паралельному перенесенні переходять точки:

1) $O(0; 0)$; 2) $M(-2; 4)$; 3) $N(-1; 2)$; 4) $K(-5; 8)$?

Середній рівень

976. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x + 3$, $y' = y - 7$. Які точки при цьому паралельному перенесенні переходять у точки:

1) $K'(2; 3)$; 2) $M'(3; -7)$;
3) $N'(0; 0)$; 4) $L'(4; -5)$?

977. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x - 3$, $y' = y + 7$. Які точки при цьому паралельному перенесенні переходять у точки:

1) $A'(2; 4)$; 2) $B'(-3; 7)$;
3) $C'(0; 0)$; 4) $D'(-3; 17)$?

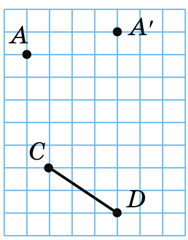
978. Запишіть формули паралельного перенесення, при якому точка A переходить у точку A', якщо:

1) $A(2; 7)$, $A'(-4; 5)$; 2) $A(-1; 3)$, $A'(2; -5)$.

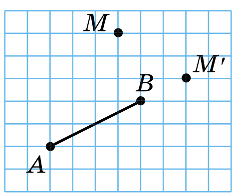
979. Запишіть формули паралельного перенесення, при якому точка B переходить у точку B', якщо:

1) $B(-1; 2)$, $B'(0; -2)$; 2) $B(2; 4)$, $B'(5; 0)$.

980. При деякому паралельному перенесенні точка A перейшла в точку A' (мал. 201). Перемалюйте малюнок у зошит та побудуйте фігуру, у яку при цьому паралельному перенесенні переходить відрізок CD.



Мал. 201



Мал. 202

981. При деякому паралельному перенесенні точка M перейшла в точку M' (мал. 202). Перемалюйте малюнок у зошит та побудуйте фігуру, у яку при цьому паралельному перенесенні переходить відрізок AB.

Достатній рівень

982. Чи існує паралельне перенесення, при якому:

1) точка $A(2; -1)$ переходить у точку $B(4; -7)$, а точка $C(0; 2)$ – у точку $D(2; -3)$;

2) точка $M(4; -2)$ переходить у точку $N(0; -3)$, а точка $K(3; 0)$ – у точку $L(-1; -1)$?

983. Чи існує паралельне перенесення, при якому:

1) точка $C(0; 0)$ переходить у точку $D(4; 5)$, а точка $A(-1; 2)$ – у точку $B(2; 7)$;

2) точка $K(-1; -1)$ переходить у точку $L(2; -3)$, а точка $M(0; 2)$ – у точку $N(3; 0)$?

984. Запишіть рівняння кола, у яке переходить коло $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 15$ при паралельному перенесенні, заданому формулами: $x' = x - 5$, $y' = y + 2$.

985. Запишіть рівняння кола, у яке переходить коло $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 7$ при паралельному перенесенні, заданому формулами: $x' = x + 3$, $y' = y - 4$.

Високий рівень

986. Запишіть рівняння прямої, у яку переходить пряма $x + 2y - 4 = 0$ при паралельному перенесенні, заданому формулами: $x' = x + 1$; $y' = y - 2$.

987. Запишіть рівняння прямої, у яку переходить пряма $3x - y - 6 = 0$ при паралельному перенесенні, заданому формулами: $x' = x - 2$, $y' = y + 3$.

988. Виконали паралельне перенесення прямої $2x - 5y - 10 = 0$. Запишіть рівняння прямої, що при цьому отримали, якщо вона проходить через точку:

1) $O(0; 0)$; 2) $A(2; -1)$.

989. Виконали паралельне перенесення прямої $3x - 2y + 6 = 0$. Запишіть рівняння прямої, що при цьому отримали, якщо вона проходить через точку:

1) $O(0; 0)$; 2) $B(4; -1)$.

Вправи для повторення

990. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює $45°$, а інший прямокутний трикутник є рівнобедреним. Чи подібні ці трикутники?

991. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює $30°$, а бічна сторона – 4 см. Знайдіть довжину медіани, проведеної до бічної сторони.

992. Знайдіть площу трапеції з основами 20 см і 12 см, якщо центр кола, описаного навколо цієї трапеції, лежить на більшій основі.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

993. Доведіть, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, якщо:
1) $\angle A = 50°$, $\angle B = \angle B_1 = 100°$, $\angle C_1 = 30°$;
2) $\angle C = \angle C_1 = 20°$, $AC = 2$ см, $BC = 5$ см, $A_1C_1 = 4$ см, $B_1C_1 = 10$ см;
3) $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 6$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $B_1C_1 = 12$ см, $A_1C_1 = 18$ см.

994. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = 3$, $P_{ABC} = 24$ см. Знайдіть $P_{A_1B_1C_1}$.

Цікаві задачі для учнів неледачих

995. Кожне з трьох рівних між собою кіл радіуса r дотикається до двох інших. Знайдіть площу трикутника, утвореного спільними дотичними до цих кіл.

§ 23. ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. ПОДІБНІСТЬ ФІГУР

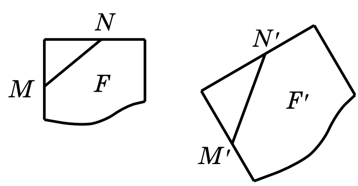
Раніше ми вже розглядали подібність трикутників. Поняття подібності можна ввести не тільки для трикутників, але й для довільних фігур.

Перетворення фігури F у фігуру F' називають *перетворенням подібності*, або *подібністю*, якщо при цьому перетворенні відстані між точками змінюються в одну й ту саму кількість разів.

Це означає, що коли довільні точки M і N фігури F при перетворенні подібності переходять у точки M' і N' фігури F', то

$$M'N' = kMN,$$

де k – одне й те саме додатне число для всіх пар точок M і N (мал. 203). Це число k називають *коефіцієнтом подібності* фігури F' по відношенню до фігури F, або просто коефіцієнтом подібності фігур.



Мал. 203

Розглянемо основні *властивості перетворення подібності.*

1. Переміщення можна розглядати як перетворення подібності з коефіцієнтом $k = 1$.
2. При перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розташування.

Д о в е д е н н я. Нехай точки A, B і C лежать на одній прямій, причому точка B лежить між точками A і C. Тоді $AC = AB + BC$.

При перетворенні подібності точки A, B і C переходять відповідно в точки A', B' і C', причому

$$A'B' = k \cdot AB,\ B'C' = k \cdot BC,\ A'C' = k \cdot AC.$$

Маємо:

$$A'C' = k \cdot AC = k(AB + BC) = k \cdot AB + k \cdot BC = A'B' + B'C'.$$

З рівності $A'C' = A'B' + B'C'$ випливає, що точки A', B' і C' лежать на одній прямій, причому точка B' лежить між точками A' і C'.

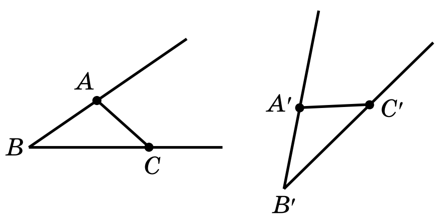
Н а с л і д о к. **Перетворення подібності переводить прямі у прямі, промені — у промені, відрізки — у відрізки.**

3. При перетворенні подібності кут переходить у рівний йому кут.

Д о в е д е н н я. Нехай $\angle ABC$ перетворенням подібності з коефіцієнтом переводиться в $\angle A'B'C'$ (мал. 204).

Тоді $A'B' = k \cdot AB$, $B'C' = k \cdot BC$, $A'C' = k \cdot AC$.

Тому $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (за трьома пропорційними сторонами).



Мал. 204

А отже, $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Дві фігури називають *подібними*, якщо вони переходять одна в одну при перетворенні подібності.

Якщо перетворенням подібності точки M і N фігури F переходять у точки M' і N' фігури F' і $M'N' = k \cdot MN$, то кажуть, що фігура F' подібна фігурі F *з коефіцієнтом* k, і записують так: $F' \backsim F$ (читають: «фігура F' подібна фігурі F»), або $F' \overset{k}{\backsim} F$, коли треба вказати коефіцієнт (читають: «фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k»).

Зауважимо, що введене раніше означення подібності трикутників не суперечить загальному означенню подібності фігур.

Подібні фігури трапляються нам у повсякденному житті. Подібними є, наприклад, фотознімки, надруковані з одного негатива, але при різних збільшеннях; зображення на кіноплівці й зображення на екрані; карти однієї місцевості різних масштабів тощо.

Масштаб карти (креслення), добре відомий вам з молодших класів, є коефіцієнтом подібності карти (креслення) по відношенню до реальних розмірів. Так, наприклад, масштаб 1 : 1000 означає, що одному сантиметру на карті відповідає 1000 см (або 10 м) на місцевості.

Розглянемо основні *властивості подібних фігур*.

1. Кожна фігура подібна сама собі з коефіцієнтом 1.
2. Якщо фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k, то фігура F подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$.

Д о в е д е н н я. Нехай фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k, а точки M і N фігури F переходять у точки M' і N' фігури F'.

Тоді $M'N' = k \cdot MN$, звідки $MN = \frac{1}{k} \cdot M'N'$.

Остання рівність означає, що фігура F подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$. ▲

3. Якщо фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k_1, а фігура F'' подібна фігурі F' з коефіцієнтом k_2, то фігура F'' подібна фігурі F з коефіцієнтом k_1k_2.

Д о в е д е н н я. Нехай фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k_1, і довільні точки M і N фігури F переходять у точки M' і N' фігури F'. Тоді $M'N' = k_1 \cdot MN$.

Нехай фігура F'' подібна фігурі F' з коефіцієнтом k_2, і точки M' і N' фігури F' переходять у точки M'' і N'' фігури F''. Тоді $M''N'' = k_2 \cdot M'N'$.

Маємо:
$M''N'' = k_2 \cdot M'N' = k_2 \cdot k_1 MN = k_1 k_2 \cdot MN$.

Остання рівність означає, що фігура F'' подібна фігурі F з коефіцієнтом $k_1 k_2$. ▲

4. У подібних многокутників відповідні кути рівні, а відповідні відрізки пропорційні.

Ця властивість випливає з властивостей перетворення подібності.

5. Правильні многокутники з однаковою кількістю сторін подібні.

Доведіть цей наслідок самостійно.

Зауважимо, що при позначенні подібних многокутників (як і при позначенні подібних трикутників) має значення порядок слідування вершин у назвах.

Задача 1. Довести, що периметри подібних многокутників відносяться як відповідні сторони цих многокутників.

Р о з в' я з а н н я. 1) Нехай $A_1A_2 \ldots A_n \sim A_1'A_2' \ldots A_n'$ і $A_1'A_2' = k \cdot A_1A_2$, $A_2'A_3' = k \cdot A_2A_3 \ldots$, $A_n'A_1' = k \cdot A_nA_1$.

Тоді $\dfrac{A_1'A_2'}{A_1A_2} = \dfrac{A_2'A_3'}{A_2A_3} = \ldots = \dfrac{A_n'A_1'}{A_nA_1} = k$.

2) $$\frac{P_{A_1'A_2'\ldots A_n'}}{P_{A_1A_2\ldots A_n}} = \frac{A_1'A_2' + A_2'A_3' + \ldots + A_n'A_1'}{A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1} =$$

$$= \frac{k \cdot A_1A_2 + k \cdot A_2A_3 + \ldots + k \cdot A_nA_1}{A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1} =$$

$$= \frac{k(A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1)}{A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1} = k.$$ ▲

Задача 2. Сторони чотирикутника відносяться як 3 : 4 : 5 : 6. Знайти сторони подібного йому чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 72 см.

Р о з в' я з а н н я. Сторони чотирикутника, подібного даному, відносяться так само, як сторони даного чотирикутника, тобто 3 : 4 : 5 : 6. Позначимо сторони чотирикутника, периметр якого дорівнює 72 см, відповідно $3x$ см, $4x$ см, $5x$ см і $6x$ см. Маємо рівняння: $3x + 4x + 5x + 6x = 72$, звідки $x = 4$ (см).

Тепер знайдемо сторони чотирикутника: $3 \cdot 4 = 12$ (см), $4 \cdot 4 = 16$ (см), $5 \cdot 4 = 20$ (см), $6 \cdot 4 = 24$ (см).

В і д п о в і д ь. 12 см, 16 см, 20 см, 24 см.

1. Яке перетворення називають перетворенням подібності?
2. Що називають коефіцієнтом подібності?
3. Сформулюйте і доведіть властивості перетворення подібності.
4. Сформулюйте наслідок з властивості 2.
5. Які фігури називають подібними?
6. Наведіть приклади подібних фігур з повсякденного життя.
7. Сформулюйте і доведіть властивості подібних фігур.

Початковий рівень

996. (Усно.) Чотирикутники $ABCD$ і $KLMN$ подібні. Заповніть пропуски:

1) $\angle A = \ldots$; 2) $\angle C = \ldots$; 3) $\angle D = \ldots$; 4) $\angle B = \ldots$.

997. Чотирикутники $ABCD$ і $KLMN$ подібні, $\frac{AB}{KL} = 3$. Чому дорівнює відношення:

1) $\frac{BC}{LM}$; 2) $\frac{CD}{MN}$; 3) $\frac{AD}{KN}$?

998. Фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом 7. З яким коефіцієнтом фігура F подібна фігурі F'?

999. Фігура F подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{1}{2}$. З яким коефіцієнтом фігура F' подібна фігурі F?

1000. Фігура F' подібна фігурі F'' з коефіцієнтом $\frac{1}{5}$, а фігура F подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{1}{3}$. З яким коефіцієнтом фігура F подібна фігурі F''?

1001. Фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом 2, а фігура F'' подібна фігурі F' з коефіцієнтом 4. З яким коефіцієнтом фігура F'' подібна фігурі F?

1002. Чи подібні між собою:

1) два квадрати;
2) два правильних десятикутники?

1003. Чи подібні між собою:

1) два рівносторонніх трикутники;
2) два правильних шестикутники?

2 Середній рівень

1004. Фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом $\frac{3}{4}$. З яким коефіцієнтом фігура F'' подібна фігурі F', якщо фігури F і F'' рівні?

1005. Периметри двох правильних п'ятикутників відносяться як $2:3$. Сторона п'ятикутника з меншим периметром дорівнює 12 см. Знайдіть сторону п'ятикутника з більшим периметром.

1006. Сторони двох квадратів відносяться як $4:3$. Знайдіть периметр квадрата, сторона якого менша за сторону іншого, якщо периметр другого квадрата дорівнює 24 см.

1007. На малюнку, виконаному в масштабі $1:1000$, земельну ділянку зображено прямокутником зі сторонами 3 см і 4 см. Знайдіть площу цієї ділянки.

1008. На плані земельної ділянки у масштабі $1:2000$ відстань між точками дорівнює 3,7 см. Обчисліть відповідну відстань на місцевості.

1009. Довжина кабінету математики – 8 м, а ширина – 5 м. Накресліть план кабінету в масштабі $1:200$.

1010. Довжина кімнати дорівнює 4 м, а ширина – 3 м. Накресліть план кімнати у масштабі $1:100$.

1011. Відстань між двома селами на місцевості – 20 км, а на карті – 2 см. Знайдіть масштаб карти.

1012. Відстань між двома містами на місцевості – 350 км, а на карті – 3,5 см. Знайдіть масштаб карти.

1013. Чотирикутники $ABCD$ і $A'B'C'D'$ подібні, $\angle A = 30°$; $\angle B' = 90°$; $\angle C = 130°$. Знайдіть невідомі кути обох чотирикутників.

1014. Чотирикутники $KLMN$ і $K'L'M'N'$ подібні, $\angle K' = 20°$; $\angle L = 100°$; $\angle M' = 140°$. Знайдіть невідомі кути обох чотирикутників.

3 Достатній рівень

1015. Чи можна стверджувати, що два чотирикутники подібні, якщо кути одного з них відповідно дорівнюють кутам іншого? Наведіть приклади.

1016. Чи можна стверджувати, що два чотирикутники подібні, якщо сторони одного з них відповідно пропорційні сторонам другого? Наведіть приклади.

1017. Сторони чотирикутника відносяться як 3 : 4 : 5 : 6. Знайдіть сторони подібного йому чотирикутника, якщо в нього:

1) найбільша сторона дорівнює 12 см;
2) різниця найбільшої і найменшої сторін дорівнює 18 см;
3) периметр дорівнює 90 см.

1018. Сторони п'ятикутника відносяться як 3 : 4 : 5 : 6 : 7. Знайдіть сторони подібного йому п'ятикутника, якщо в нього:

1) найменша сторона дорівнює 15 см;
2) сума найбільшої і найменшої сторін дорівнює 80 см;
3) периметр дорівнює 50 см.

1019. Доведіть, що перетворення подібності переводить прямокутник у прямокутник, сторони якого пропорційні сторонам даного.

1020. Два прямокутники подібні. Сторони одного з них дорівнюють 4 см і 6 см, а одна зі сторін другого – 12 см. Знайдіть іншу сторону другого прямокутника. Скільки розв'язків має задача?

1021. Два прямокутники подібні. Сторони одного з них дорівнюють 3 см і 6 см, а одна зі сторін другого – 18 см. Знайдіть іншу сторону другого прямокутника. Скільки розв'язків має задача?

1022. (Усно.) Що означає масштаб 10 : 1, 100 : 1, 1000 : 1? У яких випадках використовується цей масштаб?

1023. $ABCD$ – прямокутник, $AB = a$, $BC = b$. Відрізок FE, де точка F належить AB, а точка E належить DC, відтинає прямокутник $CBFE$, подібний даному. Знайдіть сторону BF цього прямокутника.

4 Високий рівень

1024. Доведіть, що перетворення подібності переводить ромб у ромб, кути якого дорівнюють кутам даного.

1025. Чи подібні два ромби, якщо в одного з них менша діагональ дорівнює стороні, а в другого – більша діагональ у $\sqrt{3}$ разів більша за сторону?

1026. Доведіть, що перетворення подібності переводить коло в коло.

1027. Периметри подібних п'ятикутників відносяться як $2:3$, а сума їх найбільших сторін дорівнює 30 см. Знайдіть сторони обох п'ятикутників, якщо відношення сторін одного з них дорівнює $2:2:3:4:6$.

1028. Периметри подібних чотирикутників відносяться як $4:3$, а різниця їх найбільших сторін дорівнює 5 см. Знайдіть сторони обох чотирикутників, якщо відношення сторін одного з них дорівнює $2:2:3:5$.

Вправи для повторення

1 **1029.** Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо інші його сторони дорівнюють:
1) 17 см і 8 см; 2) $13b$ см і $5b$ см.

2 **1030.** Дано відрізок AB і точку O, що йому належить, але не є його серединою. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку AB відносно точки O.

3 **1031.** Периметр паралелограма дорівнює 50 см, а його сторони відносяться як $2:3$. Знайдіть площу паралелограма, якщо один з його кутів на $60°$ більший за інший.

1032. Хорда завдовжки $8\sqrt{2}$ см стягує дугу кола, градусна міра якої $90°$. Знайдіть довжину кола та площу круга, обмеженого цим колом.

4 **1033.** Знайдіть площу квадрата, якщо сума радіусів його вписаного й описаного кіл дорівнює 7 см.

Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1034. 1) Сторона квадрата втричі більша за сторону іншого квадрата. У скільки разів площа першого квадрата більша за площу другого?

2) Площа першого квадрата у 25 разів менша за площу другого. У скільки разів сторона першого квадрата менша за сторону другого?

1035. 1) Сторона правильного трикутника вдвічі менша за сторону іншого правильного трикутника. У скільки разів площа першого трикутника менша за площу другого?

2) Площа одного правильного трикутника у 16 разів більша за площу другого правильного трикутника. У скільки разів сторона першого трикутника більша за сторону другого?

Цікаві задачі для учнів неледачих

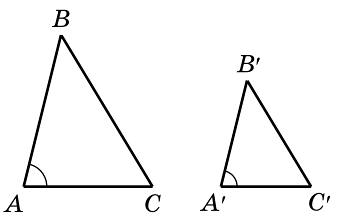
1036. (*Національна олімпіада Болгарії, 1981 р.*) Бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині C трикутника ABC перетинають пряму AB у точках L і M відповідно. Доведіть, що якщо $CL = CM$, то $AC^2 + BC^2 = 4R^2$, де R – радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

§ 24. ПЛОЩІ ПОДІБНИХ ФІГУР

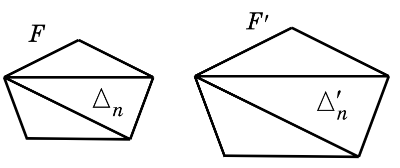
Т е о р е м а (про площі подібних многокутників). **Площі подібних многокутників відносяться як квадрати їх відповідних лінійних розмірів.**

Д о в е д е н н я. 1) Спочатку доведемо теорему для трикутників. Нехай $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} = k$, $\angle A = \angle A'$ (мал. 205). Тоді $AB = k \cdot A'B'$, $AC = k \cdot A'C'$ і

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A}{\frac{1}{2}A'B' \cdot A'C' \cdot \sin A'} = \frac{k \cdot A'B' \cdot k \cdot A'C'}{A'B' \cdot A'C'} = k^2.$$



Мал. 205



Мал. 206

2) Розглянемо два n-кутники F і F', подібних з коефіцієнтом k. Розіб'ємо фігуру F діагоналями, що виходять з однієї вершини, на скінченну кількість трикутників $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, ..., $\triangle_n$ (мал. 206). Перетворенням подібності ці трикутники перейдуть відповідно у трикутники $\triangle'_1$, $\triangle'_2$, $\triangle'_3$, ..., $\triangle'_n$ фігури F'.

Тоді:

$$\frac{S_F}{S_{F'}} = \frac{S_{\triangle_1} + S_{\triangle_2} + \ldots + S_{\triangle_n}}{S_{\triangle'_1} + S_{\triangle'_2} + \ldots + S_{\triangle'_n}} = \frac{k^2 S_{\triangle_1} + k^2 S_{\triangle_2} + \ldots + k^2 S_{\triangle_n}}{S_{\triangle'_1} + S_{\triangle'_2} + \ldots + S_{\triangle'_n}} =$$

$$= \frac{k^2(S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + \ldots + S_{\Delta_n})}{S_{\Delta'_1} + S_{\Delta'_2} + \ldots + S_{\Delta'_n}} = k^2. \ \blacktriangle$$

Наслідок. **Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.**

Цей наслідок є очевидним, оскільки відношення відповідних лінійних розмірів многокутника дорівнює коефіцієнту подібності.

Узагалі, можна довести, що

відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Для многокутників це твердження вже доведене, для кругів виконайте доведення самостійно. Якщо фігури не є многокутниками, кругами або частинами кругів, то доведення є досить громіздким. Тому ми його не наводимо.

Задача 1. Сторони двох правильних трикутників відносяться як 4 : 5. Як відносяться їх площі?

Р о з в' я з а н н я. Оскільки правильні трикутники подібні, то можна використати теорему про площі подібних многокутників. Отже, відношення площ трикутників дорівнює:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} = 16 : 25.$$

В і д п о в і д ь. 16 : 25.

Задача 2. Площі двох подібних многокутників відносяться як 4 : 9. Як відносяться периметри цих многокутників?

Р о з в' я з а н н я. 1) Нехай a_1 і a_2 – відповідні лінійні розміри многокутників. Тоді:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2, \text{ звідки } \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3} = 2 : 3.$$

2) Оскільки периметри подібних многокутників відносяться як відповідні сторони цих многокутників (див. задачу 1 § 23), то відношення периметрів многокутників також дорівнює 2 : 3.

В і д п о в і д ь. 2 : 3.

Задача 3. Площа земельної ділянки на карті становить 1,2 см^2, масштаб карти 1 : 1000. Яка площа земельної ділянки насправді?

Р о з в' я з а н н я. 1) Нехай S см^2 – площа ділянки.

2) Оскільки масштаб є коефіцієнтом подібності карти по відношенню до земельної ділянки, то

$$\frac{1,2}{S} = \left(\frac{1}{1000}\right)^2.$$

Тоді $S = 1,2 \cdot 1000^2 = 1\ 200\ 000$ (см^2) $= 120$ (м^2).

В і д п о в і д ь. 120 м^2.

1. Сформулюйте та доведіть теорему про площі подібних многокутників.
2. Сформулюйте наслідок із цієї теореми.
3. Як відносяться площі подібних фігур?

1 Початковий рівень

1037. Сторона першого квадрата втричі більша за сторону другого. У скільки разів площа другого квадрата менша за площу першого?

1038. Сторона першого правильного трикутника вдвічі менша за сторону другого. У скільки разів площа другого правильного трикутника більша за площу першого?

1039. Сторони двох правильних п'ятикутників відносяться як $4:7$. Як відносяться їх площі?

1040. Сторони двох правильних шестикутників відносяться як $5:3$. Як відносяться їх площі?

2 Середній рівень

1041. Площі двох подібних многокутників відносяться як $4:3$. Як відносяться їх відповідні лінійні розміри?

1042. Площі двох подібних многокутників відносяться як $7:9$. Як відносяться їх відповідні лінійні розміри?

1043. Площі двох правильних трикутників відносяться як $25:36$. Як відносяться відповідні медіани цих трикутників?

1044. Площі двох квадратів відносяться як $9:4$. Як відносяться діагоналі цих квадратів?

3 Достатній рівень

1045. Сторона одного квадрата дорівнює діагоналі іншого квадрата. Як відносяться площі цих квадратів?

1046. Висота одного правильного трикутника дорівнює стороні іншого правильного трикутника. Як відносяться площі цих трикутників?

1047. Відповідні сторони двох подібних многокутників відносяться як $2:3$. Площа першого з них 48 см^2. Знайдіть площу другого многокутника.

1048. Площі двох подібних многокутників відносяться як $25:4$. Одна зі сторін першого многокутника дорівнює 15 см. Знайдіть відповідну їй сторону другого многокутника.

1049. Периметри двох подібних многокутників відносяться як $3:4$, а сума їх площ – 50 см^2. Знайдіть площу кожного з многокутників.

1050. Різниця площ двох подібних многокутників дорівнює 45 см^2. Знайдіть площу кожного з многокутників, якщо їх відповідні сторони відносяться як $5:4$.

4 Високий рівень

1051. Площа лісу дорівнює 20 га, а на карті ліс займає площу 20 см^2. Знайдіть масштаб карти.

1052. Є план парку в масштабі $1:1000$. У скільки разів площа парку більша за площу цього плану?

1053. Пряма, паралельна стороні AB трикутника ABC, ділить його на дві рівновеликі фігури. Знайдіть відрізок цієї прямої, що міститься між сторонами AC і CB трикутника, якщо $AB = 4\sqrt{2}$ см.

1054. Висота трикутника ABC, що виходить з вершини C, дорівнює $6\sqrt{2}$ см. На якій відстані від точки C треба провести пряму, паралельну стороні AB, щоб ця пряма розділила трикутник на дві рівновеликі частини?

Вправи для повторення

2 **1055.** При переміщенні рівносторонній трикутник MNK перейшов у трикутник $M'N'K'$. Знайдіть кути трикутника $M'N'K'$.

4 **1056.** Периметри подібних трикутників відносяться як $3:5$, а сума їх найменших сторін дорівнює 32 см. Знайдіть сторони кожного з трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як $4:7:8$.

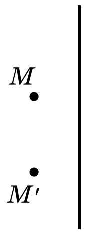
Цікаві задачі для учнів неледачих

1057. Спільну хорду двох кіл, що перетинаються, видно з їх центра під кутами $90°$ і $60°$. Знайдіть радіуси кіл, якщо відстань між їх центрами дорівнює $\sqrt{3} + 1$. Скільки випадків слід розглянути?

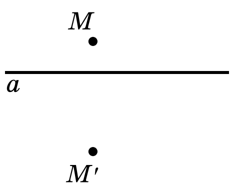
Домашня самостійна робота № 5

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

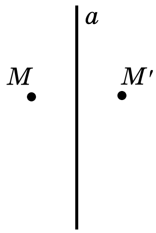
1. На якому з малюнків 207–210 точки M і M' симетричні відносно прямої a?



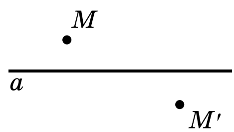
Мал. 207



Мал. 208

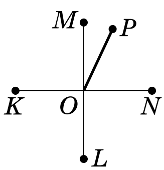


Мал. 209



Мал. 210

А. мал. 207; **Б.** мал. 208; **В.** мал. 209; **Г.** мал. 210.



Мал. 211

2. У яку точку при повороті навколо точки O на кут $90°$ проти годинникової стрілки переходить точка N (мал. 211):

А. K; **Б.** M; **В.** P; **Г.** L?

3. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x - 1$; $y' = y + 3$. У яку точку при цьому паралельному перенесенні переходить точка $T(2; -5)$:

А. $T'(3; 8)$; **Б.** $T'(-2; 1)$; **В.** $T'(5; -6)$; **Г.** $T'(1; -2)$?

4. При переміщенні трикутник ABC перейшов у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть кут A' трикутника $A'B'C'$, якщо трикутник ABC є рівнобедреним і його кут при вершині C дорівнює $140°$.

А. $20°$; **Б.** $40°$; **В.** $140°$; **Г.** $100°$.

5. Укажіть координати точки, що симетрична точці $M(-1; 5)$ відносно початку координат.

А. $(5; -1)$; **Б.** $(1; 5)$; **В.** $(-1; -5)$; **Г.** $(1; -5)$.

6. Медіани двох правильних трикутників відносяться як 2 : 7. Як відносяться площі цих трикутників?

А. 4 : 7; **Б.** 2 : 7; **В.** 4 : 49; **Г.** 2 : 49.

7. Точки $A(-2;\ y)$ і $B(x;\ 5)$ симетричні відносно осі абсцис. Знайдіть x і y.

А. $x = -2,\ y = 5$; **Б.** $x = 2,\ y = 5$;
В. $x = -2,\ y = -5$; **Г.** $x = 2,\ y = -5$.

8. При паралельному перенесенні точка $A(-2;\ 3)$ переходить у точку $A'(4;\ 0)$. У яку точку при такому паралельному перенесенні перейде точка $B(3;\ -1)$?

А. $B'(-3;\ 2)$; **Б.** $B'(9;\ -4)$; **В.** $B'(-9;\ 4)$; **Г.** $B'(3;\ -2)$.

9. Сторони п'ятикутника відносяться як 3 : 4 : 5 : 6 : 7. Знайдіть найменшу сторону подібного йому п'ятикутника, периметр якого дорівнює 75 м.

А. 3 см; **Б.** 12 см; **В.** 21 см; **Г.** 9 см.

10. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $x - 2y - 10 = 0$ відносно початку координат.

А. $x - 2y + 10 = 0$; **Б.** $x + 2y - 10 = 0$;
В. $x + 2y + 10 = 0$; **Г.** $x - 2y = 0$.

11. Виконали паралельне перенесення прямої $3x - y = 0$. Запишіть рівняння цієї прямої, якщо вона проходить через точку $M(-1;\ 4)$.

А. $x - 3y + 13 = 0$; **Б.** $3x - y + 7 = 0$;
В. $3x - y - 7 = 0$; **Г.** $3x + y - 1 = 0$.

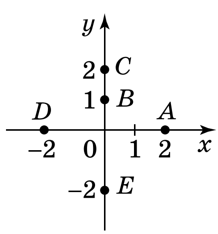
12. Периметри двох подібних трикутників відносяться як 2 : 3, а сума їх найбільших сторін дорівнює 30 см. Знайдіть периметр другого трикутника, якщо сторони першого відносяться як 4 : 5 : 6.

А. 30 см; **Б.** 40 см; **В.** 45 см; **Г.** 60 см.

Завдання для перевірки знань № 5 до § 18–24

1. Дано пряму a і точку M, що їй не належить. Побудуйте точку M', симетричну точці M відносно прямої a.

2. У яку точку при повороті навколо точки O на кут 90° проти годинникової стрілки перейде точка A (мал. 212)?



Мал. 212

3. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x + 3$, $y' = y - 2$. У яку точку при цьому паралельному перенесенні переходить точка $L(-3; 8)$?

4. При переміщенні трикутник ABC перейшов у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть кути трикутника $A'B'C'$, якщо трикутник ABC рівнобедрений з основою AC, а кут B дорівнює 40°.

5. Дано відрізок MN, $M(-4; 2)$, $N(-2; 5)$. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку MN відносно початку координат, та знайдіть координати його кінців.

6. Площі двох правильних трикутників відносяться як $9 : 4$. Як відносяться висоти цих трикутників?

7. Точки $A(x; -6)$ і $B(4; y)$ симетричні відносно осі ординат. Знайдіть x і y.

8. Сторони чотирикутника відносяться як $2 : 3 : 4 : 6$. Знайдіть сторони подібного йому чотирикутника, периметр якого дорівнює 45 см.

9. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $3x - 4y - 24 = 0$ відносно початку координат.

Додаткові завдання

10. Периметри двох подібних п’ятикутників відносяться як $3 : 4$, а сума їх найменших сторін дорівнює 28 см. Знайдіть сторони кожного з п’ятикутників, якщо сторони одного з них відносяться як $2 : 5 : 6 : 7 : 9$.

11. Виконали паралельне перенесення прямої $2x + y - 8 = 0$. Запишіть рівняння прямої, яку при цьому отримали, якщо вона проходить через точку $A(5; 1)$.

Вправи для повторення розділу 5

До § 18

1058. При переміщенні відрізок AB перейшов у відрізок $A'B'$. Чи рівні між собою відрізки AB і $A'B'$?

1059. При переміщенні фігура F перейшла у фігуру F'. При другому переміщенні фігура F' перейшла у фігуру F''. Чи рівні між собою фігури F і F''?

1060. $ABCD$ – квадрат. Чи існує переміщення, яке переводить:

1) сторону AB у сторону BC; 2) кут ABC у кут BCD?

1061. Три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам другого трикутника. Чи існує переміщення, яке переводить перший трикутник у другий?

1062. Чи рівні між собою два квадрати, якщо:
1) рівні їх периметри;
2) рівні їх площі;
3) діагональ одного з них дорівнює діагоналі другого;
4) діагональ одного з них дорівнює стороні другого?

1063. Периметри двох ромбів рівні. Чи завжди існує переміщення, яке переводить один з них у другий?

1064. Коло із центром у точці O описано навколо квадрата. Як задати відповідність між точками кола і квадрата так, щоб ця відповідність була перетворенням фігур?

1065. Чи існує переміщення, яке переводить кут BAC у кут BCA, якщо $A(2; -3)$, $B(-2; -6)$, $C(-5; -2)$?

До § 19

1066. Побудуйте точку $A(-2; 5)$ та точку, їй симетричну відносно початку координат.

1067. Дано відрізок AB і точку O. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку AB відносно точки O, якщо:
1) точка O не належить відрізку AB;
2) точка O належить відрізку AB.

1068. Чи симетричні точки A і A' відносно початку координат, якщо:
1) $A(4; -5)$ і $A'(-4; -5)$; 2) $A(-3; 2)$ і $A'(3; -2)$?

1069. Знайдіть координати точки A', симетричної точці $A(-4; 5)$ відносно точки $O(2; -9)$.

1070. Чи може пряма при симетрії відносно точки перейти сама в себе?

1071. Точки A і A' симетричні відносно початку координат. Знайдіть довжину відрізка AA', якщо $A(-3; 4)$.

1072. Запишіть рівняння прямої, у яку при симетрії відносно початку координат переходить пряма:
1) $x = 3$; 2) $y = -2$.

1073. Відрізки AB і CD симетричні відносно точки O. Доведіть, що прямі AB і CD паралельні.

1074. Чи може точка перетину діагоналей трапеції бути її центром симетрії?

1075. Побудуйте відрізок, серединою якого є дана точка, а кінці лежать на двох даних прямих, що перетинаються.

1076. Дано точки A і O. Використовуючи лише циркуль, побудуйте точку A', у яку переходить точка A при симетрії відносно точки O.

До § 20

1077. Побудуйте точку $A(3; -4)$ та точки, симетричні точці A відносно координатних осей.

1078. Побудуйте коло радіуса 3 см і пряму, що його не перетинає. Побудуйте коло, симетричне даному відносно цієї прямої.

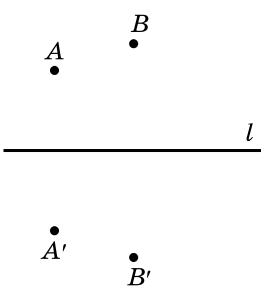
1079. Накресліть тупокутний трикутник ABC з тупим кутом C. Побудуйте трикутник, симетричний трикутнику ABC відносно прямої BC.

1080. На кожній зі сторін кута позначили по точці на однаковій відстані від його вершини. Доведіть, що ці точки симетричні відносно прямої, яка містить бісектрису кута.

1081. Складіть рівняння кола, симетричного відносно осі абсцис колу з радіусом 2 і центром у точці $O(-2; 3)$.

1082. Осі координат є осями симетрії прямокутника. Одна з його вершин має координати $(-3; 4)$. Знайдіть координати інших вершин прямокутника.

1083. Прямі AC і BD – осі симетрії чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що $ABCD$ – ромб.



Мал. 213

1084. Точки A і A', B і B' попарно симетричні відносно прямої l (мал. 213). Доведіть, що навколо чотирикутника $ABB'A'$ можна описати коло.

1085. Доведіть, що фігура, яка має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії, має і центр симетрії.

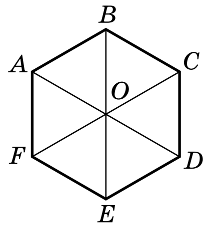
1086. Точки A і B лежать по один бік від прямої l. Знайдіть на цій прямій таку точку C, щоб значення суми $AC + CB$ було найменшим.

До § 21

1087. $ABCDEF$ – правильний шестикутник (мал. 214). У яку точку при повороті навколо точки O:

1) на кут $60°$ за годинниковою стрілкою перейде точка A; точка C;

2) на кут $120°$ проти годинникової стрілки перейде точка E; точка B?



Мал. 214

1088. Дано відрізок AB і точку O, яка йому не належить. Побудуйте відрізок $A'B'$, у який перейде відрізок AB при повороті навколо точки O:

1) на $90°$ проти годинникової стрілки;

2) на $20°$ за годинниковою стрілкою.

1089. У яку точку переходить точка $C(-5; 0)$ при повороті навколо початку координат:

1) на $90°$ за годинниковою стрілкою;

2) на $90°$ проти годинникової стрілки;

3) на $180°$?

1090. Побудуйте фігуру, у яку переходить квадрат при повороті навколо точки перетину його діагоналей на $45°$ за годинниковою стрілкою.

1091. У результаті повороту навколо точки A рівносторонній трикутник ABC перейшов у трикутник ACD. На який кут виконали поворот?

1092. Знайдіть координати точки C', у яку перейде точка $C(2; 0)$ при повороті навколо початку координат на кут $60°$ проти годинникової стрілки.

1093. Складіть рівняння прямої, яку отримають у результаті повороту прямої $2x - y + 1 = 0$ навколо початку координат на кут $90°$:

1) за годинниковою стрілкою;

2) проти годинникової стрілки.

1094. Дано відрізок AB. За допомогою тільки циркуля і лінійки без поділок виконайте поворот навколо його середини на кут $135°$ за годинниковою стрілкою.

До § 22

1095. Які з тверджень правильні:

1) існує паралельне перенесення, при якому одна бічна сторона трикутника переходить в іншу його бічну сторону;

2) при паралельному перенесенні зберігається градусна міра кута;

3) існує паралельне перенесення, при якому сторона ромба переходить у протилежну сторону;

4) існує паралельне перенесення, при якому квадрат переходить у ромб, жоден з кутів якого не є прямим?

1096. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x - 3$; $y' = y + 2$. У які точки при цьому паралельному перенесенні перейдуть кінці відрізка AB, якщо:

1) $A(3; -2)$; $B(0; 0)$; 2) $A(2; 5)$; $B(1; -3)$?

1097. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x + 3$; $y' = y - 5$. При цьому паралельному перенесенні трикутник ABC переходить у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть координати вершин трикутника ABC, якщо $A'(3; -5)$, $B'(0; 0)$, $C'(2; -7)$.

1098. При паралельному перенесенні точка $A(2; -7)$ перейшла у точку $A'(-3; 5)$.

1) Запишіть формули цього паралельного перенесення.

2) У яку точку при цьому паралельному перенесенні переходить точка $A'(-3; 5)$?

1099. Дано точки $A(2; 5)$, $B(-3; 1)$, $C(5; -13)$. Запишіть формули паралельного перенесення, при якому образом точки A є середина відрізка BC.

1100. Дано трикутник з вершинами в точках $A(-3; 5)$, $B(4; 7)$, $C(-1; 2)$. Виконайте таке паралельне перенесення трикутника, при якому точка A переходить у точку C. Зробіть малюнок та запишіть координати вершин отриманого трикутника.

1101. Дано коло із центром у точці $O(-1; 2)$, яке проходить через точку $B(3; 5)$. Запишіть рівняння кола, у яке переходить дане коло при паралельному перенесенні, що задано формулами: $x' = x$, $y' = y + 2$.

1102. При паралельному перенесенні точка $A(5; -2)$ перейшла в точку $A'(4; 0)$. Запишіть рівняння образу кривої $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$ при такому паралельному перенесенні та побудуйте його.

1103. Вершини трикутника ABC мають координати $A(0; 4)$, $B(3; 0)$, $C(3; 4)$. Після паралельного перенесення центр вписаного у трикутник кола перейшов у початок координат. У яку точку перейшов центр кола, описаного навколо трикутника?

До § 23

1104. Фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом $\frac{2}{3}$. З яким коефіцієнтом фігура F подібна фігурі F'?

1105. Фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом $\frac{2}{3}$, а фігура F'' подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{3}{4}$. З яким коефіцієнтом фігура F'' подібна фігурі F?

1106. Периметри двох правильних трикутників відносяться як $5:6$. Сторона трикутника з меншим периметром дорівнює 50 см. Знайдіть сторону трикутника, периметр якого більший.

1107. Довжина газопроводу – 450 км. Зобразіть цей газопровід відрізком у масштабі $1:10\,000\,000$.

1108. Чотирикутник $A'B'C'D'$ подібний чотирикутнику $ABCD$ з коефіцієнтом 2, $AB = 5$ см, $B'C' = 12$ см, $CD = 7$ см, $A'D' = 4$ см. Знайдіть невідомі сторони обох чотирикутників.

1109. Сторони шестикутника відносяться як $3:4:5:5:6:7$. Знайдіть сторони подібного йому шестикутника, якщо у нього:

1) сума двох рівних сторін дорівнює 40 см;
2) різниця найбільшої і найменшої сторін дорівнює 8 см;
3) периметр дорівнює 90 см.

1110. Чи подібні прямокутники, якщо сторони одного з них дорівнюють 4 см і 3 см, а сторона другого дорівнює 12 см і його діагональ дорівнює 15 см?

1111. В одному з ромбів один з кутів утричі більший за інший, а у другому ромбі – один з кутів на 80° більший за інший. Чи подібні ці ромби?

1112. Маємо рамку для фотографій прямокутної форми (прямокутник не є квадратом). Чи подібні зовнішній і внутрішній прямокутники цієї рамки, якщо ширина рамки скрізь однакова?

1113. Доведіть, що перетворення подібності переводить паралельні прямі в паралельні прямі.

1114. Середня лінія ділить трапецію на дві трапеції.

1) Чи подібні між собою трапеції, що утворилися?
2) Чи подібна будь-яка із цих трапецій даній?

1115. Два многокутники розбито на однакову кількість попарно подібних між собою трикутників. Чи можна стверджувати, що ці многокутники подібні?

1116. У трапеції з основами a і b проведено відрізок, паралельний основам трапеції. Цей відрізок розбиває трапецію на дві трапеції, подібні між собою. Знайдіть довжину цього відрізка.

До § 24

1 **1117.** Сторона одного правильного шестикутника у 4 рази більша за сторону другого. У скільки разів площа першого шестикутника більша за площу другого?

1118. Сторони двох правильних десятикутників відносяться як $2:9$. Як відносяться їх площі?

2 **1119.** Площі двох квадратів відносяться як $4:7$. Як відносяться їх периметри?

1120. Площі двох правильних трикутників відносяться як $16:9$. Як відносяться радіуси кіл, описаних навколо цих трикутників?

1121. Яку частину площі даного трикутника складає площа трикутника, що відтинається від даного його середньою лінією?

3 **1122.** Сторони двох квадратів відносяться як $3:4$, а площа одного з них дорівнює 144 см^2. Знайдіть площу другого квадрата. Скільки розв'язків має задача?

1123. Менша діагональ одного правильного шестикутника дорівнює стороні другого. Чому дорівнює відношення площ цих шестикутників?

1124. Площі двох квадратів відносяться як $9:4$, а сума їх периметрів – 80 см. Знайдіть сторону кожного з квадратів.

1125. Площа озера на карті становить 1,5 см^2, масштаб карти $1:2000$. Яка площа озера?

1126. Карту, яку виконано в масштабі $1:20\,000$, перемалювали в масштабі $1:60\,000$. У скільки разів при цьому збільшиться або зменшиться площа будь-якої земельної ділянки на карті?

1127. Знайдіть відношення площі трикутника до площі трапеції, яка відтинається від цього трикутника його середньою лінією.

4 **1128.** Знайдіть відношення площ трикутника і трапеції, на які трикутник ділиться прямою, проведеною через точку перетину медіан паралельно одній з його сторін.

1129. Медіана трикутника дорівнює 10 см. Пряма, паралельна медіані, ділить трикутник на частини, площі яких відносяться як $1:7$. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, що міститься між сторонами трикутника.

1130. Побудуйте чотирикутник, подібний даному, площа якого у 2,25 раза більша за площу даного.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС ГЕОМЕТРІЇ 9 КЛАСУ

1 **1.** Знайдіть координати середини відрізка CD, якщо $C(-2;\ 4)$, $D(8;\ 10)$.

2. Знайдіть модуль вектора $\vec{a}(-8;\ 15)$.

3. Сторони двох правильних п'ятикутників відносяться як $5:2$. Як відносяться їх площі?

2 **4.** Дано вектори $\vec{b}(-2;\ 4)$ і $\vec{c}(-2;\ 4)$. Знайдіть координати вектора $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{c}$.

5. Знайдіть сторону AB трикутника ABC, якщо $\angle C = 60°$, $\angle A = 45°$, $BC = \sqrt{6}$ см.

6. Внутрішній кут правильного многокутника дорівнює 144°. Знайдіть:

1) кількість сторін многокутника;

2) сторону многокутника, якщо його периметр дорівнює 80 см.

3 **7.** Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2;\ -1)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 135°.

8. Знайдіть довжину кола, вписаного у трикутник зі сторонами 13 см, 4 см і 15 см.

4 **9.** Дві сторони трикутника дорівнюють 1 см і $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть третю сторону, якщо вона у $\sqrt{2}$ разів більша за радіус кола, описаного навколо трикутника. Скільки розв'язків має задача?

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Розділ 1. Метод координат на площині

1131. Вершини чотирикутника $ABCD$ мають координати $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$, $D(x_4;\ y_4)$. Доведіть, що цей чотирикутник є паралелограмом тоді і тільки тоді, коли $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ і $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$.

1132. Кінці відрізка AB мають координати $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$. Точка $M(x;\ y)$ ділить відрізок AB у відношенні $\frac{AM}{MB} = \lambda$. Доведіть, що координати точки M можна знайти за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

1133. З фізики відомо, що центр мас однорідної трикутної пластини знаходиться в точці перетину медіан. Знайдіть координати центра мас – точки $M(x;\ y)$ трикутника ABC, якщо $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$.

1134. Вершини трикутника ABC мають координати $A(-4;\ -1)$, $B(-1;\ 3)$, $C(2;\ -1)$. Бісектриса кута A перетинає BC у точці N. Знайдіть координати точки N.

1135. Нехай точки $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ і $C(x_3;\ y_3)$ лежать на одній прямій, причому $x_2 \neq x_3$ і $y_2 \neq y_3$. Доведіть, що

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3}.$$

1136. При якому значенні a точки $A(a;\ -4)$, $B(2;\ -a)$, $C(8;\ 17)$ лежать на одній прямій?

1137. Знайдіть координати третьої вершини рівностороннього трикутника ABC, якщо $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ 0)$.

1138. Знайдіть невідомі координати двох вершин ромба $ABCD$ з кутом 60°, якщо відомо координати двох його вершин $A(-1;\ 0)$ і $B(1;\ 0)$.

1139. Знайдіть точку перетину прямої $4x - 5y + 3 = 0$ з перпендикуляром, проведеним до неї з точки $A(-6;\ 4)$.

1140. Доведіть, що відстань від точки $A(x_0;\ y_0)$ до прямої $ax + by + c = 0$ можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

1141. Дві сторони квадрата лежать на прямих $5x - 12y - 65 = 0$ і $5x - 12y + 26 = 0$. Обчисліть його площу.

1142. Точка $A(x_0; y_0)$ лежить на колі $x^2 + y^2 = r^2$. Складіть рівняння дотичної до кола, що проходить через точку A.

1143. Скільки точок, обидві координати яких – цілі числа, належить колу $x^2 + y^2 = 10$?

1144. Точка $A(1; 0)$ лежить на колі із центром у початку координат і є вершиною правильного трикутника, уписаного в це коло. Знайдіть координати двох інших вершин трикутника.

1145. Складіть рівняння кола радіуса 10, що дотикається до кола $x^2 + y^2 - 10y = 0$ у точці $A(3; 1)$.

1146. При яких значеннях k пряма $y = kx - 5$ і коло $x^2 + y^2 = 9$:

1) мають одну спільну точку;

2) мають дві спільні точки;

3) не мають спільних точок?

1147. З точки $A(1; 6)$ до кола $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ проведено дотичні. Складіть рівняння цих дотичних.

1148. Складіть рівняння дотичних до кола

$$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0,$$

що паралельні прямій $2x + y - 7 = 0$.

1149. На колі $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$ знайдіть найближчу до точки $A(3; 9)$ точку B. Знайдіть відстань від точки A до точки B.

1150. Якого найменшого значення може набувати вираз

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5}?$$

Розділ 2. Вектори на площині

1151. Дано чотирикутник $ABCD$ і точку O. Відомо, що $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

1152. Дано два паралелограми $ABCD$ і $AB_1C_1D_1$, які мають спільну вершину A. Доведіть, що $CC_1 \leqslant BB_1 + DD_1$.

1153. $ABCD$ – квадрат, $\overrightarrow{AB}(6; 8)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$.

1154. Через точку O перетину діагоналей AC і BD трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) проведено пряму, паралельну основам, яка перетинає бічні сторони AD і BC у точках M і N. Доведіть, що $\overrightarrow{MN} = \dfrac{b\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{DC}}{a + b}$, де $AB = a$, $CD = b$.

1155. Дано трикутник ABC, $\overrightarrow{AB}(3;\ 4)$, $\overrightarrow{BC}(-5;\ 12)$, BL – бісектриса трикутника. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{BL}$.

1156. Доведіть за допомогою векторів, що три висоти трикутника (або їх продовження) перетинаються в одній точці.

1157. Доведіть за допомогою векторів, що всі медіани трикутника перетинаються в одній точці й діляться цією точкою у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини.

1158. Доведіть за допомогою векторів, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам трикутника.

1159. Доведіть, що вектор $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.

1160. Точки M_1 і M_2 лежать на прямій $ax + by + c = 0$. Доведіть, що вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ перпендикулярний до вектора $\vec{p}(a;\ b)$.

1161. Напишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2;\ 1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{a}(4;\ 5)$.

1162. Напишіть рівняння прямої, що є дотичною до кола $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0$ у точці $A(-1;\ -1)$.

1163. Виведіть формулу для знаходження косинуса кута між прямими $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Розділ 3. Розв'язування трикутників

1164. Для сторін трикутника a, b, c виконується рівність $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}bc$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, якщо найбільша сторона трикутника дорівнює $6\sqrt{2}$ см.

1165. Медіани AM_1 і BM_2 трикутника ABC дорівнюють 9 см і 15 см відповідно, M – точка перетину медіан, $\angle AMB = 120°$. Знайдіть довжину третьої медіани.

1166. Площа трикутника дорівнює S, а довжини двох його сторін – a і b. Знайдіть площі трикутників, на які він ділиться бісектрисою кута між даними сторонами.

1167. Усередині рівностороннього трикутника ABC дано точку M так, що $AM = 1$ см, $BM = 2$ см, $\angle AMB = 120°$. Знайдіть CM.

1168. Кут при вершині C рівнобедреного трикутника ABC у 4 рази більший за кут при основі. На стороні AB взято точку M таку, що $AM : MB = 1 : 2$. Знайдіть $\angle ACM$.

1169. На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ взято відповідно точки M і N так, що $BM = \frac{1}{2}BC$ і $DN = \frac{1}{3}DC$. Доведіть, що $\angle MAN = 45°$.

1170. Обчисліть площу трапеції, якщо її основи дорівнюють a і b, а прилеглі до основи a гострі кути дорівнюють α і β.

1171. Доведіть, що площу чотирикутника, вписаного в коло, можна обчислити за формулою

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

де a, b, c, d – сторони чотирикутника, p – його півпериметр.

1172. У коло радіуса R вписано трикутник, вершини якого ділять коло на частини у відношенні $2 : 5 : 17$. Знайдіть площу трикутника.

1173. (Т е о р е м а П т о л е м е я.) Чотирикутник $ABCD$ є вписаним у коло. Доведіть, що $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

1174. У трикутнику ABC через вершину A проведено пряму, що перетинає BC у точці D, причому $\frac{BD}{BC} = \alpha (\alpha < 1)$. Через точку D проведено пряму, паралельну стороні AB, яка перетинає AC у точці E. Обчисліть відношення площі трикутника ABD до площі трикутника ECD.

Розділ 4. Правильні многокутники

1175. Навколо круга описано рівнобічну трапецію з основами a і b. Знайдіть площу круга.

1176. В коло вписано правильний трикутник ABK і квадрат $BCMN$. Знайдіть величину кута ABC.

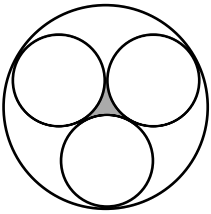
1177. На сторонах правильного шестикутника зовні нього побудовано квадрати. Вершини квадратів, які не є вершинами шестикутника, з'єднано послідовно відрізками.

1) Доведіть, що дванадцятикутник, який при цьому утворився, є правильним.

2) Знайдіть площу дванадцятикутника, якщо сторона початкового шестикутника дорівнює α.

1178. Дано прямокутний трикутник з гіпотенузою 2 і гострим кутом 60°. Знайдіть спільну частину двох кругів, що проходять через вершину прямого кута, із центрами у вершинах гострих кутів.

1179. Накресліть круг, площа якого дорівнює площі кільця між двома даними концентричними колами.



Мал. 215

1180. У круг радіуса R вписано три круги одного й того самого радіуса так, що кожен з них дотикається до двох інших (мал. 215). Обчисліть площу зафарбованої фігури.

1181. Центр кола, вписаного у прямокутний трикутник, лежить на відстанях $\sqrt{5}$ см і $\sqrt{10}$ см від кінців гіпотенузи. Знайдіть довжину кола.

1182. На катетах прямокутного трикутника, як на діаметрах, побудовано круги. Доведіть, що сума площ частин цих кругів, що лежать поза описаним навколо цього трикутника кругом, дорівнює площі трикутника.

1183. Навколо рівнобедреного трикутника з основою 6 см описано круг, довжина кола якого 10π см. Знайдіть відношення площі круга до площі трикутника.

1184. Сторона правильного трикутника дорівнює a. Із його центра описано коло, радіус якого дорівнює $\frac{a}{3}$. Знайдіть площу тієї частини трикутника, що лежить поза колом.

Розділ 5. Геометричні перетворення

1185. Дано пряму, коло і точку O. Побудуйте точки, симетричні одна одній відносно центра O, одна з яких належить прямій, а інша – колу.

1186. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) проведено висоту CD. Радіуси кіл, вписаних у трикутники ACD і BCD, дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник ABC.

1187. У трикутнику ABC на сторонах AB і BC позначено точки D і E так, що $DE \parallel AC$. Площа трикутника ABC дорівнює 8 см^2, а площа трикутника DEC дорівнює 2 см^2. Знайдіть відношення відрізка DE до сторони AC.

1188. Побудуйте трикутник за трьома його медіанами.

1189. Діагоналі прямокутника лежать на прямих $y = -3x + 1$ і $y = 3x - 5$.

1) Складіть рівняння осей симетрії прямокутника.

2) Знайдіть координати вершин прямокутника, якщо одна з його сторін проходить через точку $(2; -1)$.

1190. На кожній медіані трикутника позначено точку, що ділить медіану у відношенні $1 : 3$, рахуючи від вершини трикутника. У скільки разів площа трикутника з вершинами в цих точках менша за площу початкового трикутника?

1191. Складіть рівняння образу кривої $x^2 - 4x + y^2 = 0$ при повороті навколо початку координат на кут $60°$:

1) за годинниковою стрілкою;

2) проти годинникової стрілки.

1192. Побудуйте квадрат із центром у даній точці так, щоб прямі, що містять дві його сусідні сторони, проходили через дві дані точки.

1193. Крива, рівняння якої $x^2 + y^2 = 2(2 + 2y - x)$, при деякому паралельному перенесенні переходить у криву, рівняння якої $x^2 + y^2 = 2(2x + y - m)$.

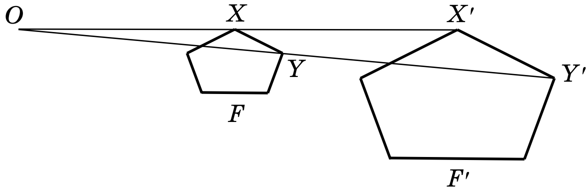
1) Знайдіть m.

2) Напишіть рівняння образу прямої $2x - 3y + 6 = 0$ при такому перенесенні.

ГОМОТЕТІЯ

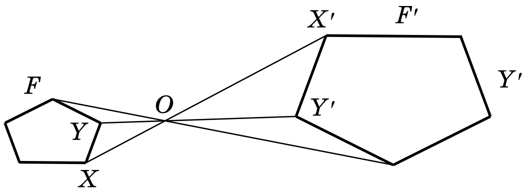
Нехай F – дана фігура і O – фіксована точка (мал. 216).

Через кожну точку X фігури F проведемо промінь OX і відкладемо на ньому відрізок OX' такий, що $OX' = k \cdot OX$, де $k > 0$. Отримаємо фігуру F'.



Мал. 216

Якщо $k < 0$, то для кожної точки X фігури F проведемо промінь OX', що є доповняльним до променя OX так, що $OX' = |k| \cdot OX$ (мал. 217). Отримаємо фігуру F'.



Мал. 217

Перетворення фігури F, при якому кожна її точка X переходить у точку X' фігури F' у способи, які описано вище, називають *гомотетією*, точку O – *центром гомотетії*, число $k \neq 0$ – *коефіцієнтом гомотетії*.

Гомотетією із центром у точці O ***і коефіцієнтом*** k **називають таке геометричне перетворення, при якому довільна точка** X **фігури** F **переходить у точку** X' **фігури** F' **так, що** $OX' = |k| \cdot OX$, **причому коли** $k > 0$, **то точки** X **і** X' **лежать на промені з початком у точці** O, **а якщо** $k < 0$, **то точки** X **і** X' **лежать відповідно на доповняльних променях з початком у точці** O.

Фігури F і F' (мал. 216, 217) називають *гомотетичними*.

Дві фігури називають *гомотетичними*, якщо вони переходять одна в одну за допомогою гомотетії.

Якщо при гомотетії кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що $OX' = |k| \cdot OX$, то кажуть, що *фігура F' гомотетична фігурі F з коефіцієнтом k.*

При гомотетії з коефіцієнтом $k = 1$ фігура переходить сама в себе.

Гомотетія із центром гомотетії O і коефіцієнтом $k = -1$ є симетрією відносно точки O. Дійсно, у цьому випадку кожна точка X перейде в точку X' так, що точка O буде серединою відрізка XX'.

Т е о р е м а (про гомотетію). **Гомотетія є перетворенням подібності.**

Д о в е д е н н я. Нехай X і Y дві довільні точки фігури F, які гомотетією із центром у точці O і коефіцієнтом k переходять у точки X' і Y' фігури F' (мал. 216, 217).

Розглянемо випадок, коли $k > 0$ (мал. 216).

$OX' = k \cdot OX$, $OY' = k \cdot OY$, тому $\triangle OXY \sim \triangle OX'Y'$ (за двома сторонами і кутом між ними).

Тоді $\dfrac{OX'}{OX} = \dfrac{OY'}{OY} = \dfrac{X'Y'}{XY} = k$. Звідси $X'Y' = k \cdot XY$.

Якщо $k < 0$ (мал. 217), то $\angle XOY = \angle X'OY'$ (як вертикальні). Міркуючи аналогічно випадку, коли $k > 0$, доходимо висновку, що $X'Y' = |k| \cdot XY$.

Узагальнюючи, маємо, що $X'Y' = |k| \cdot XY$, тому гомотетія є перетворенням подібності.

Н а с л і д о к. **Гомотетія з коефіцієнтом k є перетворенням подібності з коефіцієнтом $|k|$.**

Задача 1. Гомотетія з коефіцієнтом $k = -3$ переводить трикутник ABC у трикутник $A'B'C'$. Знайти сторони трикутника $A'B'C'$, якщо $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 8$ см.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки гомотетія з коефіцієнтом $k = -3$ є перетворенням подібності з коефіцієнтом $|k| = |-3| = 3$, то $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'C'}{AC} = 3$. А тому $A'B' = 3 \cdot 6 = 18$ (см), $B'C' = 3 \cdot 7 = 21$ (см), $A'C' = 3 \cdot 8 = 24$ (см).

В і д п о в і д ь. 18 см, 21 см, 24 см.

Задача 2. При гомотетії із центром у початку координат точка $A(2; -3)$ переходить у точку $A'(6; -9)$. Знайти коефіцієнт гомотетії.

Р о з в' я з а н н я. Нехай k – коефіцієнт гомотетії. Оскільки точки A і A' лежать в одній чверті, то вони лежать на одному промені з початком у початку координат, тому $k > 0$.

$k = \dfrac{OA'}{OA}$, де точка O – початок координат, що є центром гомотетії.

$OA = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$; $OA' = \sqrt{6^2 + (-9)^2} = 3\sqrt{13}$.

$k = \dfrac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 3$.

В і д п о в і д ь. $k = 3$.

1. Що називають гомотетією?
2. Що називають центром гомотетії, коефіцієнтом гомотетії?
3. Які фігури називають гомотетичними?
4. Сформулюйте та доведіть теорему про гомотетію.
5. Сформулюйте наслідок із цієї теореми.

1 Початковий рівень

1194. Дано точки O і A. Побудуйте точку A', гомотетичну точці A, із центром гомотетії O, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює: 1) 2; 2) 4.

1195. Дано точки O і B. Побудуйте точку B', гомотетичну точці B, із центром гомотетії O, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює: 1) 3; 2) 5.

1196. Побудуйте в зошиті відрізок $AB = 2$ см і позначте точку O, що не лежить на цьому відрізку. Побудуйте відрізок, гомотетичний відрізку AB, із центром гомотетії в точці O і коефіцієнтом $k = 3$.

1197. Побудуйте в зошиті відрізок $MN = 3$ см і позначте точку O, що не лежить на цьому відрізку. Побудуйте відрізок, гомотетичний відрізку MN, із центром гомотетії в точці O і коефіцієнтом $k = 2$.

2 Середній рівень

1198. Середня лінія трикутника відтинає від нього гомотетичний трикутник. Чому дорівнює коефіцієнт гомотетії? Де знаходиться центр гомотетії?

1199. Дано точки O і B. Побудуйте точку B', гомотетичну точці B, із центром гомотетії O, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює:

1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) -1; 4) -2.

1200. Дано точки O і A. Побудуйте точку A', гомотетичну точці A, із центром гомотетії O, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) -1; 4) -3.

1201. (Усно.) Чи може гомотетія бути переміщенням? У якому випадку?

1202. Побудуйте трикутник, гомотетичний даному, із центром гомотетії в точці перетину медіан трикутника і коефіцієнтом гомотетії $k = 2$.

1203. Побудуйте прямокутник, гомотетичний даному, із центром гомотетії в точці перетину його діагоналей і коефіцієнтом гомотетії $k = 2$.

3 Достатній рівень

1204. Дано точки A і A'. Побудуйте центр гомотетії, при якій A переходить в A', якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює:

1) 2; 2) $\frac{1}{3}$.

1205. Дано точки B і B'. Побудуйте центр гомотетії, при якій B переходить у B', якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює:

1) 3; 2) $\frac{1}{2}$.

1206. (Усно.) Чи можуть дві фігури бути:

1) гомотетичними, але не подібними;
2) подібними, але не гомотетичними;
3) гомотетичними і рівними?

1207. Гомотетія із центром у початку координат переводить точку B у точку B'. Знайдіть коефіцієнт гомотетії, якщо:

1) $B(2; -5)$, $B'(6; -15)$;
2) $B(-2; 8)$, $B'(-1; 4)$;
3) $B(4; 5)$, $B'(-8; -10)$;
4) $B(-16; -4)$, $B'(4; 1)$.

1208. Гомотетія із центром у початку координат переводить точку A в точку A'. Знайдіть коефіцієнт гомотетії, якщо:
1) $A(-3; 4)$, $A'(-6; 8)$;
2) $A(20; 10)$, $A'(4; 2)$;
3) $A(-5; -1)$, $A'(15; 3)$;
4) $A(2; -6)$, $A'(-1; 3)$.

4 Високий рівень

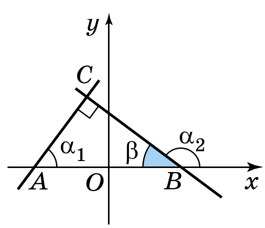
1209. Дано два паралельних, але не рівних між собою відрізки AB і CD. Чи може один з них перейти у другий при гомотетії? Якщо так, то поясніть, як знайти центр цієї гомотетії. Скільки таких центрів може бути?

1210. Дано дві паралельні прямі. Чи може одна з них перейти у другу при гомотетії? Якщо так, то поясніть, як знайти центр цієї гомотетії. Скільки таких центрів може бути?

ВІДПОВІДІ, ВКАЗІВКИ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розділ 1

15. $C(7; -3)$ або $C(2; 4)$. **16.** 1) $x_A = y_A$, $x_A \geqslant 0$; 2) $x_A = -y_A$, $x_A \leqslant 0$. **17.** 2) Відстань від точки $M(x; y)$ до осі абсцис дорівнює $|y|$, а до осі ординат – $|x|$. **19.** $(-4; 0)$, $(0; 5)$, $(4; 0)$, $(0; -5)$ або $(-5; 0)$, $(0; 4)$, $(5; 0)$, $(0; -4)$. **20.** $(-3; 0)$, $(0; 3)$, $(3; 0)$, $(0; -3)$. **21.** $B(1; 3)$, $C(1; 5)$, $D(3; 5)$, або $B(5; 3)$, $C(5; 5)$, $D(3; 5)$, або $B(1; 3)$, $C(1; 1)$, $D(3; 1)$, або $B(5; 3)$, $C(5; 1)$, $D(3; 1)$. **22.** Прямі $x = -3$ і $x = 3$. **23.** Прямі $y = -2$ і $y = 2$. **25.** 4 см, 5 см. **29.** 1) 44 см; 2) 8 см. **48.** 1) $\sin\alpha = 0{,}8$; $\operatorname{tg}\alpha = -1\frac{1}{3}$; 2) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ або $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. **49.** 1) $\sin\alpha = 0{,}96$; $\operatorname{tg}\alpha = -3\frac{3}{7}$; 2) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = 1$ або $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = -1$. **51.** 1) -1; 2) $\sqrt{3}$. **52.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 0. **53.** 1) $\alpha = 118°$; 2) $\alpha = 68°$ або $\alpha = 112°$. **54.** 1) $\beta = 145°$; 2) $\beta = 80°$ або $\beta = 100°$. **55.** Вказівка. 1) Використати $\cos\alpha = -\cos(180 - \alpha)$. 2) Існує два кути, що задовольняють умову. **57.** 0. **58.** 1) 1; 2) 5. **59.** 1) 1; 2) 6. **61.** 25 см. **62.** $2\sqrt{ab}$ см. **66.** 5 см. **83.** $N(-5; 5)$. **84.** $D(4; -31)$. **85.** 1) Так; 2) ні. **86.** $\sqrt{26}$. **87.** $2\sqrt{2}$. **88.** 26. **89.** 34. **90.** 5. **91.** 13. **92.** 24. **93.** $10\sqrt{2}$. **94.** $y = 22$ або $y = -8$. **95.** $x = 10$ або $x = -4$. **96.** $(-3; 0)$. **97.** $(0; 8)$. **98.** $N(3{,}5; 5)$. **99.** $D(11; 4{,}5)$. **100.** B між A і C. **101.** M між P і L. **104.** $-2 \pm 2\sqrt{3}$. **105.** $\angle A \approx 8°08'$; $\angle B \approx 81°52'$. **106.** $\angle M \approx 26°34'$; $\angle L \approx 63°26'$. **108.** 14 см. **109.** 50 см. **110.** Одна з невідомих сторін дорівнює 25 см, а інша – $5\sqrt{17}$ см або $5\sqrt{65}$ см. **136.** $(x - 11)^2 + y^2 = 100$ або $(x + 1)^2 + y^2 = 100$. **137.** $x^2 + (y - 5)^2 = 25$ або $x^2 + (y + 1)^2 = 25$. **138.** 1) Ні; 2) так. **139.** 1) Так; 2) ні. **140.** 1) C; 2) B; 3) A і D. **141.** $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 169$. **142.** $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 100$. **143.** 1) Зовнішній дотик; 2) немає спільних точок. **144.** 1) Перетин; 2) внутрішній дотик. **145.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. **149.** $A(1; 9)$, $B(4; 0)$. **175.** $10x - y - 2 = 0$. **176.** $5x + y - 20 = 0$. **177.** $(-3; -2)$. **178.** $(-4; -5)$. **181.** 1) $x + y + 5 = 0$; 2) $\sqrt{3}x - y + (4\sqrt{3} - 1) = 0$. **182.** 1) $x - y + 3 = 0$; 2) $\sqrt{3}x + y - (5 + 2\sqrt{3}) = 0$. **185.** $a = -5$. **186.** $b = -4$. **187.** $2x - y + 4 = 0$. **188.** $3x + y - 3 = 0$. **189.** Доведення (мал. 218). Розглянемо прямі CA і CB, $CA \perp CB$, $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$. Тоді $\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot (-\operatorname{tg}(180° - \alpha_2)) = \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot (-\operatorname{tg}\beta) = -\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}(90° - \alpha_1) =$



Мал. 218

$= -\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} \cdot \frac{\sin(90° - \alpha_1)}{\cos(90° - \alpha_1)} = -\frac{\sin\alpha_1 \cdot \cos\alpha_1}{\cos\alpha_1 \cdot \sin\alpha_1} = -1$. Отже, $k_1k_2 = -1$. Нехай прямі задано рівняннями $y = k_1x + l_1$ і $y = k_2x + l_2$, де $k_1 \neq 0$ і $k_2 \neq 0$, та $k_1k_2 = -1$ (мал. 295). Тоді $\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2 = -1$, а тому $\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\beta = 1$, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$. Можна довести, що для гострого кута α справджується рівність $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}(90° - \alpha)}$. Тому $\alpha_1 = 90° - \beta$, $\alpha_1 + \beta = 90°$, а отже, $\angle ACB = 90°$. **190.** $2x + y - 1 = 0$. **191.** $3x - y - 7 = 0$. **195.** Так. **212.** 1) $\sin^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha$. **213.** 1) «Мінус»; 2) «мінус». **214.** 1), 3) Так; 2) ні. **216.** 1. **218.** В к а з і в к а. Розгляньте два випадки. **222.** 1) Рівнобедрений; 2) рівносторонній; 3) різносторонній. **226.** (0; 0), (–6; 0), (0; 8). **227.** $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}\right)$. **228.** $F(5; 12)$. **230.** 1) Так; точка B між точками A і C; 2) ні. **232.** (0; 2). **234.** $\angle A = \angle B = 45°$; $\angle C = 90°$. **244.** $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ або $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. **245.** (3; 3), або (3; –3), або (–3; 3), або (–3; –3). **246.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ або $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$. **247.** $(x - 4)^2 + y^2 = 25$. **248.** (14; 0). В к а з і в к а. Спочатку запишіть рівняння кола, для якого AB є діаметром. **249.** Коло $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. **250.** 1) Перетин; 2) зовнішній дотик. **259.** $a = 0{,}2$; $b = 0{,}2$. **261.** Так. **264.** 36. **265.** $x - y + 3 = 0$. **267.** $y = 6$; $y = -4$. **268.** (8; 1); (7; 4), (7; –2). **270.** $x - 2y + 6 = 0$.

Розділ 2

288. Ні. **289.** $N(3; 0)$. **290.** $K(1; 0)$. **291.** $|\overrightarrow{DC}| = 3$; $|\overrightarrow{AD}| = 4$; $|\overrightarrow{BD}| = 5$; $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{13}$. **292.** $|\overrightarrow{BD}| = 4\sqrt{2}$; $|\overrightarrow{AB}| = 4$; $|\overrightarrow{DN}| = 2$; $|\overrightarrow{BN}| = 2\sqrt{5}$. **294.** 1) $ABCD$ – ромб; 2) $ABCD$ – трапеція. **295.** 1) $\overrightarrow{BE} \parallel \overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BE} \parallel \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CE} \parallel \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CF}$; 2) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BE} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{BE} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CE}$; 4) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CF}$; 5) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CF}|$, $|\overrightarrow{BE}| = |\overrightarrow{CE}|$. **296.** 1) $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{AF} \parallel \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AF} \parallel \overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DF} \parallel \overrightarrow{EC}$; 2) $\overrightarrow{AF} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EC}$; 3) $\overrightarrow{AE} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{AF} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{DF} \uparrow\downarrow \overrightarrow{EC}$; 4) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EC}$; 5) $|\overrightarrow{AF}| = |\overrightarrow{EC}|$, $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{CF}|$. **298.** $A(-5; 0)$ або $A(19; 0)$. **300.** 5, якщо $y = 3 - \frac{3}{4}x$, де $x \in [0; 4]$. В к а з і в к а. Розглянемо деяку точку $M(x; y)$ та точки $A(0; 3)$ і $B(4; 0)$. Тоді заданий в умові вираз є сумою $MA + MB$. Ця сума набуває найменшого значення, якщо точка M належить відрізку AB. **315.** (2; –2). **316.** (1; 1). **317.** (–9; 12). **318.** (4; –8). **319.** $(a + c; b)$. **320.** $M(-3; 6)$. **323.** $x = 4$ або $x = -4$. **324.** $y = 6$ або

$y = -6$. **327.** $\vec{a}(3;\ 1)$ або $\vec{a}(-1;\ -3)$. **328.** $\vec{b}(-1;\ 2)$ або $\vec{b}(2;\ -1)$. **329.** $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 13$. **332.** 48 см. **333.** Так, $\angle ANB = 90°$. **346.** 1) $\overrightarrow{AD}$; 2) нуль-вектор; 3) $\overrightarrow{CD}$; 4) нуль-вектор. **347.** 1) $\overrightarrow{CD}$; 2) нуль-вектор. **351.** $K(5;\ -4)$. **352.** $A(3;\ -9)$. **353.** $x = -5$. **354.** $y = 8$. **356.** 3 см. **357.** $\frac{7}{8}$. **375.** 1) 13; 2) $\sqrt{130}$. **376.** 1) 17; 2) $\sqrt{85}$. **379.** 1) $m = 15$; співнапрямлені; 2) $m = 2$; протилежно напрямлені. **380.** 1) $n = -2$; протилежно напрямлені; 2) $n = 4$; співнапрямлені. **381.** −4. **382.** 2. **383.** $\overrightarrow{BO} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC})$. **385.** $\vec{a}(-4;\ 3)$ або $\vec{a}(4;\ -3)$. **386.** $\vec{b}(10;\ -24)$ або $\vec{b}(-10;\ 24)$. **389.** $A\left(\frac{3}{5};\ -\frac{4}{5}\right)$. **391.** 14 см; $55\sqrt{3}$ см^2. **392.** 72°. **393.** $2\sqrt{5}$ см. **409.** $x = 10$. **410.** $y = 8$. **411.** 45°. **412.** 135°. **413.** 45°; 90°; 45°; прямокутний. **414.** $\cos K = 0$; $\cos M = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos L = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; прямокутний. **415.** 1) 0°; 2) 60°; 3) 180°; 4) 120°. **416.** −6; 16. **417.** 12; 0. **421.** 1) $\sqrt{31}$; 2) $\sqrt{19}$. **422.** 1) $\sqrt{39}$; 2) $\sqrt{181}$. **423.** 120°. **425.** $\vec{a}(2;\ -8)$. **426.** $\vec{b}(9;\ -3)$. **427.** 0. **428.** 20. **429.** $\vec{d}(3;\ 6)$ або $\vec{d}(-3;\ -6)$. **430.** $\vec{c}(5;\ 1)$ або $\vec{c}(-5;\ -1)$. **431.** 12. **433.** $m = 4$ або $m = -4$. **434.** Ромб. **435.** Так. **443.** $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 13$; $\left|\overrightarrow{DC}\right| = 5\sqrt{2}$; $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{74}$. **445.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) так. **446.** 20. **452.** 1) $C(-8;\ 1)$; 2) $C(1;\ -1)$. **455.** $x = 3$ або $x = -3$. **457.** $\vec{c}(1;\ 4)$. **462.** $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{CD} = \vec{b} - \vec{a}$. **463.** 1) $\overrightarrow{AD}$; 2) $\vec{0}$. **464.** 1), 2) Так; 3) ні. **468.** $|\vec{c}| > |\vec{d}|$. **469.** 1) $x = 3$, співнапрямлені; 2) $x = -3$, протилежно напрямлені. **471.** $-\frac{1}{2}$. **474.** $\vec{c}(4;\ 6)$, $\vec{d}(3;\ 2)$. **476.** $x = 5$. **483.** $\frac{13}{85}$. **484.** 1) $y < 8$; 2) $y = 8$; 3) $y > 8$. **485.** $\angle A = 90°$; $\angle B \approx 53°$; $\angle C \approx 37°$. **488.** −223. **489.** $-\frac{5}{11}$. **490.** $-\frac{3}{5}$.

Розділ 3

500. $\angle A = 90°$; $\angle B = 60°$; $\angle C = 30°$. **501.** 135°. **502.** 30°. **503.** 1) Гострокутний; 2) прямокутний; 3) тупокутний. **504.** 1) Тупокутний; 2) прямокутний; 3) гострокутний. **505.** $\sqrt{106}$ см. **506.** $\sqrt{34}$ см. **507.** 13 см. **508.** $\frac{1}{2}\sqrt{145}$ см. **509.** 20 см. **510.** 30 см. **511.** 6 см; 10 см; 14 см. **512.** 15 см; 21 см; 24 см. **513.** 3 см або 5 см. **514.** 7 см. **515.** 8 см і 14 см. **516.** 10 см і 15 см. **517.** 26 см. **518.** 12 см і 14 см. **519.** $\sqrt{10}$ см. **520.** 14 см. **523.** 8 см і 15 см. **524.** $3\sqrt{10}$ см. **525.** $2\sqrt{13}$ см або $2\sqrt{109}$ см. **526.** $\sqrt{65}$ см або $\sqrt{233}$ см. **527.** 32 см. **528.** 30 см. **529.** $\frac{\sqrt{274}}{4}$ см. **530.** $\frac{\sqrt{595}}{7}$ см. **531.** $6\sqrt{145}$ см. В к а з і в к а. Якщо

M – точка перетину медіан, то $AM = \frac{2}{3}AP$, $BM = \frac{2}{3}BN$. Медіана $\triangle AMT$, що проведена з вершини M, дорівнює третині невідомої медіани $\triangle ABC$. **532.** $\frac{4d\sqrt{3}}{3}$. **535.** 25 см. **536.** 75 см^2. **537.** $c\sin\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)$, $c\cos\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)$. **542.** 90°. **559.** 30°. **560.** 30°. **561.** 60° або 120°. **562.** 45° або 135°. **563.** 45° або 135°. **564.** 30° або 150°. **565.** 12 см. **566.** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ см. **567.** 2 см. **568.** $(3\sqrt{3} + 5)$ см. **569.** $AB = (3 + \sqrt{6})$ см, $AC = (2 + \sqrt{6})$ см. **570.** 7 см або $\sqrt{97}$ см. **571.** $\frac{2d}{\sin(\alpha + \beta)}(\sin\alpha + \sin\beta)$. **572.** $\frac{m\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$. **573.** $\frac{c\cos\alpha\sin\alpha}{\sin(45° + \alpha)}$. **575.** 7 см. **576.** $\frac{d}{2}\sqrt{4a^2 - d^2}$. **577.** $a^2 : b^2$. **580.** В к а з і в к а. Нехай точка O – точка перетину діагоналей прямокутника, N – деяка точка кола, L і M – основи перпендикулярів, які проведено з точки N до діагоналей прямокутника. Розгляньте коло, діаметр якого ON, та доведіть, що точки L і M належать цьому колу. **589.** ≈ 84,86 м. **592.** 1) $\angle B \approx 37°59'$; $\angle C \approx 62°01'$; $AB \approx 7{,}17$ см; 2) $\angle C \approx 37°19'$; $\angle A \approx 82°41'$; $BC \approx 11{,}45$ см; 3) немає розв’язків; 4) $\angle A \approx 41°49'$; $\angle C \approx 108°11'$; $AB \approx 5{,}70$ см або $\angle A \approx 138°11'$; $\angle C \approx 11°49'$; $AB \approx 1{,}23$ см. **593.** 1) $\angle A \approx 21°09'$; $\angle B \approx 38°51'$; $AC \approx 8{,}69$ см; 2) $\angle B \approx 34°51'$; $\angle C \approx 105°09'$; $AB \approx 13{,}51$ см; 3) немає розв’язків; 4) $\angle A \approx 20°32'$; $\angle C \approx 142°28'$; $AB \approx 10{,}42$ см або $\angle A \approx 159°28'$; $\angle C \approx 3°32'$; $AB \approx 1{,}05$ см. **594.** 4,75 см; 62°1′; 117°59′. **595.** 5,23 см; 7,39 см; 76°34′; 103°26′. **596.** 4,97 см; 2,16 см; 6,3 см; 2,16 см; 72°; 108°. **597.** 7,57 см; 6,47 см; 7,57 см; 1,04 см; 69°; 111°. **598.** Так. **599.** 60°; 6,51 см; 5,31 см або 20°; 13,44 см; 16,48 см. **600.** 6,24 см, 76°, 44° або 10,44 см, 35°, 25°. В к а з і в к а. Необхідно розглянути три випадки, але розв’язок матимуть лише два з них. **601.** ≈ 318 м. **604.** $4ab\cos\alpha$. **605.** $4x - y - 3 = 0$. **628.** 11,2 см. **629.** 28,8 см. **630.** 96 см^2. **631.** 128 см^2. **632.** 10 см, 10 см, $10\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ см. **633.** 6 см, 6 см, $6\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ см. **635.** 18,125 см. **636.** 42,5 см. **637.** 1,5 см. **638.** $1\frac{1}{3}$ см. **639.** 4 : 9. **640.** 1 : 2. **641.** $50\sqrt{2}$ см^2. **642.** $2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha + \beta)$. **643.** $48\sqrt{10}$ см^2. **644.** $24\sqrt{91}$ см^2. **646.** 3 : 5. **647.** $\frac{1}{2}\sqrt{41}$ см^2. **648.** $\frac{1}{2}\sqrt{127}$ см^2. **649.** 8 : 7. **650.** 15 : 17. **667.** 400 см^2. **668.** $5\sqrt{3}$ см і 10 см. **669.** 30 см. **670.** Тупокутний. **671.** 135°. **672.** $\frac{1}{2}\sqrt{97}$ см. **673.** 6 см і $(3+\sqrt{22})$ см. **674.** $\frac{\sqrt{14}}{12}$. **675.** $\frac{m}{4\cos\alpha}\sqrt{1+8\cos^2\alpha}$. **676.** $\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$. **677.** $\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$. **685.** $1:\sqrt{3}:2$. **686.** 45°; 60°; 75°. **687.** 1) Так; 2) ні. **688.** 60° або 120°. **689.** $2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta))$. **691.** $\frac{4}{45}\sqrt{690}$ см. **692.** $\frac{b\sin\gamma}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right)}$. **693.** $\frac{a\sqrt{10}}{4}$. **698.** 1) $AB=\sqrt{166}$ см, $\angle A\approx 41°8'$, $\angle B\approx 80°50'$, $\angle C\approx 58°2'$; 2) $AB=2\sqrt{10}$ см, $AC=2\sqrt{58}$ см, $\angle A\approx 48°22'$, $\angle B\approx 108°26'$, $\angle C\approx 23°12'$. **699.** 4 год 30 хв. **700.** Через пункт B. **705.** 24 см. **706.** $80\sqrt{3}$ см^2. **707.** $R=16{,}25$ см; $r=3$ см. **708.** 12,5 см. **709.** $4\sqrt{3}$ см. **710.** $\sqrt{13}$ см або $\sqrt{37}$ см. **711.** $2\frac{1}{7}$ см^2 і $2\frac{6}{7}$ см^2. **712.** $\frac{1}{2}\sqrt{26}$ см^2. **713.** $20\sqrt{3}$ см^2. В к а з і в к а. Доведіть, що площа трикутника AMB дорівнює половині площі трикутника ABC. **714.** 84 см^2. **715.** 24 см^2; 100 см^2; 116 см^2. **716.** 1224 см^2. **717.** 12 см. В к а з і в к а. Нехай $ABCD$ – трапеція, $AB=4$ см, $CD=25$ см, $AD=13$ см, $BC=20$ см. Проведіть AE так, що $AE \parallel BC$, E – належить стороні CD, і розгляньте $\triangle AED$.

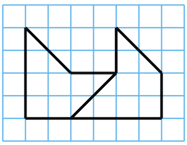
Розділ 4

741. 12. **742.** 18. **743.** 9. **744.** 10. **745.** 4 см. **746.** 8 см. **749.** $n=4$; $a_4=12\sqrt{2}$ см. **750.** $n=6$; $a_6=4$ см. **751.** $32\sqrt{2}$ см^2. **752.** 27 см^2. **753.** $\sqrt{2}$ см. **756.** 1) 6 см; 6 см; 2) 2 см; 18 см. **757.** 432 см^2. **759.** 45 см. **776.** 18 см. **777.** 27 см. **778.** 40°. **779.** 72°. **780.** 6,54 м. **781.** 8. **782.** 6. **783.** 12π см. **784.** 16π см. **785.** 4π см. **786.** 10π см. **787.** 1) $\frac{\pi a}{3}$; 2) $\frac{\pi a\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{9}$. **788.** 1) 6 см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) $3\sqrt{3}$ см. **789.** 12π см. **790.** 20π см. **791.** $\frac{725\pi}{24}$ см. **794.** 1) 96 см^2; 2) 24 см, $7\frac{5}{13}$ см, 6,4 см; 3) 3 см; 4) 16,25 см. **795.** $3a$ см. **814.** 16π см^2. **815.** π см^2. **816.** 2π см^2. **817.** 6π см^2. **818.** 21π см^2. **819.** $(50\pi-100)$ см^2. **820.** $(100\pi-96)$ см^2. **821.** 30 см. **822.** 6 см. **823.** 1) $(12\pi-36)$ см^2; 2) $(48\pi-36\sqrt{3})$ см^2; 3) $(90\pi+36\sqrt{2})$ см^2. **824.** 1) $(4{,}5\pi-9\sqrt{2})$ см^2; 2) $(9\pi-18)$ см^2; 3) $(21\pi+9)$ см^2. **825.** $(12\pi-9\sqrt{3})$ см^2; $(24\pi+9\sqrt{3})$ см^2. **826.** $(24\pi-36\sqrt{3})$ см^2; $(120\pi+36\sqrt{3})$ см^2. **827.** $\frac{15\pi}{4}$ см^2. **828.** $128\sqrt{3}$ см^2. **829.** $\frac{a^2(4-\pi)}{4}$; $\frac{a^2(4-\pi)}{2}$; $\frac{a^2(\pi-2)}{2}$. **831.** 9. **832.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. **834.** $\sqrt{7}$.

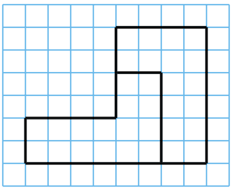
842. 30. **843.** 12 см. **844.** $8\sqrt{3}$ см. **845.** 60°. **846.** $r = (48 - 24\sqrt{3})$ см; $R = (32\sqrt{3} - 48)$ см. **848.** $\frac{r(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}$ або $\frac{r(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2}$. **849.** $8 : 3\sqrt{3} : 6\sqrt{3}$. **850.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **851.** В к а з і в к а. Побудуйте спочатку рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого a, його гіпотенуза – сторона правильного шестикутника. **852.** $8R^2$. **858.** На 4 см. **859.** 24 см. **860.** ≈ 36,2 км/год. **861.** 12 см. **862.** $\frac{\sqrt{3}\pi a}{6}$. **863.** $\frac{25}{3}\pi$ см. **864.** 13π см. **865.** ≈ 16,4 см. **866.** 1) $\frac{\pi a\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{6}$; 2) $\frac{5\pi a\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{6}$. **867.** 1) $\frac{4l}{3\pi}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$; 2) $\frac{3\sqrt{3}l}{4\pi}$. **868.** $\frac{\pi r}{2}$; $\frac{2\pi r}{3}$; $\frac{5\pi r}{6}$. **875.** 1 : 9. **876.** 3π см^2. **877.** $\pi : 2$. **878.** 4 см. **879.** 1) $(54\pi - 81\sqrt{3})$ см^2; 2) $(121{,}5\pi - 81\sqrt{2})$ см^2; 3) $(135\pi - 81)$ см^2; 4) $(216\pi + 81\sqrt{3})$ см^2; 5) $(270\pi + 81\sqrt{3})$ см^2; 6) $(297\pi + 81)$ см^2. **880.** $(16\pi - 32)$ см^2; $(48\pi + 32)$ см^2. **881.** $\frac{3\pi r^2}{2}$ см^2. **882.** $\pi r^2(3 + 2\sqrt{2})$. **883.** $\frac{C_1^2 - C_2^2}{4\pi}$. **884.** $\frac{R^2}{2}(\pi + \sqrt{3})$.

Розділ 5

893. Так. **894.** Так. **895.** Ні. **896.** Ні. **897.** Так. В к а з і в к а. Радіуси кіл рівні. **898.** Ні. В к а з і в к а. Радіуси кіл різні. **899.** Див. малюнок 219. **900.** Див. малюнок 220.



Мал. 219



Мал. 220

903. 12 см. **904.** 72°. **919.** 1) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$; 2) $(x + 4)^2 + (y - 13)^2 = 16$. **920.** 1) $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 9$; 2) $(x - 5)^2 + (y + 11)^2 = 9$. **921.** 1) $2x - y - 5 = 0$; 2) $2x - y - 3 = 0$. **922.** 1) $x + 2y + 3 = 0$; 2) $x + 2y + 9 = 0$. **925.** 45°; 45°. **926.** $AC = 5$ см, $AB = \sqrt{41}$ см або $AB = \sqrt{137}$ см. **937.** 1) $x = 3$, $y = 2$; 2) $x = -3$, $y = -2$. **938.** 1) $x = -5$, $y = -6$; 2) $x = 5$, $y = 6$. **943.** 1) $2x + 3y - 6 = 0$; 2) $2x + 3y + 6 = 0$. **944.** 1) $4x + y + 8 = 0$; 2) $4x + y - 8 = 0$. **947.** $3\sqrt{3} : 8$. **948.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. **961.** На 90° за або проти годинникової стрілки. **962.** $m = -4$; $n = -3$. **963.** $m = 3$; $n = 4$. **964.** $A'(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. **965.** $B'(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. **966.** Вказівка. Побудуйте рівносторонній трикутник, тоді буде отримано кут 60°. **982.** 1) Ні; 2) так. **983.** 1) Ні; 2) так. **984.** $(x + 8)^2 + (y - 9)^2 = 15$. **985.** $(x - 8)^2 + (y + 6)^2 = 7$. **986.** $x + 2y - 1 = 0$. **987.** $3x - y + 3 = 0$. **988.** 1) $2x - 5y = 0$; 2) $2x - 5y - 9 = 0$. **989.** 1) $3x - 2y = 0$; 2) $3x - 2y - 14 = 0$. **992.** 128 см². **995.** $2r^2(2\sqrt{3} + 3)$. **1015.** Ні. **1016.** Ні. **1017.** 1) 6 см; 8 см; 10 см; 12 см; 2) 18 см; 24 см; 30 см; 36 см; 3) 15 см; 20 см; 25 см; 30 см. **1018.** 1) 15 см; 20 см; 25 см; 30 см; 35 см; 2) 24 см; 32 см; 40 см; 48 см; 56 см; 3) 6 см; 8 см; 10 см; 12 см; 14 см. **1020.** 18 см або 8 см. **1021.** 9 см або 36 см. **1023.** $\frac{b^2}{a}$. **1025.** Так. **1027.** 4 см; 4 см; 6 см; 8 см; 12 см і 6 см; 6 см; 9 см; 12 см; 18 см. **1028.** 8 см; 8 см; 12 см; 20 см і 6 см; 6 см; 9 см; 15 см. **1033.** $(588 - 392\sqrt{2})$ см². **1045.** 2 : 1. **1046.** 4 : 3. **1047.** 108 см². **1048.** 6 см. **1049.** 18 см² і 32 см². **1050.** 125 см² і 80 см². **1051.** 1 : 10 000. **1052.** 10^6. **1053.** 4 см. **1054.** 6 см. **1056.** 12 см, 21 см, 24 см і 20 см, 35 см, 40 см. **1057.** 2 і $\sqrt{2}$ см, або $4 + 2\sqrt{3}$, або $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$. **1062.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) ні. **1063.** Ні. **1065.** Так. **1074.** Ні. **1075.** Вказівка. Побудувати пряму, симетричну одній з даних відносно заданої точки. **1086.** Вказівка. Розглянути точку перетину прямої AB' з прямою l, де B' – точка, симетрична точці B відносно прямої l. **1091.** 60°. **1092.** $C'(1; \sqrt{3})$. Вказівка. Точка C' належить прямій $y = \sqrt{3}x$. **1093.** 1) $x + 2y - 1 = 0$; 2) $x + 2y + 1 = 0$. **1102.** Вказівка. Образом є коло $x^2 + y^2 = 5$. **1103.** $(-0,5; -1)$. **1110.** Так. **1111.** Ні. **1112.** Ні. **1114.** 1) Ні; 2) ні. **1115.** Ні. **1116.** $\sqrt{ab}$. **1122.** 256 см² або 81 см². **1123.** 1 : 3. **1124.** 12 см і 8 см. **1125.** 600 м². **1126.** Зменшиться в 9 разів. **1127.** 4 : 3. **1128.** 4 : 5. **1129.** 5 см. **1130.** Вказівка. Сторони шуканого чотирикутника у 1,5 раза більші за сторони заданого, а відповідні кути рівні між собою.

Задачі підвищеної складності

1132. Вказівка. Спроектувати точки A, B і M на вісь x. Матимемо $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$. **1133.** $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$; $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. **1134.** $\left(\frac{4}{11}; 1\frac{2}{11}\right)$. Вказівка. $\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC}$. **1136.** $a = -10$ або $a = 1$. **1137.** $C(0; \sqrt{3})$ або $C(0; -\sqrt{3})$. Вказівка. $AB = BC = CA$. Нехай $C(x; y)$. Тоді $\begin{cases}(x + 1)^2 + y^2 = 4,\\(x - 1)^2 + y^2 = 4.\end{cases}$ **1138.** Таких ромбів шість: ABC_1D_1, де $D_1(0; \sqrt{3})$, $C_1(2; \sqrt{3})$; ABD_2C_2, де $D_2(0; \sqrt{3})$, $C_2(-2; \sqrt{3})$; ABC_3D_3, де $D_3(0; -\sqrt{3})$, $C_3(2; -\sqrt{3})$; ABD_4C_4, де $D_4(0; -\sqrt{3})$, $C_4(-2; -\sqrt{3})$; AC_5BD_5, де $C_5(0; \sqrt{3})$, $D_5(0; -\sqrt{3})$; AC_6BD_6, де $C_6\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $D_6\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

1139. $(-2; -1)$. **1141.** 49. **1142.** $x_0x + y_0y = r^2$. **1143.** 8. **1144.** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **1145.** $(x - 9)^2 + (y + 7)^2 = 100$ або $(x + 3)^2 + (y - 9)^2 = 100$. **1146.** 1) $k = \pm\frac{4}{3}$; 2) $k < -\frac{4}{3}$ або $k > \frac{4}{3}$; 3) $-\frac{4}{3} < k < \frac{4}{3}$. **1147.** $2x + y - 8 = 0$ і $x - 2y + 11 = 0$. **1148.** $2x + y - 1 = 0$ і $2x + y + 19 = 0$. **1149.** $B\left(9\frac{7}{13}; -6\frac{9}{13}\right)$; $AB = 17$. **1150.** $2\sqrt{13}$. Вказівка. Даний вираз представити у вигляді $\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2}$, який є сумою відстаней від точки $M(x; y)$ до точок $A(3; -4)$ і $B(-1; 2)$. Вона буде найменшою, якщо M належить відрізку AB. **1151.** Паралелограм. **1152.** Вказівка. $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, тоді $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AD}$, тому $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{DD_1}$. **1153.** $\overrightarrow{BC}(8; -6)$, $\overrightarrow{CD}(-6; -8)$, $\overrightarrow{DA}(-8; 6)$ або $\overrightarrow{BC}(-8; 6)$, $\overrightarrow{CD}(-6; -8)$, $\overrightarrow{DA}(8; -6)$. **1154.** Вказівка. Використати: $\triangle ABO \sim \triangle CDO$, $\triangle ADB \sim \triangle MDO$, $\triangle DBC \sim \triangle OBN$. **1155.** $\overrightarrow{BL}\left(-3\frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right)$. **1159.** Вказівка. Розглянути скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{p}$. **1160.** Нехай $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, тоді $\overrightarrow{M_1M_2}\ (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ і $\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0, \\ ax_2 + by_2 + c = 0; \end{cases}$ звідки $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$. **1161.** $4x + 5y + 3 = 0$. **1162.** $4x - 3y + 1 = 0$. **1163.** $\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$. **1164.** 6 см. **1165.** $3\sqrt{19}$ см. Вказівка. Розглянути $\triangle AMB$ та знайти його медіану MM_3. **1166.** $\frac{aS}{a + b}$ і $\frac{bS}{a + b}$. Вказівка. Нехай S_1 і S_2 – шукані площі, тоді $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$ і $S_1 + S_2 = S$. **1167.** $\sqrt{3}$ см. Вказівка. Позначимо $\angle BAM = \alpha$, тоді і $\angle CBM = \alpha$. **1168.** $30°$. Вказівка. $\angle ACB = 120°$; $\angle A = \angle B = \angle 30°$. Позначити $AC = CB = x$, тоді $AB = x\sqrt{3}$; $AM = \frac{x\sqrt{3}}{3}$. **1170.** $\frac{(a^2 - b^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha + \beta)}$.

1171. Використовуючи теорему косинусів, доведіть, що синус кута між сторонами a і b дорівнює $\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd}$. **1172.** $\frac{R^2}{4}$. **1173.** Вказівка. Використовуючи теорему косинусів, виразити діагоналі чотирикутника через його сторони. **1174.** $\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$. Вказівка. $\angle ABC = \angle EDC$; $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ECD}} = \frac{AB \cdot BD}{DE \cdot DC}$. Далі використати подібність трикутників ABC і EDC. **1175.** $\frac{\pi ab}{4}$. **1176.** 15° або 75°. **1177.** 2) $3a^2(\sqrt{3}+2)$. **1178.** $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$. **1179.** Вказівка. Нехай r_1 і r_2 – радіуси кіл ($r_1 > r_2$), тоді площа кільця $\pi({r_1}^2 - {r_2}^2)$. Тому радіус шуканого кола r дорівнює $\sqrt{r_1^2 - r_2^2}$. **1180.** $r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$, де $r = R(2\sqrt{3} - 3)$. **1181.** 2π см. **1182.** Вказівка. Позначте катети трикутника через a і b. Доведіть, що шукана площа дорівнює $\frac{ab}{2}$. **1183.** $25\pi : 3$ або $25\pi : 27$. **1184.** $\frac{a^2(3\sqrt{3} - \pi)}{18}$. **1185.** Вказівка. Розглянути точку перетину прямої, симетричної даній відносно точки O і кола. **1186.** 5 см. **1187.** 1 : 2. **1188.** Вказівка. Нехай M – точка перетину медіан шуканого трикутника ABC, а точка M_1 – точка, симетрична точці M відносно середини сторони AB. Спочатку побудувати трикутник AMM_1. **1189.** 1) $x = 1$; $y = -2$; 2) (2; −5), (2; 1); (0; 1), (0; −5). **1190.** У 2,56 раза. **1191.** 1) $(x-1)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 4$; 2) $(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 4$. **1192.** Вказівка. Використати поворот навколо центра на 90°. **1193.** 1) $m = -2$; 2) $2x - 3y - 3 = 0$. **1207.** 1) 3; 2) $\frac{1}{2}$; 3) −2; 4) $-\frac{1}{4}$. **1208.** 1) 2; 2) $\frac{1}{5}$; 3) −3; 4) $-\frac{1}{2}$. **1209.** Відрізки можна перетворити один в інший. Центрів гомотетії може бути два: один з них – перетин прямих AC і BD, а другий – прямих AD і BC. **1210.** Вказівка. Прямі гомотетичні, існує безліч центрів гомотетії.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ У ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА»

№ завдання / № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	В	Б	Г	А	В	Б	А	Г	Б	Б	А	В
2	В	Б	Г	А	В	Г	Б	А	Г	Б	В	А
3	Б	А	Г	Б	В	Б	А	Г	В	Б	В	А
4	В	Б	Г	В	А	Б	Б	Г	В	В	Г	Б
5	В	Б	Г	А	Г	В	В	Б	Г	А	Б	В

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

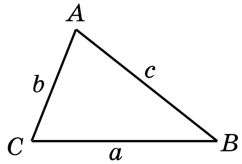
Головний редактор *Н. Заблоцька*
Редактор *О. Єргіна*
Обкладинка *Т. Кущ*
Художнє оформлення, ілюстрації *В. Марущинця, Ю. Лебедєва*
Технічний редактор *Ц. Федосіхіна*
Комп'ютерна верстка *Ю. Лебедєва*
Коректори *Л. Леуська, Л. Федоренко*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 15. Обл.-вид. арк. 13,74.
Тираж 133 615 пр. Вид. № 1876. Зам. №

Видавництво «Генеза», вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 5088 від 27.04.2016.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ», вул. Ольмінського, 17, м. Харків, 61024.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 4526 від 18.04.2013.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ



Теорема косинусів

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$ де R – радіус описаного кола

ЗНАЧЕННЯ СИНУСА, КОСИНУСА І ТАНГЕНСА ДЕЯКИХ КУТІВ

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, де $\alpha \neq 90°$

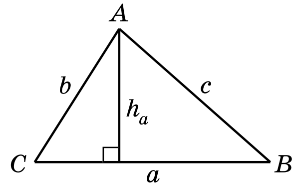
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

Площа трикутника



$$S = \frac{1}{2}ah_a$$
$$S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

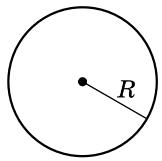
$S = \frac{abc}{4R}$, де R – радіус описаного кола

$S = pr$, де r – радіус вписаного кола

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – формула Герона,

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр

Довжина кола і площа круга

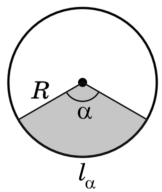


$$C = 2\pi R$$

$C = \pi d$, де d – діаметр

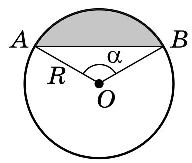
$$S = \pi R^2$$

Довжина дуги кола і площа сектора



$$l_\alpha = \frac{\pi R\alpha}{180}$$
$$S_\alpha = \frac{\pi R^2\alpha}{360}$$

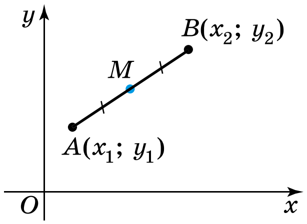
Площа сегмента



$$S = \frac{\pi R^2\alpha}{360} \pm S_{\triangle AOB}$$

ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

Координати середини відрізка $M(x_M;\ y_M)$

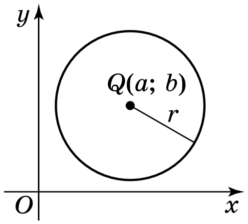


$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Відстань між точками $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



Рівняння кола

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$

де $Q(a;\ b)$ – центр кола,

r – радіус кола

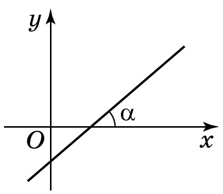
Рівняння прямої

Загальне рівняння прямої:

$$ax + by + c = 0$$

Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1;\ y_1)$ *і* $B(x_2;\ y_2)$:

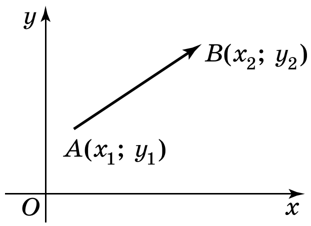
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$



Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + l, \text{ де } k = \operatorname{tg}\alpha$$

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ



Координати вектора

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$$

Модуль вектора $\vec{a}(x;\ y)$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Додавання, віднімання векторів $\vec{a}(x_1;\ y_1)$ і $\vec{b}(x_2;\ y_2)$, множення вектора $\vec{a}(x_1;\ y_1)$ на число λ

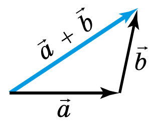
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b},\qquad \vec{c}(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2);$

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b},\qquad \vec{d}(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2);$

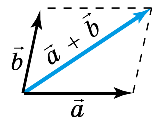
$\vec{m} = \lambda\vec{a},\qquad \vec{m}(\lambda x_1;\ \lambda y_1)$

Додавання векторів

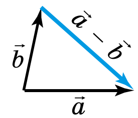
правило трикутника



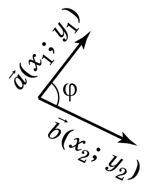
правило паралелограма



Віднімання векторів



Скалярний добуток векторів



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$