11

MATEMATICĂ

ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ.
GEOMETRIE

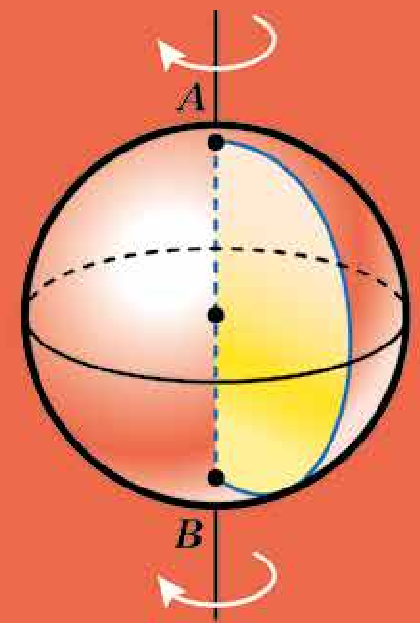
ISBN 978-966-914-216-0

11

MATEMATICĂ

ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ. GEOMETRIE

NIVELUL STANDARD



MATEMATICĂ

ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ. GEOMETRIE

NIVELUL STANDARD

Manual pentru clasa a 11-a
a instituţiilor de învăţământ mediu general
cu predarea în limba română/moldovenească

Recomandat
de Ministerul Învăţământului şi Ştiinţei al Ucrainei

Львів
Видавництво „Світ”
2019

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]
М52

Перекладено за виданням:
Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019

Авторський колектив:
Аркадій МЕРЗЛЯК,
Дмитро НОМІРОВСЬКИЙ,
Віталій ПОЛОНСЬКИЙ,
Михайло ЯКІР

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 12.04.2019 № 472)

Видано за державні кошти. Продаж заборонено

М52 **Математика (**алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту**)** : підруч. для 11 кл. з навч. рум. / молд. мовами закл. заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. ; пер. Ю. М. Гаврилюк. – Львів : Світ, 2019. – 208 с. : іл.
ISBN 978-966-914-216-0

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]

ISBN 978-966-914-216-0 (рум./молд.)
ISBN 978-966-474-323-2 (укр.)

DE LA AUTORI

Dragi elevi şi eleve din clasa a 11-a!

În acest an voi terminați şcoala, şi noi sperăm, că cunoştințele obținute vor deveni pentru voi un fundament sigur pentru obținerea viitoarei profesii. Avem speranța, că în aceasta vouă o să vă ajute manualul, pe care îl țineți în mâni. Faceți cunoştință, vă rugăm, cu structura lui.

Manualul este împărțit în şapte paragrafe, fiecare din ele este alcătuit din puncte. Studiind materialul teoretic atrageți o deosebită atenție la textul, care este tipărit cu **caracter gras**, cu ***cursiv gras*** şi *cursiv*; astfel în manual sunt evidențiate definițiile, regulile şi cele mai importante afirmații matematice. De regulă expunerea materialului teoretic se termină cu exemple de probleme rezolvate. Aceste scrieri se pot accepta ca una din variantele posibile de definitivare a rezolvării.

În această carte voi o să faceți cunoştință cu o serie de teoreme importante. Unele din ele sunt prezentate cu demonstrări. În acele cazuri, când demonstrarea este în afara limitelor cursului dat, în manual sunt prezentate doar formulările teoremelor.

Pentru fiecare punct sunt selectate probleme destinate rezolvării de sine stătător, la rezolvarea cărora vă sfătuim să treceți după însuşirea materialului teoretic. Printre însărcinări sunt atât exerciții de o complexitate simplă şi mijlocie, cât şi probleme complicate mai ales acelea, care sunt marcate cu „asterisc” (*****).

Cunoştințele sale se pot controla, rezolvând probleme în formă test din rubrica „Controlează-te”.

În afara materialului de studiu, în manual puteți găsi povestiri din istoria matematicii, în particular despre activitatea remarcabililor matematicieni ucraineni.

Vă dorim succes!

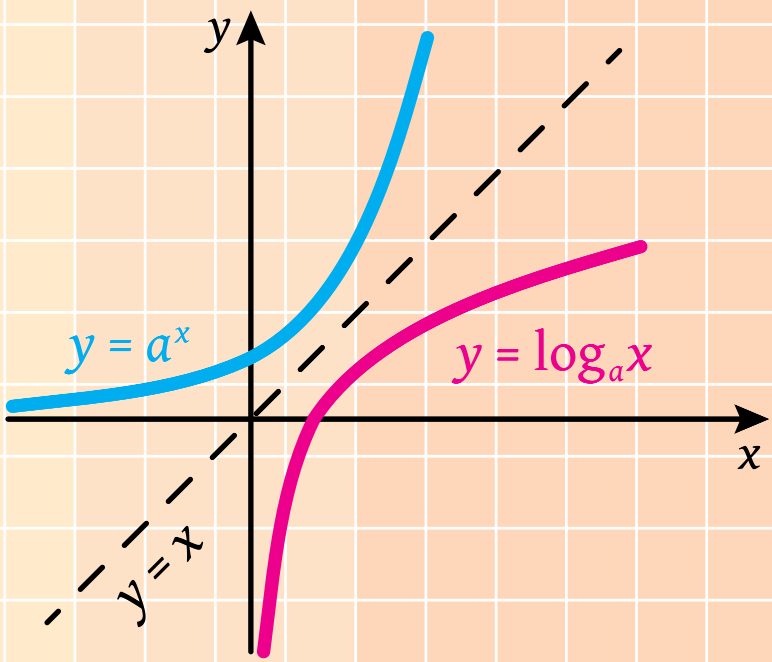
INSEMNĂRI CONVENŢIONALE

n°	însărcinări, ce corespund nivelurilor începător şi mijlociu de realizări în învățământ;
$n^{\bullet}$	însărcinări, ce corespund nivelului satisfăcător de realizări în învățământ;
$n^{\bullet\bullet}$	însărcinări, ce corespund nivelului înalt de realizări în învățământ;
n^{*}	probleme pentru cercurile şi facultativele de matematică;
◄	terminarea demonstrării teoremei, rezolvării problemei;
	probleme cheie, rezultatul cărora poate fi folosit în timpul rezolvării altor probleme;
	Rubrica „Atunci când lecțiile sunt îndeplinite”.

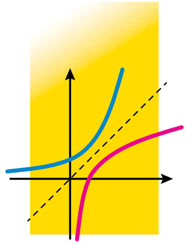
Cu culoare verde sunt însemnate numerele problemelor, ce sunt recomandate pentru teme de acasă, cu culoare albastră – numerele problemelor, ce sunt recomandate pentru rezolvare orală.

Capitolul 1.
Algebră şi elemente de analiză

§ 1. Funcţiile exponenţială şi logaritmică
§ 2. Integrala şi aplicarea ei
§ 3. Elemente de combinatorică, teoria probabilităţii şi statistică matematică



§ 1 FUNCŢIILE EXPONENŢIALĂ ŞI LOGARITMICĂ



În acest paragraf veţi afla despre noţiunea putere cu exponent real arbitrar. Veţi afla care funcţii se numesc exponenţială şi logaritmică, veţi studia proprietăţile acestor funcţii, veţi învăţa să rezolvaţi ecuaţii şi inecuaţii exponenţiale şi logaritmice.

1. Funcţia exponenţială şi proprietăţile ei

Analizăm funcția $f(x) = 2^x$, unde x – număr rațional, adică domeniul de definiție al funcției f este mulțimea $\mathbb{Q}$.

În figura 1.1 sunt notate punctele graficului funcției f, care corespund unor valori întregi ale lui x. Să calculăm valoarea funcției $f(x) = 2^x$ pentru unele valori fracționare ale lui x. De exemplu, pentru $x = \frac{1}{2}$ avem $2^x = 2^{\frac{1}{2}} = 1{,}41...$. Dacă la punctele care sunt reprezentate în figura 1.1 de adăugat punctele graficului funcției f, care corespund, de exemplu, valorilor $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$, atunci obținem mulțimea punctelor care este reprezentată în figura 1.2.

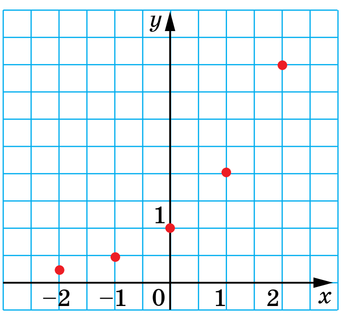


Fig. 1.1

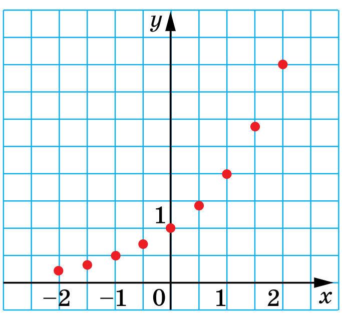


Fig. 1.2

O imagine mai precisă a graficului funcției f poate fi obținută prin marcarea punctelor, care corespund altor valori raționale ale argumentului (fig. 1.3).

Se dovedeşte, că există o singură funcție g continuă pe $\mathbb{R}$, al cărei grafic trece prin toate punctele graficului funcției f. Graficul funcției g

este reprezentat în figura 1.4. Mulțimea punctelor graficului funcției f este submulțimea mulțimii punctelor graficului funcției g.

Funcția g se numeşte **funcție exponențială** cu baza 2 şi se scrie: $g(x) = 2^x$.

Analogic se poate analiza o funcție exponențială cu orice bază a, unde $a > 0$ şi $a \neq 1$. Se scrie: $g(x) = a^x$.

Valoarea funcției g în punctul x se numeşte **puterea numărului pozitiv a cu exponent real** x şi se notează a^x.

Multe proprietăți ale puterii cu exponent rațional se păstrează şi pentru puterea cu exponent real.

În special, pentru $a > 0$, $b > 0$ şi pentru orice valori reale x şi y, sunt adevărate următoarele egalități:

1) $\boldsymbol{a^x a^y = a^{x+y}}$;

2) $\boldsymbol{a^x : a^y = a^{x-y}}$;

3) $\boldsymbol{(a^x)^y = a^{xy}}$;

4) $\boldsymbol{(ab)^x = a^x b^x}$;

5) $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}}$.

Problema 1. Simplificați expresia $\frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}}$.

Rezolvare: Avem:

$$\frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = \frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{\sqrt{7}}-1\right)a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} =$$

$$= \frac{\left(a^{2\sqrt{7}}-1\right)a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = \frac{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = 1. \blacktriangleleft$$

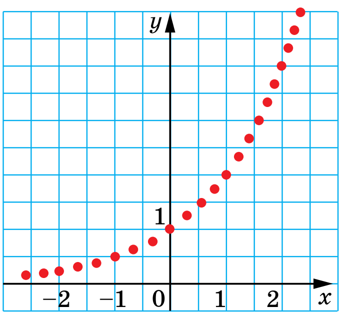


Fig. 1.3

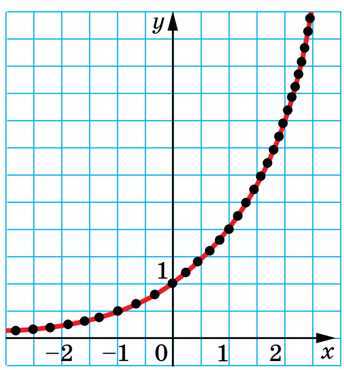


Fig. 1.4

Să considerăm proprietățile funcției exponențiale $f(x) = a^x$, unde $a > 0$ şi $a \neq 1$.

- *Domeniul de definiție al funcției exponențiale este mulțimea numerelor reale, adică* $D(f) = \mathbb{R}$.
- *Domeniul de valori al funcției exponențiale este mulțimea* $(0; +\infty)$*, adică* $E(f) = (0; +\infty)$.
- *Funcția exponențială nu are zerouri, iar intervalul* $(-\infty; +\infty)$ *este intervalul* constanței semnului ei.
- *Pentru* $a > 1$*, funcția exponențială este crescătoare; pentru* $0 < a < 1$*, funcția exponențială este descrescătoare.*
- *Funcția exponențială este diferențiabilă.* Mai detailat despre derivata funcției exponențiale veți afla în punctul 8.

În figurile 1.5 şi 1.6 este reprezentat schematic graficul funcției exponențiale pentru cazurile $a > 1$ şi $0 < a < 1$, respectiv.

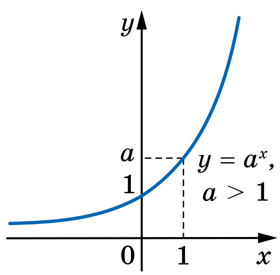


Fig. 1.5

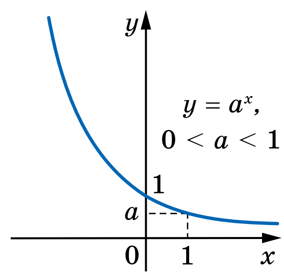


Fig. 1.6

Menționăm o proprietate importantă a graficului funcției exponențiale $y = a^x$ cu mărirea modulului x. Dacă $a > 1$ şi $x < 0$, atunci distanțele de la punctele graficului funcției $y = a^x$ până la axa absciselor devin tot mai mici şi mai mici şi pot deveni oricât de mici, dar niciodată nu vot fi egale cu zero. O proprietate analogică are graficul funcției $y = a^x$ pentru $0 < a < 1$ şi $x > 0$.

Problema 2. Găsiți valorile cea mai mică şi cea mai mare a funcției $f(x) = 3^x$ pe intervalul $[-4; 3]$.

Rezolvare: Deoarece funcția f creşte pe intervalul $[-4; 3]$ (fig. 1.5), atunci ea obține cea mai mică valoare pentru $x = -4$, iar cea mai mare pentru $x = 3$. Deci,

$$\min_{[-4;3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81}, \qquad \max_{[-4;3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Răspuns: $\frac{1}{81}$, 27. ◄

1. Ce proprietăţi are puterea cu exponent real?
2. Formulaţi proprietăţile funcţiei exponenţiale.
3. Reprezentaţi schematic graficul funcţiei $y = a^x$ pentru $a > 1$; pentru $0 < a < 1$.

EXERCIŢII

1.1.° Care din funcțiile date este exponențială:

1) $y = x^6$; 2) $y = \sqrt[6]{x}$; 3) $y = 6^x$; 4) $y = 6$?

1.2.° Pe baza cărei proprietăți a funcției exponențiale se poate afirma, că:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?

1.3.° Specificați, care dintre funcțiile date sunt crescătoare, şi care sunt descrescătoare:

1) $y = 10^x$; 3) $y = 2^{-x}$; 5) $y = 2^x \cdot 3^x$;

2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; 6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x$.

1.4.° Construiți graficul funcției $y = 3^x$. În ce limite se schimbă valoarea funcției, când x creşte de la –1 până la 3 inclusiv?

1.5.° Construiți graficul funcției $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. În ce limite se schimbă valoarea funcției, dacă x creşte de la –2 până la 2 inclusiv?

1.6.° Comparați:

1) $5^{3,4}$ şi $5^{3,26}$; 3) 1 şi $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; 5) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}$ şi $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$;

2) $0,3^{0,4}$ şi $0,3^{0,3}$; 4) $0,17^{-3}$ şi 1; 6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7}$ şi $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$.

1.7.° Comparați cu numărul 1 valoarea expresiei:

1) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $\left(\frac{6}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 4) $\left(\frac{7}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 5) $0,62^{-0,4}$; 6) $3,14^{-0,4}$.

1.8.° Comparați cu numărul 1 numărul pozitiv a, dacă:

1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$; 2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$; 3) $a^{-0,3} > a^{1,4}$; 4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}$.

1.9.° Comparați numerele m şi n, dacă:

1) $0{,}8^m < 0{,}8^n$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$;

2) $3{,}2^m > 3{,}2^n$; 4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

1.10.• Calculați valoarea expresiei:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$; 2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \varnothing 36^{-\sqrt{5}}}$; 4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

1.11.• Găsiți valoarea expresiei:

1) $5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$; 2) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$; 3) $\left(\left(\sqrt[5]{10}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$.

1.12.• Simplificați expresia:

1) $\left(a^{\sqrt{5}}+2\right)\left(a^{\sqrt{5}}-2\right)-\left(a^{\sqrt{5}}+3\right)^2$; 2) $\dfrac{a^{2\sqrt{3}}-b^{2\sqrt{2}}}{\left(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}\right)^2}+1$.

1.13.• Simplificați expresia:

1) $\left(\left(a^{\pi}+b^{\pi}\right)^2-\left(a^{\pi}-b^{\pi}\right)^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$; 2) $\dfrac{a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{3\sqrt{7}}}$.

1.14.• Este corectă oare afirmația:

1) cea mai mare valoare a funcției $y = 0{,}2^x$ pe intervalul [–1; 2] este egală cu 5;
2) domeniul de definiție al funcției $y = 4 - 7^x$ este mulțimea numerelor reale;
3) domeniul de valori al funcției $y = 6^x + 5$ este intervalul $[5; +\infty)$;
4) cea mai mică valoarea a funcției $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ pe intervalul [–2; 2] este egală cu 16?

1.15.• Găsiți cea mai mare valoare a funcției $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ pe intervalul [–2; 3].

1.16.• Pe ce interval cea mai mare valoare a funcției $y = 2^x$ este egală cu 16, iar cea mai mică este egală cu $\frac{1}{4}$?

1.17.• Pe ce interval cea mai mare valoare a funcției $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ este egală cu 27, iar cea mai mică este egală cu $\frac{1}{9}$?

1.18.• Găsiți domeniul de valori al funcției:

1) $y = -9^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 1$; 3) $y = 7^x - 4$; 4) $y = 6^{|x|}$.

1.19.• Rezolvați inecuația:

1) $2^x > -1$; 2) $2^{\sqrt{x}} > -2$.

1.20.• Rezolvați inecuația $2^{\frac{1}{x}} > 0$.

1.21.•• Graficul cărei din funcțiile, prezentate în figura 1.7, intersectează graficul funcției $y = 5^x$ mai mult decât într-un punct?

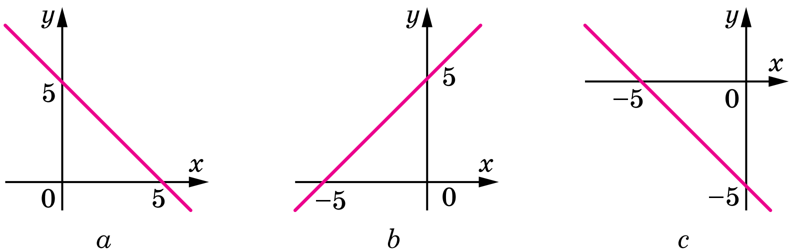


Fig. 1.7

1.22.•• Determinați cu ajutorul graficului numărul de rădăcini a ecuației:

1) $2^x = x$; 2) $2^x = \sin x$; 3) $2^{-x} = 2 - x^2$.

1.23.•• Determinați prin modul grafic numărul de rădăcini a ecuației:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$.

1.24.•• Construiți graficul funcției $y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

1.25.* Găsiți cea mai mare şi cea mai mică valori ale funcției:

1) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$; 2) $y = 3^{|\sin x|} - 2$.

1.26.* Găsiți cea mai mare şi cea mai mică valori ale funcției:

1) $y = 6^{\cos x}$; 2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{|\cos x|} + 5$.

NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

1.27. Prezentați numerele 1; 4; 8; 16; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{32}$ sub formă de putere a lui: 1) 2; $\frac{1}{2}$.

1.28. Prezentați numerele 1; 9; 81; $\frac{1}{27}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt[5]{243}$ sub formă de putere a lui: **1)** 3; **2)** $\frac{1}{3}$.

1.29. Simplificați expresia:

1) $7^{x+1}+7^{x}$;
2) $2^{x+1}+2^{x-4}$;
3) $3^{x+1}+3^{x}+3^{x-1}$;
4) $2^{x+3}+3\cdot 2^{x+2}-5\cdot 2^{x+1}$;
5) $\left(\frac{1}{6}\right)^{1-x}+36^{\frac{x}{2}}-6^{x+1}$;
6) $9^{x+1}+3^{2x+1}$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

1.30. Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x)=\frac{x+2}{x^{2}-2x-8}$;
2) $f(x)=\sqrt{16x-x^{2}}$.

1.31. Găsiți domeniul de valori al funcției:

1) $f(x)=12-4x-x^{2}$;
2) $f(x)=3+\sqrt[4]{x-1}$;
3) $f(x)=\cos x \operatorname{tg} x$.

ESTE OPARE NEVOIE DE A STUDIA FUNCŢIA EXPONENŢIALĂ?

Funcția exponențială este modelul matematic al multor procese, care se petrec în natură sau sunt legate de activitatea umană.

De exemplu, biologii ştiu că masa bacteriilor din colonii, în anumite condiții, în intervale egale de timp se măreşte de unul şi acelaşi număr de ori.

Aceasta înseamnă că atunci când, de exemplu, în momentul de timp $t=0$ masa a fost egală cu 1, iar în momentul de timp $t=1$ masa a fost egală cu a, apoi în momentele de timp $t=2$, $t=3$, ..., $t=n$, ... masa va fi egală cu a^{2}, a^{3}, ..., a^{n}, ... Prin urmare, este normal să presupunem că în orice moment t masa va fi egală cu a^{t}. Se poate verifica (faceți independent) că valoarea funcției $f(t)=a^{t}$ se măreşte de acelaşi număr de ori în intervale egale de timp.

Astfel, procesul analizat este descris cu ajutorul funcției exponențiale $f(t)=a^{t}$.

Din cursul de fizică se ştie că în timpul dezintegrării radioactive masa substanței radioactive în intervale egale de timp se micşorează de unul şi acelaşi număr de ori.

Dacă depozitaţi bani în bancă sub un anumit procent, atunci în fiecare an suma de bani pe cont se va mări de unul şi acelaşi număr de ori.

De aceea funcţia exponenţială descrie şi aceste procese.

2. Ecuaţii exponenţiale

Să examinăm ecuaţiile $2^x = 8$,

$$3^x \cdot 3^{x-1} = 4,$$

$$0{,}3^{x-4} = 0{,}3^{x^2}.$$

În aceste ecuaţii, variabila se conţine numai în exponentul puterii. Ecuaţiile date sunt exemple de **ecuaţii exponenţiale**.

Teorema 2.1. ***Pentru $a > 0$ şi $a \neq 1$ egalitatea $a^{x_1} = a^{x_2}$ se îndeplineşte atunci şi numai atunci, când $x_1 = x_2$.***

Demonstraţie. Evident, că dacă $x_1 = x_2$, atunci $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Să demonstrăm, că din egalitatea $a^{x_1} = a^{x_2}$ rezultă egalitatea $x_1 = x_2$.

Admitem, că $x_1 \neq x_2$ adică $x_1 < x_2$ sau $x_1 > x_2$. Fie, de exemplu, $x_1 < x_2$.

Să considerăm funcţia exponenţială $y = a^x$. Ea este sau crescătoare sau descrescătoare. Atunci din inegalitatea $x_1 < x_2$ rezultă, că $a^{x_1} < a^{x_2}$ (pentru $a > 1$) sau $a^{x_1} > a^{x_2}$ (pentru $0 < a < 1$). Totodată după condiţie se efectuează egalitatea $a^{x_1} = a^{x_2}$. Am obţinut contradicţie.

Analogic, considerând cazul, când $x_1 > x_2$, se poate obţine contradicţie. Deci, $x_1 = x_2$. ◄

Consecinţă. ***Dacă $a > 0$ şi $a \neq 1$, atunci ecuaţia***

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

este echivalentă cu ecuaţia

$$f(x) = g(x).$$

Să cercetăm exemple de rezolvare a ecuaţiilor exponenţiale.

Problema 1. Rezolvaţi ecuaţia $2^x = 8$.

Rezolvare: Prezentăm fiecare parte a ecuaţiei în formă de putere cu baza 2. Avem:

$$2^x = 2^3.$$

De aici $x = 3$.

Răspuns: 3. ◄

Problema 2. Rezolvaţi ecuaţia $3^{2x+1} + 9^x = 36$.

Rezolvare: Avem: $3^{2x+1} + (3^2)^x = 36$; $3^{2x+1} + 3^{2x} = 36$.

Scoatem factorul 3^{2x} în fața parantezelor: $3^{2x}(3^1+1)=36.$

Atunci primim: $3^{2x}\cdot 4=36$; $3^{2x}=9$; $3^{2x}=3^2$; $2x=2$; $x=1$.

Răspuns: 1. ◀

Problema 3. Rezolvați ecuația $25^x+4\cdot 5^x-5=0$.

Rezolvare: Deoarece $25^x=(5^2)^x=5^{2x}=(5^x)^2$, atunci ecuația dată este comod să se rezolve prin metoda de înlocuire a variabilei.

Fie $5^x=t$. Atunci, ecuația dată poate fi scrisă astfel:

$$t^2+4t-5=0.$$

De aici $t=1$ sau $t=-5$.

Dacă $t=1$, atunci $5^x=1$. De aici $5^x=5^0$; $x=0$.

Dacă $t=-5$, atunci $5^x=-5$. Deoarece $5^x>0$ pentru orice x, rezultă că ecuația $5^x=-5$ nu are rădăcini.

Răspuns: 0. ◀

Problema 4. Rezolvați ecuația $9\cdot 5^x=25\cdot 3^x$.

Rezolvare: Avem: $3^2\cdot 5^x=5^2\cdot 3^x$. De aici $\dfrac{5^x}{3^x}=\dfrac{5^2}{3^2}$; $\left(\dfrac{5}{3}\right)^x=\left(\dfrac{5}{3}\right)^2$; $x=2$.

Răspuns: 2. ◀

1. Ce se poate spune despre numerele x_1 şi x_2, dacă se îndeplineşte egalitatea $a^{x_1}=a^{x_2}$, unde $a>0$ şi $a\neq 1$?
2. Care ecuaţie este echivalentă cu ecuaţia $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, dacă $a>0$ şi $a\neq 1$?

EXERCIŢII

2.1.° Rezolvați ecuațiile:

1) $4^x=64$;
2) $3^x=\dfrac{1}{81}$;
3) $0{,}6^{2x-3}=1$;
4) $10^{-x}=0{,}001$;
5) $2^{5-x}=2^{3x-7}$;
6) $8^x=16$;
7) $\sqrt{5^x}=25$;
8) $0{,}25^{x^2-4}=2^{x^2+1}$;
9) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{x-1}\cdot\left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1}=\dfrac{2}{3}$;
10) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{3x-7}=\left(\dfrac{7}{4}\right)^{7x-3}$;
11) $36^x=\left(\dfrac{1}{216}\right)^{2-x}$;
12) $5^{x^2-2x}=6^{x^2-2x}$.

2.2.° Rezolvați ecuațiile:

1) $0{,}4^{x^2-x-6}=1$;
2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{5}{3}$;
3) $0{,}7^x=2\frac{2}{49}$;
4) $9^{-x}=27$;
5) $\sqrt{2^x}=8^{-\frac{2}{3}}$;
6) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3}=4{,}5^{x-2}$;
7) $\left(\frac{2}{5}\right)^x\cdot\left(\frac{25}{8}\right)^x=\frac{125}{64}$;
8) $32^{\frac{3}{5}x-2}=4^{6-\frac{3}{2}x}$;
9) $3^{x^2-9}=7^{x^2-9}$.

2.3.° Rezolvați ecuațiile:

1) $3^{x+2}+3^x=30$;
2) $4^{x+1}+4^{x-2}=260$;
3) $2^{x+4}-2^x=120$;
4) $7^{x+1}+4\cdot7^x=77$;
5) $5^x+7\cdot5^{x-2}=160$;
6) $6^{x+1}-4\cdot6^{x-1}=192$.

2.4.° Rezolvați ecuațiile:

1) $5^{x+1}+5^x=150$;
2) $2^x+2^{x-3}=18$;
3) $7^{x+2}+4\cdot7^{x-1}=347$;
4) $4^x-3\cdot4^{x-2}=52$.

2.5.° Rezolvați ecuațiile:

1) $2^{2x}-6\cdot2^x+8=0$;
2) $9^x-6\cdot3^x-27=0$;
3) $25^x-5^x-20=0$;
4) $100\cdot0{,}3^{2x}+91\cdot0{,}3^x-9=0$.

2.6.° Rezolvați ecuațiile:

1) $6^{2x}-3\cdot6^x-18=0$;
2) $2\cdot4^x-9\cdot2^x+4=0$.

2.7.• Rezolvați ecuațiile:

1) $2^x\cdot5^x=0{,}1\cdot(10^{x-1})^5$;
2) $3^{x-1}=6^x\cdot2^{-x}\cdot3^{x+1}$;
3) $\frac{1}{9}\cdot\sqrt{3^{3x-1}}=81^{-\frac{3}{4}}$;
4) $4\cdot2^{\cos x}=\sqrt{8}$.

2.8.• Rezolvați ecuațiile:

1) $100^x=0{,}01\sqrt{10}$;
2) $2^{x-1}\cdot3^{x-1}=\frac{1}{36}\cdot6^{2x+5}$;
3) $9\cdot3^{\sin x}=\sqrt{27}$;
4) $\sqrt[5]{7^{x+1}}=\frac{49}{\sqrt{7}}$.

2.9.• Rezolvați ecuațiile:

1) $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=56$;
2) $6\cdot5^x-5^{x+1}-3\cdot5^{x-1}=10$;
3) $2\cdot7^x+7^{x+2}-3\cdot7^{x-1}=354$;
4) $4^{x-2}-3\cdot2^{2x-1}+5\cdot2^{2x}=228$.

2.10.• Rezolvați ecuațiile:

1) $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=31$;
2) $3^{x+1}-2\cdot3^{x-1}-4\cdot3^{x-2}=17$;
3) $2^{x+2}-2^{x+1}+2^{x-1}-2^{x-2}=9$;
4) $2\cdot3^{2x+1}+3^{2x-1}-5\cdot3^{2x}=36$.

2.11.• Rezolvați ecuațiile:

1) $2^{2x+1}-5\cdot2^x+2=0$;
2) $5^{2x-3}-2\cdot5^{x-2}=3$;
3) $9^x-6\cdot3^{x-1}=3$;
4) $\frac{9}{2^x-1}-\frac{21}{2^x+1}=2$.

2.12.• Rezolvați ecuațiile:

1) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0;$

2) $4^{x+0,5} + 7 \cdot 2^x = 4;$

3) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2;$

4) $\frac{5}{3^x - 6} + \frac{5}{3^x + 6} = 2.$

2.13.•• Rezolvați ecuațiile:

1) $4 \cdot 9^{1,5x-1} - 27^{x-1} = 33;$

2) $0,5^{5-2x} + 3 \cdot 0,25^{3-x} = 5;$

3) $4 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{x-1} - 6 \cdot 3^{x-2} = 15 \cdot 9^{x^2-1};$

4) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}.$

2.14.•• Rezolvați ecuațiile:

1) $6^{x-2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-1}{2}} = 246;$

2) $5 \cdot 2^{x-1} - 6 \cdot 2^{x-2} - 7 \cdot 2^{x-3} = 8^{x^2-1}.$

3) $6^x + 6^{x-1} - 6^{x-2} = 7^x - 8 \cdot 7^{x-2}.$

2.15.•• Rezolvați ecuațiile:

1) $4^{x+1} + 4^{1-x} = 10;$

2) $5^x - 0,2^{x-1} = 4.$

2.16.•• Rezolvați ecuațiile $3^{x+1} + 3^{2-x} = 28.$

2.17.•• Rezolvați ecuațiile $\sqrt{4^x - 2^x - 3} = \sqrt{4 \cdot 2^x - 7}.$

2.18.•• Rezolvați ecuațiile $\sqrt{1 + 3^x - 9^x} = \sqrt{4 - 3 \cdot 3^x}.$

2.19.* Rezolvați ecuațiile:

1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0;$

2) $2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 25^{x+0,5} = 0;$

3) $7 \cdot 49^x + 3 \cdot 28^x = 4 \cdot 16^x;$

4) $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x.$

2.20.* Rezolvați ecuațiile:

1) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0;$

2) $5 \cdot 2^x + 2 \cdot 5^x = 7 \cdot 10^{\frac{x}{2}}.$

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

2.21. Rezolvați inecuația $f'(x) \leqslant 0,$ dacă $f(x) = \frac{x^2 + 21}{x - 2}.$

2.22. Care este cea mai mică valoare pe care o poate obține expresia

$$\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha?$$

3. Inecuaţii exponenţiale

Inecuațiile $0{,}2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^2} > 2^x$ sunt exemple de **inecuații exponențiale**.

La baza rezolvării numeroaselor inecuații exponențiale este următoarea teoremă.

Teorema 3.1. ***Dacă $a > 1$, atunci inecuația $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ este echivalentă inecuației $f(x) > g(x)$; dacă $0 < a < 1$, atunci inecuația $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ este echivalentă cu inecuația $f(x) < g(x)$.***

Să analizăm exemple de rezolvare a inecuațiilor exponențiale.

Problema 1. Rezolvați inecuația $8 \cdot 2^{3x-1} < 0{,}5^{-1}$.

Rezolvare: Avem: $2^3 \cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1}$; $2^{3x+2} < 2^1$.

Deoarece baza puterilor 2^{3x+2} şi 2^1 este mai mare decât unu, atunci ultima inecuație este echivalentă cu următoarea inecuație:

$$3x + 2 < 1.$$

De aici $3x < -1$; $x < -\frac{1}{3}$.

Răspuns: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. ◄

Problema 2. Rezolvați inecuația $2^{2x} \cdot \left(\frac{3}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{9}{25}\right)^x$.

Rezolvare: Avem: $4^x \cdot \left(\frac{3}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{9}{25}\right)^x$;

$$\left(4 \cdot \frac{3}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{9}{25}\right)^x; \ \left(\frac{3}{5}\right)^x \geqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{2x}.$$

Deoarece $0 < \frac{3}{5} < 1$, atunci ultima inecuație este echivalentă cu următoarea inecuație: $x \leqslant 2x$; $x \geqslant 0$.

Răspuns: $[0; +\infty)$. ◄

Problema 3. Rezolvați inecuația $2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x - 4 < 0$.

Rezolvare: Avem: $2 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 4 < 0$.

Fie $2^x = t$. Atunci $2t^2 - 7t - 4 < 0$.

Rezolvând această inecuație, obținem: $-\frac{1}{2} < t < 4$.

De aici $-\frac{1}{2} < 2^x < 4$.

Deoarece $2^x > 0$, atunci $2^x > -\frac{1}{2}$ pentru toți x. De aceea este suficient de rezolvat inecuația $2^x < 4$.

Avem: $2^x < 2^2$; $x < 2$.

Răspuns: **$(-\infty; 2)$.** ◄

1. Daţi exemple de inecuaţii exponenţiale.
2. Cu care inecuaţie este echivalentă inecuaţia $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, dacă $a > 1$? dacă $0 < a < 1$?

EXERCIŢII

3.1.° Sunt oare echivalente inecuațiile:

1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ şi $2x + 4 > x - 1$;
2) $0{,}9^{x^2-4} < 0{,}9^{x+2}$ şi $x^2 - 4 < x + 2$;
3) $a^x > a^5$, unde $a > 1$, şi $x > 5$;
4) $a^x < a^{-3}$, unde $0 < a < 1$, şi $x < -3$?

3.2.° Rezolvați inecuația:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$;
2) $5^x < \frac{1}{5}$;
3) $11^{x-5} < 11^{3x+1}$;
4) $0{,}4^{6x+1} \geqslant 0{,}4^{2x+5}$;
5) $0{,}3^{4x-8} > 1$;
6) $9^{1-3x} \leqslant 0$.

3.3.° Rezolvați inecuația:

1) $6^{7x-1} > 6$; 2) $10^x < 0{,}001$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^4$; 4) $0{,}2^{2x-9} < 1$.

3.4.• Rezolvați inecuația:

1) $2^{x^2-1} < 8$;
2) $27^{2x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$;
3) $0{,}1^{3x-1} < 1000$;
4) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} < 216^{x+1}$;
5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$;
6) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$;
7) $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x-0,5} > \sqrt{2}$;
8) $4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)} \geqslant 0{,}25^{2x}$.

3.5.• Rezolvați inecuația:

1) $3^{2x^2-6} > \frac{1}{81}$;
2) $49^{x+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^{x}$;
3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x} < \frac{9}{49}$;
4) $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$;
5) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > 9^{-0,5}$.

3.6.• Câte soluții întregi are inecuația:

1) $0,2 \leqslant 5^{x+4} \leqslant 125$; 2) $\frac{1}{36} \leqslant 6^{3-x} < 6$; 3) $2 < 0,5^{x-1} \leqslant 32$?

3.7.• Găsiți suma soluțiilor întregi a inegalității:

1) $\frac{1}{3} < 3^{x+3} < 9$;
2) $\frac{1}{8} < 2^{2-x} \leqslant 16$.

3.8.• Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}$;
2) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3^{x+2}-27}}$.

3.9.• Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-16}$;
2) $f(x) = \sqrt{1-6^{x-4}}$.

3.10.• Rezolvați inecuația:

1) $7^{x+2} - 14\cdot 7^{x} > 5$;
2) $9\cdot 3^{x-1} + 3^{x} < 36$;
3) $2^{x} + 2^{x-1} + 2^{x-2} > 56$;
4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \geqslant 26$;
5) $2\cdot 6^{x} + 3\cdot 6^{x+3} \leqslant 650$;
6) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x} - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} > \frac{3}{16}$.

3.11.• Rezolvați inecuația:

1) $3^{x+2} - 4\cdot 3^{x} < 45$;
2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \leqslant 3$;
3) $5^{x} + 5^{x-1} - 5^{x-2} > 145$;
4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < 1\frac{2}{3}$.

3.12.•• Rezolvați inecuația:

1) $3^{2x} - 4\cdot 3^{x} - 45 > 0$;
2) $4^{x} + 2^{x+3} - 20 < 0$;
3) $49^{x} - 8\cdot 7^{x} + 7 \leqslant 0$;
4) $0,25^{x} - 12\cdot 0,5^{x} + 32 \geqslant 0$;
5) $6^{2x-1} - \frac{1}{3}\cdot 6^{x} - 4 \leqslant 0$;
6) $25^{x} + 5^{x} - 30 \geqslant 0$.

3.13.•• Rezolvați inecuația:

1) $9^{x+1}-2\cdot 3^{x}-7\leqslant 0$;
2) $2^{x}+2^{\frac{x}{2}}-72\geqslant 0$;
3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2>0$;
4) $25^{x}-26\cdot 5^{x}+25\leqslant 0$.

3.14.•• Rezolvați inecuația:

1) $\dfrac{5^{x}-125}{x^{2}-4x+4}\leqslant 0$;
2) $\dfrac{16-4^{x}}{9x^{2}+12x+4}\geqslant 0$.

3.15.•• Găsiți mulțimea soluțiilor a inecuației:

1) $3^{x}-9\cdot 3^{-x}-8>0$;
2) $2^{x+3}+2^{1-x}<17$;
3) $6^{x+2}+6^{-x}-37\geqslant 0$;
4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}\leqslant\frac{6}{5}$.

3.16.•• Găsiți mulțimea soluțiilor a inecuației:

1) $3^{x+1}-2\cdot 3^{1-x}>7$;
2) $4^{1-x}-0{,}5^{1-2x}\geqslant 1$.

3.17.* Rezolvați inecuația $2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}\leqslant 1$.

3.18.* Rezolvați inecuația $3^{\sqrt{x}}-3^{2-\sqrt{x}}\leqslant 8$.

3.19.* Rezolvați inecuația:

1) $3\cdot 4^{x}+2\cdot 9^{x}-5\cdot 6^{x}<0$;
2) $5\cdot 25^{\frac{1}{x}}+3\cdot 10^{\frac{1}{x}}\geqslant 2\cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

3.20.* Rezolvați inecuația:

1) $3\cdot 16^{x}+2\cdot 81^{x}-5\cdot 36^{x}<0$;
2) $2\cdot 49^{\frac{1}{x}}-9\cdot 14^{\frac{1}{x}}+7\cdot 4^{\frac{1}{x}}\geqslant 0$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

3.21. Cu ce este egală valoarea expresiei $\dfrac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}$, dacă $\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$?

3.22. Aflați valoarea expresiei $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$, dacă $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

4. Logaritmul şi proprietăţile lui

Este uşor de rezolvat ecuațiile $2^{x}=4$ şi $2^{x}=8$. Rădăcinile lor vor fi numerele 2 şi 3 corespunzător.

Însă, pentru ecuația $2^{x}=5$ de indicat repede rădăcina ei este greu.

Apare o întrebare firească: există oare în general rădăcini ale acestei ecuații?

Să ne adresăm la interpretarea grafică. În figura 4.1sunt date graficele funcțiilor $y = 2^x$ şi $y = 5$. Ele se intersectează într-un punct oarecare $A(x_0; 5)$. Deci, ecuația $2^x = 5$ are o singură rădăcină x_0.

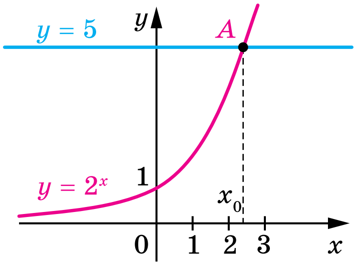


Fig. 4.1

Rădăcina ecuației $2^x = 5$ s-a convenit să se numească **logaritmul numărului 5 în baza 2** şi se notează $\log_2 5$. Astfel numărul $\log_2 5$ – este exponentul puterii la care trebuie ridicat numărul 2, pentru a obține numărul 5. Se poate de scris:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

Definiție. Logaritmul unui număr pozitiv *b* în baza *a*, unde *a* > 0 şi *a* ≠ 1, se numeşte exponentul puterii la care trebuie ridicat numărul *a* pentru a obține numărul *b*.

Logaritmul numărului b în baza a şi se notează $\log_a b$.

De exemplu, $\log_3 9$ – este exponentul puterii, la care trebuie de ridicat numărul 3, pentru a obține numărul 9. Avem: $\log_3 9 = 2$, deoarece $3^2 = 9$.

Încă câteva exemple:

$$\log_{17} 17 = 1, \text{ deoarece } 17^1 = 17;$$
$$\log_{100} 1 = 0, \text{ deoarece } 100^0 = 1;$$
$$\log_2 \frac{1}{8} = -3, \text{ deoarece } 2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

Din definiția logaritmului rezultă, că pentru $a > 0$, $a \neq 1$ şi $b > 0$ se îndeplineşte egalitatea

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Ea se numeşte**, identitatea logaritmică fundamentală**.

De exemplu, $7^{\log_7 3} = 3$, $0{,}3^{\log_{0,3} 5} = 5$.

De asemenea din definiția logaritmului rezultă, că pentru $a > 0$ şi $a \neq 1$

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Logaritmul cu baza 10 se numeşte **logaritmul zecimal.** În loc de $\log_{10} b$ se scrie: lg b.

Folosind această notare şi identitatea logaritmică fundamentală, pentru fiecare $b > 0$ se poate de scris: $\mathbf{10^{\lg b} = b}$.

Să cercetăm proprietățile fundamentale ale logaritmului.

Teorema 4.1 (logaritmul produsului). ***Dacă** $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ **şi** $a \neq 1$, **atunci este adevărată egalitatea***

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Pe scurt se formulează: *logaritmul produsului este egal cu suma logaritmilor.*

Demonstrație. Considerăm două expresii: $a^{\log_a xy}$ şi $a^{\log_a x + \log_a y}$. Să demonstrăm că ele sunt egale.

Folosind identitatea logaritmică fundamentală şi proprietățile puterii, scriem:

$$a^{\log_a xy} = xy;$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Deci, $a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$. De aici după teorema 2.1 obținem, că $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. ◄

Teorema 4.2 (logaritmul câtului). ***Dacă** $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ **şi** $a \neq 1$, **atunci se îndeplineşte egalitatea***

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Pe scurt se formulează: *logaritmul câtului este egal cu diferența logaritmilor.*

Teorema 4.3 (logaritmul puterii). ***Dacă** $x > 0$, $a > 0$ **şi** $a \neq 1$, **atunci pentru orice** $\beta \in \mathbb{R}$ **se realizează egalitatea***

$$\boxed{\log_a x^\beta = \beta \log_a x}$$

Teorema 4.4 (trecerea de la o bază a logaritmului la alta). ***Dacă** $a > 0$ **şi** $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, **atunci este adevărată egalitatea***

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Consecinţă 1. ***Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ este adevărată egalitatea***

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Consecinţă 2. ***Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, atunci pentru orice $\beta \neq 0$ este adevărată egalitatea***

$$\boxed{\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b}$$

Problema 1. Rezolvaţi ecuaţia: 1) $3^x = 7$; 2) $4^{2x-5} = 9$.

Rezolvare: 1) Din definiţia logaritmului rezultă, că $x = \log_3 7$.

2) Avem: $2x - 5 = \log_4 9$; $2x = \log_4 9 + 5$; $x = \dfrac{\log_4 9 + 5}{2}$.

Răspuns: 1) $\log_3 7$; 2) $\dfrac{\log_4 9 + 5}{2}$. ◄

Problema 2. Calculaţi valoarea expresiei: 1) $10^{2+2\lg 7}$; 2) $9^{\log_3 4 - 0{,}5}$.

Rezolvare: 1) Folosind proprietăţile puterii şi identitatea fundamentală a logaritmului, obţinem:

$$10^{2+2\lg 7} = 10^2 \cdot 10^{2\lg 7} = 100 \cdot (10^{\lg 7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$$

2) Avem: $9^{\log_3 4 - 0{,}5} = (3^2)^{\log_3 4 - 0{,}5} = (3^2)^{\log_3 4} : (3^2)^{0{,}5} =$

$$= (3^{\log_3 4})^2 : 3 = 4^2 : 3 = \frac{16}{3}. \ ◄$$

Problema 3. Calculaţi valoarea expresiei $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$.

Rezolvare: Folosind teoremele despre produsul logaritmului şi logaritmul câtului, obţinem:

$$\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2 (20 \cdot 12) - \log_2 15 =$$

$$= \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4. \ ◄$$

1. Ce se numeşte logaritmul numărului pozitiv b în baza a, unde $a > 0$, $a \neq 1$?
2. Ce egalitate se numeşte identitatea logaritmică fundamentală?
3. Formulaţi teorema despre logaritmul produsului.
4. Formulaţi teorema despre logaritmul câtului.
5. Formulaţi teorema despre logaritmul puterii.
6. Formulaţi teorema despre trecerea de la o bază a logaritmului la altă bază şi consecinţele din ea.

EXERCIŢII

4.1.° Este oare egalitatea corectă:

1) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$; 3) $\log_5 125 = \frac{1}{3}$; 5) $\log_{0,01} 10 = 2$;

2) $\log_{25} 5 = 2$; 4) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; 6) $\lg 0,0001 = -4$?

4.2.° Găsiți logaritmul în baza 2 a numărului:

1) 1; 2) 2; 3) 32; 4) $\sqrt{2}$; 5) 0,5; 6) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $2\sqrt{2}$.

4.3.° Găsiți logaritmul în baza 3 a numărului:

1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 81; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{243}$; 7) $\sqrt{3}$; 8) $3\sqrt{3}$.

4.4.° Găsiți logaritmul în baza $\frac{1}{2}$ a numărului:

1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) 0,25; 5) $\frac{1}{16}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt{2}$; 8) 64.

4.5.° Găsiți logaritmul în baza $\frac{1}{3}$ a numărului:

1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 3; 4) 81; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 6) $\sqrt[3]{3}$.

4.6.° Găsiți logaritmul zecimal al numărului:

1) 1; 3) 100; 5) 0,1; 7) 0,00001;

2) 10; 4) 1000; 6) 0,01; 8) 0,000001.

4.7.° Rezolvați ecuația:

1) $\log_7 x = -1$; 3) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$; 5) $\log_x 9 = 2$;

2) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 4) $\log_2 x = 0$; 6) $\log_x 2 = 2$.

4.8.° Rezolvați ecuația:

1) $\log_6 x = 2$; 3) $\log_{0,2} x = -3$; 5) $\log_x 81 = 4$;

2) $\log_{\sqrt[3]{5}} x = \frac{3}{2}$; 4) $\log_x 6 = 5$; 6) $\log_x 11 = -1$.

4.9.° Rezolvați ecuația:

1) $6^x = 2$; 3) $0,4^x = 9$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$;

2) $5^x = 10$; 4) $2^{x-3} = 5$; 6) $0,3^{3x+2} = 7$.

4.10.° Rezolvaţi ecuaţia:

1) $3^x = 2$; 2) $10^x = \frac{1}{6}$; 3) $7^{x+5} = 9$; 4) $0{,}6^{5x-2} = 20$.

4.11.° Calculaţi:

1) $2^{\log_2 32}$; 2) $5^{\log_5 0{,}45}$; 3) $7^{2\log_7 2}$.

4.12.° Calculaţi:

1) $3^{\log_3 \frac{1}{27}}$; 2) $5^{\frac{1}{2}\log_5 49}$.

4.13.° Găsiţi valoarea expresiei:

1) $\log_6 3 + \log_6 2$;
2) $\log_5 100 - \log_5 4$;
3) $\log_{49} 84 - \log_{49} 12$;
4) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4}$.

4.14.° Calculaţi valoarea expresiei:

1) $\lg 8 + \lg 12{,}5$; 2) $\log_3 162 - \log_3 2$; 3) $\frac{\log_7 125}{\log_7 5}$.

4.15.• Calculaţi:

1) $64^{0{,}5\log_2 12}$;
2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$;
3) $6^{1+\log_6 5}$;
4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8 - 2}$;
5) $6^{\log_{\frac{1}{6}} 3}$;
6) $2^{3\log_2 5 + 4}$;
7) $8^{1-\log_2 3}$;
8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2 - 3}$.

4.16.• Calculaţi:

1) $4^{\log_2 9}$;
2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$;
3) $10^{2+\lg 8}$;
4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6 - 3}$;
5) $2^{4\log_2 3 - 1}$;
6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9 + 2}$;
7) $8^{1-\frac{1}{3}\log_2 12}$.

4.17.• Calculaţi:

1) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$;
2) $\log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343$;
3) $\log_9 \log_2 8$;
4) $\log_3 \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;
5) $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$;
6) $2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16$.

4.18.• Calculaţi:

1) $\log_3 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$;
2) $\log_{\frac{1}{3}} \log_4 64$;
3) $\log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$;
4) $3\log_6 2 + \frac{3}{4}\log_6 81$.

4.19.$^{\bullet}$ Găsiți x, dacă:

1) $\log_9 x = \frac{1}{4}\log_9 16 + 2\log_9 5$;

2) $\log_7 x = 2\log_7 8 - 4\log_7 2$;

3) $\lg x = 2 + \lg 3 - \lg 5$;

4) $\log_3 x = \frac{2}{3}\log_3 216 + \frac{1}{2}\log_3 25$.

4.20.$^{\bullet}$ Găsiți x, dacă:

1) $\log_a x = 3\log_a 2 + 2\log_a 3$;

2) $\lg x = \frac{2}{5}\lg 32 - \frac{1}{3}\lg 64 + 1$.

4.21.$^{\bullet\bullet}$ Calculați valoarea expresiei:

1) $\dfrac{\log_7 27 - 2\log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0{,}2}$;

2) $\dfrac{\log_9 125 + 3\log_9 2}{\log_9 1{,}2 - \log_9 12}$;

3) $\log_7 \sin\frac{\pi}{5} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{5}} 49$;

4) $\log_3 \cos^2\frac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos\frac{\pi}{9}} 9$.

4.22.$^{\bullet\bullet}$ Găsiți valoarea expresiei:

1) $\dfrac{3\lg 4 + \lg 0{,}5}{\lg 9 - \lg 18}$;

2) $\dfrac{\lg 625 - 8\lg 2}{\frac{1}{2}\lg 256 - 2\lg 5}$;

3) $\log_{\sqrt{b}} a \cdot \log_a b^3$;

4) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 \cdot \log_5 8$.

4.23.$^{\bullet\bullet}$ Calculați:

1) $5^{\log_5 4 \cdot \log_2 3}$;

2) $7^{2\log_7 3 + \log_{\sqrt{7}} 4}$;

3) $9^{2\log_3 2 + 4\log_{81} 2}$;

4) $2 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 8 - 2\lg 2}$;

5) $\lg(25^{\log_5 0{,}8} + 9^{\log_3 0{,}6})$;

6) $27^{\frac{1}{\log_5 3}} + 25^{\frac{1}{\log_2 5}} - 36^{\frac{1}{\log_9 6}}$.

4.24.$^{\bullet\bullet}$ Calculați:

1) $6^{\frac{1}{2}\log_6 9 - \log_{\frac{1}{6}} 3}$;

2) $12^{\log_{144} 4 + \log_{12} 5}$;

3) $1000^{\frac{1}{2}\lg 25 - 3\lg 2}$;

4) $\log_{13}\left(100^{\frac{1}{\log_7 10}} + 2^{\log_2 15 + 3}\right)$.

4.25.$^{\bullet\bullet}$ Găsiți valoarea expresiei:

$$\lg\sin 1^\circ \cdot \lg\sin 2^\circ \cdot \lg\sin 3^\circ \cdot \ldots \cdot \lg\sin 89^\circ \cdot \lg\sin 90^\circ.$$

4.26.$^{\bullet\bullet}$ Simplificați expresia $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \lg 9$.

4.27.$^{\bullet\bullet}$ Calculați valoarea expresiei $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 32$.

4.28.•• Construiți graficul funcției:

1) $y = \log_x 1$;
2) $y = 3^{\log_3 (x+3)}$;
3) $y = 5^{-\log_5 x}$;
4) $y = 10^{\frac{1}{\log_x 10}}$;
5) $y = 2^{\log_2 x^2}$;
6) $y = \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$.

4.29.•• Construiți graficul funcției:

1) $y = 7^{\log_7 (x+2)}$;
2) $y = \frac{1}{3}^{\log_{\frac{1}{3}} (x-1)}$;
3) $y = \log_x x$;
4) $y = \dfrac{\lg(x^2+1)}{\lg(x^2+1)}$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

4.30. Simplificați expresia $\left(\dfrac{a^{0,5}+3b^{0,5}}{a-2a^{0,5}b^{0,5}+b}+\dfrac{a^{0,5}-3b^{0,5}}{a-b}\right)\cdot\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{2}$.

4.31. Găsiți punctele de extremum ale funcției:

1) $f(x) = \dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$;
2) $f(x) = 7x + x^2 - 3x^3$.

5. Funcţia logaritmică şi proprietăţile ei

Să alegem un număr pozitiv a, diferit de 1. Fiecărui număr pozitiv x i se poate pune în corespondență un astfel de număr y, că $y = \log_a x$. În acest fel este dată funcția $f(x) = \log_a x$ cu domeniul de definiție $D(f) = (0; +\infty)$.

Această funcție se numeşte **logaritmică.**

Să cercetăm proprietățile principale ale funcției logaritmice.

- Funcția $y = \log_a x$ are un singur zero $x = 1$.
- *Funcția $y = \log_a x$ are două intervale de constanță ale semnului.*
  dacă $a > 1$, atunci $y < 0$ pe intervalul $(0;\ 1)$; $y > 0$ pe intervalul $(1; +\infty)$;
  dacă $0 < a < 1$, atunci $y < 0$ pe intervalul $(1; +\infty)$; $y > 0$ pe intervalul $(0; 1)$.
- *Funcția $y = \log_a x$ este crescătoare pentru $a > 1$ şi este descrescătoare pentru $0 < a < 1$.*
- *Funcția logaritmică este diferențiabilă.* Mai detailat despre derivata funcției logaritmice voi veți afla în punctul 8.

În figurile 5.1 şi 5.2 este reprezentat schematic graficul funcției logaritmice pentru cazurile $a > 1$ şi $0 < a < 1$ corespunzător.

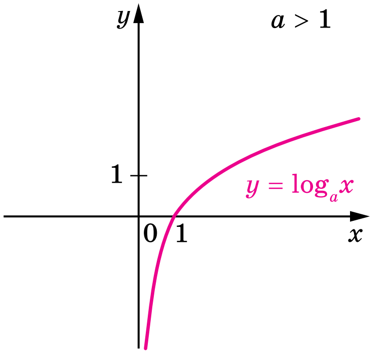


Fig. 5.1

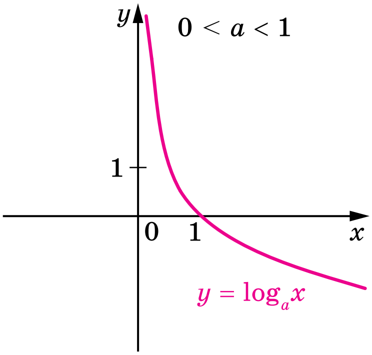


Fig. 5.2

Menționăm o proprietate importantă a graficului funcției logaritmice $y = \log_a x$. Odată cu apropierea valorilor lui x de zero, distanțele de la punctele graficului funcției $y = \log_a x$ până la axa ordonatelor devine tot mai mică şi mai mică şi poate deveni oricât de mici, dar niciodată nu vor fi egale cu zero.

Problema 1. Comparați numerele:

1) $\log_2 6$ şi $\log_2 7$; 2) $\log_{0,2} 6$ şi $\log_{0,2} 7$; 3) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$ şi 0.

Rezolvare: 1) Deoarece funcția logaritmică $y = \log_2 x$ este crescătoare, atunci $\log_2 6 < \log_2 7$.

2) Deoarece funcția logaritmică $y = \log_{0,2} x$ este descrescătoare, atunci $\log_{0,2} 6 > \log_{0,2} 7$.

3) Având în vedere că $0 < \frac{\pi}{4} < 1$, avem: $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < \log_{\frac{\pi}{4}} 1$.

Deci, $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < 0$. ◄

Problema 2. Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x) = \log_3 (x^2 + 3x)$; 2) $f(x) = \log_{x-4} (16 - x)$.

Rezolvare: 1) Deoarece domeniul de definiție al funcției logaritmice este mulțimea de numere pozitive, atunci domeniul de definiție al acestei funcții este mulțimea de soluții a inecuației $x^2 + 3x > 0$.

Avem: $x(x + 3) > 0$; $x < -3$ sau $x > 0$.

Deci, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

2) Domeniul de definiție al acestei funcții îl vom găsi, rezolvând sistemul de inecuații $\begin{cases} 16 - x > 0, \\ x - 4 > 0, \\ x - 4 \neq 1. \end{cases}$

Atunci $\begin{cases} x < 16, \\ x > 4, \\ x \neq 5; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} 4 < x < 5, \\ 5 < x < 16. \end{array}\right.$

De aici $D(f) = (4; 5) \cup (5; 16)$. ◄

1. Care funcţie se numeşte logaritmică?
2. Formulaţi proprietăţile funcţiei logaritmice.
3. Reprezentaţi schematic graficul funcţiei logaritmice $y = \log_a x$ pentru $a > 1$; pentru $0 < a < 1$.

EXERCIŢII

5.1.° Funcția este crescătoare sau descrescătoare:

1) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; 3) $y = \log_{0,1} x$; 5) $y = \log_{\sqrt{5}} x$;

2) $y = \log_3 x$; 4) $y = \lg x$; 6) $y = \log_{\frac{\pi}{3}} x$?

5.2.° Pe baza cărei proprietăți a funcției logaritmice se poate afirma, că:

1) $\lg 7 > \lg 5$; 2) $\log_{0,6} 4 < \log_{0,6} 3$?

5.3.° Comparați:

1) $\log_{12} 5$ şi $\log_{12} 6$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ şi $\log_{\frac{1}{3}} 4$;

2) $\log_5 \frac{1}{2}$ şi $\log_5 \frac{1}{3}$; 4) $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,7$ şi $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,6$.

5.4.° Comparați:

1) $\log_{0,9} \sqrt{3}$ şi $\log_{0,9} \sqrt{2}$; 3) $\log_{\frac{2}{3}} 6,8$ şi $\log_{\frac{2}{3}} 6,9$;

2) $\log_7 \frac{2}{3}$ şi $\log_7 \frac{1}{2}$; 4) $\lg \frac{\pi}{3}$ şi $\lg \frac{\pi}{4}$.

5.5.° Găsiți domeniul de definiție al al funcției:

1) $f(x) = \log_3 (x + 1)$; 4) $f(x) = \log_{0,6} (5x - 6 - x^2)$;

2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 1)$; 5) $f(x) = 2 \lg x + 3 \lg (2 - x)$;

3) $f(x) = \log_4 (-x)$; 6) $f(x) = \lg (x^2 - 1)$.

5.6.° Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x) = \log_7 (6 - x)$;
2) $f(x) = \log_{0,4} (7x - x^2)$;
3) $f(x) = \lg (x + 2) - 2 \lg (x + 5)$.

5.7.• Comparați cu unitatea baza logaritmului, dacă:

1) $\log_a 0{,}5 > \log_a 0{,}4$;
2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$;
3) $\log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$;
4) $\log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$.

5.8.• Comparați cu unitatea baza logaritmului, dacă:

1) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a \frac{1}{2}$;
2) $\log_a 2 < \log_a \sqrt{3}$.

5.9.• Pozitiv sau negativ este numărul:

1) $\log_{0,5} 0{,}6$;
2) $\log_{0,3} 3$;
3) $\log_2 0{,}27$;
4) $\log_\pi 3$?

5.10.• Comparați cu zero:

1) $\log_4 5$;
2) $\log_2 \frac{1}{3}$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$;
4) $\log_{\frac{\neq}{3}} 2$.

5.11.• Găsiți cea mai mare si cea mai mica valori ale funcției pe intervalul dat:

1) $y = \log_2 x$, $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$;
2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\left[\frac{1}{16}; 8\right]$;
3) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$, $\left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]$.

5.12.• Găsiți cea mai mare si cea mai mica valori ale funcției pe intervalul dat:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $\left[\frac{1}{9}; 3\right]$;
2) $y = \lg x$, $[1; 1000]$.

5.13.• Pe ce interval cea mai mare valoare a funcției $y = \log_2 x$ este egală cu 3, iar cea mai mică este egală cu –1?

5.14.• Pe ce interval cea mai mare valoare a funcției $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ este egală cu –1, iar cea mai mică este egală cu –2?

5.15.• Comparați:

1) $\log_9 2$ şi 3;
2) $\log_{\frac{1}{5}} 27$ şi -2;
3) $\log_{\sqrt{3}} 26$ şi 6.

5.16.• Comparați:

1) $\log_{0,1} 12$ şi 1;
2) $\log_4 3$ şi $-\frac{1}{2}$.

5.17.• Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x) = \lg x^2$;
2) $f(x) = \log_3 \operatorname{tg} x$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{\lg x}$; 4) $f(x)=\dfrac{4}{\log_5(10-x)}$.

5.18.• Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x)=\log_{12}|x|$; 2) $y=\dfrac{5}{\lg(x+3)}$; 3) $y=\lg\sin x$.

5.19.• Rezolvați prin metoda grafică ecuația:

1) $\log_2 x=3-x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x=x-1$; 3) $\log_2 x=-x-0,5$.

5.20.• Rezolvați prin metoda grafică ecuația:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x=x+\dfrac{1}{2}$; 2) $\log_3 x=4-x$.

5.21.• Stabiliți prin metoda grafică numărul de rădăcini ale ecuației:

1) $\log_2 x=-x$; 2) $\log_3 x=-x^2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x=\sqrt{x}$.

5.22.• Câte rădăcini are ecuația:

1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\log_2 x$; 2) $\log_2 x=\dfrac{1}{x}$?

5.23.•• Între care două numere întregi consecutive se conține pe dreapta de coordonate numărul:

1) $\log_3 10$; 2) $\log_2 5$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 7$; 4) $\log_{0,1} 2$?

5.24.•• Între care două numere întregi consecutive se conține pe dreapta de coordonate numărul: 1) $\log_2 29$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

5.25.•• Comparați:

1) $\log_4 5$ şi $\log_5 4$; 2) $\log_{1,5} 1,3$ şi $\log_{1,3} 1,5$; 3) $\log_{0,7} 0,8$ şi $\log_{0,8} 0,7$.

5.26.•• Comparați:

1) $\log_{1,7} 1,8$ şi $\log_{1,8} 1,7$; 2) $\log_{0,2} 0,3$ şi $\log_{0,3} 0,2$.

5.27.•• Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $y=\lg(1-\sin x)$;

2) $y=\sqrt{\lg\cos x}$;

3) $y=\dfrac{x}{\lg(4-x^2)}$;

4) $y=\dfrac{1}{\log_6(x-3)}+\sqrt{6-x}$;

5) $y=\dfrac{4}{\lg(x+2)}+\lg(3-x)$;

6) $y=\log_5(x^2-4x+3)+\dfrac{1}{\log_5(7-x)}$;

7) $y=\lg(6x-x^2)+\dfrac{1}{\lg(3-x)}$;

8) $y=\log_{x+3}(x^2+x)$.

5.28.•• Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $y = \dfrac{1}{\lg(x^2+1)}$;

2) $y = \lg(1 + \sin x)$;

3) $y = \sqrt{\lg \sin x}$;

4) $y = \lg(x+8) - \dfrac{5}{\lg(-x-1)}$;

5) $y = \lg(10x - x^2) - \dfrac{1}{\lg(8-x)}$;

6) $y = \log_{2-x}(8 + 7x - x^2)$.

5.29.* Construiți graficul funcției:

1) $y = \dfrac{|\log_{0,2} x|}{\log_{0,2} x}$;

2) $y = \sqrt{\log_3^2 x \log_x 3}$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

5.30. Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt{x^2+15} = x + 1$;

2) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2$;

3) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 2 = 0$;

4) $\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1} - 6 = 0$;

5) $3 \cos^2 x + 7 \sin x - 5 = 0$;

6) $\cos 2x - 5 \cos x - 2 = 0$.

6. Ecuaţii logaritmice

Ecuația de formă $\log_a x = b$, unde $a > 0$, $a \neq 1$, se numeşte **cea mai simplă ecuație logaritmică.** Această ecuație se poate rezolva, folosind definiția logaritmului.

Problema 1. Rezolvați ecuația $\log_3(3x - 1) = 2$.

Rezolvare: După definiția logaritmului se poate scrie: $3x - 1 = 3^2$. De unde $3x - 1 = 9$; $x = \dfrac{10}{3}$.

Răspuns: $\dfrac{10}{3}$. ◄

Rezolvarea ecuației din exemplul 1 se poate prezenta astfel:

$$\log_3(3x-1) = 2\log_3 3,$$
$$\log_3(3x-1) = \log_3 3^2,$$
$$3x - 1 = 3^2,\ x = \frac{10}{3}.$$

În timpul rezolvării multor ecuații logaritmice se aplică următoarea teoremă.

Teorema 6.1. ***Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, atunci ecuația de forma***

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

este echivalentă cu oricare din sistemele

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Problema 2. Rezolvați ecuația $\lg(2x-3) = \lg(x^2-4x+2)$.

Rezolvare: Ecuația dată este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 2x-3 = x^2-4x+2, \\ 2x-3 > 0. \end{cases}$$

Avem: $\begin{cases} x^2-6x+5 = 0, \\ x > \dfrac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5, \end{array}\right. \\ x > \dfrac{3}{2}. \end{cases}$ De aici $x = 5$.

Răspuns: 5. ◄

Problema 3. Rezolvați ecuația $\log_3(2x-1) + \log_3(x-2) = 3$.

Rezolvare: Ecuația dată $\log_3(2x-1) + \log_3(x-2) = 3$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \log_3((2x-1)(x-2)) = 3, \\ 2x-1 > 0, \\ x-2 > 0. \end{cases}$$

De aici $\begin{cases} (2x-1)(x-2) = 3^3, \\ x > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2-5x-25 = 0, \\ x > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -\dfrac{5}{2}, \end{array}\right. \\ x > 2. \end{cases}$ Obținem: $x = 5$.

Răspuns: 5. ◄

Problema 4. Rezolvați ecuația $\log_2 x + \log_x 2 = \dfrac{5}{2}$.

Rezolvare: Deoarece $\log_x 2 = \dfrac{1}{\log_2 x}$, atunci ecuația dată este echivalentă cu ecuația

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}.$$

Fie, că $\log_2 x = t$. Atunci obținem: $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{2}$.

De aici $\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0, \\ t \neq 0. \end{cases}$ Deci, $\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}, \\ t = 2. \end{array}\right.$

Atunci ecuația inițială este echivalentă totalității $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = \frac{1}{2}, \\ \log_2 x = 2. \end{array}\right.$

De aici $\left[\begin{array}{l} x = 2^{\frac{1}{2}}, \\ x = 2^2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2}, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Răspuns: $\sqrt{2}$; 4. ◄

1. Care ecuaţie se numeşte cea mai simplă ecuaţie logaritmică?
2. Care sistem este echivalent cu ecuaţia de formă $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, dacă $a > 0$, $a \neq 1$?

EXERCIŢII

6.1.° Rezolvați ecuația:

1) $\log_2 (x - 1) = 1$;
2) $\log_3 (2x + 1) = 3$;
3) $\lg (3 - 2x) = 2$;
4) $\log_{\frac{1}{6}} (4x - 8) = -2$;
5) $\log_7 (x^2 - 2x - 8) = 1$;
6) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x - 5) = -4$.

6.2.° Rezolvați ecuația:

1) $\log_{\frac{1}{5}} (x + 7) = -3$;
2) $\log_4 (2x - 5) = 0{,}5$;
3) $\log_{\sqrt{3}} (x^2 - 5x - 3) = 2$;
4) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 5x + 6) = -1$.

6.3.° Rezolvați ecuația:

1) $\log_\pi (x + 1) = \log_\pi (4x - 5)$;
2) $\log_5 (3x - 5) = \log_5 (x - 3)$.

6.4.° Rezolvați ecuația:

1) $\log_9 (4x - 6) = \log_9 (x - 2)$;
2) $\log_{\frac{1}{4}} (x + 7) = \log_{\frac{1}{4}} (2x + 5)$.

6.5.• Rezolvați ecuația:

1) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \frac{1}{x} = 6$;
2) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;
3) $2 \log_3 x + \log_9 x - \log_{27} x = 6{,}5$;
4) $\log_6 x + 2 \log_{36} x + 3 \log_{216} x = 3$;

5) $\log_7 \log_4 (x-2) = 0$; 6) $\log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2}$.

6.6.• Rezolvați ecuația:

1) $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 \sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}$;
2) $\log_5 x - \log_{25} x + \log_{625} x = \frac{3}{4}$;
3) $\lg \lg \lg x = 0$.

6.7.• Rezolvați ecuația:

1) $\lg(x^2 - 2x) = \lg(2x + 12)$;
2) $\log_4 (x-1) = \log_4 (x^2 - x - 16)$;
3) $\log_{0,5} (x^2 + 3x - 10) = \log_{0,5} (x-2)$;
4) $\log_6 (x^2 - x - 2) = \log_6 (2 - x)$.

6.8.• Rezolvați ecuația:

1) $\log_6 (9 - x^2) = \log_6 (1 - 2x)$;
2) $\lg(x^2 + 2x - 3) = \lg(2x^2 - 2)$.

6.9.• Rezolvați ecuația:

1) $\log_4 (x-3) + \log_4 x = 1$;
2) $\log_{0,5} (4-x) + \log_{0,5} (x-1) = -1$;
3) $\log_3 (2x-1) + \log_3 (x-4) = 2$;
4) $\lg(x-1) + \lg(x-3) = \lg(1{,}5x - 3)$.

6.10.• Rezolvați ecuația:

1) $\log_7 x + \log_7 (x+6) = 1$;
2) $\log_3 (5-x) + \log_3 (3-x) = 1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} (4x-1) + \log_{\frac{1}{2}} (x+1) = \log_{0,5} 3{,}5$;
4) $\log_{0,6} (x+2) + \log_{0,6} (6-x) = \log_{0,6} (x+8)$.

6.11.• Rezolvați ecuația:

1) $\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4 = 0$;
2) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$;
3) $\log_5 x + \log_x 5 = 2{,}5$;
4) $\frac{2}{\lg(x+2) - 3} + \frac{4}{\lg(x+2) + 1} = 1$.

6.12.• Rezolvați ecuația:

1) $3\log_8^2 (-x) - 2\log_8 (-x) - 1 = 0$;
2) $2\log_7 \sqrt{x} = \log_7^2 x - 6$;
3) $3\log_3 x + 3\log_x 3 = 10$;
4) $\frac{\lg x}{\lg x + 2} - \frac{2}{\lg x - 1} = 1$.

6.13.•• Rezolvați ecuația:

1) $2\log_{0,4} x = \log_{0,4} (2x^2 - x)$;
2) $2\log_7 (-x) = \log_7 (x+2)$;
3) $2\log_8 (1-x) = \log_8 (2{,}5x + 1)$;
4) $2\log_3 x = 1 + \log_3 (x+6)$.

6.14.•• Rezolvați ecuația:

1) $\log_{0,7}(2x^2 - 9x + 4) = 2\log_{0,7}(x + 2)$;

2) $2\log_2(-x) - \log_2(3x + 8) = 1$.

6.15.•• Rezolvați ecuația:

1) $\log_2(5 - x) - \log_2(x - 1) = 1 - \log_2(x + 2)$;

2) $2\log_5(x + 1) - \log_5(x + 9) = \log_5(3x - 17)$.

6.16.•• Rezolvați ecuația:

1) $\log_2(2x - 1) - \log_2(x + 2) = 2 - \log_2(x + 1)$;

2) $2\lg(x + 1) - \lg(4x - 5) = \lg(x - 5)$.

6.17.* Rezolvați ecuația:

1) $\log_x(2x^2 - 7x + 12) = 2$;

2) $\log_{x+1}(x + 3) = 2$;

3) $\log_{x-2}(2x^2 - 11x + 16) = 2$;

4) $\log_{2x-3}(3x^2 - 7x + 3) = 2$.

6.18.* Rezolvați ecuația:

1) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1$;

2) $\log_x(x + 6) = 2$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

6.19. Găsiți derivata funcției:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9x}{x + 4}$;

2) $f(x) = (5x - 1)\sqrt{x}$.

6.20. Găsiți intervalele de creştere şi punctele de extremum ale funcției:

1) $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 2x$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x^2 - 9}$;

3) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + 5}$.

6.21. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției $f(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3$ în punctul cu abscisa $x_0 = 3$.

7. Inecuaţii logaritmice

Rezolvarea multor inegalități logaritmice se bazează pe o astfel de teoremă.

Teorema 7.1. ***Dacă $a > 1$, atunci inecuația $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ este echivalentă cu sistemul***

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Dacă $0 < a < 1$, atunci inecuația $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Problema 1. Rezolvați inecuația $\log_2 x > 3$.

Rezolvare: Deoarece $3 = \log_2 2^3$, se poate scrie:

$$\log_2 x > \log_2 2^3.$$

Această inecuație este echivalentă cu așa una: $x > 2^3$. De aici $x > 8$.

Răspuns: $(8; +\infty)$. ◄

Problema 2. Rezolvați inecuația $\log_{0,3} x \geqslant 1$.

Rezolvare: Avem: $\log_{0,3} x \geqslant \log_{0,3} 0,3$.

Această inecuație este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} x \leqslant 0,3, \\ x > 0. \end{cases}$

Răspuns: $(0; 0,3]$. ◄

Problema 3. Rezolvați inecuația $\log_{\frac{1}{2}} (3x - 4) < \log_{\frac{1}{2}} (x - 2)$.

Rezolvare: Inecuația dată este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 3x - 4 > x - 2, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

De aici $\begin{cases} x > 1, \\ x > 2; \end{cases}$ $x > 2$.

Răspuns: $(2; +\infty)$. ◄

Cărui sistem de inecuaţii este echivalentă inecuaţia $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, dacă $a > 1$? dacă $0 < a < 1$?

EXERCIŢII

7.1.° Rezolvați inecuația:

1) $\log_{0,1} x < \log_{0,1} 9$;
2) $\log_{11} x > \log_{11} 12$;
3) $\log_{0,8} x > \log_{0,8} 14$;
4) $\log_7 x < \log_7 15$;
5) $\log_{\frac{3}{7}} (x + 5) < \log_{\frac{3}{7}} 8$;
6) $\log_8 (2x - 3) > \log_8 7$;
7) $\log_{\frac{2}{9}} (x - 4) > \log_{\frac{2}{9}} 2$;
8) $\lg(1 + 3x) < \lg 16$.

7.2.° Rezolvați inecuația:

1) $\lg x < \lg 4$;
2) $\log_{\frac{5}{6}} x > \log_{\frac{5}{6}} \frac{6}{7}$;
3) $\log_{12} (x - 8) > \log_{12} 3$;
4) $\log_{16} (4x - 6) < \log_{16} 10$;

5) $\log_{\frac{8}{11}}(2-x)<\log_{\frac{8}{11}}2$; 6) $\log_{0,9}(2x+1)>\log_{0,9}5$.

7.3.° Rezolvați inecuația:

1) $\log_7 x>2$;
2) $\log_5 x\leqslant -1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} x\leqslant 5$;
4) $\log_{\frac{1}{3}} x>1$;
5) $\log_2(5x+1)>4$;
6) $\log_{0,6}(x-2)<2$;
7) $\log_3(2x-1)\leqslant 3$;
8) $\log_{0,5}(2x+1)\geqslant -2$.

7.4.° Rezolvați inecuația:

1) $\log_{\frac{1}{7}} x<-1$;
2) $\log_4 x>2$;
3) $\lg x<5$;
4) $\log_{\frac{1}{6}} x>-3$;
5) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)\geqslant -2$;
6) $\log_9(5x+6)\leqslant 2$.

7.5.• Câte rădăcini întregi are inecuația:

1) $\log_{0,25}(3x-5)>-3$; 2) $\log_3(7-x)<3$?

7.6.• Găsiți rădăcinile întregi ale inecuației:

1) $\log_{0,5}(1-x)>-1$; 2) $\log_{36}(x+1)\leqslant 0,5$.

7.7.• Găsiți mulțimea soluțiilor ale inecuației:

1) $\lg(2x+3)>\lg(x-1)$;
2) $\log_5 2x<\log_5(x+1)$;
3) $\log_{0,2}(2x-1)>\log_{0,2}(3x-4)$;
4) $\log_{0,4}(x^2-3)<\log_{0,4}(x+3)$;
5) $\log_{0,7}(x^2-2x-3)\leqslant\log_{0,7}(9-x)$;
6) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+31)\leqslant\log_{\frac{1}{3}}(10x+11)$.

7.8.• Rezolvați inecuația:

1) $\log_2(2x-3)<\log_2(x+1)$;
2) $\log_{0,6}(3-2x)>\log_{0,6}(5x-2)$;
3) $\lg(x^2-2)\geqslant\lg(4x+3)$;
4) $\log_{0,1}(10-2x)\geqslant\log_{0,1}(x^2-x-2)$.

7.9.•• Găsiți mulțimea rădăcinilor ale inecuației:

1) $\log_8(x^2-4x+3)\leqslant 1$;
2) $\log_{0,5}(x^2+x)>-1$;
3) $\log_{0,7}(x^2+10x+25)>0$;
4) $\log_2(x^2-3x)\leqslant 2$;
5) $\log_{0,3}(x^2+x-12)\geqslant\log_{0,3}(6x-6)$;
6) $\lg(x^2-x)\leqslant\lg(3x-3)$.

7.10.•• Rezolvați inecuația:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7)>0$;
2) $\log_9(x^2-6x+8)\leqslant 0{,}5$;
3) $\log_{0,5}(x^2+3x)\geqslant -2$;
4) $\log_{0,3}(x^2-2x+1)\geqslant 0$;
5) $\log_{\frac{2}{3}}(6-2x)<\log_{\frac{2}{3}}(x^2-2x-3)$;
6) $\log_{0,1}(x^2-3x-4)\geqslant \log_{0,1}(x+1)$.

7.11.•• Rezolvați inecuația:

1) $\lg x+\lg(x-3)>1$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+\log_{\frac{1}{3}}x<-1$;
3) $\log_2 x+\log_2(x+4)<5$;
4) $\log_{0,1}(x-5)+\log_{0,1}(x-2)\geqslant -1$;
5) $\log_6(5x+8)+\log_6(x+1)\leqslant 1-\log_6 3$;
6) $\log_3(1-x)+\log_3(-5x-2)\geqslant 2\log_3 2+1$.

7.12.•• Rezolvați inecuația:

1) $\log_2(-x)+\log_2(1-x)\leqslant 1$;
2) $\log_{0,2}(x-1)+\log_{0,2}(x+3)\geqslant -1$;
3) $\log_3(x-2)+\log_3(x-10)\geqslant 2$;
4) $\log_7 x+\log_7(3x-8)\geqslant 1+2\log_7 2$.

7.13.•• Rezolvați inecuația:

1) $\log_{0,2}^2 x\leqslant 1$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x\geqslant 4$;
3) $\lg^2 x+3\lg x-4<0$;
4) $\log_{\frac{1}{4}}^2 x+2\log_{\frac{1}{4}} x-8\leqslant 0$;
5) $\log_2^2 x-5\log_2 x+6\geqslant 0$;
6) $2\log_{\frac{1}{9}}^2 x-5\log_{\frac{1}{9}} x+2\geqslant 0$.

7.14.•• Rezolvați inecuația:

1) $\log_{0,5}^2 x\geqslant 9$;
2) $\lg^2 x-2\lg x-3\geqslant 0$;
3) $2\log_4^2 x-\log_4 x-1<0$;
4) $\log_{0,2}^2 x-\log_{0,2} x-2\leqslant 0$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

7.15. Găsiți cea mai mare şi cea mai mică valori ale funcției $f(x)=x^3-3x^2+1$ pe intervalul $[-2;\ 1]$.

7.16. În ce punct al graficului funcției $f(x)=x^3-x^2-2x$ tangenta formează cu direcția pozitivă a axei absciselor unghiul $\alpha=\frac{3\pi}{4}$?

7.17. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției $y=x^2-x+2$, care este paralelă cu dreapta $x+y+2=0$.

8. Derivatele funcţiilor exponenţială şi logaritmică

Există oare o funcție a cărei derivată este egală cu însăşi funcția? De răspuns la această întrebare nu-i complicat. De exemplu, funcția care este constantă nulă, posedă această proprietate.

Se poate oare specifica funcția f, definită pe $\mathbb{R}$, diferită de constanta zero, astfel, că $f'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$? Răspunsul la această întrebare nu este evident.

S-a dovedit, că printre funcțiile exponențiale $f(x) = a^x$ există o singură astfel de funcție, că $f'(x) = f(x)$ pentru toți $x \in \mathbb{R}$. Numărul, care este baza puterii pentru această funcție, se notează cu litera e, iar funcția însăşi are forma $f(x) = e^x$. Deci,

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

S-a stabilit că numărul e este irațional. El poate fi scris sub forma unei fracții zecimale infinite neperiodice:

$$e = 2{,}71828182845\ldots\ .$$

Funcția $f(x) = e^x$ se numeşte **exponentă**.

Logaritmul în baza e se numeşte **logaritm natural** şi se notează $\ln a$, adică $\log_e a = \ln a$.

Se poate de demonstrat, că derivata funcției exponențiale $f(x) = a^x$ este egală cu $a^x \ln a$.

Deci, pentru $a > 0$, $a \neq 1$ se poate scrie:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

În p. 5 am observat, că funcția logaritmică $f(x) = \log_a x$ este diferențiabilă.

Putem dovedi, că

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

În special,

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Problema 1. Găsiți derivata funcției:

1) $y = e^x(x^2 - 4x)$; 2) $y = x^3 \cdot 3^x$; 3) $y = \dfrac{x^4}{\ln x}$.

Rezolvare: 1) Aplicând teorema derivatei produsului a două funcții, obținem:

$$y' = (e^x)' \cdot (x^2 - 4x) + (x^2 - 4x)' \cdot e^x =$$
$$= e^x(x^2 - 4x) + (2x - 4)e^x = e^x(x^2 - 2x - 4).$$

2) Avem:

$$y' = (x^3)' \cdot 3^x + (3^x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot 3^x + 3^x \ln 3 \cdot x^3 = 3^x x^2(3 + x\ln 3).$$

3) Avem: $y' = \dfrac{(x^4)' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot x^4}{\ln^2 x} = \dfrac{4x^3 \cdot \ln x - \dfrac{1}{x} \cdot x^4}{\ln^2 x} =$

$$= \frac{4x^3 \ln x - x^3}{\ln^2 x} = \frac{x^3(4\ln x - 1)}{\ln^2 x}. ◄$$

Problema 2. Alcătuiți ecuația tangentei la graficul funcției $f(x) = e^x + x$ în punctul cu abscisa $x_0 = 0$.

Rezolvare: Avem: $f(x_0) = 1$. Găsim derivata funcției f în punctul $x_0 = 0$: $f'(x) = e^x + 1$. De aici $f'(x_0) = 2$. Atunci ecuația căutată are aspectul $y = 2x + 1$.

Răspuns: $y = 2x + 1$.◄

Problema 3. Găsiți intervalele de creştere şi descreştere şi punctele de extremum ale funcției $f(x) = x \ln x$.

Rezolvare: Avem:

$$f'(x) = (x)' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot x = \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1.$$

Cercetăm semnul $f'(x)$ pe $D(f) = (0; +\infty)$.

Avem: $f'(x) > 0$ pentru $\ln x > -1$. De unde $x > \dfrac{1}{e}$.

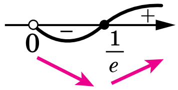


Fig. 8.1

Analogic găsim, că $f'(x) < 0$ pentru $0 < x < \dfrac{1}{e}$.

Obținem, că funcția f creşte pe intervalul $\left[\dfrac{1}{e}; +\infty\right)$, descreşte pe intervalul $\left(0; \dfrac{1}{e}\right]$, $x_{\min} = \dfrac{1}{e}$ (Fig. 8.1).◄

?

1. Care funcţie se numeşte exponenţială?
2. Ce se numeşte logaritm natural?
3. Cu ce este egală derivata funcţiei $y = e^x$? $y = a^x$?
4. Cu ce este egală derivata funcţiei $y = \ln x$? $y = \log_a x$?

EXERCIŢII

8.1.° Găsiți derivata funcției:

1) $y = 4e^x$;
2) $y = x^2e^x$;
3) $y = e^x \sin x$;
4) $y = \frac{e^x}{x-2}$;
5) $y = 5^x$;
6) $y = x \cdot 3^x$.

8.2.° Găsiți derivata funcției:

1) $y = x^6e^x$; 2) $y = e^x \cos x$; 3) $y = \frac{x+1}{e^x}$; 4) $y = 6^x$.

8.3.° Găsiți derivata funcției:

1) $y = \log_9 x$; 2) $y = \frac{\ln x}{x^3}$; 3) $y = x^5 \ln x$.

8.4.° Găsiți derivata funcției:

1) $y = \lg x$; 2) $y = \frac{x^5}{\ln x}$.

8.5.• Găsiți derivata funcției:

1) $y = e^x + e^{-x}$; 2) $y = \frac{2^x - 3}{2^x + 1}$.

8.6.• Găsiți derivata funcției:

1) $y = 10^{-x}$; 2) $y = \frac{5^x + 2}{5^x - 1}$.

8.7.• Calculați valoarea derivatei funcției f în punctul x_0:

1) $f(x) = e^x - 3x,\ x_0 = 0$;
2) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x,\ x_0 = 4$;
3) $f(x) = \frac{\cos x}{e^x},\ x_0 = 0$.

8.8.• Calculați valoarea derivatei funcției f în punctul x_0:

1) $f(x) = e^x \operatorname{tg} x,\ x_0 = 0$;
2) $f(x) = \frac{1}{6}\ln x,\ x_0 = \frac{1}{6}$;
3) $f(x) = x - \ln x,\ x_0 = 3$.

8.9.• Alcătuiți ecuația tangentei pentru graficul funcției f în punctul cu abscisa x_0:

1) $f(x) = e^x,\ x_0 = 0$;
2) $f(x) = e^x + \sin x,\ x_0 = 0$;
3) $f(x) = x \cdot 2^x,\ x_0 = 1$;
4) $f(x) = 3x + \ln x,\ x_0 = 1$.

8.10.• Alcătuiți ecuația tangentei pentru graficul funcției f în punctul cu abscisa x_0:

1) $f(x) = \ln x,\ x_0 = 1$;
2) $f(x) = 2e^x - \cos x,\ x_0 = 0$.

8.11.• Găsiți ecuația tangentei orizontale dusă la graficul funcției:

1) $f(x) = e^x + \dfrac{1}{e^x}$; 2) $f(x) = (2^x - 7)(2^x - 9)$.

8.12.• Găsiți ecuația tangentei orizontale dusă la graficul funcției $f(x) = (5^x - 65)(5^x + 15)$.

8.13.•• Alcătuiți ecuația tangentei dusă la graficul funcției:
1) $f(x) = e^x$, dacă această tangentă este paralelă la dreapta $y = ex - 6$;
2) $f(x) = 6x - \ln x$, dacă această tangentă este paralelă la dreapta $y = x$.

8.14.•• Găsiți intervalele de creştere şi descreştere şi punctele extremum ale funcției:

1) $f(x) = e^x - x$; 4) $f(x) = \dfrac{4x}{e^x}$; 7) $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$;

2) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$; 5) $f(x) = x^3 \ln x$; 8) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

3) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-2}$; 6) $f(x) = \ln x - x$;

8.15.•• Găsiți intervalele de creştere şi descreştere şi punctele extremum ale funcției:

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{3^x}$; 3) $f(x) = 0{,}5x^2 - \ln x$; 5) $f(x) = 2\ln x + \dfrac{2}{x}$;

2) $f(x) = \dfrac{x+3}{e^x}$; 4) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; 6) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

8.16.•• Găsiți cea mai mare şi cea mai mică valori ale funcției $f(x) = e^x + x$ pe intervalul $[-1; 1]$.

8.17.•• Găsiți cea mai mare şi cea mai mică valori ale funcției $f(x) = (x - 1)\, e^{-x}$ pe intervalul $[1; 3]$.

8.18.•• Cercetați funcția şi construiți graficul ei:
1) $f(x) = xe^x$; 2) $f(x) = x^2 - 2\ln x$.

8.19.•• Cercetați funcția $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ şi construiți graficul ei.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

8.20. Rezolvați ecuația:
1) $\cos 2x = \cos x - 1$; 2) $\cos 2x = \sin x$.

8.21. Găsiți coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor:
1) $y = 1 + \sqrt{x+5}$ şi $y = x$; 2) $y = 2 - 2\sqrt{x+5}$ şi $y = -x$.

IUBIREA MEA ESTE UCRAINA ŞI MATEMATICA

Această afirmație patriotică a matematicianului ucrainean remarcabil, a academicianului Mihail Pylypovych Kravchiuk, a fost gravată pe piedestalul de granit al monumentului savantului (vezi forzațul 1).

Mihail Kravchiuk s-a născut în satul Ceovnâți în ținutul Volân. După ce a absolvit Gimnaziul din Luțk cu medalie de aur, apoi secția de matematică al Universității din Kiev, a rămas să lucreze în Kiev.

Productivitatea ştiințifică şi capacitatea de lucru înaltă, originalitatea şi flexibilitatea gândirii lui M.P. Kravchiuk i-au permis să obțină rezultate ştiințifice importante în algebră şi teoria numerelor, teoria funcțiilor şi a analizei matematice, ecuațiilor diferențiale şi integrale, teoriei probabilităților şi statisticii etc. Se ştie că elaborările lui ştiințifice au fost folosite într-o mare măsură de cercetătorii americani în timpul creării primului calculator.

M. P. Kravchiuk a participat activ la crearea terminologiei ştiințifice ucrainene, unul dintre primii care a scris lucrări ştiințifice în limba ucraineană, măcar că liber ştia limbile rusă, franceză, germană, italiană, poloneză şi alte limbi.

M.P. Kravchiuk a atras o atenție deosebită muncii ştiințifice cu tinerii, în special la inițiativa lui în 1935, a avut loc prima Olimpiada de Matematică din Kiev pentru şcolari. Încearcă-ți puterile în rezolvarea problemelor acestei olimpiade.

Însărcinările primei olimpiade matematice din Kiev (1935)

1. Calculați valoarea expresiei $\frac{b^3-a^3b-b^2c+ca^3}{(b-c)^2}+\sqrt{d}$ pentru $a=-\frac{1}{2}$, $b=0{,}19$, $c=0{,}18$, $d=0{,}04$.

2. Rezolvați ecuația $4^{x^2-\sqrt{x^2-9}-20{,}75}=\sqrt{2}$.

3. Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y=4, \\ (x^2+y^2)(x^3+y^3)=280. \end{cases}$

4. Numerele pozitive $u_1, u_2, \ldots, u_n$ formează o progresie aritmetică. Demonstrați, că

$$\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_n}}.$$

5. Fie a şi b – catetele triunghiului dreptunghiular, c – ipotenuza. Demonstrați, că

$$\log_{c+b} a+\log_{c-b} a=2\log_{c+b} a\cdot\log_{c-b} a.$$

ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

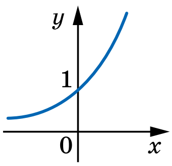
1. Care este domeniul de definiție al funcției $y = \dfrac{7}{7^x - 1}$?

A) $(-\infty; +\infty)$; C) $(-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$;

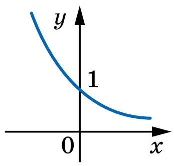
B) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; D) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Pe una din figuri este reprezentat graficul funcției $y = 3^{-x}$. Indicați această imagine.

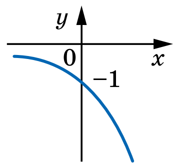
A)



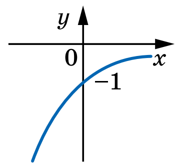
B)



C)



D)



3. Cu ce este egală rădăcina ecuației $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\dfrac{15}{4}\right)^x = \dfrac{4}{9}$?

A) 2; B) –2; C) 1; D) –1.

4. Găsiți mulțimea soluțiilor inecuației $0{,}6^{x^2} > 0{,}6$.

A) $(-\infty; 1)$; C) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;

B) $(1; +\infty)$; D) $(-1; 1)$.

5. Rezolvați ecuația $3^{x+3} + 5 \cdot 3^{x-1} = 86$.

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3.

6. Calculați valoarea expresiei $\log_{0,2} 25 - \log_3 \dfrac{1}{27}$.

A) 1; B) –1; C) 5; D) –5.

7. Prezentați numărul 3 sub forma puterii numărului 10.

A) $3 = 10^{\log_3 10}$; C) $3 = 10^{\lg 3}$;

B) $3 = 10^{\log_3 3}$; D) imposibil de prezentat.

8. Cu ce este egală valoarea expresiei $\log_6 108 - \log_6 3$?

A) –1; B) 2; C) –3; D) 4.

9. Rezolvați inecuația $\log_{0,2} x > \log_{0,2} 5$.

A) $(-\infty; 5)$; C) $(0; 5) \cup (5; +\infty)$;

B) $(5; +\infty)$; D) $(0; 5)$.

10. Prin care din punctele date trece graficul funcției $y = \log_{\frac{1}{2}} x$?

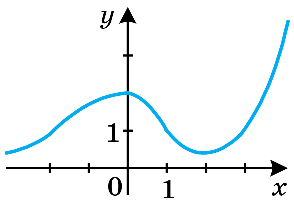
A) $(2;\ 1)$; B) $(2;\ -1)$; C) $\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$; D) $(2;\ 0)$.

11. Pentru ce valori ale lui a şi b se îndeplineşte egalitatea $\lg ab = \lg(-a) + \lg(-b)$?

A) $a > 0,\ b < 0$; C) $a < 0,\ b < 0$;
B) $a < 0,\ b > 0$; D) aşa valori nu există.

12. În figura dată este desenat graficul funcției $y = f(x)$, definită pe mulțimea numerelor reale. Câte rădăcini are ecuația $\ln f(x) = 0$?

A) nici o rădăcină;
B) două rădăcini;
C) trei rădăcini;
D) este imposibil de determinat.



13. Indicați cea mai mare soluție întreagă a inecuației $\log_{0,2}(3 - 2x) < < -1$.

A) -2; B) -1; C) 1; D) aşa soluție nu există.

14. Care este mulțimea soluțiilor inecuației $\log_x \sqrt{x} < 1$?

A) $(-\infty;\ +\infty)$; B) $(0;\ +\infty)$; C) $(0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; D) $\varnothing$.

15. Rezolvați ecuația $\log_4(x - 4) + \log_4(x - 1) = 1$.

A) 0; 5; B) 0; C) 5; D) 1; 4.

16. Comparați valorile expresiilor $\log_4 5$, $\log_6 4$, $\log_{0,2} 3$.

A) $\log_{0,2} 3 < \log_6 4 < \log_4 5$; C) $\log_{0,2} 3 < \log_4 5 < \log_6 4$;
B) $\log_6 4 < \log_{0,2} 3 < \log_4 5$; D) $\log_4 5 < \log_6 4 < \log_{0,2} 3$.

17. Găsiți derivata funcției $y = x^3 e^x$.

A) $y' = 3x^2 e^x$; C) $y' = 3x^2 e^x + x^3 e^x$;
B) $y' = 3x^2 e^x - x^3 e^x$; D) $y' = x^3 e^x \ln 3$.

18. Găsiți intervalele de descreştere ale funcției $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

A) $(-\infty;\ 0)$, $(1;\ \sqrt{e}]$; C) $(0;\ \sqrt{e}]$;
B) $(0;\ 1)$, $(1;\ \sqrt{e}]$; D) $(0;\ 1)$.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 1

Proprietățile funcției $y = a^x$, unde $a > 0$, $a \neq 1$

Domeniul de definiție	$\mathbb{R}$
Domeniul de valori	$(0; +\infty)$
Zerourile funcției	–
Intervalele de constanță ale semnului	$y > 0$ pe $\mathbb{R}$
Creşterea / descreşterea	Dacă $a > 1$, atunci funcția este crescătoare; dacă $0 < a < 1$, atunci funcția este descrescătoare.
Diferențiere	Diferențiabilă

Ecuații exponențiale

Pentru $a > 0$ şi $a \neq 1$ egalitatea $a^{x_1} = a^{x_2}$ se îndeplineşte atunci şi numai atunci, când $x_1 = x_2$.

Dacă $a > 0$ şi $a \neq 1$, atunci ecuația $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ este echivalentă cu ecuația $f(x) = g(x)$.

Inecuații exponențiale

Dacă $a > 1$, atunci inecuația $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ este echivalentă cu inecuația $f(x) > g(x)$; dacă $0 < a < 1$, atunci inecuația $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ este echivalentă cu inecuația $f(x) < g(x)$.

Logaritmul şi proprietățile lui

Logaritmul numărului pozitiv b în baza a, unde $a > 0$ şi $a \neq 1$, se numeşte exponentul puterii la care trebuie ridicat numărul a, pentru a obține numărul b.

Identitatea logaritmică fundamentală:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Dacă $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ şi $a \neq 1$, atunci sunt adevărate egalitățile:

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Dacă $x > 0$, $a > 0$ şi $a \neq 1$, atunci pentru orice $\beta \in \mathbb{R}$ se realizează egalitatea $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$.

Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, atunci este adevărată egalitatea

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, atunci se îndeplineşte egalitatea

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, atunci pentru orice $\beta \neq 0$ se realizează egalitatea $\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b$.

Proprietățile funcției $y = \log_a x$

Domeniul de definiții	$(0; +\infty)$
Domeniul valorilor (codomeniul)	$\mathbb{R}$
Zerourile funcției	$x = 1$
Intervalele de semn constant	Dacă a 1, atunci $y < 0$ pe intervalul $(0; 1)$, $y > 0$ pe intervalul $(1; +\infty)$; dacă $0 < a < 1$, atunci $y < 0$ pe intervalul $(1; +\infty)$, $y > 0$ pe intervalul $(0; 1)$
Creşterea / descreşterea	Dacă $a > 1$, atunci funcția este crescătoare; dacă $0 < a < 1$, atunci funcția este descrescătoare.
Diferențiere	Diferențiabilă

Ecuațiile logaritmice

Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, atunci ecuațiile de forma $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ sunt echivalent cu oricare din sistemele $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Inecuații logaritmice

Dacă $a > 1$, atunci inecuația $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Dacă $0 < a < 1$, atunci inecuația $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Derivatele funcțiilor logaritmică şi exponențială

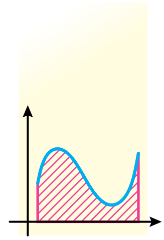
$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

§2 INTEGRALA ŞI APLICAREA EI



În acest paragraf veţi face cunoştinţă cu operaţia, inversă diferenţierii şi veţi învăţa proprietăţile acestei operaţii.
Veţi extinde clasa figurilor ariile căror le veţi putea calcula. Veţi face cunoştinţă cu noţiunea de „integrală determinată” şi veţi clarifica sensul ei geometric.

9. Primitiva

Voi ştiţi, că găsirea derivatei a unei funcții date se numeşte diferențiere. O operație inversă, adică găsirea unei funcții după derivata ei, se numeşte **integrare**.

Definiție. Funcția F se numeşte funcția primitivă (sau pe scurt primitiva) a funcției f pe intervalul I, dacă pentru toți $x \in I$ se efectuează egalitatea

$$F'(x) = f(x).$$

De exemplu, funcția $F(x) = x^2$ este primitiva funcției $f(x) = 2x$ pe intervalul $(-\infty; +\infty)$, deoarece pe $\mathbb{R}$ se efectuează egalitatea $(x^2)' = 2x$.

Deseori în problemele, legate de funcția primitivă, intervalul I este omis. În aceste cazuri, se consideră, că $I = (-\infty; +\infty)$. Astfel, funcția $F(x) = \cos x$ este primitiva funcției $f(x) = -\sin x$, deoarece se efectuează egalitatea $(\cos x)' = -\sin x$.

Să dăm mai un exemplu. Funcția $F(x) = \sqrt{x}$ este primitiva funcției $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pe intervalul $(0; +\infty)$, deoarece pe acest interval se efectuează egalitatea $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Să cercetăm funcțiile $y = x^2 + 1$ şi $y = x^2 - 2$. Fiecare din ele are una şi aceeaşi derivată $y = 2x$. Astfel, ambele funcții $y = x^2 + 1$ şi $y = x^2 - 2$ sunt primitivele funcției $y = 2x$. Este clar, că fiecare dintre funcțiile de forma $y = x^2 + C$, unde C – un număr arbitrar, este primitiva funcției $y = 2x$. Deci, problema aflării primitivei funcției are o mulțime de soluții.

Scopul integrării constă în aceea, ca pentru funcția dată să se găsească toate primitivele ei pe intervalul dat.

Corelațiile dintre toate primitivele funcției date, le arată următoarea teoremă.

Teorema 9.1 (proprietatea fundamentală a primitivei). ***Dacă funcția F este primitiva funcției f pe intervalul I şi C – număr arbitrar, atunci funcția***

$$y = F(x) + C$$

de asemenea este primitiva funcției f pe intervalul I.

Orice primitivă a funcției f pe intervalul I se poate reprezenta în forma $y = F(x) + C$, unde C – un număr oarecare.

Dacă funcția F este primitiva funcției f pe intervalul I, atunci însemnarea $F(x) + C$, unde C – număr arbitrar, se numeşte **aspectul general al primitivei** funcției f pe intervalul I.

Din proprietatea fundamentală a primitivei rezultă, că graficele oricăror două primitive ale funcției date, pot fi obținute unul din altul prin deplasarea paralelă de-a lungul axei ordonatelor (fig. 9.1).

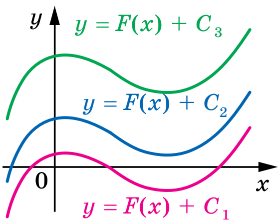


Fig. 9.1

Totalitatea tuturor primitivelor funcției $y = f(x)$ pe intervalul I se numeşte **integrală nedefinită** şi se notează

$$\int f(x)dx$$

(se citeşte: «integrala fe de ix de ix»).

În timpul rezolvării problemelor cu primitivă este convenabil de folosit tabelul prezentat în forzațul 3.

Problema 1. Găsiți aspectul general al primitivelor funcției $f(x) = x^5$.

Rezolvare: Folosind tabelul primitivelor, obținem, că una din primitivele funcției $f(x) = x^5$ este funcția $F(x) = \frac{x^6}{6}$. Atunci după teorema 9.1 scrierea $\frac{x^6}{6} + C$, unde C – număr arbitrar, este aspectul general al primitivelor. ◄

Din rezolvarea problemei 1 rezultă, că

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C.$$

Problema 2. Pentru funcția $f(x) = \cos x$ găsiți primitiva, graficul căreia trece prin punctul $M\left(\frac{\pi}{6}; 3\right)$.

Rezolvare: Folosind tabelul primitivelor, obținem, că primitiva căutată are forma $F(x) = \sin x + C$, unde C – număr arbitrar. Să găsim acest număr.

Din condiție rezultă, că $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3$. Atunci $\sin\frac{\pi}{6} + C = 3$. Având în vedere, că $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, găsim: $C = 2{,}5$.

Deci, primitiva căutată are forma $F(x) = \sin x + 2{,}5$. ◄

1. Care funcţie se numeşte primitiva funcţiei f pe intervalul I?
2. Formulaţi proprietatea fundamentală a primitivei.
3. Care scriere se numeşte aspectul general al primitivei?
4. Ce se numeşte integrală nedefinită? Cum se notează ea?

EXERCIŢII

9.1.° Determinați, este oare funcția F primitiva funcției f:
1) $F(x) = 3x^2 + x - 2$, $f(x) = 6x + 1$;
2) $F(x) = x^{-4}$, $f(x) = -4x^{-5}$ pe intervalul $(0; +\infty)$;
3) $F(x) = \sin x + 3$, $f(x) = \cos x + 3$;
4) $F(x) = 5^x$, $f(x) = 5^x \ln 5$.

9.2.° Demonstrați, că funcția F este primitiva funcției f pe intervalul I:
1) $F(x) = x^4 - 2x^2 + 6$, $f(x) = 4x^3 - 4x$, $I = (-\infty; +\infty)$;
2) $F(x) = \frac{1}{x^3}$, $f(x) = -\frac{3}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$;
3) $F(x) = 5 - 3\sqrt{x}$, $f(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$.

9.3.° Este oare funcția $F(x) = \frac{1}{x^2}$ primitiva funcției $f(x) = -\frac{2}{x^3}$ pe intervalul:
1) $(0; +\infty)$; 2) $(-2; 2)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $(-6; 0)$?

9.4.° Găsiți aspectul general al primitivelor funcțiilor:
1) $f(x) = 5$;
2) $f(x) = x$;
3) $f(x) = x^6$;
4) $f(x) = 2^x$;
5) $f(x) = \frac{1}{x^7}$ pe intervalul $(-\infty; 0)$;
6) $f(x) = \sqrt{x}$ pe intervalul $[1; +\infty)$;
7) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ pe intervalul $(-\infty; -3)$;
8) $f(x) = x^{-5}$ pe intervalul $(0; +\infty)$.

9.5.° Găsiți aspectul general al primitivei funcției:

1) $f(x) = 0$;
2) $f(x) = x^8$;
3) $f(x) = \frac{1}{3^x}$;
4) $f(x) = \frac{1}{x^{20}}$ pe intervalul $(0; +\infty)$;
5) $f(x) = \sqrt[7]{x}$ pe intervalul $(4; +\infty)$;
6) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ pe intervalul $[0,5; +\infty)$.

9.6.• Pentru funcția f găsiți primitiva, graficul căreia trece prin punctul dat:

1) $f(x) = x^2$, $A(-1; 3)$;
2) $f(x) = \sin x$, $B(\pi; -1)$;
3) $f(x) = e^x$, $C(0; -6)$.

9.7.• Pentru funcția f găsiți primitiva, graficul căreia trece prin punctul indicat:

1) $f(x) = x^3$, $M\left(1; \frac{5}{4}\right)$;
2) $f(x) = \cos x$, $N\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{2}\right)$;
3) $f(x) = 3^x$, $K\left(2; \frac{9}{\ln 3}\right)$.

9.8.• Pentru funcția f găsiți pe intervalul I primitiva F, care primeşte această valoarea în punctul dat:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{3}\right) = -9$;
2) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$;
3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (-\infty; 0)$, $F(-e^3) = 7$;
4) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$, $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$.

9.9.• Pentru funcția f găsiți pe intervalul I primitiva F, care primeşte valoarea dată în punctul dat:

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$, $F(16) = 10$;
2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{e}\right) = -2$;
3) $f(x) = 2^x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(5) = 1$.

9.10.•• Indicați în figura 9.2 graficul, care poate fi graficul primitivei funcției $f(x) = \cos 3$.

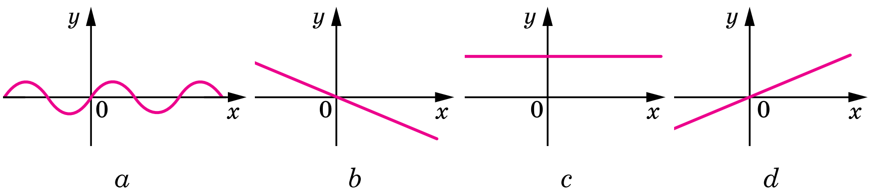


Fig. 9.2

9.11.•• Indicați graficul pe figura 9.3, care poate fi graficul primitivei funcției $f(x) = \ln 2$.

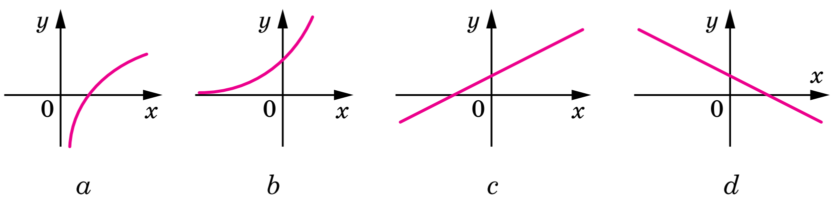


Fig. 9.3

9.12.•• Pentru funcția $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$ găsiți oricare două primitive, distanța între punctele corespunzătoare ale graficelor cărora (adică a punctelor cu abscisele egale) este egală cu 2.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

9.13. Rezolvați inecuația:

1) $\log_2 (1,5x - 3) \leqslant 1 + 2\log_2 0,3$;

2) $\log_{0,4} (3,5 - 5x) \geqslant 2\log_{0,4} 0,2 - 1$.

9.14. Simplificați expresia:

1) $\dfrac{2\sin(\pi - \alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\alpha \sin(\pi + \alpha)}$;

2) $\dfrac{2\cos^2 \alpha}{1 + \sin(\pi + \alpha)} + 2\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

10. Regulile de aflare ale primitivei

În timpul găsirii derivatei funcției voi ați folosit regulile de diferențiere. În acest punct noi vom examina regulile găsirii primitivelor.

Teorema 10.1. ***Dacă funcțiile F şi G sunt corespunzător primitivele funcțiilor f şi g pe intervalul I, atunci pe acest interval funcția $y = F(x) + G(x)$ este primitiva funcției $y = f(x) + g(x)$.***

Demonstrație. Din condiție rezultă, că pentru orice $x \in I$ se efectuează egalitățile $F'(x) = f(x)$ şi $G'(x) = g(x)$. Atunci pentru toți x din intervalul I avem:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Deci, funcția $y = F(x) + G(x)$ este primitiva funcției $y = f(x) + g(x)$ pe intervalul I. ◄

Din teorema 10.1 rezultă, că

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C,$$

Unde C – număr arbitrar.

Analogic se poate de demonstrat, că

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + C.$$

Teorema 10.2. ***Dacă funcția F este primitiva funcției f pe intervalul I şi k – un număr arbitrar, atunci pe acest interval funcția $y = kF(x)$ este primitiva funcției $y = kf(x)$.***

Acum se poate scrie:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C,$$

unde C – număr arbitrar.

Problema 1. Găsiți aspectul general al primitivelor funcției $f(x) = x^2 + \cos x$.

Rezolvare: Primitiva funcției $y = x^2$ este funcția $y = \frac{x^3}{3}$. Primitiva funcției $y = \cos x$ este funcția $y = \sin x$.

Folosindu-ne de teorema 10.1 obținem, că funcția $y = \frac{x^3}{3} + \sin x$ este primitiva funcției f, date în condiție. Atunci scrierea $\frac{x^3}{3} + \sin x + C$ este aspectul general al funcției f. ◄

Problema 2. Pentru funcția $f(x) = 5\sin x$ găsiți primitiva F, care satisface condiția $F(0) = 0$.

Rezolvare: Primitiva funcției $y = \sin x$ este funcția $y = -\cos x$. Folosind teorema 10.2, obținem, că funcția $y = -5\cos x$ este primitiva funcției $y = 5\sin x$, date în condiție. Atunci, există aşa un număr C, că $F(x) = -5\cos x + C$. Găsim numărul C din condiția $F(0) = 0$. Avem: $-5\cos 0 + C = 0$. De unde $C = 5$.

Răspuns: $F(x) = -5\cos x + 5$. ◀

Problema 3. Viteza mişcării unui punct material pe axa de coordonate variază în conformitate cu legea $v(t) = 3t^2 + 4t$. Găsiți legea mişcării $y = s(t)$, dacă $s(0) = 3$ m (deplasarea se măsoară în metri, timpul – în secunde).

Rezolvare: Funcția $y = s(t)$ este primitiva funcției $y = v(t)$ pe intervalul $[0; +\infty)$. Atunci se poate scrie:

$$s(t) = t^3 + 2t^2 + C,$$

unde C – număr arbitrar. Găsim numărul C din condiția $s(0) = 3$. Avem:

$$t^3 + 2t^2 + C = 3, \quad \text{de aici } C = 3.$$

Deci, legea mişcării căutată se dă prin formula

$$s(t) = t^3 + 2t^2 + 3.$$ ◀

1. Cum de găsit primitiva funcţiei $y = f(x) + g(x)$?
2. Cum de găsit primitiva funcţiei $y = kf(x)$, unde k – un număr oarecare?

EXERCIŢII

10.1.° Găsiți aspectul general al primitivelor funcției:

1) $f(x) = 4 - 2x$;
2) $f(x) = 3x^2 - x + 5$;
3) $f(x) = 5\sin x + \cos x$;
4) $f(x) = 5e^x - 2 \cdot 3^x$;
5) $f(x) = \frac{6}{x} - x^3$ pe intervalul $(-\infty; 0)$;
6) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + x^3$ pe intervalul $(0; +\infty)$;
7) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}$ pe intervalul $(-\infty; 0)$;
8) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{6}{x^5}$ pe intervalul $(0; +\infty)$.

10.2.° Găsiți aspectul general al primitivelor funcției:

1) $f(x) = x + 3$; 2) $f(x) = x^2 + 4x - 1$; 3) $f(x) = \frac{1}{2}e^x + 2^x \ln 2$;

4) $f(x) = \dfrac{9}{\cos^2 x} - 3\sin x$ pe intervalul $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$;

5) $f(x) = 5\sqrt[4]{x} - \dfrac{3}{x}$ pe intervalul $(0; +\infty)$;

6) $f(x) = \dfrac{9}{x^{10}} + \dfrac{8}{x^9}$ pe intervalul $(-\infty; 0)$.

10.3.• Pentru funcția f pe intervalul I găsiți primitiva F, care satisface condiția dată:

1) $f(x) = 1 - 2x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(3) = 2$;

2) $f(x) = 3x^2 - 4x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(1) = 4$;

3) $f(x) = 4 - \dfrac{1}{x^2}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\dfrac{1}{4}\right) = 1$;

4) $f(x) = (2 - 3x)^2$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(1) = 0$.

10.4.• Pentru funcția f pe intervalul I găsiți primitiva F, graficul căreia trece prin punctul dat:

1) $f(x) = 3 - 6x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $A(-1; 0)$;

2) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$, $I = (-\infty; +\infty)$, $B(1; 5)$;

3) $f(x) = 2x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$, $C(4; 10)$;

4) $f(x) = 2\sin x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $D\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$.

10.5.• Pentru funcția $f(x) = 4x^3 + 4x$ găsiți primitiva F, unul din zerourile căreia este egal cu -1. Găsiți restul zerourilor a acestei primitive.

10.6.• Pentru funcția $f(x) = x^2 - 12$ găsiți primitiva F, unul din zerourile căreia este egal cu 3.

10.7.•• Funcțiile F_1 şi F_2 sunt primitivele funcției $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$ pe intervalul $(-\infty; +\infty)$. Graficul funcției F_1 trece prin punctul $A(1; 2)$, iar al funcției F_2 – prin punctul $B(0; 5)$. Graficul căreia dintre funcțiile F_1 sau F_2, este situat mai sus?

10.8.•• Funcțiile F_1 şi F_2 sunt primitivele funcției $f(x) = (2x - 1)^2$ pe intervalul $(-\infty; +\infty)$. Graficul funcției F_1 trece prin punctul $A(2; 6)$, iar al funcției F_2 – prin punctul $B(-1; 1)$. Graficul căreia dintre funcții F_1 sau F_2, este situat mai sus?

10.9.•• Viteza punctului material care se deplasează de-a lungul axei de coordonate variază în conformitate cu legea $v(t) = t^2 + 2t - 3$. Scrieți formula dependenței coordonatelor ei de timp, dacă în momentul inițial $t = 0$ punctul se afla în originea de coordonate (viteza mişcării se măsoară în metri pe secundă).

10.10.•• Corpul se deplasează de-a lungul axei de coordonate cu o viteză, care în orice moment t se determină după formula $v(t) = 6t^2 + 1$. Găsiți formula care exprimă dependența coordonatei punctului de timp, dacă în momentul $t = 3$ corpul se găsea la distanța de 10m de la originea de coordonate (viteza mişcării se măsoară în metri pe secundă).

10.11.•• Pentru funcția $f(x) = -2x + 5$ găsiți aşa o primitivă, ca graficul ei să aibă doar un singur punct comun cu dreapta $y = 2$.

10.12.•• Pentru funcția $f(x) = x + 1$ găsiți aşa o primitivă, ca graficul ei să aibă doar un singur punct comun cu dreapta $y = -4$.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

10.13. Rezolvați ecuația:

1) $\cos^2 x - \cos 2x = \sin x$;

2) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos^2(2\pi - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 + \sin x$.

10.14. Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x) = (5 - 2x)^{\frac{1}{3}} + \log_3(x^2 + 2{,}5x)$;

2) $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \log_{0,4}(1 - x)$.

11. Aria trapezului curbiliniu. Integrala determinată

Analizăm funcția f, care este continuă pe intervalul $[a; b]$ şi primeşte valori nenegative. Figura, limitată de graficul funcției f şi dreptele $y = 0$, $x = a$ şi $x = b$ se numeşte *trapez curbiliniu.*

În figura 11.1sunt prezentate exemple de trapeze curbilinii.

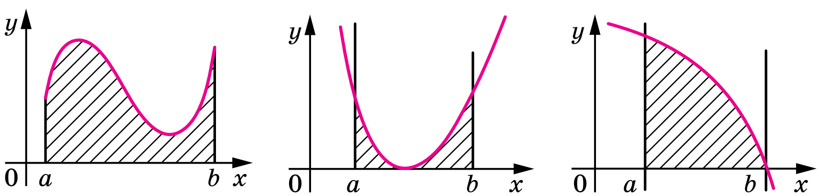


Fig. 11.1

Să cercetăm teorema, care dă posibilitatea de a calcula aria trapezului curbiliniu.

Teorema 11.1. ***Aria S a trapezului curbiliniu limitat de graficul funcţiei $y = f(x)$ şi dreptele $y = 0$, $x = a$ şi $x = b$ ($a < b$), se poate calcula după formula***

$$S = F(b) - F(a),$$

unde F – oricare primitivă a funcţiei f pe intervalul $[a; b]$.

Problema 1. Găsiţi aria S a figurii mărginită de graficul funcţiei $f(x) = \sin x$ şi dreptele $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ şi $x = \frac{\pi}{2}$.

Rezolvare: În figura 11.2 este reprezentat **trapezul curbiliniu**, aria cărui trebuie de-o găsit.

Una din primitivele funcţiei $f(x) = \sin x$ pe intervalul $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ este funcţia $F(x) = -\cos x$. Atunci $S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Răspuns: $\frac{1}{2}$. ◀

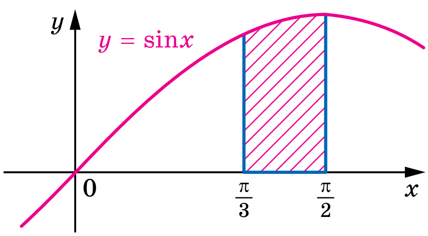


Fig. 11.2

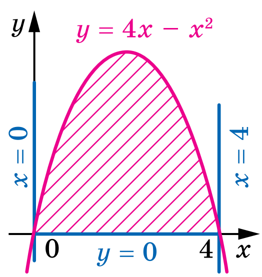


Fig. 11.3

Problema 2. Găsiţi aria S a figurii limitate de graficul funcţiei $f(x) = 4x - x^2$ şi dreapta $y = 0$.

Rezolvare: Graficul funcţiei f intersectează dreapta $y = 0$ în punctele $x_1 = 0$ şi $x_2 = 4$ (fig. 11.3). Atunci figura aria cărei trebuie de-o găsit este trapezul curbiliniu, limitat de graficul funcţiei f şi de dreptele $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

Una din primitivele funcţiei f pe intervalul $[0; 4]$ este funcţia $F(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$.

Atunci

$$S = F(4) - F(0) = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = \frac{32}{3}.$$

Răspuns: $\frac{32}{3}$. ◄

Definiție. ***Fie F – primitiva funcției f pe intervalul I, numerele a şi b, unde a < b, aparțin intervalului I. Diferența F(b) – F(a) se numeşte integrala determinată a funcției f pe intervalul [a; b].***

Integrala definită a funcției f pe intervalul $[a; b]$ se notează $\int_a^b f(x)dx$ (se citeşte «integrala de la a până la b fe de ix de ix»). Deci,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),} \qquad (1)$$

unde F – primitivă arbitrară a funcției f pe intervalul $[a; b]$.

De exemplu, funcția $F(x) = x^3$ este primitiva funcției $f(x) = 3x^2$ pe intervalul $(-\infty; +\infty)$. Atunci pentru numere arbitrare a şi b, unde $a < b$ se poate scrie:

$$\int_a^b 3x^2 dx = F(b) - F(a) = b^3 - a^3.$$

Menționăm, că valoarea diferenței $F(b) - F(a)$ nu depinde de aceea care primitivă a funcției f am ales. Într-adevăr, fiecare primitivă G a funcției f pe intervalul I se poate scrie în forma $G(x) = F(x) + C$, unde C – număr arbitrar. Atunci

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Egalitatea (1) se numeşte **formula lui Newton-Leibniz**.

Deci, pentru calcularea integralei determinate $\int_a^b f(x)dx$ după formula lui Newton-Leibniz trebuie:

1) de găsit orice primitivă F a funcției f pe intervalul $[a; b]$;
2) de calculat valoarea primitivei F în punctele $x = b$ şi $x =$ a;
3) de găsit diferența $F(b) - F(a)$.

În timpul calculării integralelor determinate, diferența $F(b) - F(a)$ se notează $F(x)\Big|_a^b$.

Folosind o astfel de însemnare, să calculăm, de exemplu, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx$.

Avem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}.$$

Problema 3. Calculaţi $\int_1^2 (x^4 + x^2 - 2)dx$.

Rezolvare: Avem:

$$\int_1^2 (x^4 + x^2 - 2)dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} - 2\cdot 1\right) = 6\frac{8}{15}.$$

Răspuns: $6\frac{8}{15}$. ◀

Formula lui Newton-Leibniz permite să stabilim legătura între integrala determinată şi aria S a trapezului curbiliniu, limitat de graficul funcţiei $y = f(x)$ şi dreptele $y = 0$, $x = a$ şi $x = b$ $(a < b)$.

Folosind teorema 11.1 se poate scrie:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$

Această formulă exprimă sensul **geometric al integralei determinate.**

?

1. Care figură se numeşte trapez curbiliniu?
2. După ce formulă se calculează aria trapezului curbiliniu?
3. Ce se numeşte integrală determinată?
4. Scrieţi formula lui Newton-Leibniz.
5. În ce constă sensul geometric al integralei determinate?

EXERCIȚII

11.1.° Găsiți aria trapezului curbiliniu, prezentat în figura 11.4.

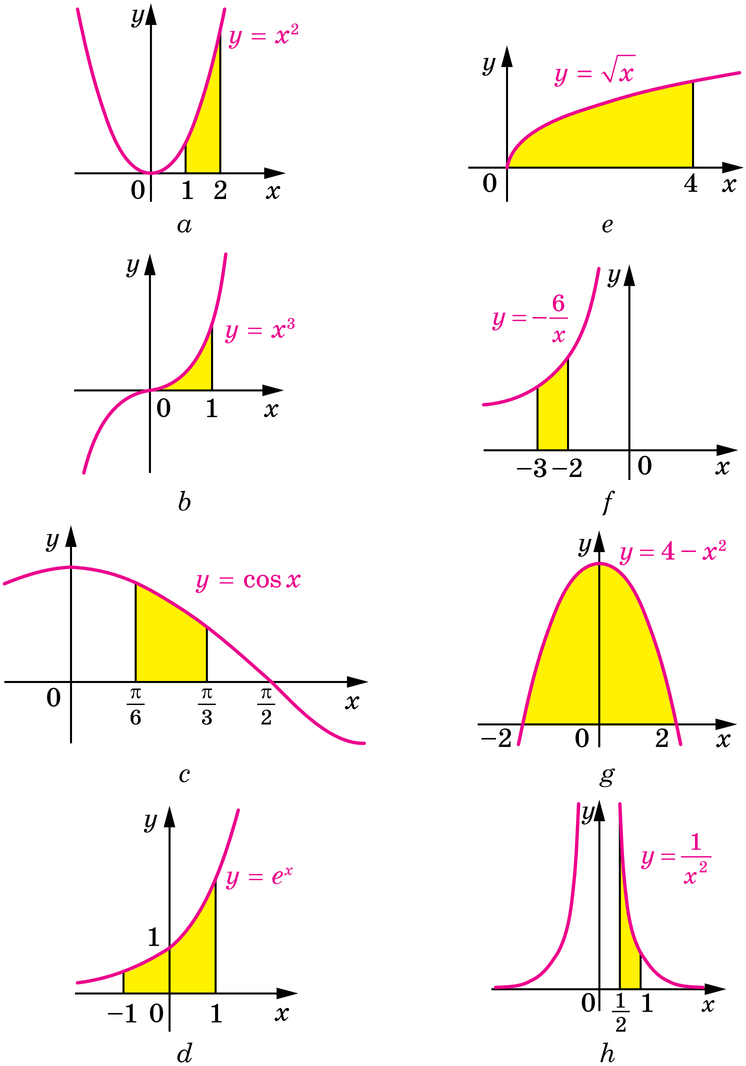


Fig. 11.4

11.2.° Găsiți aria trapezului curbiliniu, prezentat în figura 11.5.

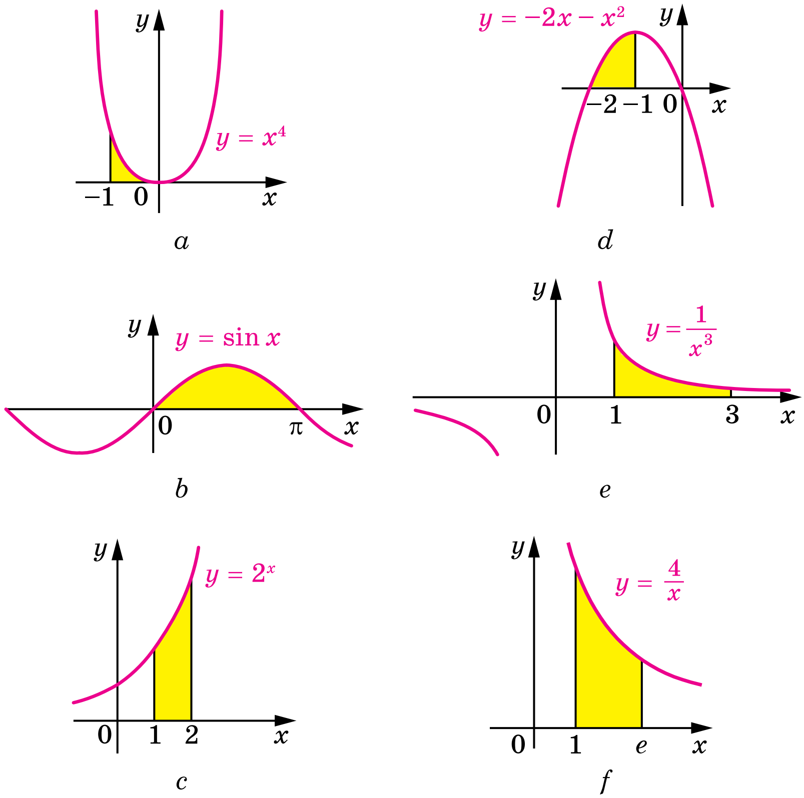


Fig. 11.5

11.3.° Calculați integrala determinată:

1) $\int_5^7 x\,dx$;

2) $\int_3^8 dx$;

3) $\int_{-3}^0 x^2\,dx$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$;

5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

6) $\int_{16}^{100} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

7) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x}$;

8) $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2}$;

9) $\int_{-2}^3 3^x\,dx$.

11.4.° Calculaţi integrala determinată:

1) $\int_{-4}^{-2} 2dx$;
2) $\int_{1}^{2} x^3 dx$;
3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$;
4) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^4}$;
5) $\int_{0}^{4} e^x dx$;
6) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x}$.

11.5.• Găsiţi aria trapezului curbiliniu, limitat:

1) de parabola $y = x^2 + 1$ şi dreptele $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;
2) de cosinusoida $y = \cos x$ şi dreptele $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$;
3) de graficul funcţiei $y = -x^3$ şi dreptele $y = 0$, $x = -2$;
4) de parabola $y = 3 - 2x - x^2$ şi dreptele $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$;
5) de hiperbola $y = \frac{1}{2x}$ şi dreptele $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$;
6) de parabola $y = 2x - x^2$ şi axa absciselor.

11.6.• Găsiţi aria trapezului curbiliniu, limitat de liniile:

1) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$;
2) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;
3) $y = -\frac{8}{x}$, $y = 0$, $x = -4$, $x = -2$.

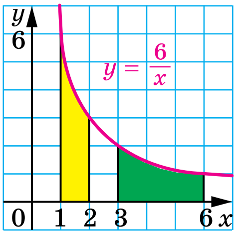


Fig. 11.6

11.7.• Demonstraţi, că trapezele curbilinii prezentate în figura 11.6 sunt egale.

11.8.• Calculaţi integrala determinată:

1) $\int_{-4}^{-2} (2x + 4)dx$;
2) $\int_{0}^{6} (3x^2 - x)dx$;
3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x + 2\cos x)dx$;
4) $\int_{1}^{3} (4x^3 - 4x + 3)dx$;
5) $\int_{-2}^{1} (x - 3)^2 dx$;
6) $\int_{1}^{e} \left(\frac{1}{x} - x\right)dx$.

11.9.• Calculaţi integrala determinată:

1) $\int_{-1}^{1} (1 - 5x^4)dx$;
2) $\int_{1}^{4} \left(\frac{4}{x^2} + 2x - 3x^2\right)dx$;
3) $\int_{0}^{1} (2x - 1)^2 dx$;
4) $\int_{1}^{4} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)dx$.

11.10.•• Găsiţi aria trapezului curbiliniu, limitat de liniile:

1) $y = x^2$, $y = 4$;
2) $y = 2x^2$, $y = 2x$;
3) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$;
4) $y = \frac{4}{x}$, $y = 1$, $x = 1$;
5) $y = \frac{4}{x}$, $y = 4$, $x = 4$;
6) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$;
7) $y = 2 + x - x^2$, $y = 2 - x$;
8) $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$;
9) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$;
10) $y = -x^2 + 2x$, $y = x^2$;
11) $y = x^3$, $y = x^2$;
12) $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$;
13) $y = \frac{7}{x}$, $x + y = 8$;
14) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

11.11.•• Găsiţi aria trapezului curbiliniu, limitat:

1) de graficul funcţiei $y = x^3$ şi dreptele $y = 8$, $x = 1$;
2) de parabola $y = 0{,}5x^2$ şi dreapta $y = -x$;
3) de parabola $y = 4 - x^2$ şi dreapta $y = 3$;
4) de parabola $y = 6 + x - x^2$ şi dreapta $y = 6 - 2x$;
5) de parabolele $y = x^2 - 4x + 4$ şi $y = 4 - x^2$;
6) de hiperbola $y = \frac{3}{x}$ şi dreptele $y = 3$, $x = 3$;
7) de graficul funcţiei $y = e^{-x}$ şi dreptele $y = e$, $x = 0$;
8) de hiperbola $y = \frac{5}{x}$ şi dreapta $x + y = 6$.

11.12.•• Pentru ce valori a lui a se îndeplineşte inecuaţia:

1) $\int\limits_0^a (4 - 2x)\,dx < 3$, unde $a > 0$; 2) $\int\limits_{\log_{0,2} 6}^{a} 0{,}2^x\,dx > \frac{19}{\ln 0{,}2}$, unde $a > \log_{0,2} 6$?

11.13.•• Pentru ce valori ale lui a, mai mari decât $\frac{1}{2}$, se îndeplineşte inegalitatea $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{a} \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) dx > 1{,}5$?

11.14.* Pentru ce valori ale lui a aria figurii, limitată de liniile $y = x^2$, $y = 0$, $x = a$, este egală cu 9?

11.15.* Pentru ce valori ale lui a aria figurii, limitate de liniile $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = a$, este egală cu 8?

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

11.16. Calculaţi valoarea expresiei:

1) $\left(4^{-0,25}-2^{0,5}\right)\left(4^{-0,25}+\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$;

2) $\dfrac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}+1\right)\left(\sqrt{6}-1\right)}$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-\dfrac{5}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^3}$.

11.17. Găsiţi suma soluţiilor întregi ale inecuaţiei $x^2-3x<4$.

«CU INTELECTUL EL A DEPĂŞIT SPECIA UMANĂ»

Aceste cuvinte măreţe sunt scrise de urmaşi despre remarcabilul savant englez fizicianul şi matematicianul Isaac Newton. În istoria ştiinţei, alături I. Newton se află o altă figură gigantă, a savantului german Gottfried Wilhelm Leibniz, care a lăsat în urmă sa o urmă nepieritoare în filozofie, matematică, drept, logică, diplomaţie, istorie, politologie. Printre marea moştenire ştiinţifică a acestor geniali savanţi, un loc aparte, aparţine realizării legate de crearea calculului diferenţial şi integral – ştiinţei despre derivate şi primitive.

Isaac Newton
(1643–1727)

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646–1716)

Merită de subliniat faptul, că Newton şi Leibniz şi-au creat propriile teorii în acel timp în care noţiunile şi termenii obişnuiţi pentru noi nu existau sau nu aveau conţinut exact. Încercaţi să vă imaginaţi un manual de matematică care nu are termenii «mulţime», «funcţie», «număr real» etc. Mai mult decât atât, multe denumiri moderne comode atunci nu au obţinut o aplicare general acceptată. Unele din ele, lui Newton şi Leibniz, a trebuit să le inventeze, să le generalizeze şi să le adapteze la necesităţi. De exemplu, Leibniz a început să noteze operaţia înmulţire cu un punct (înainte se foloseau simbolurile: $\square$, ×, ∗, M etc); operaţia de împărţire – cu două puncte (înainte des se folosea litera D); Newton a extins notaţia pentru putere a^n pentru cazul valorilor întregi şi fracţionate ale lui n, iar notaţia $\sqrt{x}$ a generalizat-o până la $\sqrt[n]{x}$. Termenul «funcţie» şi simbolul integralei «$\int$» sunt întâlnite pentru prima dată în lucrările lui Leibniz.

În general, istoria dezvoltării matematicii poate fi împărţită în două perioade: înainte şi după apariţia derivatei şi integralei. Descoperirile lui Newton şi Leibniz au permis savanţilor să rezolve rapid şi uşor problemele care au fost considerate complet inaccesibile.

ÎNSĂRCINAREA NR. 2 „CONTROLEAZĂ-TE” ÎN FORMĂ TEST

1. Care din funcțiile date este primitiva funcției $f(x) = x^4$?

A) $F(x) = 4x^3$; B) $F(x) = \frac{x^5}{5}$; C) $F(x) = x^5$; D) $F(x) = \frac{x^5}{4}$.

2. În care dintre următoarele cazuri, funcția F este primitiva functiei f?

A) $f(x) = \sin x$, $F(x) = \cos x$; C) $f(x) = x$, $F(x) = 1$;
B) $f(x) = 2^x$, $F(x) = 2^x \ln 2$; D) $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$.

3. Arătați aspectul general al primitivei funcției $f(x) = \frac{4}{x^5}$ pe intervalul $(0; +\infty)$.

A) $-\frac{1}{x^4}$; B) $-\frac{1}{x^4} + C$; C) $-\frac{20}{x^6} + C$; D) $-\frac{2}{3x^6} + C$.

4. Care din funcțiile date este primitiva funcției $f(x) = \frac{1}{x}$ pe intervalul $(-\infty; -1]$?

A) $F(x) = -1 - \ln x$; C) $F(x) = 1 - \ln(-x)$;
B) $F(x) = \ln x + 1$; D) $F(x) = \ln(-x) - 1$.

5. Arătați aspectul general al primitivei funcției $f(x) = e^x - 4x^3$ pe intervalul $(-\infty; +\infty)$.

A) $e^x + C$; B) $e^x - 12x^2 + C$; C) $\frac{e^{x+1}}{x+1} - x^4 + C$; D) $e^x - x^4 + C$.

6. Funcția F este primitiva funcției $f(x) = x - 3$. Prin care din următoarele puncte trece graficul funcției F, dacă $F(2) = 5$?

A) $(0; 8)$; B) $(-2; 17)$; C) $(1; 5{,}5)$; D) $(4; 4)$.

7. Care din funcțiile date este primitiva funcției $f(x) = 7^x$?

A) $F(x) = \frac{7^x}{\ln 7}$; C) $F(x) = 7^x$;
B) $F(x) = 7^x \ln 7$; D) $F(x) = \frac{7^{x+1}}{x+1}$.

8. Calculați integrala $\int_0^3 x^2 dx$.

A) 27; B) 9; C) 6; D) 3.

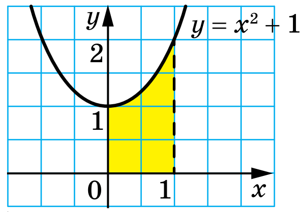
9. Calculați integrala $\int_1^5 \frac{dx}{x^2}$.

A) 0,2; B) 0,8; C) –0,2; D) –0,8.

10. Calculați integrala $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$.

A) 0; B) 1; C) 2; D) –1.

11. Calculați aria figurii vopsite care este prezentată în figură.



A) $\frac{4}{3}$; C) 1;

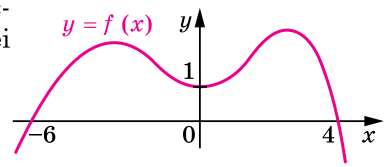
B) $\frac{1}{3}$; D) 2.

12. Calculați integrala $\int_{-1}^{4}(f(x)+1)dx$, dacă $\int_{-1}^{4}f(x)dx=2$.

A) 3; B) 5; C) 7; D) 9.

13. În figură este prezentat graficul funcției $y=f(x)$. Găsiți valoarea expresiei

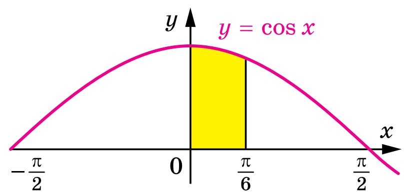
$$\int_{-6}^{0}f'(x)dx-\int_{0}^{4}f'(x)dx.$$



A) 0; C) 1;

B) 2; D) nu este posibil de găsit.

14. Calculați aria figurii vopsite care este prezentată în figură.



A) $\frac{\neq}{6}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

B) $\frac{1}{2}$; D) 1.

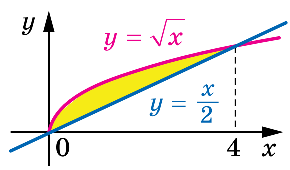
15. Găsiți aria trapezului curbiliniu, limitat de liniile $y=6x-x^2$, $y=0$, $x=1$, $x=3$.

A) $12\frac{2}{3}$; B) $14\frac{1}{3}$; C) $14\frac{2}{3}$; D) $15\frac{1}{3}$.

16. Valoarea căreia dintre integralele prezentate este egală cu aria figurii vopsite, prezentată în figură?

A) $\int_{0}^{4}\frac{x}{2}dx$; C) $\int_{0}^{4}\left(\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right)dx$;

B) $\int_{0}^{4}\sqrt{x}\,dx$; D) $\int_{0}^{4}\left(\frac{x}{2}-\sqrt{x}\right)dx$.



17. Calculați aria figurii, limitată de liniile $y=x^2$, $y=2-x$.

A) 3,5; B) 4; C) 4,5; D) 5.

18. Pentru ce valoare a lui a, dreaptă $x=a$ împarte figura limitată de graficul funcției $y=\frac{10}{x}$ şi dreptele $y=0$, $x=2$, $x=8$, în două figuri egale?

A) 4; B) 5; C) 10; D) aşa valoare nu există.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 2

Primitiva

Funcția F se numeşte funcție primitivă (sau pe scurt primitiva) a funcției f pe intervalul I, dacă pentru toți $x \in I$ se îndeplineşte egalitatea $F'(x) = f(x)$.

Proprietatea fundamentală a primitivei

Dacă funcția F este primitiva funcției f pe intervalul I şi C – număr arbitrar, atunci funcția $y = F(x) + C$ de asemenea este primitiva funcției f pe intervalul I.

Orice primitivă a funcției f pe intervalul I se poate da în forma $y = F(x) + C$, unde C – un număr oarecare.

Integrala nedefinită

Totalitatea tuturor primitivelor funcției $y = f(x)$ pe intervalul I se numeşte integrală nedefinită a ei şi se scrie $\int f(x)dx$.

Regulile de găsire a primitivei

Dacă funcțiile F şi G sunt primitivele funcțiilor f şi g pe intervalul I, atunci pe acest interval funcția $y = F(x) + G(x)$ este primitiva funcției $y = f(x) + g(x)$.

Dacă funcția F este primitiva funcției f pe intervalul I şi k – un număr oarecare, atunci pe acest interval funcția $y = kF(x)$ este primitiva funcției $y = kf(x)$.

Aria trapezului curbiliniu

Aria S a trapezului curbiliniu, limitat de graficul funcției $y = f(x)$ şi dreptele $y = 0$, $x = a$ şi $x = b$ $(a < b)$ se poate calcula după formula $S = F(b) - F(a)$, unde F – oricare primitivă a funcției f pe intervalul $[a; b]$.

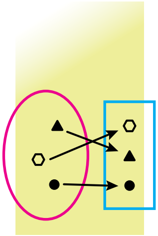
Integrala determinată

Fie funcția F – primitiva funcției f pe intervalul I, numerele a şi b, unde $a < b$, aparțin intervalului I. Diferența $F(b) - F(a)$ se numeşte integrala determinată a funcției f pe intervalul $[a; b]$ şi se notează $\int_a^b f(x)dx$.

Formula Newton-Leibniz

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, unde F o primitivă arbitrară a funcției f pe intervalul $[a; b]$.

§3 ELEMENTE DE COMBINATORICĂ, A TEORIEI PROBABILITĂȚII ȘI DE STATISTICĂ MATEMATICĂ



În acest paragraf veți învăța metode combinatorice, de calcul a cantității diferitor mulțimi, formate după anumite reguli; cu determinarea clasică a probabilității unui eveniment întâmplător; veți începe a învăța statistica matematică - știința despre culegerea datelor și a prelucrării, și analizei lor.

12. Regulile combinatorice pentru sumă și produs

În câte moduri elevii din clasa voastră pot sta unul după altul în rând la bufet? În câte moduri se poate de ales în clasa voastră şeful clasei şi adjunctul lui? În câte moduri pot fi distribuite medaliile de aur, argint şi bronz la campionatul mondial de fotbal?

Răspunzând la aceste întrebări, trebuie de calculat câte combinații diferite, formate după anumite reguli, se pot face din elementele unei mulțimi finite de date. Capitolul de matematică, care studiază metodele de rezolvare a astfel de probleme, se numeşte **combinatorică.**

La baza rezolvării majorității problemelor combinatorice sunt două reguli: regula sumei şi regula produsului.

Să analizăm aşa un exemplu. Pe un turist l-au interesat 5 trasee turistice din regiunea Herson şi 7 trasee turistice din Carpați. Să aflăm în câte moduri îşi poate organiza el vacanța sa, având timp doar pentru un singur traseu.

Deoarece de tot sunt $5 + 7 = 12$ trasee diferite, atunci unul dintre ele poate fi ales în 12 moduri.

Deci, pentru calculul numărului total de trasee, am adunat numărul de trasee din regiunea Herson şi numărul de trasee din Carpați. Această metodă este numită **regula combinatorică a sumei.**

Revenim la exemplul cu alegerea traseului. Dacă turistul dispune de timp pentru două trasee şi doreşte să meargă mai întâi în regiunea Herson şi apoi în Carpați, îşi poate organiza vacanța în 35 moduri. De fapt, dacă de ales un traseu prin regiunea Herson, atunci perechea lui poate fi oricare din cele 7 trasee carpatice. Deoarece trasee din regiunea Herson sunt 5, atunci numărul de perechi (trasee din regiunea Herson; trasee din Carpați) este egal cu $7 + 7 + 7 + 7 + 7$, adică este egal cu produsul $7 \cdot 5 = 35$. Această metodă este numită **regula combinatorică a produsului.**

Aceste considerații ilustrează următorul tabel.

		Trasee din Carpați						
		1	2	3	4	5	6	7
Trasee prin Herson	1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
	2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
	3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
	4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
	5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)

Problema 1. 1. Câte numere din trei cifre pot fi alcătuite din cifrele 1, 2, 3 astfel încât în fiecare număr toate cifrele să fie diferite?

Rezolvare: Prima cifră în acest număr din trei cifre poate fi oricare cifră din 1, 2 sau 3. Avem 3 variante.

Deoarece toate cifrele în acest număr din trei cifre trebuie să fie diferite, atunci indiferent care ar fi prima cifră, a două cifră a numărului poate fi orice cifră dintre cele două rămase. Deci, pentru fiecare dintre cele trei variante de alegere a primei cifre există 2 variante pentru a doua cifră. Folosind regula produsului, avem că primele două cifre ale numărului din trei cifre pot fi alese în $3 \cdot 2 = 6$ moduri.

Deoarece toate cifrele din numărul de trei cifre trebuie să fie diferite, atunci este clar că primele două cifre ale numărului determină în mod univoc ultima a treia cifră. De aceea din cifrele 1, 2, 3 pot fi alcătuite $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ numere de trei cifre, astfel încât în fiecare număr toate cifrele să fie diferite.

Răspuns: 6. ◄

În timpul rezolvării problemei 1, a trebuit să calculăm produsul $3 \cdot 2 \cdot 1$. În problemele de combinatorică produsul numerelor consecutive naturale de la 1 până la n se întâlnesc atât de des încât a primit denumirea specială «**factorial**» şi se notează

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

(scrierea «$n!$» se citeşte «ne factorial»).

De exemplu, $\mathbf{3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6}$, $\mathbf{5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120}$.

Problema 2. Pentru a proteja informațiile din calculator se foloseşte parola – o succesiune de litere latine cu lungimea de la 3 până la 5 simboluri (parola poate conține mai multe litere identice). Câte parole diferite se pot crea folosind **26** de litere latine?

Rezolvare: Cercetăm numărul de parole diferite din trei simboluri. Primul simbol poate fi ales oricare literă. Deci, avem 26 de variante. Folosind regula produsului, avem, că există 26^3 parole diferite din trei simboluri.

Raţionând analogic, se poate de stabilit, că numărul de parole din patru simboluri este egal cu 26^4, iar parole cu cinci simboluri – 26^5.

Astfel, folosind regula sumei, obţinem, că numărul total de parole alcătuieşte $\mathbf{26^3 + 26^4 + 26^5}$.

Răspuns: $\mathbf{26^3 + 26^4 + 26^5}$. ◄

?

1. Daţi exemple de probleme, rezolvarea cărora studiază combinatorica.
2. Ce se numeşte factorialul numărului? Cum el se notează?

EXERCIŢII

12.1.° Din oraşul A la oraşul B sunt 4 căi, iar din oraşul B la oraşul C trec 3 căi (fig. 12.1). În câte modalităţi se poate ajunge din oraşul A în oraşul C?

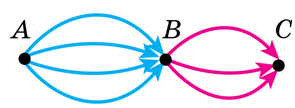


Fig. 12.1.

12.2.° Spre vârful muntelui sunt deschise 5 itinerare. În câte moduri alpinistul poate urca şi coborî de pe munte? Răspundeţi la această întrebare cu condiţia că urcarea şi coborârea are loc pe marşrute diferite.

12.3.° În cafenea se oferă un meniu din 3 mâncăruri de felul întâi, 6 – de felul doi şi 5 – de felul trei. Câte modalităţi sunt pentru a alege masa de prânz din trei feluri de mâncăruri (câte o mâncare de fiecare fel)?

12.4.° Câte numere din cinci cifre se pot alcătui din cifrele 1, 2, 3, 4, 5 astfel, încât în fiecare număr toate cifrele să fie diferite?

12.5.° Câte numere din patru cifre se pot scrie cu ajutorul cifrelor 1, 2, 3, 4, 5, 6?

12.6.° Câte numere din trei cifre există, toate cifrele cărora să fie impare?

12.7.• Să cercetăm silabele din două litere, prima din care este consoană, iar a doua – vocală. Câte astfel de silabe diferite se pot alcătui din literele cuvântului:

1) sabie; 2) pantaloni?

12.8.• În coş sunt 10 mere şi 7 pere. Anton alege măr sau pară. După aceasta Maxim alege măr şi pară. În ce caz Maxim are mai multe posibilități pentru alegere: când Anton a luat măr sau când Anton a lut pară?

12.9.• În figura 12.2 este arătată schema drumurilor, care duc de la oraşul A la oraşul B. În câte moduri se poate ajunge din oraşul A în oraşul B?

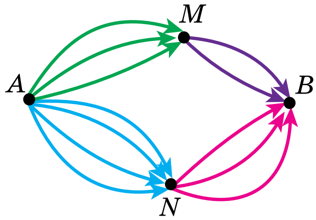


Fig. 12.2.

12.10.•În cafenea se oferă un meniu din 3 salate diferite, 6 diferite feluri de mâncare din carne şi 5 deserturi diferite. Câte moduri există pentru a alege masa de prânz din două feluri diferite de mâncare?

12.11.• Câte numere din cinci cifre, toate cifrele în care să fie diferite, se poate de alcătuit din cifrele 1, 2, 3, 4, 5 dacă aceste numere ar trebui să înceapă:
1) cu cifra 1; 2) cu scrierea «34»?

12.12.• Câte numere din patru cifre se poate de scris cu ajutorul cifrelor 0, 1, 2, 3, 4, 5?

12.13.• Câte numere din trei cifre există, toate cifrele cărora să fie pare?

12.14.• Câte numere de telefon din şapte cifre există, care nu încep cu numărul 0?

12.15.• Moneda se aruncă de 4 ori. Câte diferite succesiuni de stemă şi de cifre pot fi obținute?

12.16.• Zarul este aruncat de 3 ori. Câte succesiuni diferite de puncte pot fi obținute?

12.17.• Câte numere pare din trei cifre se poate de scris cu ajutorul cifrelor 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

12.18.• Câte numere impare din trei cifre se poate de scris cu ajutorul cifrelor 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

12.19.• Câte numere din cinci cifre, toate cifrele cărora trebuie să fie deferite, se poate de alcătuit din numerele 0, 1, 2, 3, 4?

12.20.• Câte numere pare din cinci cifre, se poate de alcătuit din cifrele 1, 2, 3, 4, 5 astfel, încât în fiecare număr cifrele să fie diferite?

12.21.•• Câte numere din cinci cifre există, care se împart la 5 fără rest?

12.22.•• Câte numere din şapte cifre există, care se împart la 25 fără rest?

12.23.* Magazinul de cărți are 4 ediții diferite ale poemului « Eneida», 3 ediții diferite ale piesei «Natalka Poltavka» şi 2 ediții diferite ale piesei « Moskalul vrăjitor». Afară de asta, există 5 cărți diferite care conțin poemul «Eneida» şi piesa «Natalka Poltavka», şi 6 cărți diferite, care conțin piesele «Natalka Poltavka» şi « Moskalul vrăjitor ». În câte moduri se poate face o cumpărătură care să conțină câte un exemplar din fiecare aceste creații?

12.24.* Câte numere din şapte cifre există, toate cifrele cărora au aceeaşi paritate?

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

12.25. Rezolvați ecuațiile:

1) $\sqrt{2{,}1x+1}=x-1;$

2) $2x+\sqrt{3x-2}=3;$

3) $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6;$

4) $2\sqrt{x-2}=\sqrt[4]{x-2}+15;$

5) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2;$

6) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=5.$

12.26. Găsiți cea mai mare valoare întreagă a inecuației

$$x^2+3\left(\sqrt{3-x}\right)^2-13\leqslant 0.$$

13. Permutări. Aranjamente. Combinări

Anişoara, Olga şi Ion au intrat în bufetul şcolii. În câte moduri pot ei să se repartizeze la coadă? Este clar, că există 6 variante.

Anişoara, Olga, Ion	Olga, Ion, Anişoara	Ion, Anişoara, Olga
Anişoara, Ion, Olga	Olga, Anişoara, Ion	Ion, Olga, Anişoara

Încă un exemplu.

Orarul zilnic conține 7 lecții. În câte modalități se poate alcătui orarul zilnic astfel, încât toate cele 7 lecții să fie diferite? Cu alte cuvinte, câte permutări există din 7 lecții?

Aşa probleme se numesc probleme la găsirea numărului de **permutări**. Numărul de permutări din n elemente se notează cu simbolul P_n. Pentru oricare n natural este adevărată formula

$$\boxed{P_n=n!} \qquad (1)$$

Deci, trei copii se pot alinia la coadă în 3! = 6 moduri, iar numărul de orare din 7 lecții este de 7! = 5040.

Problema 1. În câte moduri pot să se alinieze 5 maşini într-o coloană?

Rezolvare: În problema dată trebuie de calculat numărul de permutări din 5 elemente. Folosind formula (1), avem: $P_5 = 5! = 120$.

Răspuns: 120. ◄

Să cercetăm încă câteva probleme tipice din combinatorică.

Problema 2. Conform regulilor *FIFA*[1] în partea finală a campionatului mondial de fotbal participă 32 de echipe. În câte moduri, pot fi distribuite medaliile de aur, argint şi bronz (trei locuri premiante) între echipe?

Rezolvare: Primul loc poate ocupa oricare dintre cele 32 de echipe, locul al doilea - oricare dintre cele 31 de echipe rămase, iar al treilea – oricare dintre celelalte 30 de echipe rămase. După regula produsului, numărul de variante posibile de repartizare a locurilor este egal cu $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29760$.

Răspuns: 29 760. ◄

Rezolvând această problemă, noi am aflat, câte moduri există pentru a repartiza 3 echipe pe piedestalul de premiere alegându-le din 32 de participanţi. Se spune, că am găsit numărul de **aranjamente** de 32 de elemente luate câte 3 elemente.

Numărul tuturor aranjamentelor posibile de $\boldsymbol{n}$ elemente luate câte $\boldsymbol{k}$ elemente se notează cu simbolul A_n^k, folosind prima literă a cuvântului franţuzesc *arranjament* – repartizare, aranjare.

Rezultatul obţinut în problema despre distribuirea locurilor premiante, permite să facem concluzia, că $A_{32}^3 = \mathbf{32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760}$.

În general, pentru oricare n şi k naturale astfel încât $k \leqslant n$, adevărată este formula

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)} \qquad (2)$$

Prin definiţie, este primit, că $0! = 1$. Această convenţie, permite de scris formula (2) mai compact:

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Să cercetăm următoarele două probleme. În câte moduri clasa, în care sunt 30 de elevi şi eleve, se poate alege şeful clasei şi adjunctul lui? Prin câte moduri în această clasă pot fi numiţi doi elevi de serviciu?

[1] Federaţia Internaţională a Asociaţiilor de Fotbal

Răspunsul la prima întrebare este cunoscut: acesta-i A_{30}^2. Pentru a răspunde la a doua întrebare, trebuie de stabilit numărul de modalități pentru a forma din 30 de elemente o mulțime de 2 elemente. În acest caz, se spune că este necesar să se găsească numărul de **combin**ări de 30 de elemente luate câte 2 elemente.

Numărul tuturor combinațiilor posibile de n elemente luate câte k elementele se notează cu simbolul C_n^k, folosind prima literă a cuvântului francez *combinasion* – combinație.

Deci, problema despre aflarea numărului de moduri în care se poate numi elevii de serviciu se formulează astfel: cu ce este egal C_{30}^2?

Se poate de demonstrat, că are loc formula

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}} \qquad (3)$$

Problema 3. Pe o circumferință sunt notate 8 puncte. Câte triunghiuri există cu vârfurile în aceste puncte?

Rezolvare. Numărul căutat de triunghiuri este egal cu numărul de combinații de 8 elemente luate câte 3 elemente. Folosind formula (3), obținem:

$$C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56.$$

Răspuns: 56 de triunghiuri. ◄

1. După care formulă se poate de calculat numărul de permutări de n elemente?
2. După care formulă se poate de calculat numărul de aranjamente de n elemente luate câte k elemente?
3. După care formulă se poate de calculat numărul de combinaţii de n elemente luate câte k elemente?

EXERCIŢII

13.1.° În câte moduri se pot aranja pe raft 7 cărți diferite?

13.2.° În scoală sunt 20 de clase şi 20 de conducători de clasă. În câte moduri se poate repartiza conducerea claselor între profesori?

13.3.° În câte moduri se pot aşeza 5 persoane în automobil, dacă fiecare dintre ei poate conduce automobilul?

13.4.° Într-o echipă de fotbal, care este compusă din 11 jucători, trebuie de ales căpitan şi adjunctul lui. În câte moduri se poate face acest lucru?

13.5.° O comisie compusă din 15 persoane, trebuie să aleagă preşedinte, adjunctul lui şi secretar. În câte moduri se poate face aceasta?

13.6.° În clasa a 9-a se studiază 12 obiecte. Orarul zilnic conține 6 lecții. În câte moduri se poate alcătui orarul zilnic astfel, încât toate cele 6 lecții să fie diferite?

13.7.° În partea finală a Campionatului European de Fotbal participă 16 echipe. Prin câte metode pot fi distribuite medaliile de aur, argint şi bronz?

13.8.° În clasă învață 32 de elevi şi eleve. Fiecare doi dintre ei au făcut schimb de fotografii unul cu altul. Câte fotografii în total au fost date?

13.9.° În clasa cu studii aprofundate a matematicii sunt 29 de elevi şi eleve. În câte moduri se poate de format o echipă din 5 persoane pentru a participa la olimpiada de matematică?

13.10.° Este dat poligonul regulat cu n laturi. Câte patrulatere există cu vârfurile, care se află printre vârfurile poligonului dat cu n laturi

13.11.° Pe plan sunt marcate 10 puncte astfel, că oricare trei din ele nu se află pe o dreaptă. Câte triunghiuri există cu vârfurile în aceste puncte?

13.12.• Câte numere diferite de şase cifre pot fi formate din cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 astfel, încât cifrele să nu se repete, iar cifrele extreme să fie pare?

13.13.• Printre 20 de muncitori sunt 7 zugravi. În câte moduri se poate de alcătuit o echipă din 5 lucrători astfel, încât să includă exact 2 zugravi?

13.14.• Pentru loteria şcolară, au fost pregătite 100 de bilete, dintre care 12 sunt câştigătoare. Primul elev alege la întâmplare 10 bilete. Câte variante de alegere există, până când el va alege exact 3 bilete câştigătoare?

13.15.•• Pe o dreaptă sunt notate 12 puncte, iar pe dreapta paralelă ei – 7 puncte. Câte triunghiuri există cu vârfurile în aceste puncte?

13.16.•• Dreapta şi circumferința nu au puncte comune. Pe circumferință sunt notate 9 puncte roşii, iar pe dreaptă – 15 puncte albastre. Se ştie că nici o dreaptă care trece prin două puncte roşii nu conține puncte albastre. Câte triunghiuri există cu vârfurile în aceste puncte?

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

13.17. Pantalonii sunt mai scumpi decât o cămaşă cu 30% şi mai ieftini decât un veston cu 22%. Cu câte procente o cămaşă este mai ieftină decât un veston?

13.18. Calculați valoarea expresiei:

1) $3^{\log_3 7} + 49^{\log_7 \sqrt{13}}$;

2) $\log_6 144 - \log_6 4$;

3) $\dfrac{18}{5^{\log_5 2}}$;

4) $\log_2 7 \cdot \log_7 4$.

14. Determinarea clasică a probabilităţii unui eveniment aleatoriu

Pentru a găsi probabilitatea unor evenimente, nu trebuie obligatoriu să se efectueze experiențe sau observații. Este destul de experiența de viață şi de bunul simț.

Problema 1. Fie, că într-o cutie sunt 15 bile de biliard, numerotate de la 1 până la 15. Care este probabilitatea evenimentului, că bila aleasă va avea număr multiplu la 3?

Rezolvare: Este clar că în acest test sunt 15 *rezultate egal posibile*. Dintre acestea, sunt 5 care ne satisfac: atunci când sunt extrase bilele cu numerele 3, 6, 9, 12, 15. De aceea este natural să presupunem că probabilitatea unui eveniment «a scoate bila cu numărul care este multiplu lui 3» este egală cu $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Răspuns: $\frac{1}{3}$. ◄

Rezolvarea multor probleme de probabilitate poate fi descrisă cu o astfel de schemă.

- Fie în timpul experienței se poate obține unul din n rezultate egal posibile.
- Se cercetează un eveniment oarecare A, care este provocat de m rezultate. Le vom numi ***prielnice (favorabile)***.
- Probabilitatea $\mathrm{P}(A)$ a evenimentului A se poate calcula după formula

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

O astfel de schemă se numeşte **determinarea clasică a probabilității** unui eveniment aleatoriu.

Problema 2. Câştigătorii etapei şcolare a concursului de talente au devenit Marina, Svetlana, Andrei şi Dumitru. La concursul regional de talente trebuie de trimis doi elevi învingători. S-a hotărât de ales echipa prin tragere la sorți. Care este probabilitatea evenimentului că un băiat şi o fată vor reprezenta şcoala la concursul raional?

Rezolvare: În timpul tragerii la sorți, trebuie de ales o pereche, care va merge la concurs, din următoarele 6 rezultate egal posibile:

1) Marina şi Svetlana;
2) Marina şi Andrei;
3) Marina şi Dumitru;
4) Svetlana şi Andrei;
5) Svetlana şi Dumitru;
6) Andrei şi Dumitru.

Printre aceste perechi există 4 perechi, care constau dint-un băiat şi o fată. Deci, probabilitatea evenimentului «va reprezenta şcoala băiat şi fată» este egală cu $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Răspuns: $\frac{2}{3}$. ◄

Să analizăm încă un exemplu.

Fie că într-o cutie se află 9 bile verzi. Care este probabilitatea faptului că bila aleasă va fi de culoare verde? culoare galbenă?

După condițiile date orice bilă aleasă va fi de culoare verde.

Evenimentul, care în conformitate cu această mulțime de condiții sigur va ave loc în orice experiență, se numeşte **sigur** (verosimil).

Probabilitatea acestui eveniment se consideră egală cu 1. Cu alte cuvinte, dacă A – este un eveniment sigur, atunci $P(A) = 1$.

Deci, probabilitatea că bila aleasă va fi de culoare verde este egală cu 1.

Deoarece în cutie nu sunt bile de culoare galbenă, de aceea de ales o bilă de culoare galbenă este imposibil.

Evenimentul, care conform complexului de condiții nu se poate petrece nici într-o experiență, se numeşte **imposibil.**

Probabilitatea acestui eveniment este egală cu 0. Cu alte cuvinte, dacă A – eveniment imposibil, atunci $P(A) = 0$.

Pentru a calcula probabilitatea evenimentului aleatoriu, noi trebuia să calculăm numărul de rezultate egal posibile în experiența dată şi numărul de rezultate favorabile.

Adesea, aceste calcule sunt legate cu determinarea numărului de diferite combinații, care conform unei reguli anumite pot fi compuse din elementele mulțimii finite date, de aceea aplicarea regulilor combinatorice este o metodă eficientă pentru rezolvarea multor probleme din teoria probabilității.

Problema 3. Pe o tarabă comercială se află 28 de mere - 15 galbene şi 13 roşii. Cumpărătorul a cumpărat 3 mere, pe care vânzătorul le-a ales aleatoriu. Care este probabilitatea că toate merele cumpărate sunt galbene?

Rezolvare: Din 28 de mere vânzătorul poate alege 3 mere prin C_{28}^{3} metode. Să calculăm, câte dintre aceste procedee sunt astfel, că toate trei mere sunt galbene. Din 15 mere galbene vânzătorul poate alege 3 mere prin C_{15}^{3} procedee.

Deci, probabilitatea evenimentului aleatoriu A – de ales trei mere galbene este egală $P(A)=\frac{C_{15}^{3}}{C_{28}^{3}}$.

Folosind formula $C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}$, se poate calcula $P(A)=\frac{5}{36}$.

Răspuns: $\frac{5}{36}$. ◄

Ce formulă se foloseşte pentru determinarea clasică a probabilităţii unui eveniment aleatoriu?

EXERCIŢII

14.1.° Probabilitatea de a cumpăra un aparat electric defectat este de 0,007. Este corect că în orice lot de 1000 de aparate electrice există 7 defectate?

14.2.° Probabilitatea de a numeri în țintă este de 75%. Ar putea oare să fie astfel, că într-o serie din 100 de împuşcături, vor fi 98 de nimeriri în țintă?

14.3.° În sertar sunt 8 creioane albastre şi 12 roşii. Care este probabilitatea de a lua la întâmplare din sertar un:

1) pix; 2) creion?

14.4.° Din cifrele 2, 4, 6, 8 se formează un număr de trei cifre. Care este probabilitatea că acest număr se va împărți fără rest:

1) la 5; 2) la 2?

14.5.° Care este probabilitatea ca prin schimbarea literelor în cuvântul «matematică» să obținem cuvântul «literatură»?

14.6.° Din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ se alege la întâmplare un număr. Care este probabilitatea, că acest număr:

1) este egal cu 2; 4) este multiplul lui 4;
2) este egal cu 5; 5) nu se împarte la 3 fără rest;
3) este impar; 6) este multiplul lui 11?

14.7.° Care este probabilitatea faptului, că chemând un elev din clasa voastră la tablă, profesorul v-a chema un băiat?

14.8.° Care este probabilitatea aceea, ca numărul din două cifre ales aleatoriu să fie multiplul lui 11?

14.9.• În cutie au fost 17 fişe, numerotate de la 1 până la 17. Din cutie aleatoriu s-a luat o fişă. Care este probabilitatea că pe ea va fi scris numărul:

1) 12; 3) multiplu la 3; 5) cu două cifre;
2) par; 4) nu-i multiplul lui 5; 6) prim?

14.10.• Pe 15 fişe sunt scrise numerele naturale de la 1 până la 15. Care este probabilitatea evenimentului, că numărul scris pe fişa aleatoriu aleasă, va fi:

1) impar; 3) nu se împarte fără rest nici la 2, nici la 3?
2) compus;

14.11.•În cutie se află bile: a albastre, b galbene şi c roşii. Care este probabilitatea, că bila aleasă la întâmplare va fi:

1) galbenă; 3) nu roşie?
2) albastră;

14.12.• În sacul lui Moş Crăciun sunt n ursuleți de pluş, m bomboane şi k mandarine. Care este probabilitatea, că cadoul ales aleatoriu va fi:

1) ursuleț; 3) nu bomboană?
2) comestibil;

14.13.•• Pe raft sunt 12 caiete, din care 5 sunt în pătrățele. Care este probabilitatea că 2 caiete alese aleatoriu vor fi în pătrățele?

14.14.•• În colecția lui Andrei sunt 40 de monede din diferite țări, dintre care 6 ucrainene. Andrei a luat aleatoriu 3 monede. Care este probabilitatea ca toate aceste monede vor fi ucrainene?

14.15.•• În cutie sunt 12 bile galbene şi 15 albastre. Care este probabilitatea faptului, că din cele opt bile alese la întâmplare, cinci vor fi galbene?

14.16.•• Pentru loterie au fost pregătite 1000 de bilete, dintre care 15 câştigătoare. Care este probabilitatea, că din trei bilete alese la întâmplare, toate vor fi câştigătoare?

14.17.•• În sertar sunt creioane şi pixuri. Se ştie, că creioane sunt cu 12 bucăţi mai puţine decât pixuri. Câte creioane sunt în sertar, dacă probabilitatea, că obiectul ales la întâmplare este:

1) pix, este egală egal cu $\frac{5}{8}$; 2) creion, este egală cu $\frac{1}{6}$?

14.18.•• Setul de cadouri conţine 12 baloane verzi şi câteva baloane roşii. Câte baloane roşii sunt în set, dacă probabilitatea că balonul, ales aleatoriu, este:

1) verde, este egală cu $\frac{3}{7}$;

2) roşu, este egală cu $\frac{2}{5}$?

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

14.19. Un turist parcurge calea din punctul A în punctul B timp de 3 ore, iar ce-l de-al doilea turist din punctul B în punctul A – timp de 6 ore. Peste câte ore ei se vor întâlni, dacă vor porni în acelaşi timp unul la întâmpinarea altuia din punctele A şi B?

14.20. Efectuaţi calcule şi înregistraţi rezultatul în formă standard:

1) $(2{,}6 \cdot 10^3) \cdot (4{,}5 \cdot 10^{-8})$; 2) $\frac{3{,}6 \cdot 10^{-6}}{12 \cdot 10^{-4}}$.

15. Elemente de statistică matematică

Cu ce tiraj ar trebui de tipărit un manual de matematică pentru clasa 11?

Merită oare ca un anumit politician să-şi înainteze candidatura sa pentru alegerile ordinare ale primarului?

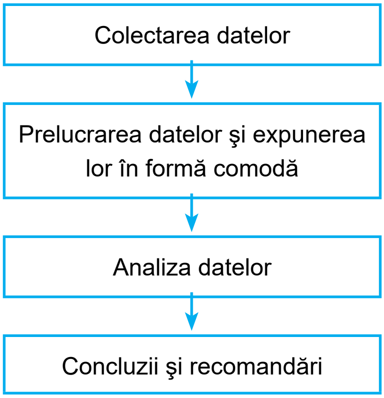
Câte kilograme de peşte şi producte maritime consumă în mediu pe an un locuitor al Ucrainei?

Este oare profitabil să închiriezi un stadion pentru un concert al artistului dat?

La acestea şi multe alte întrebări ajută de găsit răspunsul statistica.

Definiţie. Statistica (de la lat. *status* - stare) **este ştiinţa despre primirea, prelucrarea şi analiza datelor cantitative, care caracterizează fenomenele de masă.**

Cercetarea statistică constă din câteva etape:



Să ne oprim la fiecare etapă separat.

Colectarea datelor

Voi ştiţi, că obiceiurile dăunătoare, alimentarea incorectă, modul de viaţă sedentar provoacă boli cardiovasculare. Doctorii au ajuns la această concluzie, examinând, desigur, nu toţi oamenii de pe planetă.

Este clar că cercetarea a fost *selectivă*, dar cu caracter *de masă*.

În statistică, totalitatea obiectelor, pe baza cărora se efectuează cercetările, se numeşte **selecţie**.

În acest exemplu, selecţia s-a compus din mai multe milioane de oameni.

Trebuie de remarcat faptul că concluzia statistică, bazată numai pe cantitatea elementelor selecţiei, nu este întotdeauna adevărată. De exemplu, dacă noi cercetând popularitatea artistului, ne vom limita cu sondajul oamenilor, care au venit la concertul lui, atunci rezultatele obţinute nu vor fi obiective, pentru că ei au venit la concert anume de aceea, că acest artist le place. Statisticienii spun că selecţia ar trebui să fie **reprezentativă** (de la fr. *representatif* - reprezentativ).

Astfel, medicii, studiind factorii de risc pentru bolile cardiovasculare, au examinat persoanele de vârste diferite, ocupaţii, naţionalităţi etc.

Deci, *colectarea datelor ar trebui să se bazeze pe selecţia în masă şi reprezentativă*. Uneori selecţia poate coincide cu mulţimea tuturor obiectelor pentru care se desfăşoară cercetările. Un exemplu al unei astfel de cercetări este efectuarea evaluării externe independente la limba ucraineană.

Mijloacele de prezentare a datelor

Informația colectată (totalitatea datelor) este comod de-o prezentat în formă de tabele, grafice, diagrame.

Să analizăm câteva exemple.

Exemplul 1. «Eurovisionul» - concurs internațional de cântece de muzică uşoară. În tabel sunt reprezentate rezultatele evaluării interpreților ucraineni la concursul de «Eurovision» în perioada anilor 2003–2018.

Anul	Interpretul	Locul	Numărul total de puncte primite
2003	Alexandru Ponomariov	14	30
2004	Ruslana	1	280
2005	"Greenjolly"	19	30
2006	Tina Karol	7	145
2007	Verka Serduchka	2	235
2008	Ani Lorak	2	230
2009	Svetlana Loboda	12	76
2010	Aliosha	10	108
2011	Mika Newton	4	159
2012	Gaitana	15	65
2013	Zlata Ogniewicz	3	214
2014	Maria Yaremchuk	6	113
2015	*Nu au participat*		
2016	Jamala	1	534
2017	O. Torvald	24	36
2018	Melovin	17	130

Приклад 2. În figura 15.1 sunt datele generalizate despre densitatea lemnului (raportul dintre masa lemnului la volumul lui) pentru unele specii de copaci.

Приклад 3. În figura15.2 este prezentat graficul schimbării numărului de abonați la legătura telefonică prin cablu din lume în perioada anilor 1997–2016.

Приклад 4. În diagrama circulată (fig.15.3) este reprezentată repartizarea populației lumii după părțile ei (a lumii).

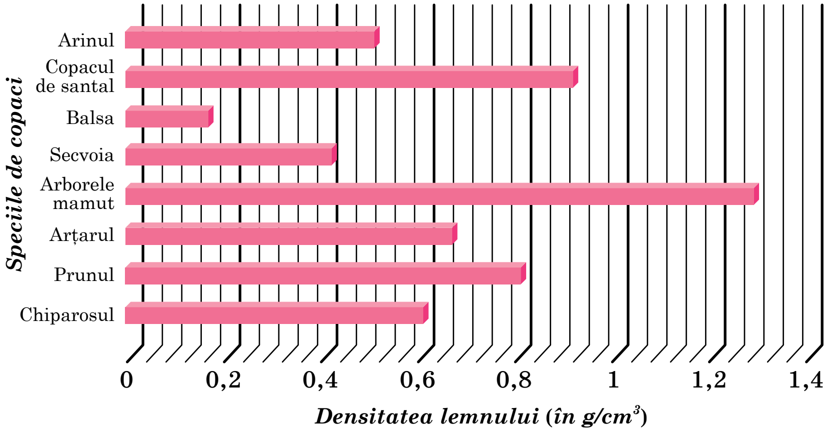


Fig. 15.1

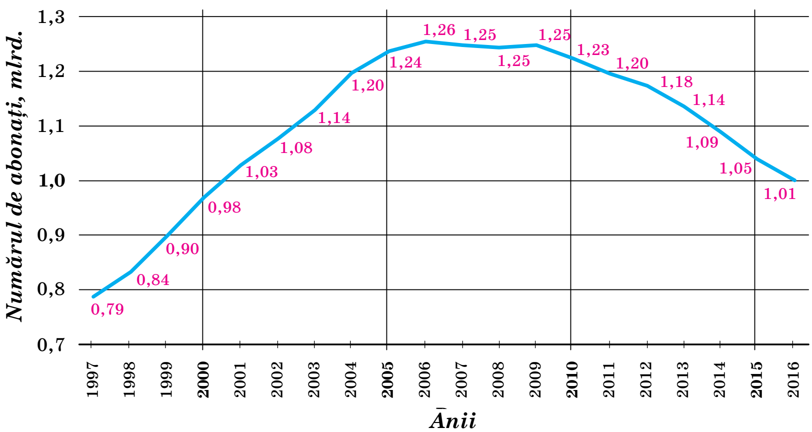


Fig. 15.2

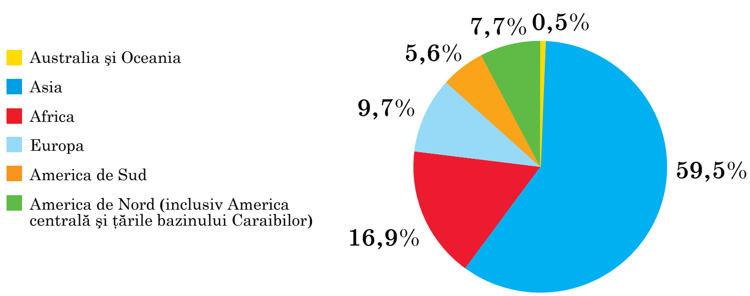


Fig. 15.3

Mulţimea tuturor rezultatelor posibile ale unei anumite experienţe în statistică s-a convenit de-o numit **totalitate generală.** Corelaţia dintre totalitatea generală şi selecţie este ilustrată în figura 15.4.

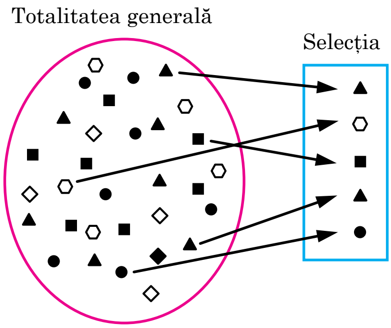


Fig. 15.4

Una dintre principalele sarcini ale statisticii constă în aceea ca pe baza analizei datelor din selecţie de făcut concluzie despre toată totalitatea generală. Analizând datele colectate se evidenţiază unul sau mai mulţi indici generali, care caracterizează cele mai importante particularităţi ale totalităţii generale. De exemplu, dacă selecţia este alcătuită din date numerice, atunci diferenţa dintre valorile cea mai mare şi cea mai mică ale datelor selecţiei se numeşte **amplitudinea** selecţiei. Parametri importanţi ai selecţiei sunt, de asemenea, **valoarea medie, mediana** şi **moda.**

Fie, că selecţia este formată din datele numerice $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Valoare medie a acestei selecţiei se numeşte numărul

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

De exemplu, în tabel sunt date rezultatele evaluării cunoştinţelor elevilor ucraineni la olimpiadele matematice internaţionale pe parcursul anilor 2009–2018 (echipa de participanţi la olimpiadele matematice internaţionale este formată nu mai mult de 6 persoane).

Anul	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Numărul de medalii	6	6	6	5	5	6	6	6	5	6

Pentru selecţia dată **valoarea medie** este egală:

$$\bar{x} = \frac{6+6+6+5+5+6+6+6+5+6}{10} = \frac{57}{10} = 5{,}7.$$

Deoarece, pe an pot fi câştigate nu mai mult de 6 medalii, valoarea medie de 5,7 indică faptul că echipa Ucrainei evaluează cu succes la acest forum de prestigiu.

Să atragem atenția la faptul, că valoarea mediei a selecției se determină numai în cazul, în care datele colectate sunt numere.

Să analizăm o selecție, care constă din astfel de date care pot fi comparate una cu alta. Dacă cantitatea de date este impară şi ele sunt scrise în ordine crescătoare, atunci **mediana** acestei selecții este numită acea din care este plasată în mijlocul listei.

De exemplu, în multe universități din Ucraina a fost introdusă evaluarea cunoştințelor studenților nu după o scală numerică, ci după scara literelor: *A, B, C, D, E, F* (*A* este cea mai mare, *F* este cea mai mică notă). Fie, că în timpul sondajului a 9 studenți, cu privire la rezultatul examenului final s-a primit următoarea selecție (consecutivitatea notelor):

$$F, F, D, D, \mathbf{C}, C, C, B, A$$

Vedem că în mijlocul listei este litera *C*. Deci, mediana selecției date este nota *C*.

Dacă selecția constă din număr par de date, de exemplu:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5 \leqslant x_6,$$

atunci mediana selecției date se numeşte oricare dintre datele x_3 sau x_4, adică oricare dintre cele două date aflate în mijlocul acestei enumerări.

De exemplu, dacă la cele 9 note date mai sus a studenților de adăugat mai o notă *E*, atunci obținem aşa o secvență:

$$F, F, E, D, \mathbf{D}, \mathbf{C}, C, C, B, A.$$

Se vede, că în mijlocul listei sunt literele *D* şi *C*. Deci, mediana selecției date sunt notele *D* şi *C*.

Atrageți atenția la faptul, că în exemplele aduse aflarea medianei selecției datele cercetate nu sunt numere.

Dacă datele studiate sunt numere, în cazul cantității pare de date mediană a selecției se permite de asemenea de considerat media aritmetică a două numere situate în mijlocul acestei liste ordonate. De exemplu, dacă de analizat o selecție din patru date numerice:

$$1, 2, 3, 7,$$

atunci numărul $\frac{2+3}{2} = \mathbf{2{,}5}$ se poate considera mediană a acestei selecții.

Să cercetăm o altă caracteristică a selecției. **Modă** a selecției date sunt numite acele date care apar în enumerare cel mai des. Dacă astfel de date sunt câteva, fiecare din ele este moda selecției date. De exemplu, dacă selecția este alcătuită din şase numere: 1, 2, 2, 3, 3, 3, atunci numărul 3 este moda selecției date.

În tabel este prezentat numărul de medalii de fiecare fel, pe care elevii ucraineni le-au câştigat la olimpiadele internaționale de matematică în perioada anilor 1993–2018.

Medalii de aur	Medalii de argint	Medalii de bronz	Fără medalii
38	59	44	15

Numărul 59 arată, că elevii ucraineni cel mai des câştigau medalii de argint. Indicatorul «medalii de argint» este moda datelor expuse.

1. Ce se numeşte amplitudinea selecţiei?
2. Ce se numeşte valoarea medie a selecţiei?
3. Explicaţi, ce se numeşte mediana selecţiei.
4. Ce se numeşte moda selecţiei?

EXERCIŢII

15.1.° Scrieți numele elevilor, care au fost interogați de profesor la lecția trecută de matematică în timpul controlului temei de acasă. Ce este totalitatea generală şi selecție din studiul statistic referitor la rezultatele executării temei de acasă.

15.2.° Rezultatul lucrului al unui program de calculator, care modelează un studiu statistic este un număr oarecare întreg cuprins între –128 şi 128. După 5 lansări consecutive, programul a afişat următoarele rezultate: 62, -15, 31, 103, -22. Ce este totalitatea generală în acest studiu statistic? Ce este selecție? Găsiți amplitudinea selecției.

15.3.° Elevii au fost sondați referitor la obiectul lor preferat în scoală. Care indici statistici (amplitudinea, valoarea medie, mediana, moda) pot fi determinați pentru datele colectate?

15.4.° La comanda întreprinderilor din industria uşoară sunt efectuate cercetări, rezultatele căror sunt mărimile hainelor în format internațional (simbolurile: XS, S, M, L, XL, XXL, XXXL). Care pot fi indicii statistici (amplitudinea, valoarea medie, mediana, moda) determinați pentru datele colectate?

15.5.° Se dă selecția: 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 11, 12. Găsiți amplitudinea, valoarea medie, mediana şi moda selecției date.

15.6.° Se dă selecția: 2, 2, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 9. Găsiți amplitudinea, valoarea medie, mediana şi moda selecției date.

15.7.° Printre elevii şi elevele din clasa 11 s-a efectuat un sondaj: cât timp în fiecare zi petrec ei la aer proaspăt. Rezultatele sondajului sunt prezentate sub forma unei diagrame reprezentată în figura 15.5. Găsiți amplitudinea, valoarea medie, mediana şi moda selecției date.

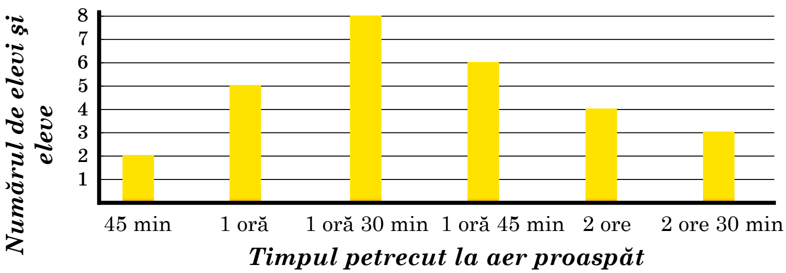


Fig. 15.5

15.8.• Determinați valoarea medie şi mediana selecției 1, 3, 2, 4, 5, 2, 3, 4, 1, 6.

15.9.• Folosind tabelul temperaturilor medii ale aerului în ianuarie în unele oraşe ale lumii, calculați amplitudinea, valoarea medie, mediana şi moda selecției date.

Oraşul	Temperatura, °C	Oraşul	Temperatura, °C
Amsterdam	3	Moscova	–10
Atena	8	Nairobi	27
Buenos Aires	23	New York	0
Hong Kong	24	Rio de Janeiro	30
Ierusalim	8	Roma	8
Kiev	–6	Singapore	27
Montreal	–11	Tokyo	3

15.10.• Folosind tabelul roadei semințelor de floarea-soarelui în Ucraina, calculați amplitudinea, valoarea medie, mediana şi moda selecției date.

Anul	Roada q/ha	Anul	Roada q/ha
2006	14	2012	17
2007	12	2013	22
2008	15	2014	19
2009	15	2015	22
2010	15	2016	22
2011	18	2017	20

15.11.• La campionatul Ucrainei de fotbal în anii 2017-2018 echipa «Şahtar» care a devenit campioană a Ucrainei, a jucat 32 de meciuri în care de două ori a marcat 5 goluri, de 3 ori - 4 goluri, de 9 ori - 3 goluri, de 8 ori - 2 goluri, de 6 ori - un gol şi în 4 meciuri nu au marcat nici un gol. Calculați numărul mediu de goluri înscrise de «Şahtar» într-un meci.

15.12.• În timpul semestrului, o studentă a obținut 45 de note dintre care 7 de cinci, 22 de patru şi 16 de trei. Calculați media notelor studentei.

15.13.•• La evaluarea externă independentă a elevilor la matematică în anul 2018, s-a propus sarcina de testare: «Găsiți domeniul de definiție al funcției: $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

A	B	C
$(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$

D	E
$(-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

»

În diagrama (fig. 15.6) sunt prezentate datele despre numărul de elevi, care au rezolvat această problemă. Găsiți moda răspunsurilor elevilor. Pentru răspunsul corect a fost dat 1 punct, iar pentru răspunsul necorect – 0 puncte. Calculați valoarea medie şi mediana numărului de puncte care a fost obținut de către participanții la testare pentru această sarcină.

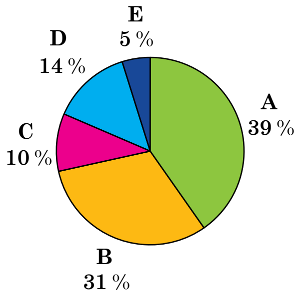


Fig. 15.6

15.14.•• Compania de telefonie vrea să ştie despre numărul de apeluri telefonice pe care omul le face pe parcursul zilei. Datele pentru 100 de persoane sunt prezentate în diagramă (figura 15.7). Calculați amplitudinea, valoarea medie, mediana şi moda a acestei selecții.

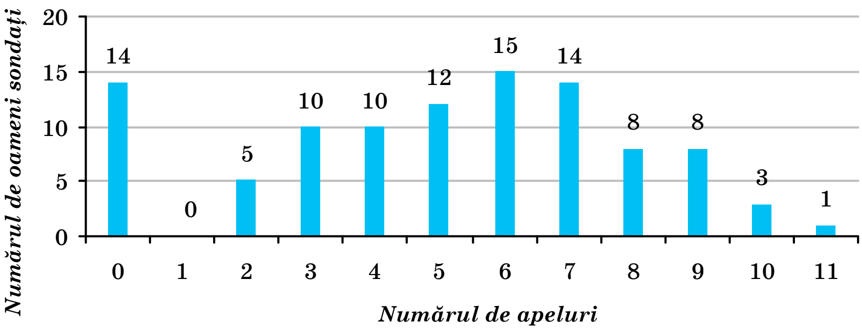


Fig. 15.7

15.15.•• În diagrama din figura 15.8 sunt prezentate datele despre numărul de cărți pe care le-au citit în timp de o lună 50 de şcolari sondați. Calculați amplitudinea, valoarea medie, mediana şi moda a acestei selecții.

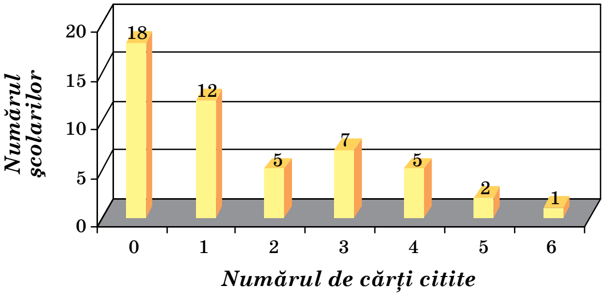


Fig. 15.8

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

15.16. Calculaţi valoarea expresiei:

1) $\sqrt[6]{\left(8-\sqrt{7}\right)^6}+\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{7}\right)^4}$;

2) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{5}-6\right)^8}+\sqrt[7]{\left(\sqrt{5}-3\right)^7}$.

15.17. Cu ce este egală valoarea expresiei:

1) $\log_{27}\log_8\sqrt[5]{32}$;

2) $36^{\frac{1}{3}\log_6 64-3\log_6 2}$;

3) $\dfrac{25^{-\frac{2}{5}}\cdot 5}{125^{\frac{1}{15}}}$;

4) $\dfrac{\sqrt[3]{3\sqrt[5]{3}}}{\sqrt[5]{9}}$?

15.18. Găsiţi valoarea expresiei $\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$, dacă $\cos\alpha=-0{,}8$ şi $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

ÎNSĂRCINAREA NR. 3 „CONTROLEAZĂ-TE” ÎN FORMĂ TEST

1. Câte numere de şase cifre care sunt multiplele lui 10 şi toate cifrele cărora sunt diferite, pot fi scrise folosind cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5?
A) 36; B) 60; C) 24; D) 120.

2. Câte numere pare de trei cifre pot fi scrise cu ajutorul cifrelor 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?
A) 288; B) 405; C) 360; D) 720.

3. În secția de atletica uşoară, se ocupă 30 de băieți şi 10 fete. În câte moduri, se poate face o echipă din 7 persoane astfel, ca în ea să fie cinci băieți şi două fete?
A) $C_{30}^{5} \cdot C_{10}^{2}$; C) $C_{30}^{10} \cdot C_{5}^{2}$;
B) $C_{30}^{5} + C_{10}^{2}$; D) $C_{30}^{10} + C_{5}^{2}$.

4. Sunt 6 flori diferite. În câte moduri se poate alcătui un buchet din 3 flori sau din 5 flori?
A) $C_6^3 \cdot C_6^5$; C) $A_6^3 \cdot A_6^5$;
B) $C_6^3 + C_6^5$; D) $A_6^3 + A_6^5$.

5. Într-o cutie sunt 15 bile: 10 albastre şi 5 verzi. Care este probabilitatea faptului, că bila luată din cutie la întâmplare va fi galbenă?
A) 1; B) 0,5; C) 0; D) –1.

6. În cutie sunt 10 bile albe şi 5 bile roşii. Care este cel mai mic număr de bile ce ar trebui să fie luat la întâmplare din cutie, încât probabilitatea că printre ele obligatoriu vor fi 2 bile albe, să fie egală cu 1?
A) 5 bile; B) 6 bile; C) 7 bile; D) 10 bile.

7. Fie probabilitatea evenimentului A egală cu $P(A)$. În ce caz evenimentul A se numeşte adevărat?
A) $P(A) = 0$; C) $P(A) > 0{,}99$;
B) $P(A) > 0$; D) $P(A) = 1$.

8. Probabilitatea de a cumpăra o pereche de cizme rebut a unei companii renumite este 0,023. Câte perechi de încălțăminte rebut se conțin garantat în lotul de 1000 de perechi de cizme ale acestei companii?
A) mai puțin de 23; C) exact 23;
B) mai mult de 23; D) este imposibil de răspuns.

9. Formând un număr de telefon, abonatul a uitat a doua cifră a numărului. Care este probabilitatea evenimentului că el v-a forma numărul corect din prima încercare?
A) 0,01; B) 0,1; C) 0,5; D) 1.

10. În clasă învaţă 18 fete şi 12 băieţi. Aleatoriu este aleasă o persoană pentru participarea la adunarea şcolară. Care este probabilitatea că se v-a alege băiat?

A) $\frac{2}{3}$; B) $\frac{1}{2}$; C) $\frac{3}{5}$; D) $\frac{2}{5}$.

11. Pe 20 de fişe sunt scrise numerele naturale de la 1 până la 20. Care este probabilitatea ca numărul, scris pe fişa selectată aleatoriu, nu se împarte fără rest nici la 4, nici la 5?

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{1}{5}$; C) $\frac{11}{20}$; D) $\frac{3}{5}$.

12. Pe 5 fişe sunt scrise numerele naturale de la 1 până la 5. Care este probabilitatea că produsul numerelor scrise pe două fişe, luate aleatoriu, va fi egal cu un număr impar?

A) 0,2; B) 0,3; C) 0,5; D) 0,25.

13. Cu ce este egală mediana totalităţii datelor 2, 2, 3, 4, 5, 6, 13?

A) 5; B) 4; C) 3; D) 2.

14. Cu ce este egală mediana selecţiei 10, 16, 11, 12, 14, 15, 14, 15, 12, 14, 10?

A) 13; B) 14; C) 12; D) 12,5.

15. După datele recensământului populaţiei din Ucraina din anul 2001 structura de vârstă a populaţiei s-a caracterizat prin următoarele date:

Vârsta	Numărul populaţie permanente, mii. persoane
0–9	4533,3
10–19	7308,1
20–29	6891,6
30–39	6621,2
40–49	7298,7
50–59	5245,3
60–69	5522,2
70–79	3740,0
80 şi mai mult	1060,8

Care grupă de vârstă a determinat moda componenței de vârstă a populației din Ucraina în 2001?
A) 0–9; B) 10–19; C) 40–49; D) 80 şi mai mari.

16. Conform rezultatelor testării la matematică a 25 de elevi din clasa a unsprezecea s-a format tabelul distribuirii numărului de erori, comise de un elev:

Numărul de erori	0	1	2	3	4
Numărul de elevi	5	4	6	8	2

Găsiți valoarea medie a selecției.
A) 2,5; B) 1,88; C) 2; D) 1,92.

17. Conform condiției problemei 16 indicați moda selecției date.
A) 0; B) 8; C) 3; D) 4.

18. La aruncarea monedei de 20 de ori la rând, a căzut stema. Care este probabilitatea că la următoarea aruncare iarăşi v-a cădea stema?
A) 0,5; B) $\frac{1}{21}$; C) $\frac{1}{2^{21}}$; D) 0.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 3

Permutări

Numărul de permutări de n elemente se notează cu simbolul P_n. Pentru oricare n natural este adevărată formula $P_n = n!$.

Aranjamente

Numărul tuturor aranjamentelor posibile de n elemente luate câte k elemente, se notează cu simbolul A_n^k.

Pentru orice n şi k naturale astfel, că $k \leqslant n$, este adevărată formula

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Combinații

Numărul tuturor combinațiilor posibile de n elemente luate câte k elemente se notează cu simbolul C_n^k.

Pentru orice n şi k natural astfel, că $k \leqslant n$, este adevărată formula

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Determinarea clasică a probabilității unui eveniment aleatoriu

Probabilitatea P a evenimentului A se poate calcula după formula $P(A) = \frac{m}{n}$, , unde n – numărul de rezultate egal posibile care pot fi obținute în timpul experienței, m – numărul de rezultate favorabile care determină evenimentul A.

Elemente ale statisticii matematice

Amplitudinea selecției, care constă din date numerice, se numeşte diferența dintre valorile cea mai mare şi cea mai mică ale datelor selecției.

Valoarea medie a selecției, care constă din datele numerice $x_1, x_2, \ldots, x_n$, , se numeşte numărul $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

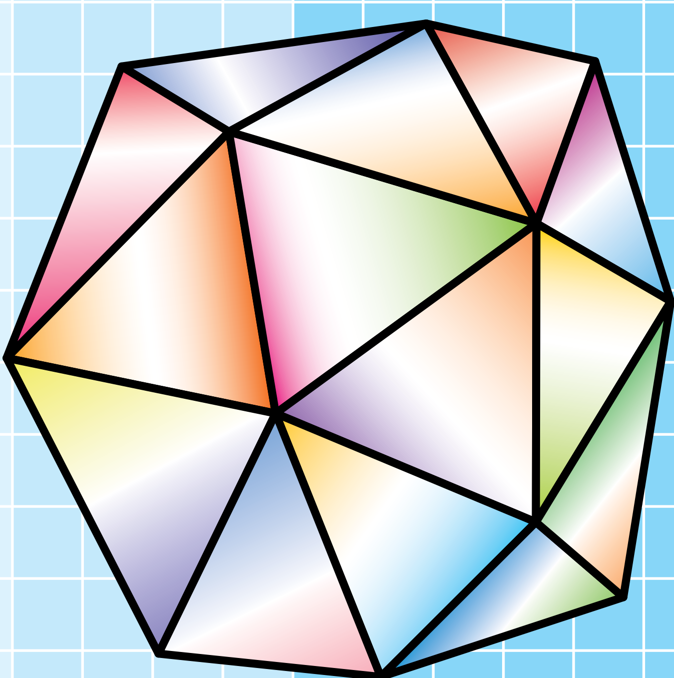
Mediana selecției, ce constă dintr-un număr impar de date, se numeşte acea din date care este situată în mijlocul listei, când datele sunt scrise în ordine crescătoare.

Mediana selecției, ce constă dintr-un număr par de date, se consideră oricare dintre cele două date, situate în mijlocul listei, când datele sunt scrise în ordine crescătoare, sau media lor aritmetică (dacă datele studiate sunt numere).

Modă selecției se numesc acelea date care se întâlnesc în enumerare cel mai des.

Capitolul 2
Geometrie

§ 4. Poliedre
§ 5. Corpuri de rotaţie
§ 6. Volumele corpurilor. Aria sferei



§4 POLIEDRE

În acest paragraf o să precizaţi şi extindeţi cunoştinţele despre poliedre. O să obţineţi informaţii noi despre prismă, piramidă şi alte tipuri separate ale lor.

16. Prisma

În figura 16.1 sunt prezentate figurile spațiale cunoscute vouă. Fiecare din aceste figuri are dimensiuni finite şi se alcătuieşte din suprafață (granițele figurii) şi a părții de spațiu mărginită de această suprafață.

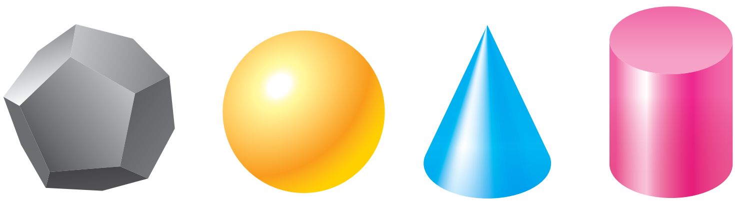


Fig. 16.1

Poliedrul, bila, conul, cilindrul sunt considerate figuri, care se numesc **corpuri geometrice** sau pur şi simplu **corpuri.**

Nu orice figură în spațiu este corp. De exemplu, dreapta, planul, unghiul diedru nu sunt corpuri. Aceste figuri sunt infinite. Definiția strictă a corpului este în afara cursului cercetat.

Definiție. Poliedru se numeşte corpul, suprafața căruia se alcătuieşte dintr-un număr finit de poligoane.

Cu astfel de elemente ale poliedrelor, ca fețe, muchii şi vârfuri, voi deja sunteți cunoscuți.

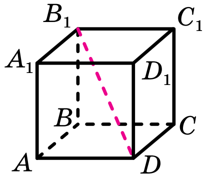


Fig. 16.2

Două fețe ale poliedrului se numesc megieşe, dacă ele au o muchie comună. De exemplu, fețele $A_1B_1C_1D_1$ şi A_1B_1BA ale cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 16.2) sunt vecine, deoarece muchia A_1B_1 la ele este comună.

Admitem, că punctul M este vârf al poliedrului. Unghiul cu vârful M al feței poliedrului se numeşte **unghiul plan al poliedrului de la vârful** M. De exemplu, în figura 16.2 unghiul DAB este unghi plan al cubului la vârful A.

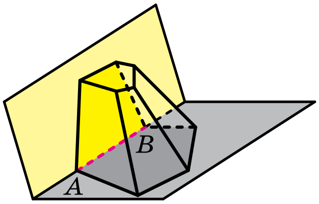


Fig. 16.3.

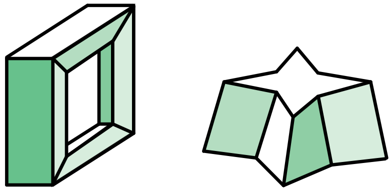


Fig. 16.4

Unghiul diedru al poliedrului de la muchia AB se numeşte unghiul diedru cu muchia AB, fețele căruia conțin fețele megieşe ale poliedrului, pentru care muchia AB este comună (fig. 16.3).

Segmentul care uneşte două vârfuri, ce nu aparțin unei fețe, se numeşte **diagonala poliedrului**. De exemplu, segmentul DB_1 este diagonala cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 16.2).

Poliedrele sunt convexe şi concave (neconvexe).

Definiție. Poliedrul se numesc convex, dacă el este amplasat de aceiaşi parte a planului fiecărei fețe a lui.

Cubul şi tetraedrul sunt exemple de poliedre convexe. În figura 16.4. sunt prezentate poliedre ne convexe.

Toate fețele poliedrelor convexe sunt poligoane convexe.

Aria suprafeței poliedrului se numeşte suma ariilor tuturor fețelor lui.

Să ne oprim mai detailat la tipul poliedrului deja cunoscut de voi – prisma.

Definiție. Poliedrul, două fețe ale căruia sunt poligoane egale cu *n* laturi, care se află în plane paralele, iar restul *n* fețe sunt paralelograme, se numeşte prismă cu *n* laturi.

Vă amintim, că paralelogramele, despre care merge vorba în definiție, se numesc fețe laterale ale prismei; poligoane egale cu n laturi sunt bazele prismei; laturile bazei sunt muchiile bazei prismei; muchiile, care nu aparțin bazelor, sunt muchiile laterale ale prismei (fig. 16.5).

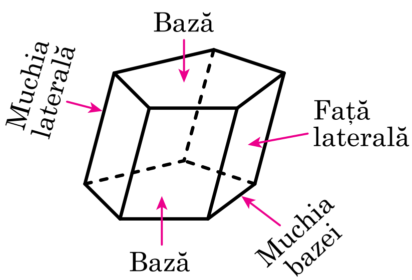


Fig. 16.5

Deoarece fețele laterale megieşe ale prismei sunt paralelograme, ce au latura comună – muchia laterală, atunci *toate muchiile laterale ale prismei sunt egale şi paralele.*

Înălțimea prismei este numită perpendiculara coborâtă dintr-un punct oarecare al planului unei baze pe planul altei baze (Fig. 16.6). **Lungimea înălțimii prismei este egală cu distanța dintre planele bazelor ei.**

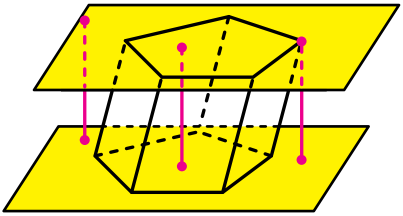


Fig. 16.6

Definiție. Prisma este numită dreaptă, dacă muchiile laterale ale ei sunt perpendiculare pe planul bazei.

De exemplu, paralelipipedul dreptunghic este un tip aparte de prismă dreaptă.

Fiecare muchie laterală a prismei drepte este înălțimea ei. Toate fețele laterale ale prismei drepte sunt dreptunghiuri.

Dacă prisma nu este dreaptă, atunci ea este numită **oblică**.

Definiție. Prisma este numită regulată, dacă ea este dreaptă şi baza ei este un poligon regulat.

De exemplu, cubul este un tip separat de prismă patrulateră regulată.

În figura 16.7 sunt reprezentate prismele regulate triunghiulară şi hexagonală.

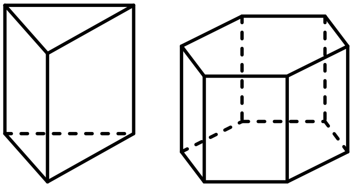


Fig. 16.7

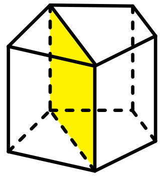


Fig. 16.8

Să cercetăm o prismă convexă cu n laturi ($n > 3$). Secțiunea prismei cu un plan, care trece prin două muchii laterale, ce nu aparțin unei fețe, intersectează bazele prismei pe diagonale (fig. 16.8). Astfel de secțiune este numită **secțiune diagonală a prismei**.

Secțiunea diagonală a oricărei prisme este un paralelogram, iar a prismei drepte – un dreptunghi.

Arie a suprafeței laterale a prismei este numită suma ariilor tuturor fețelor laterale. **Aria suprafeței prismei (**se mai numeşte: „**aria suprafeței totale a prismei**”**)** este numită suma ariilor tuturor fețelor ei.

Evident, că se execută astfel de egalitate:

$$\boxed{S_t = S_l + 2S_{\text{bază}},}$$

unde S_t este aria suprafeței prismei, S_l – aria suprafeței laterale a prismei, $S_{\text{bază}}$ – aria bazei prismei.

Teorema 16.1. ***Aria suprafeței laterale a prismei drepte este egală cu produsul perimetrului bazei ei şi a muchiei laterale a prismei.***

Demonstrație. Fiecare față laterală a prismei drepte este un dreptunghi, o latură a căruia este muchia bazei, iar a doua – muchia laterală. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ – lungimile muchiilor bazei prismei, b – lungimea muchiei laterale. Atunci $S_б = a_1b + a_2b + ... + a_nb = (a_1 + a_2 + ... + a_n)b$. deoarece suma, scrisă în paranteze, este egală cu perimetrul bazei prismei, atunci teorema este demonstrată. ◄

Rezultatul teoremei 16.1 este comod să fie prezentat de formula cu aspectul:

$$\boxed{S_l = P_{\text{bază}} \cdot b,}$$

unde $P_{\text{bază}}$ este perimetrul bazei prismei drepte, b – lungimea muchiei laterale a prismei.

Legătura dintre poliedrele, studiate în acest punct este ilustrată de schema, prezentată în figura 16.9.

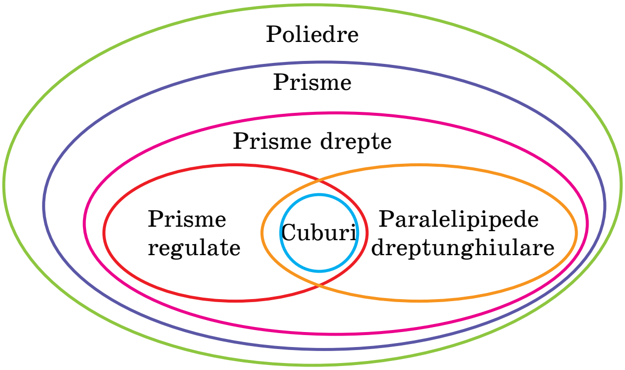


Fig. 16.9

1. Ce se numeşte poliedru?
2. Care feţe ale poliedrului se numesc megieşe?
3. Ce se numeşte unghi diedru al poliedrului?
4. Care poliedru se numeşte convex?
5. Ce se numeşte prismă?
6. Ce se numeşte înălţimea prismei?
7. Care prismă este numită dreaptă? oblică?
8. Care prismă este numită regulată?
9. Ce se numeşte secţiune diagonală a prismei?
10. Ce se numeşte arie a suprafeţei prismei? suprafeţei laterale a prismei?
11. Cu ce este egală aria suprafeţei laterale a prismei drepte?

EXERCIŢII

16.1.° Care este cel mai mic număr de fețe pe care îl poate avea o prismă? Această prismă are câte: 1) vârfuri; 2) muchii; 3) muchii laterale?

16.2.° Prisma are 12 fețe. Care poligon se află în baza ei?

16.3.° În ce prismă muchiile laterale sunt paralele cu înălțimea ei?

16.4.° Este oare corectă afirmația:
1) muchia laterală a prismei drepte este perpendiculară la oricare diagonală a bazei ei;
2) dacă toate muchiile prismei sunt egale, atunci ea este regulată;
3) dacă toate muchiile prismei drepte sunt egale, atunci ea este regulată?

16.5.° Baza prismei drepte este un trapez isoscel, unul din unghiurile căruia este egal cu $110°$ (fig. 16.10). Aflați unghiurile diedre ale prismei de la muchiile laterale.

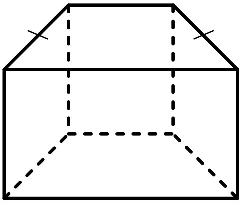


Fig. 16.10

16.6.° Latura bazei, prismei regulate patrulatere este egală cu 3 cm, iar înălțimea – $3\sqrt{6}$ cm. Aflați diagonala prismei.

16.7.° Latura bazei prismei regulate triunghiulare este egală cu 5 cm, iar diagonala feței laterale – 13 cm. Aflați înălțimea prismei.

16.8.° Aflați aria suprafeței laterale a prismei drepte, înălțimea căreia este egală cu 6 cm, iar baza este paralelogramul cu laturile 2 cm şi 3 cm.

16.9.° Aflați latura bazei prismei heptagonale regulate, înălțimea căreia este egală cu 10 cm, iar aria suprafeței laterale – 420 cm^2.

16.10.° Aflați aria suprafeței totale a prismei patrulatere regulate, latura bazei căreia este egală cu a, iar înălțimea cu H.

16.11.° Aflați aria suprafeței totale a prismei triunghiulare regulate, latura bazei căreia este egală cu a, iar înălțimea cu H.

16.12.° Unghiul dintre muchia laterală şi planul bazei prismei oblice este egal cu 30°, înălțimea prismei este egală cu 10 cm. Aflați muchia laterală a prismei.

16.13.• Punctele D şi E sunt mijlocurile muchiilor AC şi BC ale prismei regulate $ABCA_1B_1C_1$ (fig. 16.11). Planul, care trece prin dreapta DE şi creează cu planul ABC unghiul de 30°, intersectează muchia CC_1 în punctul F. Aflați aria secțiunii create a prismei, dacă latura bazei ei este egală cu 12 cm.

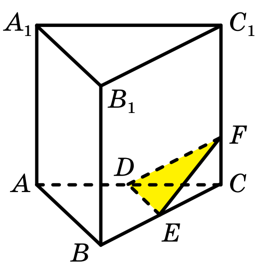


Fig. 16.11

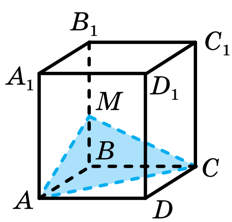


Fig. 16.12

16.14.• Prin diagonala AC a bazei prismei regulate $ABCDA_1B_1C_1D_1$ s-a dus un plan, care creează cu planul ABC un unghi de 45° şi intersectează muchia BB_1 în punctul M (fig. 16.12). Aflați aria secțiunii create a prismei, dacă latura bazei ei este egală cu 8 cm.

16.15.• Latura bazei prismei regulate patrulatere este egală cu a, iar unghiul dintre diagonala prismei şi fața laterală alcătuieşte 30°. Aflați:
1) înălțimea prismei;
2) unghiul dintre diagonala prismei şi planul bazei.

16.16.• Aflați diagonalele prismei regulate hexagonale, fiecare muchie a căreia este egală cu a.

16.17.• Baza prismei drepte este un romb cu latura a şi unghiul ascuțit α. Diagonala mare a prismei creează cu planul bazei unghiul β. Aflați înălțimea prismei.

16.18.• Baza unei prisme drepte, diagonalele căreia sunt egale cu 10 cm şi 16 cm¸ este un romb. Găsiţi laturile bazei prismei, dacă înălţimea ei este egală cu 4 cm.

16.19.• Laturile bazei prismei triunghiulare drepte sunt egale cu 5 cm, 12 cm şi 13 cm, iar aria suprafeţei totale – 270 cm^2. Aflaţi înălţimea prismei.

16.20.• Aria suprafeţei laterale a prismei patrulatere regulate este egală cu 96 cm^2, iar aria suprafeţei totale – 128 cm^2. Aflaţi înălţimea prismei.

16.21.• Calculaţi aria suprafeţei laterale a prismei patrulatere regulate, diagonala căreia este egală cu 12 cm şi este înclinată la planul bazei sub unghiul de 30°.

16.22.• Diagonala prismei patrulatere regulate este egală cu 5 cm, iar diagonala feţei laterale – 4 cm. Aflaţi aria suprafeţei laterale a prismei.

16.23.•• Triunghiul dreptunghic ABC ($\angle ACB = 90°$) este baza prismei drepte $ABCA_1B_1C_1$. Prin dreapta CC_1 s-a dus planul, care este perpendicular la dreapta AB şi intersectează muchia AB în punctul D. Aflaţi aria secţiunii create a prismei, dacă $AD = 18$ cm, $BD = 2$ cm, iar înălţimea prismei este egală cu 8 cm.

16.24.•• Triunghiul dreptunghic ABC ($\angle ACB = 90°$) este baza prismei drepte $ABCA_1B_1C_1$, iar segmentul CM – mediana triunghiului ABC. Înălţimea prismei este egală cu ipotenuza bazei ei. Aflaţi aria secţiunii prismei cu planul, care trece prin dreptele CC_1 şi CM, dacă $AC = 30$ cm, $BC = 40$ cm.

16.25.•• Fiecare muchie a prismei regulate $ABCA_1B_1C_1$ este egală cu a. Aflaţi:

1) aria secţiunii prismei, care trece prin punctele A, B şi C_1;
2) unghiul dintre planul secţiunii date şi planul bazei al prismei.

16.26.•• Triunghiul dreptunghic ABC ($\angle ACB = 90°$) este baza prismei drepte $ABCA_1B_1C_1$. Planul care trece prin dreapta AC, creează cu planul bazei unghiul β şi intersectează muchia BB_1 în punctul D. Aflaţi aria secţiunii create, dacă $\angle BAC = \alpha$, $BD = a$.

16.27.•• Baza prismei drepte este un romb cu unghiul ascuţit α, diagonala mare a rombului este egală cu d. Prin diagonala mică a bazei de jos şi vârful unghiului ascuţit al bazei de sus s-a dus un plan, care creează cu planul bazei de jos a prismei unghiul β. Aflaţi:

1) înălţimea prismei;
2) aria secţiunii create a prismei.

16.28.•• Baza prismei drepte $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este trapezul isoscel $ABCD$, bazele căruia BC şi AD sunt egale corespunzător cu 11 cm şi 21 cm, iar latura laterală – 13 cm. Aria secțiunii diagonale a prismei este egală cu 180 cm^2. Aflați aria suprafeței laterale a prismei.

16.29.•• Diagonala feței laterale a prismei hexagonale regulate este egală cu 10 cm, iar aria suprafeței laterale – 288 cm^2. Aflați latura bazei şi înălțimea prismei.

16.30.* Înălțimea prismei patrulatere regulate este egală cu h. În fețele laterale megieşe sunt duse două diagonale, care au extremitate comună. Aflați aria secțiunii, care trece prin diagonalele date, dacă unghiul dintre ele este egal cu α.

16.31.* Înălțimea prismei patrulatere regulate este egală cu h. Unghiul dintre diagonalele a două fețe laterale, care au capăt comun, este egal cu α. Aflați aria secțiunii, care trece prin diagonalele date.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

16.32. Baza triunghiului isoscel obtuzunghic este egală cu 18 cm, iar raza circumferinței circumscrise lui – 15 cm. Aflați latura laterală a triunghiului.

16.33. Diagonala mare a rombului este egală cu d, iar unghiul ascuțit al lui este egal cu α. Aflați:
1) latura rombului;
2) diagonala mică a rombului;
3) aria rombului;
4) raza circumferinței, înscrise în romb.

17. Paralelipipedul

Definiție. Paralelipiped se numeşte prisma, bazele căreia sunt paralelograme.

În figura 17.1 este prezentat paralelipipedul $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Oricare fața a paralelipipedului este paralelogram.

Două fețe nemegieşe ale paralelipipedului se numesc **fețe opuse ale paralelipipedului**. De exemplu, în figura 17.1 fețele AA_1B_1B şi DD_1C_1C sunt opuse.

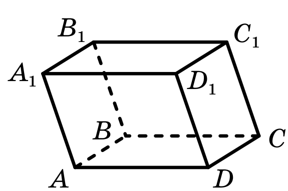


Fig. 17.1

Deoarece $AA_1 \parallel DD_1$ şi $A_1B_1 \parallel D_1C_1$ (fig. 17.1), atunci după criteriul de paralelism ale planelor $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$. Raționând analogic, se poate demonstra, că *oricare două fețe opuse ale paralelipipedului se află în plane paralele.*

Paralelipipedul este numit **drept**, dacă muchiile lui laterale sunt perpendiculare la planul bazei. La paralelipipedul drept toate fețele laterale sunt dreptunghiuri, iar bazele – paralelograme.

Paralelipipedul drept se numeşte **dreptunghic**, dacă bazele lui sunt dreptunghiuri.

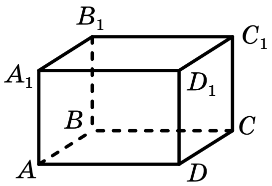


Fig. 17.2

În figura 17.2 este prezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Toate fețele paralelipipedului dreptunghic sunt dreptunghiuri.

Prisma patrulateră regulată este un tip separat de paralelipiped dreptunghic.

Lungimile a trei muchii ale paralelipipedului dreptunghic, care pornesc dintr-un vârf, se numesc **dimensiuni ale paralelipipedului dreptunghic**. În figura 17.2 lungimile muchiilor AB, AD şi AA_1 sunt dimensiunile paralelipipedului dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Paralelipipedul dreptunghiular se numeşte **cub**, dacă toarte dimensiunile lui sunt egale. Toate fețele cubului sunt pătrate.

Legătura între paralelipipede şi tipurile lor separate este ilustrată de schema, prezentată în figura 17.3.

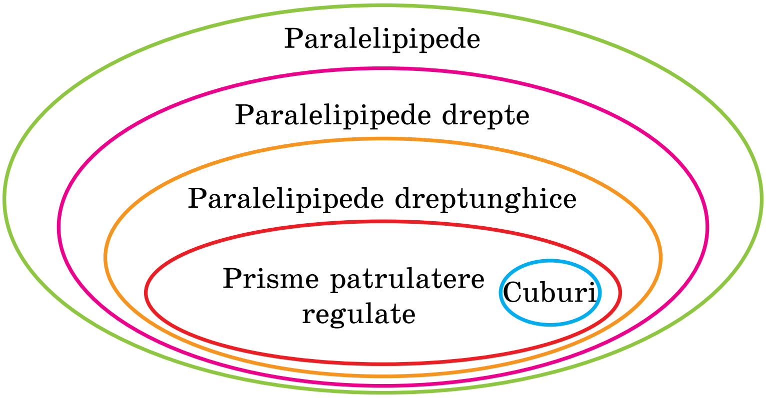


Fig. 17.3

Teorema 17.1. ***Pătratul oricărei diagonale a paralelipipedului dreptunghiular este egal cu suma pătratelor dimensiunilor lui.***

Demonstrație. Să considerăm diagonala AC_1 a paralelipipedului dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 17.4).

Să demonstrăm, că $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

Deoarece triunghiul ABC este dreptunghic ($\angle ABC = 90°$), atunci se poate scrie: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Deoarece $BC = AD$, atunci

$$AC^2 = AB^2 + AD^2. \qquad (1)$$

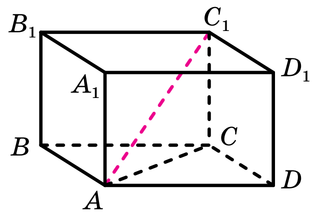


Fig. 17.4

Paralelipipedul dat este dreptunghic, de aceea $C_1C \perp ABC$. Deci, triunghiul ACC_1 este dreptunghic ($\angle ACC_1 = 90°$). Atunci $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. Deoarece $CC_1 = AA_1$, atunci $AC_1^2 = AC^2 + AA_1^2$.

Ținând cont de (1), se poate scrie:

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Pentru restul diagonalelor demonstrația este analogică. ◀

Din teorema 17.1 reiese, că diagonalele paralelipipedului dreptunghic sunt egale.

1. Ce se numeşte paralelipiped?
2. Care feţe ale paralelipipedului se numesc opuse?
3. Care paralelipiped se numeşte drept?
4. Care paralelipiped se numeşte dreptunghic?
5. Ce se numesc dimensiuni ale paralelipipedului dreptunghic?
6. Care paralelipiped drept se numeşte cub?
7. Formulaţi teorema despre pătratul diagonalei paralelipipedului dreptunghic.

EXERCIŢII

17.1.° Se poate oare de considerat corectă astfel de definiție a cubului: „Cub se numeşte prisma patrulateră regulată, înălțimea căruia este egală cu latura bazei”?

17.2.° Demonstrați, că în paralelipipedul drept planul secțiunii diagonale este perpendicular pe planul bazei.

17.3.° Laturile bazei paralelipipedului dreptunghic sunt egale cu 5 cm şi 12 cm, iar diagonala paralelipipedului creează cu planul bazei unghiul de 60°. Aflaţi înălţimea paralelipipedului.

17.4.° Laturile bazei paralelipipedului dreptunghic sunt egale cu 7 cm şi 24 cm, iar înălţimea – 4 cm. Aflaţi aria secţiunii diagonale a paralelipipedului.

17.5.° Aflaţi diagonala paralelipipedului dreptunghic, dimensiunile căruia sunt egale cu 2 cm, 3 cm şi 6 cm.

17.6.° Aflaţi dimensiunile paralelipipedului dreptunghic, dacă ele se raportă ca 1 : 2 : 2, iar diagonala paralelipipedului este egală cu 6 cm.

17.7.° Muchia cubului este egală cu a. Cu ce este egală diagonala cubului?

17.8.° Aria suprafeţei cubului este egală cu 216 cm^2. Aflaţi aria secţiunii diagonale a lui.

17.9.• Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 17.5), $AB = 5$ cm, $AD = 7$ cm, $AA_1 = 12$ cm. Aflaţi unghiul:
1) dintre dreapta DC_1 şi planul BCC_1;
2) dintre dreapta B_1D şi planul ABB_1.

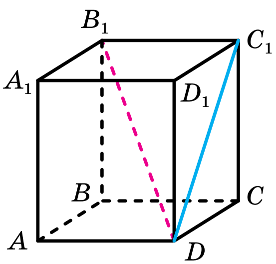


Fig. 17.5

17.10.• Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 17.5), $AB = 5$ cm, $AD = 7$ cm, $AA_1 = 12$ cm. Aflaţi unghiul:
1) dintre dreapta DC_1 şi planul $A_1B_1C_1$;
2) dintre dreapta B_1D şi planul ABC.

17.11.• Din patru cuburi egale, muchia cărora este egală cu 1 cm, s-a alcătuit un paralelipiped dreptunghic. Cu ce este egală aria suprafeţei totale a acestui paralelipiped?

17.12.• Baza paralelipipedului drept este rombul cu unghiul ascuţit α şi diagonala mică d. Diagonala mare a paralelipipedului face cu planul bazei unghiul β. Aflaţi aria suprafeţei laterale a paralelipipedului.

17.13.• Baza paralelipipedului drept este rombul cu latura de 6 cm şi unghiul de 60°. Diagonala mică a paralelipipedului este egală cu diagonala mare a bazei lui. Aflaţi aria suprafeţei laterale a paralelipipedului.

17.14.•• Laturile bazei paralelipipedului drept sunt egale cu $2\sqrt{2}$ cm şi 4 cm, iar unul din unghiurile bazei este egal cu 45°. Diagonala mare a paralelipipedului este egală cu 7 cm. Aflaţi aria suprafeţei laterale a paralelipipedului.

17.15.•• Laturile bazei paralelipipedului drept sunt egale cu 2 cm şi $2\sqrt{3}$ cm, iar unul din unghiurile bazei este egal cu 30°. Aria secțiunii diagonale a paralelipipedului, care trece prin diagonala mică a bazei, este egală cu 8 cm^2. Aflați aria suprafeței totale a paralelipipedului.

17.16.•• Demonstrați, că dacă diagonalele paralelipipedului drept sunt egale, atunci acest paralelipiped este dreptunghic.

17.17.•• Baza $ABCD$ a paralelipipedului $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este pătrat. Vârful A_1 este egal depărtat de la toate vârfurile bazei $ABCD$. Aflați înălțimea paralelipipedului, dacă latura bazei este egală cu 8 cm, iar muchia laterală a paralelipipedului – 6 cm.

17.18.•• Baza $ABCD$ a paralelipipedului oblic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este pătrat, iar planele fețelor AA_1B_1B şi CC_1D_1D sunt perpendiculare pe planul bazei. Aflați aria feței AA_1D_1D, dacă fiecare muchie a paralelipipedului este egală cu 8 cm.

17.19.* Baza paralelipipedului drept este romb, iar ariile secțiunilor diagonale sunt egale corespunzător cu S_1 şi S_2. Aflați aria suprafeței laterale a paralelipipedului.

17.20.* Baza paralelipipedului drept este romb, aria căruia este egală cu S. Ariile secțiunilor diagonale sunt egale corespunzător cu S_1 şi S_2. Aflați muchia laterală a paralelipipedului.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

17.21. Aflați aria trapezului isoscel, bazele căruia sunt egale cu 23 cm şi 17 cm, iar diagonala – 25 cm.

17.22. Latura laterală mică a trapezului dreptunghic este egală cu 10 cm, iar unul din unghiuri – 45°. Aflați aria acestui trapez, dacă în el se poate înscrie o circumferință.

18. Piramida

Definiție. **Poliedrul, o față a căruia este poligon cu *n* laturi, iar restul fețelor – triunghiuri, ce au un vârf comun, se numeşte piramidă cu *n* laturi.**

Vă amintim, că triunghiurile, care au vârf comun, se numesc fețe laterale ale piramidei, iar însuşi vârful – vârf al piramidei; poligonul cu n laturi, despre care se spune în definiție, se numeşte baza piramidei, iar laturile lui –muchiile bazei piramidei; muchiile, care nu aparțin bazei, se numesc muchii laterale ale piramidei (fig. 18.1).

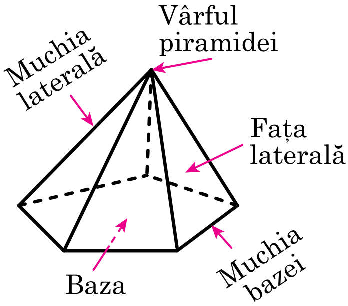


Fig. 18.1

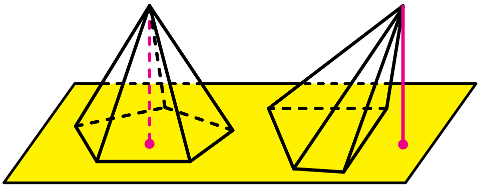


Fig. 18.2

Înălțime **a piramidei** este numită perpendiculara, coborâtă din vârful piramidei pe planul bazei (fig. 18.2).

Să cercetăm piramida convexă cu n laturi ($n > 3$). Secțiunea piramidei cu planul, care trece prin două muchii laterale, ce nu aparțin unei fețe, intersectează baza piramidei pe diagonală (fig. 18.3). Astfel de secțiune este numită **secțiune diagonală a piramidei**.

Secțiunea diagonală a piramidei este un triunghi.

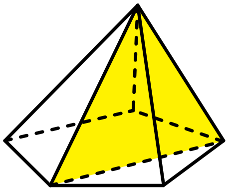


Fig. 18.3

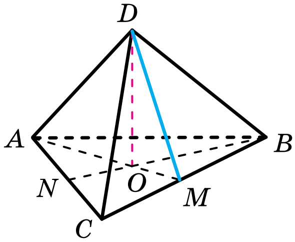


Fig. 18.4

Definiție. Piramida este numită regulată, dacă baza ei este un poligon regulat şi piciorul înălțimii piramidei este centrul acestui poligon.

În figura 18.4 este prezentată piramida triunghiulară regulată $ADBC$ cu baza ABC. Triunghiul ABC este echilateral. Proiecția vârfului D pe planul ABC este centrul triunghiului – punctul O. Pentru aflarea acestui punct în figura 18.4 s-au dus medianele AM şi BN ale triunghiului ABC.

În figura 18.5 este prezentată piramida patrulateră regulată $EABCD$. Patrulaterul $ABCD$ este pătrat, punctul O – centrul lui, segmentul EO este înălțimea piramidei. Deoarece centrul pătratului coincide cu punctul de intersecție al diagonalelor lui, atunci se poate de făcut concluzia: proiecția vârfului piramidei patrulatere regulate pe planul bazei – acesta-i punctul de intersecție al diagonalelor pătratului, care este baza piramidei.

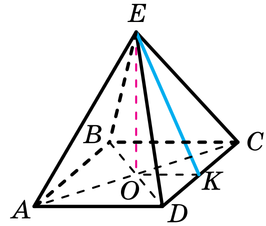


Fig. 18.5

Piramida triunghiulară regulată, în care toate fețele sunt egale, se numeşte **tetraedru regulat**.

Menționăm unele proprietăți ale piramidei regulate.

Toate muchiile laterale ale piramidei regulate sunt egale, toate fețele laterale ale piramidei regulate sunt triunghiuri isoscele egale (demonstrați aceasta de sine stătător).

Apotemă a piramidei regulate este numită înălțimea feței laterale, coborâtă din vârful piramidei.

În figura 18.4 este dus segmentul DM, unde punctul M – mijlocul muchiei BC. Deoarece triunghiul BCD este isoscel cu baza BC, atunci segmentul DM este înălțimea lui. Deci, segmentul DM este apotema piramidei triunghiulare regulate $DABC$.

În figura 18.5 segmentul EK, unde K este mijlocul muchiei DC, este apotema piramidei patrulatere regulate $EABCD$.

Toate apotemele piramidei regulate sunt egale (demonstrați aceasta de sine stătător).

Aria suprafeței laterale a piramidei este numită suma ariilor tuturor fețelor laterale. **Aria suprafeței piramidei** (se mai spune: **aria suprafeței totale a piramidei**) se numeşte suma ariilor tuturor fețelor ei.

Evident, că se execută astfel de egalitate:

$$S_{\mathrm{t}} = S_l + S_{\text{bază}},$$

Unde S_{t} – aria suprafeței piramidei, S_l – aria suprafeței laterale a piramidei, $S_{\text{bază}}$ – aria bazei piramidei.

Teorema 18.1. ***Aria suprafeței laterale a piramidei regulate este egală cu produsul perimetrului bazei ei şi a apotemei.***

Demonstrație. Să cercetăm piramida regulată cu $\boldsymbol{n}$ laturi cu muchia bazei, ce este egală cu a şi apotema, ce este egală cu d. Atunci aria feței laterale este egală cu $\frac{1}{2}ad$. Toate fețele laterale a piramidei regulate cu n laturi sunt triunghiuri egale, de aceea aria suprafeței laterale este egală cu $\left(\frac{1}{2}ad\right)\cdot n$, adică $S_l=\left(\frac{1}{2}ad\right)\cdot n=\frac{1}{2}(an)\cdot d$. Deoarece produsul an este egal cu perimetrul bazei, atunci teorema este demonstrată. ◄

Rezultatul teoremei 18.1 este comod de-l prezentat în aspect de formulă

$$\boxed{S_l=\frac{1}{2}P_{\text{bază}}\cdot d,}$$

Unde $P_{\text{bază}}$ este perimetrul bazei piramidei, d – lungimea apotemei piramidei regulate.

Se poate demonstra, că au loc astfel de afirmații.

1) *Dacă muchiile laterale ale piramidei sunt egale sau muchiile laterale creează cu planul bazei unghiuri egale, atunci proiecția vârfului piramidei pe planul bazei este centrul circumferinței circumscrise poligonului, care este baza piramidei.*

De exemplu, dacă muchiile laterale ale piramidei sunt egale, iar baza ei este triunghi dreptunghic, atunci proiecția vârfului piramidei pe planul bazei este mijlocul ipotenuzei bazei (fig. 18.6).

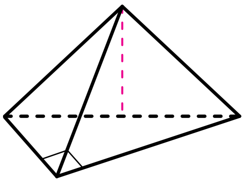


Fig. 18.6

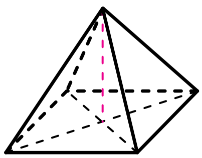


Fig. 18.7

2) *Dacă toate unghiurile diedre ale piramidei convexe de la muchiile bazei sunt egale, atunci proiecția vârfului piramidei pe planul bazei este centrul circumferinței înscrise în poligonul, care este baza piramidei.*

De exemplu, dacă baza piramidei este romb şi toate unghiurile diedre de la muchiile bazei sunt egale, atunci proiecția vârfului piramidei pe planul bazei este punctul de intersecție al diagonalelor rombului (fig. 18.7).

3) *Dacă fiecare din unghiurile diedre ale piramidei convexe de la muchiile bazei sunt egale cu α, atunci aria suprafeței laterale a piramidei S_l se poate calcula cu formula*

$$S_l=\frac{S_{\text{bază}}}{\cos\alpha},$$

unde $S_{\text{bază}}$ – aria bazei piramidei.

1. Ce se numeşte piramidă?
2. Ce se numeşte înălţimea piramidei?
3. Care secţiune se numeşte secţiune diagonală a piramidei?
4. Care piramidă este numită regulată?
5. Ce se numeşte apotema piramidei regulate?
6. Ce este numită aria suprafeţei piramidei? suprafeţei laterale a piramidei?
7. Cu ce este egală aria suprafeţei laterale a piramidei regulate?

EXERCIŢII

18.1.° Piramida cu n- laturi are câte:
1) vârfuri; 2) fețe; 3) muchii?

18.2.° Care este cel mai mic număr de fețe pe care îl poate avea piramida?

18.3.° În figura 18.8. este prezentată piramida triunghiulară regulată $SABC$. Desenați figura în caiet şi reprezentați:
1) înălțimea piramidei;
2) unghiul de înclinație a muchiei SA la planul bazei;
3) unghiul liniar al ughiului diedru al piramidei de la muchia BC.

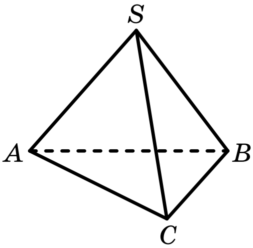


Fig. 18.8

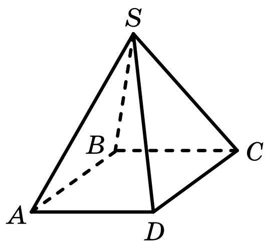


Fig. 18.9

18.4.° În figura 18.9 este prezentată piramida patrulateră regulată $SABCD$. Desenați figura în caiet şi reprezentați:
1) înălțimea piramidei;
2) unghiul de înclinație a muchiei SC la planul bazei;
3) unghiul liniar al ughiului diedru al piramidei de la muchia AD.

18.5.° Latura bazei piramidei triunghiulare regulate este egală cu 12 cm, iar muchia laterală face cu planul bazei unghiul de 60°. Aflați înălțimea piramidei.

18.6.° Înălțimea piramidei patrulatere regulate este egală cu 8 cm, iar muchia laterală face cu planul bazei unghiul de 45°. Aflați latura bazei piramidei.

18.7.° Latura bazei piramidei patrulatere regulate este egală cu 6 cm, iar înălțimea piramidei – 4 cm. Aflați:
1) apotema piramidei;
2) unghiul diedru al piramidei de la muchia bazei.

18.8.° Apotema prismei triunghiulare regulate este egală cu 2 cm, iar latura bazei – 6 cm. Aflați:
1) înălțimea piramidei;
2) unghiul diedru al piramidei de la muchia bazei.

18.9.° Latura bazei piramidei heptagonale regulate este egală cu 10 cm, iar apotema ei – 20 cm. Aflați aria suprafeței laterale a piramidei.

18.10.° Unghiul plan de la vârful piramidei octogonale regulate este egal cu 30°, iar muchia laterală – 2 cm. Aflați aria suprafeței laterale a piramidei:

18.11.° Aria suprafeței laterale a piramidei pentagonale regulate este egală cu 300 cm^2, iar apotema ei – 15 cm. Aflați latura bazei piramidei.

18.12.° Fiecare muchie a piramidei patrulatere regulate este egală cu 10 cm. Aflați aria suprafeței totale a piramidei.

18.13.° Fiecare muchie a piramidei patrulatere regulate este egală cu 4 cm. Aflați aria suprafeței totale a piramidei.

18.14.• Baza piramidei $MABCD$ este paralelogramul $ABCD$, diagonala BD a căruia este egală cu 4 cm. Înălțimea piramidei trece prin punctul intersecției al diagonalelor bazei, iar muchia laterală MA, ce este egală cu 8 cm, face cu planul bazei unghiul de 45°. Aflați muchia MD.

18.15.• Baza piramidei este rombul, latura căruia este egală cu 13 cm, iar una din diagonale – 24 cm. Piciorul înălțimii piramidei este punctul de intersecție al diagonalelor bazei piramidei. Găsiți muchiile laterale ale piramidei, dacă înălțimea ei este egală cu 16 cm.

18.16.• Muchia laterală a piramidei hexagonale regulate, egală cu b, creează cu planul bazei unghiul β. Aflați aria secțiuni diagonale a piramidei, care trece prin diagonala mare a bazei.

18.17.• Latura bazei piramidei patrulatere regulate este egală cu a, iar muchia laterală creează cu planul bazei unghiul α. Aflați aria secțiunii diagonale a piramidei.

18.18.• Demonstrați că în piramida regulată:
1) muchiile laterale creează unghiuri egale cu planul bazei;
2) unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazei sunt egale.

18.19.• Latura bazei piramidei triunghiulare regulate este egală cu a, iar unghiul diedru al piramidei de la muchia bazei este egal cu α. Aflați aria suprafeței laterale a piramidei

18.20.• Diagonala bazei piramidei patrulatere regulate este egală cu d, iar unghiul diedru al piramidei la muchia bazei este egal cu α. Aflați aria suprafeței laterale a piramidei.

18.21.• Apotema piramidei patrulatere regulate este egală cu 6 cm şi creează cu planul bazei unghiul de 60°. Aflați aria suprafeței laterale a piramidei.

18.22.• Înălțimea piramidei triunghiulare regulate este egală cu 5 cm, iar unghiul diedru al piramidei de la muchia bazei este egal cu 45°. Aflați ari suprafeței laterale a piramidei.

18.23.•• Punctele D, E şi F sunt mijlocurile muchiilor AB, AM şi MC a piramidei regulate $MABC$ corespunzător, $AB = 8$ cm, $AM = 12$ cm.
1) Construiți secțiunea piramidei ce trece prin punctele D, E şi F.
2) Demonstrați, că secțiunea construită este dreptunghi.
3) Aflați aria secțiunii.

18.24.•• Construiți secțiunea piramidei triunghiulare regulate cu planul, care trece prin piciorul înălțimii ei, paralel cu muchiile neconcurente ale piramidei. Aflați perimetrul acestei secțiuni, dacă latura bazei piramidei este egală cu 9 cm, iar muchia laterală – 12 cm.

18.25.•• Baza piramidei este triunghiul dreptunghic, ipotenuza căruia este egală cu 32 cm. Înălțimea piramidei este egală cu 12 cm. Aflați muchiile laterale ale piramidei, dacă ele creează unghiuri egale cu planul bazei.

18.26.•• Baza piramidei este dreptunghiul cu laturile 6 cm şi 8 cm, iar fiecare muchie laterală face cu planul bazei unghiul de 60°. Aflați înălțimea piramidei.

18.27.•• Baza piramidei este rombul cu latura de 8 cm şi unghiul de 30°. Fiecare din unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazei sunt egale cu 45°. Aflați:
1) aria suprafeței laterale a piramidei;
2) înălțimea piramidei.

18.28.•• Baza piramidei este triunghiul cu laturile de 5 cm, 12 cm şi 13 cm, iar toate unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazei sunt egale cu 30°. Aflaţi:
1) aria suprafeţei laterale a piramidei;
2) înălţimea piramidei.

18.29.•• Baza piramidei este trapezul isoscel, bazele căruia sunt egale cu 4 cm şi 16 cm, iar toate unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazei sunt egale cu 60°. Aflaţi:
1) aria suprafeţei laterale a piramidei;
2) înălţimea piramidei.

18.30.•• Baza piramidei este dreptunghiul cu laturile de 4 cm şi 12 cm. Planele a două feţe laterale sunt perpendiculare pe planul bazei. Planul încă a unei feţe, care trece prin latura mare a bazei, face cu planul bazei unghiul de 45°. Aflaţi:
1) înălţimea piramidei;
2) aria suprafeţei laterale a piramidei.

18.31.•• Baza piramidei este pătratul cu latura de 12 cm. Planele a două feţe laterale sunt perpendiculare pe planul bazei. Aflaţi aria suprafeţei totale a piramidei, dacă înălţimea ei este egală cu 5 cm.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

18.32. Prelungirile laturilor laterale AB şi CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul M, $CD : CM = 3 : 5$, segmentul BC este baza mică a trapezului. Suma bazelor trapezului este egală cu 26 cm. Aflaţi segmentul AD.

18.33. Diagonalele trapezului $ABCD$ cu bazele BC şi AD se intersectează în punctul O. Aflaţi raportul ariilor triunghiurilor BOC şi AOD, dacă $BC = 3$ cm, $AD = 9$ cm.

FRUMUSEŢEA ŞI INTELECTUL UCRAINEI

Roxolana, Solomia Kruşelniţka, Lesea Ukrainka sunt femeile ucrainene din trecut cunoscute lumii întregi.

Fetele ucrainene contemporane devin cele mai bune nu numai în politică şi artă, dar şi pe arena competițiilor matematice. În cea mai prestigioasă olimpiadă Europeană de matematică pentru fetițe (EGMO) şcolărițele ucrainene Sofia Dubova (2014), Olga Şevcenko (2017), şi Alina Garbuzova (2018) de trei ori au câştigat întâietatea printre toți participanții, rezolvând absolut toate problemele propuse. În general, comanda ucraineană de fete până la ora actuală rămâne singura comandă din Europa, care de trei ori a devenit prima în colocviul oficial pe echipe. Astfel de realizări au convins comunitatea europeană să aleagă locul petrecerii EGMO în anul 2019 oraşul Kiev. Suntem convinşi că încă o dată vom vedea intelectualele noastre în fruntea piedestalului de onoare.

Comanda Ucrainei la prima olimpiadă EGMO (Cambridge, Marea Britanie, anul 2012)

Componența echipei (*de la stânga la dreapta*): Haritonova Elena (argint); Cravcenko Iulia (argint); Pavliuk Maria (argint); Sediuk Iaroslava (argint)

ÎNSĂRCINAREA NR. 4 „CONTROLEAZĂ-TE” ÎN FORMĂ TEST

1. Calculați aria suprafeței laterale a prismei drepte, baza căreia este paralelogramul cu laturile de 8 cm şi 22 cm, iar înălțimea prismei este egală cu 15 cm.
A) 900 cm^2; B) 450 cm^2; C) 600 cm^2; D) 2640 cm^2.

2. Cu ce este egală înălțimea prismei patrulatere regulate, dacă latura bazei ei este egală cu $9\sqrt{2}$ cm, iar diagonala prismei este înclinată la planul bazei sub unghiul de 30°?
A) $9\sqrt{3}$ cm; B) $9\sqrt{2}$ cm; C) $6\sqrt{3}$ cm; D) $6\sqrt{2}$ cm.

3. Baza prismei drepte este triunghiul isoscel cu latura laterală 6 cm şi unghiul 120° la vârf. Diagonala feței laterale a prismei, care conține baza triunghiului isoscel, este înclinată la planul bazei cu unghiul de 60°. Aflați înălțimea prismei.
A) 9 cm; B) 18 cm; C) 12 cm; D) $6\sqrt{3}$ cm.

4. Găsiți diagonala feței laterale a prismei patrulatere regulate, dacă latura bazei ei este egală cu 6 cm, iar diagonala prismei – 10 cm.
A) 4 cm; B) $2\sqrt{2}$ cm; C) 8 cm; D) $4\sqrt{3}$ cm.

5. Calculați aria suprafeței laterale a prismei triunghiulare regulate, fețele laterale ale căreia sunt pătrate cu diagonala de 8 cm.
A) 32 cm^2; B) 96 cm^2; C) 64 cm^2; D) 192 cm^2.

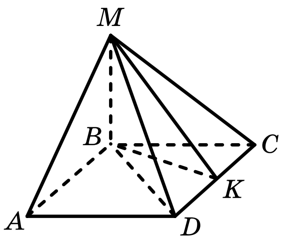
6. Baza prismei drepte este rombul cu diagonalele 10 cm şi 24 cm. Diagonala mică a prismei este egală cu 26 cm. Calculați aria suprafeței laterale a prismei.
A) 312 cm^2; B) 624 cm^2; C) 2496 cm^2; D) 1248 cm^2.

7. Diagonala paralelipipedului dreptunghiular este egală cu $\sqrt{29}$ cm, iar două dimensiuni ale lui – 2 cm şi 3 cm. Aflați cea de-a treia dimensiune a paralelipipedului dreptunghiular.
A) 2 cm; B) $\sqrt{15}$ cm; C) 4 cm; D) $3\sqrt{2}$ cm.

8. În paralelipipedul dreptunghiular $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se cunoaşte, că $AD = 24$ cm, $CD = 5$ cm, $AA_1 = 10$ cm. Cu ce este egală aria patrulaterului A_1B_1CD?
A) 100 cm^2; B) 120 cm^2; C) 125 cm^2; D) 130 cm^2.

9. Calculați aria suprafeței laterale a piramidei hexagonale regulate, latura bazei căreia este egală cu 8 cm, iar apotema – 12 cm.
A) 288 cm^2; B) 576 cm^2; C) 144 cm^2; D) 192 cm^2.

10. Bază a piramidei $MABCD$, prezentată în figură, este un pătrat, muchia laterală MB este perpendiculară pe planul bazei piramidei, punctul K este mijlocul segmentului CD. Indicați unghiul liniar al unghiului diedru al piramidei de la muchia CD.



A) $\angle MAB$; C) $\angle MKB$;
B) $\angle MDB$; D) $\angle MCB$.

11. Înălțimea piramidei patrulatere regulate este egală cu 12 cm, iar apotema – 15 cm. Calculați aria suprafeței laterale a piramidei.
A) 540 cm^2; B) 270 cm^2; C) 1080 cm^2; D) 720 cm^2.

12. Latura bazei a piramidei triunghiulare regulate este egală cu 6 cm, iar înălțimea piramidei – $\sqrt{22}$ cm. Aflați aria suprafeței laterale a piramidei.
A) 90 cm^2; B) 45 cm^2; C) 60 cm^2; D) 30 cm^2.

13. Latura bazei a piramidei patrulatere regulate este egală cu a, iar secțiunea diagonală este un triunghi dreptunghic. Aflați înălțimea piramidei.
A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; C) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; D) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

14. Unghiul diedru al piramidei patrulatere regulate de la muchia bazei este egal cu α. Aflați înălțimea piramidei.
A) $2a\sin\alpha$; B) $2a\cos\alpha$; C) $2a\,\mathrm{tg}\,\alpha$; D) $\frac{2a}{\mathrm{tg}\,\alpha}$.

15. Latura bazei a piramidei triunghiulare regulate este egală cu 8 cm, iar fața laterală este înclinată la planul bazei sub unghiul de 30°. Aflați aria suprafeței laterale a piramidei.
A) 32 cm^2; B) 64 cm^2; C) $32\sqrt{3}$ cm^2; D) $64\sqrt{3}$ cm^2.

16. Muchia laterală a piramidei patrulatere regulate este egală cu 8 cm şi creează cu planul bazei unghiul de 60°. Aflați apotema piramidei.
A) 4 cm; B) $2\sqrt{14}$ cm; C) $4\sqrt{7}$ cm; D) $4\sqrt{2}$ cm.

17. Baza piramidei este rombul cu latura a şi unghiul α. Unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazei sunt egale cu β. Aflați aria suprafeței laterale a piramidei.
A) $\frac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}$; B) $\frac{a^2\sin\alpha}{2\cos\beta}$; C) $a^2\sin\alpha\cos\beta$; D) $\frac{1}{2}a^2\sin\alpha\cos\beta$.

18. În baza piramidei se află triunghiul dreptunghic cu cateta b şi unghiul opus ei β. Muchiile laterale ale piramidei creează cu planul bazei unghiul γ. Aflaţi înălţimea piramidei.

A) $\frac{b\operatorname{tg}\gamma}{2\cos\beta}$ B) $\frac{b\operatorname{tg}\gamma}{2\sin\beta}$; C) $\frac{1}{2}b\cos\beta\operatorname{tg}\gamma$; D) $\frac{1}{2}b\sin\beta\operatorname{tg}\gamma$.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 4

Poliedrul

Poliedru se numeşte corpul, suprafaţa căruia este alcătuită dintr-un număr finit de poligoane.

Poliedrul se numeşte convex, dacă el este amplasat de aceeaşi parte a planului oricăreia din feţele lui.

Prisma

Poliedrul, două feţe ale căruia sunt poligoane egale cu $\boldsymbol{n}$ laturi, ce se află în plane paralele, iar restul $\boldsymbol{n}$ feţe sunt paralelograme se numeşte prismă cu $\boldsymbol{n}$ laturi.

Prisma este numită dreaptă, dacă muchiile ei sunt perpendiculare pe planul bazei.

Prisma este numită regulată, dacă ea este dreaptă şi baza ei este un poligon regulat.

Înălţimea prismei este numită perpendiculara, coborâtă dintr-un punct oarecare al planului unei baze pe planul altei baze.

Aria suprafeţei laterale a prismei drepte

Aria suprafeţei laterale a prismei drepte este egală cu produsul perimetrului bazei ei şi a muchiei laterale a prismei.

Paralelipipedul

Paralelipiped este numită prisma, baza căreia este un paralelogram.

Paralelipipedul este numit drept, dacă muchiile lui laterale sunt perpendiculare pe planul bazei.

Paralelipipedul drept este numit dreptunghiular, dacă bazele lui sunt dreptunghiuri.

Lungimile a trei muchii ale paralelipipedului dreptunghiular care pornesc dintr-un vârf, se numesc dimensiuni ale paralelipipedului dreptunghiular.
Paralelipipedul dreptunghiular se numeşte cub, dacă dimensiunile lui sunt egale.

Proprietatea paralelipipedului dreptunghiular

Pătratul oricărei diagonale a paralelipipedului dreptunghiular este egal cu suma pătratelor dimensiunilor lui.

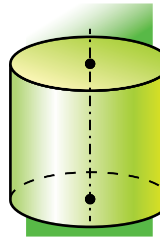
Piramida

Poliedrul, o faţă a căruia este un poligon cu n laturi, iar restul feţelor – triunghiuri, ce au un vârf comun, se numeşte piramidă cu n laturi.
Înălţimea piramidei este numită perpendiculara, coborâtă din vârful piramidei pe planul bazei.
Piramida este numită regulată, dacă baza ei este un poligon regulat şi piciorul înălţimii piramidei este centrul acestui poligon.
Toate muchiile laterale ale piramidei regulate sunt egale, toate feţele piramidei regulate sunt triunghiuri isoscele.
Apotemă a piramidei regulate este numită înălţimea feţei laterale, dusă din vârful piramidei.

Aria suprafeţei laterale a piramidei

Aria suprafeţei laterale a piramidei este numită suma ariilor tuturor feţelor laterale ale ei.
Aria suprafeţei laterale a piramidei regulate este egală cu jumătatea produsului perimetrului ei şi a apotemei.

§5 CORPURI DE ROTAȚIE



În acest paragraf veţi face cunoştinţă mai detailat cu corpurile deja cunoscute vouă – cilindrul, conul, sfera, o să studiaţi proprietăţile lor.

19. Cilindrul

Să ne închipuim, că dreptunghiul OO_1A_1A se roteşte în jurul laturii OO_1 (fig. 19.1). În timpul rotației se creează figura, care se numeşte **cilindru**. Cercurile cu centrele O şi O_1 care s-au creat în rezultatul rotației laturilor OA şi O_1A_1, se numesc **bazele cilindrului**, iar figura, care s-a creat în rezultatul rotației laturii A_1A, este numită **suprafața laterală a cilindrului**. Segmentele, care formează suprafața laterală a cilindrului, se numesc **generatoarele cilindrului** (fig. 19.2).

Evident, că toate generatoarele cilindrului sunt egale şi perpendiculare pe planul bazei.

Înălțime **a cilindrului** se numeşte perpendiculara, coborâtă din oricare punct al planului unei baze pe planul altei baze. Înălțimea cilindrului este egală cu generatoarea lui.

Dreapta, care trece prin centrele bazelor cilindrului, este numită **axa cilindrului**. În figura 19.2 dreapta OO_1 este axa cilindrului.

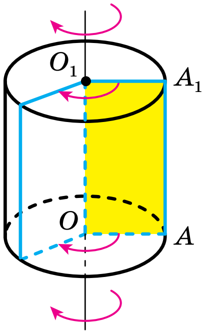


Fig. 19.1

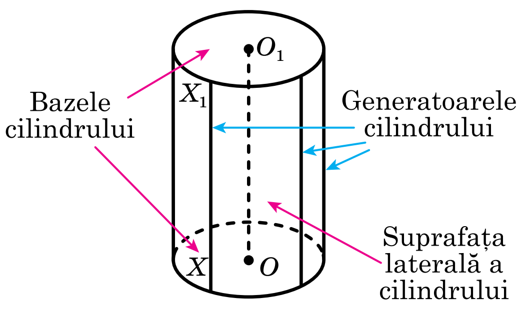


Fig. 19.2

Corp de rotație se numeşte corpul, obținut în rezultatul rotației unei oarecare figuri plane în jurul unei drepte.

Cilindrul este exemplul unui corp de rotație.

Dacă intersectăm cilindrul cu un plan, ce trece prin axa lui, atunci în secțiune se obține un dreptunghi, două laturi ale căruia sunt diametrele bazelor cilindrului, iar altele două – generatoarele cilindrului (fig. 19.3). Astfel de secțiune este numită **secțiune axială a cilindrului**.

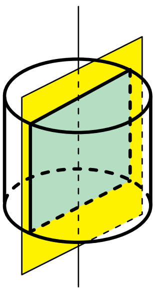


Fig. 19.3

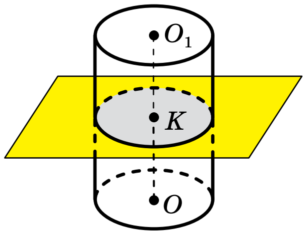


Fig. 19.4

Să intersectăm cilindrul cu un plan, paralel bazelor cilindrului (fig. 19.4). Secțiunea cilindrului cu planul, paralel bazelor (sau perpendicular pe axa cilindrului), este cercul, care este egal cu baza cilindrului.

Să ne închipuim, că suprafața cilindrului este tăiată după circumferințele bazelor şi o generatoare oarecare (fig. 19.5), iar apoi am desfăşurat-o pe un plan. Figura obținută se numeşte **desfăşurata cilindrului pe plan** sau pur şi simplu **desfăşurata cilindrului**. Ea este alcătuită din doua cercuri, care sunt egale cu bazele cilindrului, şi un dreptunghi, care este numit desfăşurata suprafeței laterale a cilindrului (fig. 19.6).

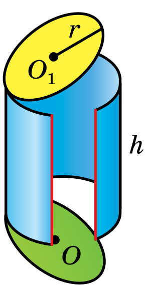


Fig. 19.5

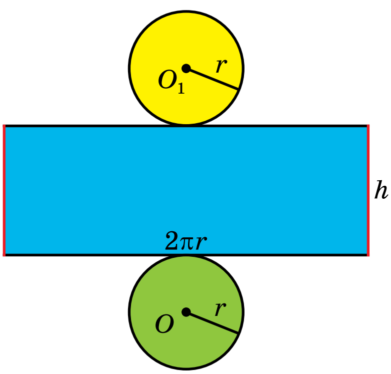


Fig. 19.6

Dacă generatoarea cilindrului este egală cu $\boldsymbol{h}$, iar raza bazei cilindrului – r, atunci laturile desfăşuratei suprafeței laterale a cilindrului sunt egale cu h şi $2\pi r$.

Ca arie a suprafeței laterale a cilindrului este considerată aria desfăşuratei suprafeței laterale a lui. Deci,

$$\boxed{S_l = 2\pi r h,}$$

unde S_l este aria suprafeței laterale a cilindrului, r – raza bazei cilindrului, h – lungimea înălțimii cilindrului.

Aria totală a suprafeței cilindrului este numită suma ariilor a suprafeței laterale a cilindrului şi a două baze ale lui. Avem:

$$\boxed{S_t = S_l + 2S_{bază},}$$

unde S_t – aria totală a suprafeței cilindrului, $S_{bază}$ – aria bazei cilindrului.

Aria bazei cilindrului este egală cu πr^2. Atunci obținem formula

$$\boxed{S_t = 2\pi r h + 2\pi r^2}$$

Din cursul de geometrie al clasei a 10-a ştiți, că proiecția paralelă a circumferinței este figura care se numeşte elipsă. De aceea, reprezentând cilindrul, bazele lui se desenează în formă de elipse. În practică pentru reprezentarea elipselor este comod de folosit riglele şabloane (fig. 19.7).

Fig. 19.7

1. Care corp se numeşte cilindru?
2. Descrieţi, ce se numeşte suprafaţă laterală a cilindrului.
3. Ce sunt numite baze ale cilindrului? axă a cilindrului? înălţime a cilindrului?
4. Care corp se numeşte corp de rotaţie?
5. Ce se numeşte secţiune axială a cilindrului?
6. Din ce figuri constă desfăşurata cilindrului?
7. După ce formulă se calculează aria suprafeţei laterale a cilindrului?
8. După ce formulă se calculează aria suprafeţei totale a cilindrului?

EXERCIŢII

19.1.° Înălțimea cilindrului este egală cu 6 cm, iar raza bazei – 5 cm. Aflați aria secțiunii axiale a cilindrului.

19.2.° Aria secțiunii axiale a cilindrului este egală cu 128 cm^2. Aflați înălțimea cilindrului, dacă raza bazei lui este egală cu 4 cm.

19.3.° Diagonala secțiunii axiale a cilindrului este egală cu d, şi creează cu planul bazei cilindrului unghiul α. Aflați:
1) înălțimea cilindrului; 2) aria bazei cilindrului.

19.4.° Aria bazei cilindrului este egală cu 49π cm^2 iar unghiul dintre diagonala secțiunii axiale şi generatoarea cilindrului este egal cu 30°. Găsiți înălțimea cilindrului.

19.5.° Cu ce este egală aria suprafeței laterale a cilindrului, raza bazei căruia este egală cu 2 cm, iar înălțimea – 9 cm?

19.6.° Dreptunghiul cu laturile de 1 cm şi 3 cm se roteşte în jurul laturi mai mari. Aflați:
1) diagonala secțiunii axiale a cilindrului creat;
2) aria suprafeței totale a acestui cilindru.

19.7.° Pătratul cu latura de 8 cm se roteşte în jurul unei laturi a lui. Aflați:
1) diagonala secțiunii axiale a cilindrului creat;
2) aria suprafeței totale a acestui cilindru.

19.8.° Punctele O şi O_1 – centrele bazelor de jos şi de sus corespunzător ale cilindrului (fig. 19.8). Punctul A este un punct arbitrar al circumferinței, care mărgineşte baza cilindrului. Segmentul O_1A este egal cu 6 cm şi face cu planul bazei cilindrului unghiul de 60°. Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului.

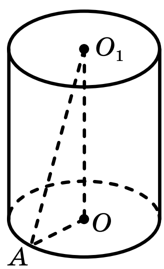


Fig. 19.8

19.9.° Înălțimea cilindrului este egală cu 5 cm, iar diametrul bazei – 24 cm. Aflați distanța de la centrul uneia din bazele cilindrului până la un punct al circumferinței altei baze.

19.10.• Diagonala desfăşuratei suprafeței laterale a cilindrului este egală cu d şi creează cu una din laturile desfăşuratei unghiul α. Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului.

19.11.• Pătratul, diagonala căruia este egală cu 4 cm, este desfăşurata suprafeței laterale a cilindrului. Aflați aria bazei acestui cilindru.

19.12.• Cum se va schimba – se va mări sau micşora – şi de câte ori aria suprafeței laterale a cilindrului, dacă:

1) raza bazei lui se va mări de k ori;
2) înălțimea cilindrului se va micşora de k ori;
3) înălțimea cilindrului se va mări de $\boldsymbol{k}$ ori, iar raza bazei se va micşora de $\boldsymbol{k}$ ori?

Ce funcție este dependența ariei suprafeței laterale a cilindrului de: 1) raza bazei lui; 2) înălțimea cilindrului?

19.13.• În baza de jos a cilindrului este dusă o coardă, care este văzută din centrul acestei baze sub unghiul de 120°, iar din centrul bazei de sus – sub unghiul de 60°. Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului, dacă lungimea coardei date este egală cu 6 cm.

19.14.• În baza de jos a cilindrului este dusă o coardă, care este văzută din centrul acestei baze sub unghiul de 90°, iar din centrul bazei de sus – sub unghiul de 60°. Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului, dacă raza bazei lui este egală cu 8 cm.

19.15.•• În baza de jos a cilindrului este dusă o coardă, care este văzută din centrul acestei baze sub unghiul α. Segmentul, care uneşte centrul bazei de sus cu unul din capetele coardei duse, creează cu planul bazei unghiul β. Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului, dacă distanța de la centrul bazei de jos până la coarda dusă este egală cu a.

19.16.•• În baza de jos a cilindrului este dusă o coardă, care este văzută din centrul acestei baze sub unghiul β. Segmentul, care uneşte centrul bazei de sus cu mijlocul coardei date, este egal cu m şi creează cu planul bazei unghiul α. Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului.

19.17.•• Paralel cu axa cilindrului, raza bazei căruia este egală cu 10 cm, iar înălțimea – 12 cm, este dusă o secțiune, ce este pătrat. Aflați distanța de la axa cilindrului până la planul secțiunii.

19.18.•• Paralel cu axa cilindrului este dusă o secțiune, ce retează de la circumferința bazei un arc, măsura în grade a căruia este egală cu α $(0° < \alpha < 180°)$. Segmentul care uneşte centrul bazei de sus a cilindrului, cu punctul circumferinței bazei de jos, creează cu planul bazei unghiul β, iar raza bazei este egală cu R. Aflați aria acestei secțiuni.

19.19.•• Paralel cu axa cilindrului este dusă o secțiune, ce este depărtată de ea cu $\sqrt{3}$ cm, şi retează de la circumferința bazei arcul, măsura în grade a căruia este egală cu 120°. Aflați aria acestei secțiuni, dacă diagonala ei este egală cu 10 cm.

19.20.* Punctele O şi O_1 sunt corespunzător centrele bazelor de jos şi de sus ale cilindrului, iar punctul A aparține bazei de jos a cilindrului (fig. 19.9). Pe segmentul OO_1 este notat punctul B astfel, că dreapta AB intersectează suprafața laterală a cilindrului. Construiți punctul de intersecție al dreptei AB cu suprafața laterală a cilindrului.

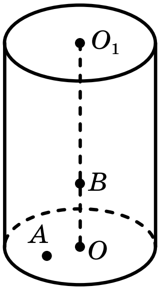


Fig. 19.9

19.21.* Raza bazei cilindrului este egală cu 9 cm, Din mijlocul segmentului OO_1, unde punctele O şi O_1 sunt corespunzător centrele bazelor de jos şi de sus ale cilindrului, este dusă o semidreaptă, care intersectează planul bazei de jos în punctul, depărtat de centrul acestei baze cu 12 cm. Această semidreaptă intersectează generatoarea cilindrului în punctul, depărtat de planul bazei de jos cu 2 cm. Aflați înălțimea cilindrului.

19.22.* Înălțimea cilindrului este egală cu 20 cm. Prun mijlocul generatoarei este dusă dreapta, care intersectează segmentul, ce uneşte centrele bazelor, în punctul, depărat cu 6 cm de la planul bazei de jos, iar înseşi acest plan – în punctul, depărtat cu 15 cm de la centrul bazei de jos. Aflați raza bazei cilindrului.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

19.23. Înălțimea triunghiului isoscel, dusă la baza lui, este egală cu h, iar unghiul dintre laturile lui egale este egal cu α. Aflați raza circumferinței înscrise în triunghiul dat.

19.24. Bazele unui trapez sunt egale cu 6 cm şi 27 cm, iar una din laturile laterale – 13 cm. Aflați raza circumferinței, înscrise în trapezul dat.

19.25. Latura bazei unei prisme hexagonale regulate este egală cu 6 cm, iar aria suprafeței laterale – 288 cm^2. Aflați diagonala mare a prismei.

20. Conul

Să ne imaginăm, că triunghiul dreptunghic *AOB* cu unghiul drept *O* se roteşte în jurul laturii *AO* (fig. 20.1). În timpul rotației se creează figura, care este numită **con**. Cercul cu centrul *O*, care se creează în rezultatul rotației laturii *OB*, este numit **baza conului**, iar figura, care s-a creat în rezultatul rotației laturii *AB*, este numită **suprafața laterală a conului**. Segmentele, ce creează suprafața laterală a conului, sunt numite **generatoarele conului** (fig. 20.2).

Toate generatoarele conului sunt egale şi fac unghiuri egale cu planul bazei.

Capătul comun al tuturor generatoarelor conului este numit **vârful conului.** În figura 20.1 punctul *A* este vârful conului.

Dreapta, care trece prin vârful conului şi centrul bazei lui, se numeşte **axa conului**. În figura 20.1 dreapta *AO* este axa conului. Axa conului este perpendiculară pe planul bazei lui.

Înălțimea conului este numită perpendiculara, coborâtă din vârful conului pe planul bazei. Piciorul înălțimii conului este centrul bazei lui. Înălțimea conului aparține axei lui. În figura 20.1 segmentul *AO* este înălțimea conului.

Conul ca şi cilindrul, este corp de rotație.

Dacă conul este intersectat de un plan, ce trece prin axa lui, atunci se creează în secțiune un triunghi isoscel, laturile laterale ale căruia sunt generatoarele conului, baza lui este diametrul bazei conului (fig. 20.3). Astfel de secțiune este numită **secțiune axială a conului.** Să ne imaginăm, că suprafața conului este tăiată după circumferința bazei şi o generatoarea oarecare (fig. 20.4), apoi de-l desfăşurat pe un plan. Figura obținută este numită **desfăşurata conului pe plan**, sau pur şi simplu **desfăşurata conului** (fig. 20.5). Ea este alcătuită dintr-un

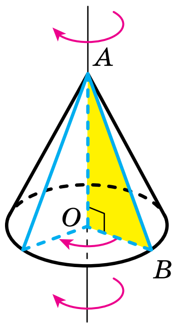


Fig. 20.1

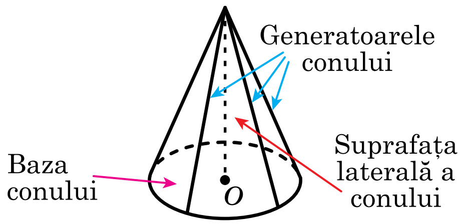


Fig. 20.2

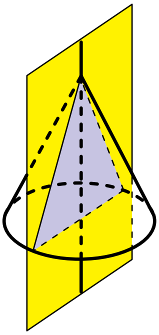


Fig. 20.3

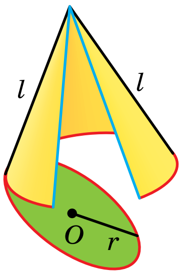


Fig. 20.4

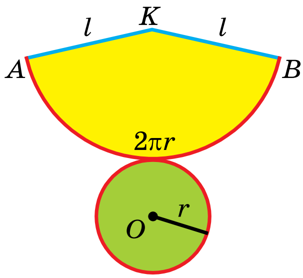


Fig. 20.5

cerc, ce este egal cu baza conului, şi un sector de cerc, care este numit **desfăşurata suprafeței laterale a conului**.

Dacă generatoarea conului este egală cu l, iar raza bazei conului – r, atunci raza sectorului circular este egală cu l, iar lungimea arcului sectorului – $2\pi r$. Fie măsura în grade a unghiului AKB (fig. 20.5) este egală cu α. Atunci lungimea arcului AB este egală cu $\frac{\pi l\alpha}{180}$. Avem: $2\pi r = \frac{\pi l\alpha}{180}$. De aici

$$\alpha = \frac{360r}{l}. \qquad (1)$$

Ca arie S_l a suprafeței laterale a conului este considerată aria desfăşuratei suprafeței laterale a lui. Avem: $S_l = \frac{\pi l^2\alpha}{360}$. Ținând cont de egalitatea (1) obținem: $S_l = \frac{\pi l^2}{360} \cdot \frac{360r}{l} = \pi rl$.

Deci, aria suprafeței laterale a conului se calculează după formula

$$\boxed{S_l = \pi rl,}$$

ude r este raza bazei conului, l – lungimea generatoarei conului.

Aria totală a suprafeței conului este numită suma ariilor suprafeței laterale şi a bazei conului. Avem:

$$\boxed{S_t = S_l + S_{\text{bază}},}$$

Unde S_l este aria suprafeței laterale a conului, $S_{\text{bază}}$ – aria bazei conului.

Aria bazei conului este egală cu πr^2. Atunci obținem formula

$$\boxed{S_t = \pi rl + \pi r^2}$$

1. Care corp se numeşte con?
2. Descrieţi, ce se numeşte suprafaţă laterală a conului.
3. Ce se numeşte baza conului? axa conului? înălţimea conului?
4. Ce se numeşte secţiune axială a conului?
5. Din ce figuri este alcătuită desfăşurata conului?
6. Ce este considerat ca arie a suprafeţei laterale a conului?
7. După ce formulă se calculează aria suprafeţei laterale a conului?
8. După ce formulă se calculează aria totală a suprafeţei conului?

EXERCIŢII

20.1.° Înălțimea conului este egală cu 4 cm, iar generatoarea lui – 6 cm. Aflați raza bazei conului.

20.2.° Raza bazei conului este egală cu 5 cm, iar generatoarea – 13 cm. Aflați înălțimea conului.

20.3.° Aflați raza bazei şi înălțimea conului, dacă generatoarea lui este egală cu 18 cm, iar secțiunea axială este un triunghi regulat.

20.4.° Raza bazei conului este egală cu 2 cm, secțiunea axială a lui – un triunghi isoscel dreptunghiular. Aflați înălțimea şi generatoarea conului.

20.5.° Raza bazei conului este egală cu 9 cm, iar unghiul dintre generatoare şi planul bazei este egal cu 30°. Aflați aria:
1) suprafeței laterale a conului;
2) secțiunii axiale a conului.

20.6.° Raza bazei conului este egală cu 6 cm, iar înălțimea – 8 cm. Aflați aria:
1) suprafeței laterale a conului;
2) suprafeței totale a conului.

20.7.° Înălțimea conului este egală cu H, iar unghiul dintre generatoarea conului şi planul bazei este egal cu α. Aflați aria:
1) secțiunii axiale a conului;
2) suprafeței laterale a conului.

20.8.° Generatoarea conului este egală cu a, iar unghiul în secțiunea axială de la vârful conului este egal cu α. Aflați aria:
1) secțiunii axiale a conului;
2) suprafeței laterale a conului.

20.9.° Triunghiul dreptunghic, ipotenuza căruia este egală cu 8cm, iar unul din unghiuri este egal cu 30°, se roteşte în jurul catetei mai mari. Aflați aria suprafeței laterale a conului obținut.

20.10.° Aflați aria secțiuni axiale, care se creează în rezultatul rotației triunghiului dreptunghic cu ipotenuza de 17cm şi cateta 15 cm, în jurul celeilalte catete.

20.11.• Raza bazei conului este egală cu 15 cm, iar distanța de la centrul bazei până la generatoarea conului – 12 cm. Aflați lungimile generatoarei şi a înălțimii.

20.12.• Înălțimea conului este egală cu $4\sqrt{5}$ cm, iar distanța de la centrul bazei până la mijlocul generatoarei conului – 6 cm. Aflați aria suprafeței totale a conului.

20.13.• În baza conului s-a dus o coardă cu lungimea *a,* ce subîntinde un arc, măsura în grade a căruia este egală cu α ($0° < \alpha < 180°$). Unghiul dintre generatoarea conului şi planul bazei este egal cu β. Aflați înălțimea conului.

20.14.• În baza conului s-a dus o coardă, ce subîntinde un arc, măsura în grade a căruia este egală cu α ($0° < \alpha < 180°$). Unghiul dintre înălțimea conului şi generatoare este egal cu β, iar lungimea generatoarei este egală cu m. Aflați lungimea coardei date.

20.15.• Triunghiul dreptunghic cu catetele 5 cm şi 12 cm se roteşte în jurul dreptei ce conține ipotenuza lui. Aflați aria suprafeței corpului de rotație.

20.16.•• Planul, dus prin două generatoare ale conului, intersectează baza după o coardă, ce întinde un arc, măsura în grade a căruia este egală cu β ($0° < \beta < 180°$). Aflați aria secțiunii create, dacă înălțimea conului este egală cu H, iar unghiul dintre planul secțiunii create şi planul bazei conului este egal cu α.

20.17.•• Prin două generatoare ale conului, unghiul dintre care este egal cu 60°, s-a dus un plan. Acest plan intersectează baza conului după o coardă cu lungimea de 8 cm, ce subîntinde un arc, măsura în grade a căruia este egală cu 90°. Aflați aria suprafeței laterale a conului.

20.18.•• Triunghiul isoscel ascuțitunghic cu baza a şi unghiul de la bază α se roteşte în jurul dreptei ce conține latura laterală a lui. Aflați aria suprafeței corpului de rotație.

20.19.•• Triunghiul isoscel cu baza a şi unghiul opus ei α se roteşte în jurul dreptei ce conține latura bazei lui. Aflați aria suprafeței corpului de rotație.

20.20.•• Trapezul dreptunghic cu bazele 6 cm şi 9 cm şi înălțimea 4 cm se roteşte în jurul dreptei ce conține baza mare a lui. Aflați aria suprafeței corpului de rotație.

20.21.•• Trapezul dreptunghic cu bazele 3 cm şi 4 cm şi unghiul ascuțit 45° se roteşte în jurul dreptei ce conține baza mică a lui. Aflați aria suprafeței corpului de rotație.

20.22.•• Rombul cu latura 10 cm şi unghiul 60° se roteşte în jurul dreptei ce conține una din laturile rombului. Aflați aria suprafeței corpului de rotație.

20.23.•• Bazele trapezului isoscel sunt egale cu 10 cm şi 26 cm, iar latura laterală este egală cu baza mică. Trapezul se roteşte în jurul dreptei ce conține baza mare a lui. Aflați aria suprafeței corpului de rotație.

20.24.•• Desfăşurata suprafeței laterale a conului este sectorul, raza căruia este egală cu 12 cm, iar măsura în grade a arcului – 240°. Aflați raza bazei conului.

20.25.•• Desfăşurata suprafeței laterale a conului este sectorul, raza căruia este egală cu 5 cm. Aflați unghiul de la centru al acestui sector, dacă înălțimea conului este egală cu 4 cm.

20.26.•• Prin două generatoare ale conului este dus un plan, care creează cu planul bazei conului unghiul α. Distanța de la centrul bazei conului până la acest plan este egală cu a, iar unghiul dintre generatoarea conului şi planul bazei este egal cu β. Aflați raza bazei conului.

20.27.•• Segmentul MO este înălțimea conului, segmentele MA şi MB – generatoarele lui, $MO = 4\sqrt{2}$ cm. Distanța de la punctul O până la dreapta AB este egală cu 2 cm. Aflați distanța de la punctul O până la planul AMB.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

20.28. Segmentele AD şi CE sunt medianele triunghiului ABC. Aflați latura AC, dacă $AB = 8\sqrt{5}$ cm, $BC = 6\sqrt{5}$ cm, şi $AD \perp CE$.

20.29. Aria trapezului isoscel este egală cu $32\sqrt{3}$ cm^2, iar unghiul ascuțit – 60°. Aflați latura laterală a trapezului, dacă se ştie, că trapezul se poate înscrie în circumferință.

20.30. Baza unei piramide este un triunghi isoscel cu unghiul de la bază egal cu 30° şi latura laterală 12 cm. Fiecare muchie laterală a piramidei face cu planul bazei unghiul de 60°. Aflați înălțimea piramidei.

21. Bila şi sfera

În punctele precedente aţi făcut cunoştinţă cu două exemple de corpuri de rotaţie – cilindrul şi conul. Încă un exemplu de corp de rotaţie este bila sau corpul sferic.

În figura 21.1 este prezentată figura, obţinută prin rotaţia semicercului în jurul dreptei, care conţine diametrul AB. Astfel de figură se numeşte **bilă**.

La rotaţia semicircumferinţei cu diametrul AB se creează suprafaţa, care se numeşte **sferă (**fig. 21.1**)**. Sfera este suprafaţa bilei obţinute.

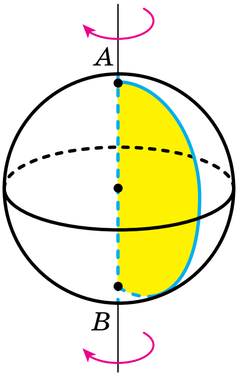


Fig. 21.1

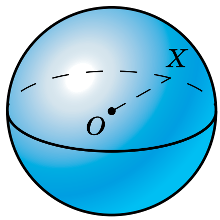


Fig. 21.2

Mijlocul segmentului AB este numit **centrul sferei.** Orice segment, care uneşte un punct al sferei cu centrul ei, este numit **raza sferei.** Lungimea acestui segment de asemenea este primit de-l numit rază a sferei. În figura 21.2 segmentul OX este raza sferei.

Se poate demonstra că *toate razele sferei sunt egale*.

Cu alte cuvinte, *toate punctele sferei sunt egal depărate de la centrul ei*.

Segmentul, care uneşte două puncte ale sferei şi trece prin centrul ei, este numit **diametrul sferei**. Dacă raza sferei este egală cu r, atunci diametrul este egal cu $2r$.

Centrul, raza şi diametrul bilei este numit centrul, raza şi diametrul sferei, care este suprafaţa acestei bile.

Se poate demonstra, că *distanţa de la orice punct al bilei până la centrul ei nu este mai mare decât raza ei.*

În cursul de planimetrie aţi făcut cunoştinţă cu cazurile de amplasare reciprocă a circumferinţei şi dreptei. Să cercetăm amplasarea reciprocă a sferei şi a planului.

Admitem, că raza sferei date este egală cu r, iar distanța de la centrul O al sferei până la planul dat α este egală cu d.

C a z u l I. Admitem, că $d > r$. În acest caz sfera şi planul nu au puncte comune (fig. 21.3).

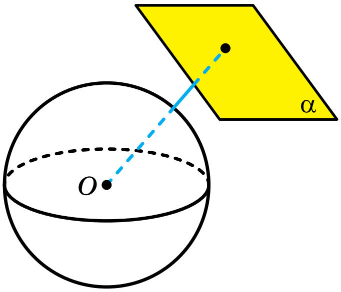


Fig. 21.3

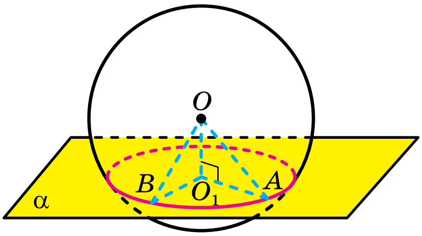


Fig. 21.4

C a z u l II. Fie $d < r$. În acest caz *secțiunea sferei de către plan este o circumferință* (fig. 21.4).

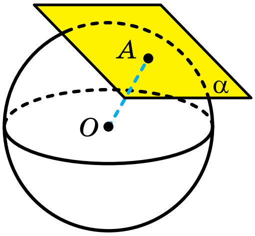


Fig. 21.5

Ținând cont de această afirmație, se poate face astfel de concluzie: dacă distanța de la centrul bilei până la plan este mai mică decât raza bilei, atunci secțiunea bilei de către plan este un cerc.

Dacă planul trece prin centrul bilei, atunci cercul, obținut în secțiune, se numeşte **cercul mare al bilei.**

C a z u l III. Fie $d = r$. În acest caz sfera şi planul au numai un punct comun (fig. 21.5).

D e f i n i ț i e. Planul, care are cu sfera numai un singur punct comun, este numit p l a n t a n g e n t l a s f e r ă.

Acest punct comun este numit **punct de tangență**. În figura 21.5 punctul A este punct de tangență.

Are loc o astfel de teoremă

T e o r e m a 21.1. ***Planul tangent la sferă este perpendicular la raza, dusă în punctul de tangență.***

?

1. Ce se numeşte sferă? bilă?

2. Explicaţi, care punct se numeşte centrul sferei?

3. Ce se numeşte raza sferei? raza bilei?

4. Ce se numeşte diametrul sferei? diametrul bilei?

5. Cu ce este egal diametrul sferei, dacă raza ei este egală cu ***r***?

6. Ce este secţiunea sferei de către plan, dacă distanţa de la centrul sferei până la plan este mai mică decât raza sferei?

7. Ce este numit cercul mare al bilei?

8. Care plan este numit planul tangent la sferă?

9. Ce proprietate are raza, dusă **în** punctul de tangenţă al planului şi sferei?

EXERCIŢII

21.1.$^\circ$ Dați exemple de obiecte din lumea înconjurătoare, obiecte, folosite în viața de toate zilele, care au formă de sferă (bilă).

21.2.$^\circ$ Raza bilei este egală cu $\sqrt{5}$ cm. Aparține oare bilei punctul A, dacă el este depărtat de centrul bilei:

1) cu 2 cm; 2) cu 2,3 cm?

21.3.$^\circ$ Punctele C şi D se află pe sfera cu centrul O, diametrul căreia este egal cu 8 cm. Aflați segmentul CD, dacă triunghiul COD este dreptunghic.

21.4.$^\circ$ Pe sfera cu centrul O, s-au notat punctele A şi B astfel, că $AB = 18$ cm. Aflați raza sferei, dacă distanța de la punctul O până la dreapta AB este gală cu 12 cm.

21.5.$^\circ$ Sunt date sfera cu raza de 6 cm şi planul α. Care trebuie să fie distanța de la centrul sferei până la planul α, ca:

1) sfera şi planul să nu aibă puncte comune;
2) sfera şi planul să aibă numai un punct comun;
3) secțiunea sferei cu planul secant să fie circumferință;
4) secțiunea sferei şi a planului să fie circumferința cu cea mai mare lungime posibilă?

21.6.$^\circ$ Diametrul sferei este egal cu 20 cm, iar distanța de la centrul ei până la planul α este gală cu 12 cm. Au oare puncte comune sfera dată şi planul α?

21.7.$^\circ$ Câte plane, ce sunt tangente la sferă, se pot duce prin punctul:

1) are aparține acestei sfere;
2) care este amplasat în afara sferei?

21.8.° 1) Care paralelă geografică este cea mai mare circumferință a globului Pământesc?

2) Aflați lungimea cercului polar al Pământului, acceptând raza Pământului egală cu 6400 km. Răspunsul rotunjiți-l până la mii de kilometri.

3) Calculați calea, pe care o parcurge într-o zi localitatea în care trăiți ca urmare a rotației Pământului în jurul axei sale.

21.9.° Raza bilei este egală cu 5 cm. Aflați aria cercului mare a ei.

21.10.° Demonstrați, că dacă planul α intersectează sfera cu centul O în circumferința de secțiune cu centrul O_1, atunci $OO_1 \perp \alpha$.

21.11.° Sfera este secționată cu un plan, distanța de la care până la centrul sferei este egală cu 6 cm. Lungimea liniei de intersecție a sferei cu planul este egală cu 16π cm. Aflați raza sferei.

21.12.• Secțiunea bilei cu raza de 13 cm cu un plan este un cerc, aria căruia este egală cu 25π cm^2. Aflați distanța de la centrul bilei până la planul secțiunii.

21.13.• Prin capătul diametrului bilei cu raza R este dus un plan, care face cu acest diametru unghiul α, $\alpha \neq 90°$. Aflați aria secțiunii create a bilei.

21.14.• Aflați lungimea liniei de intersecție a sferei cu planul, depărtat de la centrul sferei cu 2 cm, dacă raza sferei, dusă întru-n punct al acestei linii, creează cu planul dat ughiul de 30°.

21.15.• Vârfurile unui dreptunghi se află pe sfera cu raza de 26 cm. Aflați distanța de la centrul sferei până la planul dreptunghiului, dacă laturile lui sunt egale cu 12 cm și 16 cm.

21.16.• Pe suprafața sferei sunt notate punctele A, B și C astfel, că $AB = BC = 15$ cm, $\angle ABC = 120°$. Aflați distanța de la centrul sferei până la planul ABC, dacă raza sferei este egală cu 17 cm.

21.17.• Vârfurile triunghiului cu laturile de 1 cm, $\sqrt{3}$ cm și 2 cm se află pe sferă. Aflați raza sferei, dacă distanța de la centrul ei până la planul acestui triunghi este egală cu $4\sqrt{3}$ cm.

21.18.• Două bile razele cărora sunt egale cu 7 cm și 9 cm, au un centru comun. Planul α este tangent la bila mică. Aflați aria secțiunii bilei mari cu planul α.

21.19.•• Raza sferei este egală cu 40 cm. Punctul A, care aparține planului, ce este tangent la această sferă, este depărtat de punctul tangenței cu 9 cm. Aflați distanța de la punctul A până la cel mai apropiat de el punct al sferei.

21.20.•• Prin punctul M al sferei cu raza de 112 cm s-a dus un plan tangent. Pe acest plan este notat punctul K, distanța de la care până la cel mai depărtat punct al sferei este egală cu 225 cm. Aflați distanța dintre punctele M şi K.

21.21.* Secțiunile bilei, planele cărora sunt perpendiculare, au o coardă comună cu lungimea de 12 cm. Aflați razele bilelor, dacă ariile secțiunilor date sunt egale cu 64π cm^2 şi 100π cm^2.

21.22.* Secțiunile bilelor, planele cărora sunt perpendiculare, au o coardă comună. Distanța de la centrul bilei până la planul uneia din secțiuni este egală cu 4 cm, iar până la planul alteia – 5 cm. Aflați lungimea coardei comune a acestor secțiuni, dacă raza bilelor este egală cu $5\sqrt{2}$ cm.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

21.23. Aflați lungimea circumferinței, circumscrise trapezului isoscel cu bazele de 6 cm şi 8 cm şi înălțimea 7 cm.

21.24. Înălțimea triunghiului isoscel, dusă la baza lui, este egală cu 32 cm, iar raza circumferinței înscrise – 12 cm. Aflați raza circumferinței, circumscrise triunghiului.

21.25. Latura bazei piramidei patrulatere regulate este egală cu a, iar ughiul dintre apotemele a două fețe megieşe este egal cu 60°. Aflați aria suprafeței laterale a piramidei.

ÎNSĂRCINAREA NR. 5 „CONTROLEAZĂ-TE” ÎN FORMĂ TEST

1. Calculați aria suprafeței laterale a cilindrului, secțiunea axială a căruia este un pătrat cu latura de 8 cm.
A) 32π cm^2; B) 64π cm^2; C) 128π cm^2; D) 256π cm^2.

2. Înălțimea unui cilindru este egală cu 8 cm, raza bazei – 5 cm. La distanța de 4 cm de la axa cilindrului paralel cu ea este dus un plan. Aflați aria secțiunii create.
A) 40 cm^2; B) 24 cm^2; C) 48 cm^2; D) 64 cm^2.

3. Înălțimea cilindrului este egală cu 6 cm, iar aria suprafeței laterale a lui – 24π cm^2. Cu ce este egală aria bazei cilindrului?
A) 4π cm^2; B) 4 cm^2; C) 3π cm^2; D) 6π cm^2.

4. O coardă a bazei de jos a cilindrului este văzută din centrul acestei baze sub unghiul α. Segmentul, care uneşte centrul bazei de sus cu mijlocul acestei coarde, este înclinat la planul bazei sub unghiul β. Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului, dacă raza bazei este egală cu r.

A) $2\pi r^2 \cos\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\beta$;   C) $2\pi r^2 \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\beta$;

B) $2\pi r^2 \cos\alpha \operatorname{tg}\beta$;   D) $2\pi r^2 \sin\alpha \operatorname{tg}\beta$.

5. Unghiul dintre generatoare şi planul bazei conului este egal cu 60°, iar înălțimea conului este de $9\sqrt{3}$ cm. Cu ce este egală generatoarea conului?

A) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm;   B) $18\sqrt{3}$ cm;   C) 13,5 cm;   D) 18 cm.

6. Raza bazei conului este egală cu 12 cm, iar unghiul de la vârful secțiunii axiale – 120°. Aflați înălțimea conului.

A) $6\sqrt{3}$ cm;   B) $8\sqrt{3}$ cm;   C) $12\sqrt{3}$ cm;   D) $4\sqrt{3}$ cm.

7. Calculați aria suprafeței laterale a conului, diametrul bazei căreia este egal cu 12 cm, iar generatoarea – 17 cm.

A) 102π cm^2;   B) 204π cm^2;   C) 34π cm^2;   D) 68π cm^2.

8. Aria suprafeței laterale a conului este egală cu 240π cm^2. Cu ce este egală înălțimea conului, dacă raza bazei lui este egală cu 12 cm?

A) 12 cm;   B) 16 cm;   C) 20 cm;   D) 2 cm.

9. Paralel cu axa cilindrului, raza bazei căruia este egală cu 8 cm, s-a dus un plan, ce intersectează baza cilindrului după o coardă, care întinde un arc, măsura în grade a căruia este egală cu 120°. Aflați aria secțiunii, dacă diagonala ei este egală cu 16 cm.

A) 64 cm^2;   B) $64\sqrt{3}$ cm^2;   C) 16 cm^2;   D) $16\sqrt{3}$ cm^2.

10. În baza conului s-a dus o coardă, care este văzută din centrul bazei sub unghiul α, iar din vârful conului – sub unghiul β. Aflați aria suprafeței laterale a conului, dacă raza bazei lui este egală cu r.

A) $\pi r^2 \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}$;   C) $\dfrac{\pi r^2 \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$;

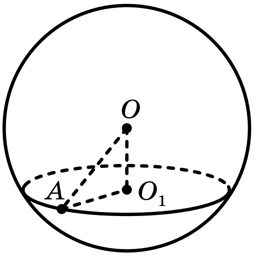
B) $\pi r^2 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}$;   D) $\dfrac{\pi r^2 \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$.

11. Cateta triunghiului dreptunghic este egală cu 6 cm, iar ughiul alăturat ei este egal cu 30°. Aflați aria suprafeței laterale a conului, creat în rezultatul rotației acestui triunghi în jurul catetei date.

A) $24\pi\sqrt{3}$ cm^2; B) $12\pi\sqrt{3}$ cm^2; C) 24π cm^2; D) 12π cm^2.

12. În bila cu centrul ***O***, reprezentată în desen, s-a aplicat secțiunea cu centrul $\boldsymbol{O_1}$ la distanța de 12 cm de la centrul bilei. Aflați raza bilei, dacă raza secțiunii este egală cu 9 cm.

A) 10 cm; C) 15 cm;
B) 12 cm; D) 21 cm.



13. Prin capătul razei bilei s-a dus o secțiune, care creează cu această rază unghiul de 45°. Aflați raza bilei, dacă aria secțiunii bilei este egală cu 36π cm^2.

A) $6\sqrt{2}$ cm; C) $12\sqrt{2}$ cm;
B) 6 cm; D) 12 cm.

14. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este egală cu ***c***, iar unul din unghiurile ascuțite este egal cu α. Aflați aria suprafeței laterale a conului, creat în rezultatul rotației acestui triunghi în jurul catetei, opuse unghiului dat.

A) $\frac{\pi c^2}{\sin\alpha}$; B) $\pi c^2 \sin\alpha$; C) $\pi c^2 \cos\alpha$; D) $\frac{\pi c^2}{\cos\alpha}$.

15. Prin două generatoare ale conului, unghiul dintre care este egal cu 45 ° s-a dus o secțiune. Aflați aria acestei secțiuni, dacă înălțimea conului este egală cu h şi creează cu generatoarea lui un unghi de 30°.

A) $\frac{h^2\sqrt{6}}{6}$; B) $\frac{h^2\sqrt{2}}{6}$; C) $\frac{2h^2\sqrt{2}}{3}$; D) $\frac{h^2\sqrt{2}}{3}$.

16. Planul α este tangent la bila cu centrul O în punctul A. Punctul B aparține planului α şi este depărtat de la centrul bilei cu 10 cm. Aflați segmentul AB, dacă raza bilei este egală cu 6 cm.

A) 8 cm; B) 6 cm; C) $2\sqrt{34}$ cm; D) 2 cm.

17. Diagonala desfăşuratei suprafeței laterale a cilindrului este egală cu $4\pi\sqrt{5}$ cm, iar raza bazei cilindrului – 2 cm. Aflați înălțimea cilindrului.

A) 9π cm; B) 8π cm; C) 9 cm; D) 8 cm.

18. Aria suprafeței laterale a unui cilindru este egală cu 28 cm^2. Cu ce este egală aria suprafeței laterale a altui cilindru, dacă razele bazelor ale acestor cilindre sunt egale, iar înălțimea celui de-al doilea cilindru este de 3 ori mai mică decât înălțimea primului cilindru?

A) 14 cm^2; B) 7 cm^2; C) 56 cm^2; D) Nu se poate stabili.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 5

Aria suprafeței laterale a cilindrului

Ca arie S_l a suprafeței laterale a cilindrului este considerată aria desfăşuratei suprafeței laterale a lui.
$S_l = 2\pi rh$, unde S_l este aria suprafeței laterale a cilindrului, r – raza bazei cilindrului, h – lungimea înălțimii cilindrului.

Aria suprafeței totale a cilindrului

$S_t = S_l + 2S_{bază}$, unde S_t – aria suprafeței totale a cilindrului, $S_{bază}$ – aria bazei cilindrului.
$S_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Aria suprafeței laterale a conului

Ca arie S_l a suprafeței laterale a conului este considerată aria desfăşuratei suprafeței laterale a lui.
$S_l = \pi rl$, unde r – este raza bazei, l – lungimea generatoarei conului.

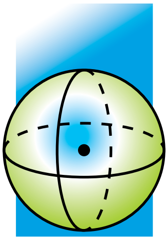
Aria suprafeței totale a conului

$S_t = S_l + S_{bază}$, unde S_t – aria suprafeței totale a conului, $S_{bază}$ – aria bazei conului.
$S_t = \pi rl + \pi r^2$

Amplasarea reciprocă a sferei şi planului

Dacă distanța de la centrul sferei până la plan este mai mică decât raza sferei, atunci secțiunea sferei cu planul secant este o circumferință.
Planul, care are cu sfera un singur punct comun, se numeşte plan tangent la sferă. Acest punct comun se numeşte punct de tangență. În acest caz distanța de la centrul sferei până la acest plan este egală cu raza sferei.
Planul tangent la sferă este perpendicular pe raza, dusă în punctul de tangență.

§6 VOLUMELE CORPURILOR. ARIA SFEREI



În acest capitol mai detailat o să faceţi cunoştinţă cu noţiunea de volum deja cunoscută, o să studiaţi formule noi pentru calcularea volumelor poliedrelor şi corpurilor de rotaţie. O să vă învăţaţi să găsiţi suprafaţa sferei.

22. Volumul corpului. Formulele pentru calculul volumului prismei şi a piramidei

Cu o astfel de mărime, ca volumul, vă ciocniți adesea în viața cotidiană: volumul unui pachet de suc, volumul unui borcan de sticlă, indicii consumului a apei sau combustibilului pe contoare (fig. 22.1). Cu noțiunea de volum ați făcut cunoştință în cursul de matematică clasa a 5-a. Totodată această noțiune de multe ori ați folosit-o, de exemplu, la lecțiile de fizică şi chimie.

Fig. 22.1

Studiind planimetria, voi frecvent v-ați întâlnit cu o astfel de mărime, ca aria figurii. Volumul corpului în stereometrie este analogul ariei figurii în planimetrie. De observat această analogie nu este complicat, dacă comparăm definiția ariei poligonului, studiată de voi în clasa a 8-a, cu o astfel de definiție.

Definiție. Volumul corpului se numeşte mărimea pozitivă, care posedă astfel de proprietăți:

1) **corpurile egale au volume egale;**
2) **dacă corpul e compus din câteva alte corpuri, atunci volumul lui este egal cu suma volumelor acestor corpuri;**
3) **ca unitate de măsură a volumului corpului, se va alege cubul unitate, adică cubul cu muchia, care este egală cu unitatea de măsură a lungimii.**

Studierea volumelor corpurilor o vom începe de la poliedre.

De măsurat volumul poliedrului aceasta înseamnă de comparat volumul lui cu volumul cubului unitate. Ca rezultat vom obține o valoare numerică a volumului poliedrului dat. Acest număr indică, de câte ori volumul poliedrului dat se deosebeşte de volumul cubului unitate.

Vom arăta, cum, bazându-ne pe definiție, de aflat volumul, de exemplu, a paralelipipedului dreptunghiular cu muchiile 1 cm, 1 cm şi 3 cm (fig. 22.2).

Astfel de paralelipiped se poate împărți în trei cuburi cu muchia de 1 cm. Din proprietatea a 2-a a volumului reiese, că volumul paralelipipedului dat este egal cu trei volume ale cubului cu muchia de 1 cm (prescurtat se scrie 3 cm^3).

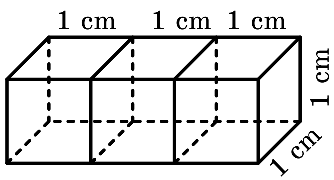


Fig. 22.2

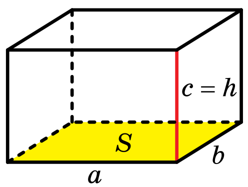


Fig. 22.3

În timpul calculării volumelor corpurilor este comod de aplicat formulele care oferă posibilitatea aflării volumului corpului conform unor anumite elemente ale lui.

În particular, *dacă măsurătorile paralelipipedului dreptunghiular sunt egale cu a, b şi c, atunci volumul lui V se poate calcula după formula*

$$\boxed{V = abc}$$

Atragem atenția, că produsul ab este egal cu aria S a bazei paralelipipedului dreptunghiular, iar muchia c este înălțimea lui (fig. 22.3). Atunci formula volumului paralelipipedului dreptunghiular se poate scrie astfel:

$$\boxed{V = Sh}$$

Această formulă se foloseşte şi pentru calcularea volumului prismei.

Teorema 22.1. ***Volumul V al prismei cu înălțimea, ce este egală cu h, şi baza, aria căreia este egală cu S, se poate calcula după formula***

$$\boxed{V = Sh}$$

Aflarea volumelor corpurilor este o problemă complicată. Nu în zădar formula calculării volumului piramidei, găsită de savanții Greciei Antice, se consideră una din cele mai mari realizări ale ştiinței antice.

Teorema 22.2. ***Volumul V al piramidei, cu înălțimea, ce este egală cu h, şi baza, aria căreia este egală cu S, se poate calcul după formula***

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Sh}$$

Problemă. Baza piramidei patrulatere $MABCD$ este dreptunghiul $ABCD$. Fața laterală AMB este perpendiculară la planul bazei. Aflați volumul piramidei, dacă $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm, $MA = MB = 13$ cm.

Rezolvare: Ducem înălțimea MK a triunghiului AMB (fig. 22.4). Deoarece $AMB \perp ABC$, atunci $MK \perp ABC$. Deci, segmentul MK – este înălțimea piramidei date.

Deoarece $MA = MB$, atunci segmentul MK este mediana triunghiului AMB. De aici $AK = KB = 5$ cm.

Din triunghiul dreptunghic MKA obținem:

$$MK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (cm)}.$$

Aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu 120 cm^2. Acum putem afla volumul V al piramidei:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot MK = \frac{1}{3} \cdot 120 \cdot 12 = 480 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Răspuns: 480 cm^3. ◄

1. Ce se numeşte volumul corpului?
2. Ce înseamnă a măsura volumul poliedrului?
3. După ce formule se calculează volumul paralelipipedului dreptunghiular?
4. După ce formulă se calculează volumul prismei?
5. După ce formulă se calculează volumul piramidei?

EXERCIŢII

22.1.° Cu ce este egal volumul prismei, aria bazei căreia este egală cu 12 cm^3, iar înălțimea – 5 cm?

22.2.° Aflați volumul cubului, diagonala căruia este egală cu $2\sqrt{3}$ cm.

22.3.° Cum se va modifica volumul cubului, dacă fiecare din muchiile lui de le mărit de 3-i ori?

22.4.° Aflați volumul prismei triunghiulare regulate, fiecare muchie a căreia este egală cu a.

22.5.° Aflați volumul prismei hexagonale regulate, fiecare muchie a căreia este egală cu a.

22.6.° Aflați volumul prismei patrulatere regulate, latura bazei căreia este egală cu a, iar unghiul dintre diagonala prismei şi planul bazei este egal cu α.

22.7.° Înălțimea prismei triunghiulare regulate este egală cu h, iar diagonala feței laterale creează cu planul bazei unghiul α. Aflați volumul prismei.

22.8.° Muchiile paralelipipedului dreptunghiular sunt proporționale cu numerele 2, 3 şi 6, iar diagonala lui este egală cu 14 cm. Aflați volumul paralelipipedului.

22.9.° Dimensiunile paralelipipedului dreptunghiular sunt egale cu 4 cm, 6 cm şi 9 cm. Aflați muchia cubului, al cărui volum este egal cu volumul paralelipipedului dat.

22.10.° Secțiunea terasamentului căii ferate are forma unui trapez, baza de jos a căruia este egală cu 15 m, baza de sus – 8 m, iar înălțimea – 3,2 m. Câți metri cubi de pământ vor fi necesari, pentru a construi 1 km, de terasament.

22.11.° Hala, în care vor lucra a lucrători, are forma unui paralelipiped dreptunghiular. Pentru ca încăperea halei să corespundă normelor sanitare, pentru fiecare lucrător al halei trebuie să revină b m^3 de aer. Care trebuie să fie în acest caz înălțimea h a halei, dacă aria podelii ei alcătuieşte S m^2?

22.12.° Găsiți capacitatea unei magazii cu acoperişul în două ape (fig. 22.5), dacă lungimea magaziei este egală cu 12 m, lățimea – 8 m, înălțimea pereților – 3,5 m, iar înălțimea crestei acoperişului – 6 m (grosimea pereților se neglijează).

22.13.° Aflați volumul piramidei:
1) baza căreia este un pătrat cu latura de 2 cm, iar înălțimea piramidei este egală cu 2 cm;
2) baza căreia este un romb cu diagonalele 2 cm şi 3 cm, iar înălțimea piramidei este egală cu 10 cm;
3) baza căreia este un triunghi cu laturile de 6 cm şi 9 cm şi cu unghiul dintre ele de 30°, iar înălțimea piramidei este egală cu 12 cm.

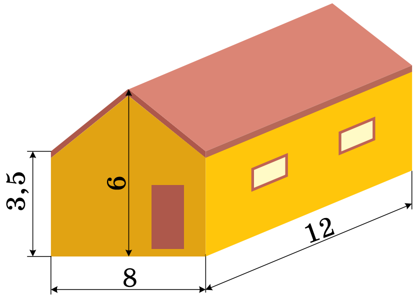


Fig. 22.5

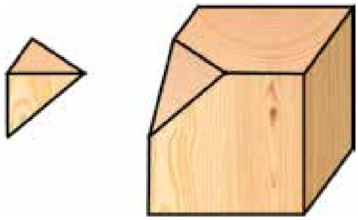


Fig. 22.6

22.14.° Aflați înălțimea piramidei, volumul căreia este egal cu 20 cm^3, iar aria bazei – 15 cm^2.

22.15.° Baza piramidei este un dreptunghi, laturile căruia se raportă ca 2 : 3, înălțimea piramidei este egală cu 5 cm, iar volumul – 90 cm^3. Aflați perimetrul bazei piramidei

22.16.° Cum se va modifica volumul piramidei, dacă fiecare latură a bazei ei se va mări de 3 ori, iar înălțimea – de 4 ori?

22.17.° Latura bazei a unei piramide hexagonale regulate este egală cu 5 cm, iar muchia laterală – 13 cm. Aflați volumul piramidei

22.18.° Latura bazei a unei piramide patrulatere regulate este egală cu 4 cm, iar unghiul diedru al piramidei de la muchia bazei este egal cu 60°. Aflați volumul piramidei.

22.19.° Un cub de lemn, muchia căruia este egală cu 12 cm, s-a tăiat în două părți: o piramidă triunghiulară şi un heptaedru (fig. 22.6). Aflați volumul heptaedrului, dacă planul tăieturii trece prin mijlocul a trei muchii ale cubului, care au un vârf comun.

22.20.° Latura bazei, unei piramide triunghiulare regulate este egală cu 6 cm, iar muchia laterală creează cu planul bazei un unghi de 45°. Aflați volumul piramidei.

22.21.• Baza unei prisme drepte este un romb cu latura de 8 cm, şi unghiul de 60°. Diagonala mică a prismei este egală cu 17 cm. Aflați volumul prismei.

22.22.• Diagonala unui paralelipiped dreptunghic este egală cu 12 cm şi creează cu planul bazei un unghi de 30°. Unghiul dintre diagonala bazei şi una din laturile ei este egal cu 60°. Aflați volumul paralelipipedului.

22.23.• Baza unei prisme drepte este un trapez isoscel cu bazele 3 cm şi 11 cm şi diagonala 10 cm. Diagonala prismei este egală cu 26 cm. Aflați volumul prismei.

22.24.• Baza unei prisme oblice este un paralelogram cu laturile de 3 cm şi 8 cm şi unghiul de 30°. Muchia laterală a prismei este egală cu 12 cm şi creează cu planul bazei 45°. Aflați volumul prismei.

22.25.• Baza unei prisme oblice este un triunghi cu laturile de $4\sqrt{3}$ cm şi 5 cm şi unghiul dintre ele de 120°. Muchia laterală a prismei este egală cu 20 cm şi creează cu înălțimea prismei unghi de 60°. Aflați volumul prismei.

22.26.• Volumul unei prisme drepte $ABCA_1B_1C_1$, prezentată în figura 22.7, este egal cu V. Punctul D este mijlocul muchiei AA_1. Aflați volumul piramidei $DABC$.

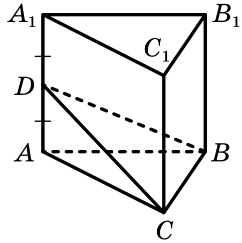


Fig. 22.7

22.27.• Aflați volumul piramidei patrulatere regulate, muchia căreia este egală cu b şi creează cu înălțimea piramidei unghiul α.

22.28.• Aflați volumul tetraedrului regulat muchia căruia este egală cu a.

22.29.• Aflați volumul piramidei triunghiulare regulate, muchia laterală a căreia este egală cu b şi creează cu planul bazei unghiul α.

22.30.•• Diagonala unei prisme patrulatere regulate este egală cu d şi creează cu planul bazei unghiul α. Aflați volumul prismei.

22.31.•• Diagonala unui paralelipiped dreptunghic este egală cu d şi creează cu planul bazei unghiul α, iar cu planul feței laterale – unghiul β. Aflați volumul paralelipipedului.

22.32.•• Aflați volumul unei prisme hexagonale regulate $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, dacă diagonalele ei A_1D şi A_1E sunt egale cu 13 cm şi 12 cm corespunzător.

22.33.•• Baza unei prisme drepte $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este rombul $ABCD$. Se cunoaşte, că $\angle BAD = \alpha$, $AC = d$. Prin dreapta BD şi punctul C_1 s-a dus un plan, care creează cu planul bazei unghiul β. Aflați volumul prismei.

22.34.•• Baza unei prisme drepte $ABCA_1B_1C_1$ este triunghiul ABC. Se cunoaşte, că $\angle ACB = 90°$, $\angle ABC = \beta$, $AB = c$. Planul A_1BC creează cu planul bazei unghiul α. Aflați volumul prismei.

22.35.•• Baza unei prisme oblice $ABCA_1B_1C_1$ este triunghiul echilateral ABC cu latura a. Vârful prismei A_1 este egal depărtat de la vârfurile triunghiului ABC, iar unghiul dintre muchia AA_1 şi planul bazei este egal cu α. Aflați volumul prismei.

22.36.•• Baza prismei oblice $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este pătratul $ABCD$ cu latura a, muchia laterală a prismei este egală cu $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vârful A_1 al prismei este egal depărtat de la laturile pătratului $ABCD$. Aflați volumul prismei.

22.37.•• Baza unei piramide este triunghiul cu laturile $3\sqrt{10}$ cm, $3\sqrt{10}$ cm şi 6 cm. Fiecare muchie laterală a piramidei este egală cu 13 cm. Aflați volumul piramidei.

22.38.•• Baza unei piramide este dreptunghiul cu laturile 24 cm şi 18 cm, iar fiecare muchie laterală a ei este egală cu 25 cm. Aflați volumul piramidei.

22.39.•• Baza unei piramide este triunghiul dreptunghic cu cateta a şi unghiul alăturat ei egal cu α. Fiecare muchie laterală a piramidei este înclinată la planul bazei sub unghiul egal cu β. Aflați volumul piramidei.

22.40.•• Baza unei piramide este triunghiul isoscel, latura laterală a căruia este egală cu b. Unghiul dintre laturile laterale ale bazei piramidei este egal cu β. Fiecare muchie laterală a piramidei creează cu planul bazei ei unghiul α. Aflați volumul piramidei.

22.41.•• Baza unei piramide este rombul cu latura a şi unghiul α. Unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazelor sunt egale cu β. Aflați volumul piramidei.

22.42.•• Baza unei piramide este trapezul, laturile paralele ale căruia sunt egale cu 4 cm şi 10 cm. Unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazei sunt egale cu 45°, iar înălțimea piramidei este egală cu $2\sqrt{5}$ cm. Aflați volumul piramidei.

22.43.•• Baza unei piramide este triunghiul cu laturile 6 cm, 25 cm şi 29 cm. Unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazei sunt egale cu 60°. Aflați volumul piramidei.

22.44.•• Baza unei piramide este un triunghi regulat cu latura a. Două fețe laterale ale piramidei sunt perpendiculare pe bază, iar a treia este înclinată la ea sub unghiul de 60°. Aflați volumul piramidei.

22.45.•• Baza unei piramide este un triunghi regulat cu latura $\boldsymbol{a}$. Una din fețele laterale ale piramidei este perpendiculară pe bază, iar altele două sunt înclinate la ea sub unghiul de 45°. Aflați volumul piramidei.

22.46.•• Baza piramidei $MABCD$ este pătratul $ABCD$. Muchia laterală AMB este perpendiculară la planul bazei, $MA = MB$, distanța de la punctul M până la dreapta CD este egală cu 10 cm. Aflați volumul piramidei, dacă înălțimea ei este egală cu 8 cm.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

22.47. Înălțimile paralelogramului sunt egale cu 8 cm şi 12 cm, iar unghiul dintre ele – 60°. Aflați aria paralelogramului.

22.48. Diagonala mare a trapezului dreptunghic împarte înălțimea, dusă din vârful unghiului obtuz, în segmentele cu lungimile de 9 cm şi 15 cm, iar latura laterală mare a trapezului este egală cu baza mică a lui. Aflați aria trapezului.

22.49. Sunt dați vectorii $\vec{m}(3; -2; p)$ şi $\vec{n}(-9; 6; -12)$.

1) Pentru care valoare a lui p vectorii $\vec{m}$ şi $\vec{n}$ sunt coliniari?

2) Pentru care valoare a lui p vectorul $\vec{m}$ va fi perpendicular la axa z?

23. Volumele corpurilor de rotaţie. Aria sferei

În figura 23.1 sunt reprezentate prismele regulate cu 6, 12 şi 24 fețe, aria bazei fiecăreia din ele este egală cu S, iar înălțimea – h. Atunci volumul fiecărei din aceste prisme este egal cu Sh.

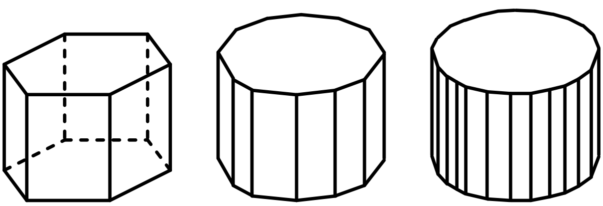


Fig. 23.1

Atragem atenția, cu cât este mai mare numărul de laturi al bazei prismei, cu atât această prismă este mai asemănătoare cu cilindrul. Aceste rațonamente ne insuflă, că are loc aşa o teoremă.

Teorema 23.1. ***Volumul cilindrului V cu aria bazei S şi înălțimea h se poate calcula după formula***

$$\boxed{V = Sh}$$

Dacă raza bazei cilindrului este egală cu r, atunci formula dată se poate scrie în aspectul

$$\boxed{V = \pi r^2 h}$$

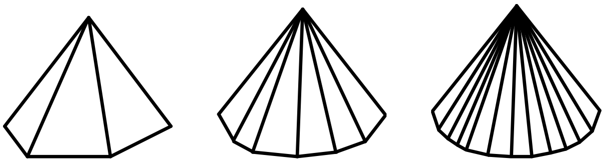


Fig. 23.2

În figura 23.2 sunt prezentate piramidele regulate cu 6, 12 şi 24 fețe, aria bazei fiecăreia din ele fiind egală cu S, iar înălțimea – h. Atunci volumul fiecăreia din aceste piramide este egal cu $\frac{1}{3}Sh$.

Atragem atenția, cu cât este mai mare numărul de laturi al bazei piramidei, cu atât această piramidă este mai asemănătoare cu conul. Aceste raționamente ne insuflă, că are loc aşa o teoremă.

Teorema 23.2. ***Volumul conului V cu aria bazei S şi înălțimea h se poate calcula după formula***

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Sh}$$

Dacă raza bazei conului este egală cu r, atunci formula dată se poate scrie în aspectul

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

Spre deosebire de cilindru şi con, sfera nu se poate „aproxima” prin poliedre regulate, de aceea volumul sferei se determină prin altă modalitate. Formulele pentru calculul volumului sferei şi a ariei sferei pentru prima dată au fost obținute de genialul matematician al Greciei Antice Arhimede.

Teorema 23.3. ***Volumul V al bilei cu raza R se poate calcula după formula***

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3,}$$

iar aria S a sferei cu raza R se poate calcula conform formulei

$$\boxed{S = 4\pi R^2}$$

Problemă. Aflați volumul conului, generatoarea căruia este egală cu l şi este înclinată la planul bazei sub unghiul φ.

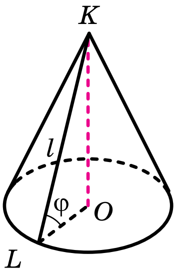


Fig. 23.3

Rezolvare: În figura 23.3 este reprezentat conul, generatoarea căruia KL este egală cu l şi face cu planul bazei unghiul φ. Fie O, centrul bazei conului. Din triunghiul dreptunghic KLO aflăm raza bazei r şi înălțimea h. Avem:

$$r = l\cos\varphi,$$
$$h = l\sin\varphi.$$

Folosind formula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, aflăm volumul conului:

$$V = \frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2\varphi\sin\varphi.$$

Răspuns: $\frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2\varphi\sin\varphi$. ◄

?

1. După care formule se calculează volumul cilindrului?
2. După care formule se calculează volumul conului?
3. După care formulă se calculează volumul sferei?
4. După care formulă se calculează aria sferei?

EXERCIŢII

23.1.° Aflați volumul cilindrului, raza bazei căruia este egală cu 4 cm, iar înălțimea – 5 cm.

23.2.° Aflați înălțimea cilindrului, volumul căruia este egal cu 98π cm^3, iar raza bazei – 7 cm.

23.3.° Aflați raza bazei cilindrului, volumul căruia este egal cu 252π cm^3, iar înălțimea – 7 cm.

23.4.° Aflați volumul corpului, obținut în rezultatul rotirii dreptunghiului cu laturile a şi b în jurul dreptei, care conține latura lui, ce este egală cu b.

23.5.° Înălțimea cilindrului este egală cu H, iar secțiunea axială a cilindrului este un pătrat. Aflați volumul cilindrului.

23.6.° Diagonala secțiunii axiale a cilindrului este egală cu 20 cm şi creează cu planul bazei un unghi de 30°. Aflați volumul cilindrului.

23.7.° Într-un vas cilindric, umplut cu apă, au scufundat o piesă metalică. Totodată s-a dovedit, că piesa este acoperită în întregime de apă. Nivelul apei în vas s-a ridicat cu 14 cm, fără sa ajungă la marginea de sus a vasului. Aflați volumul piesei, dacă diametrul interior al vasului este egal cu 20 cm.

23.8.° Aflați volumul conului, raza bazei căruia este egală cu 6 cm, iar înălțimea – 5 cm.

23.9.° Aflați înălțimea conului, volumul căruia este egal cu 24π cm^3, iar raza bazei – 3 cm.

23.10.° Volumul conului este egal cu 50 cm^3, iar înălțimea – 6 cm. Aflați raza bazei conului.

23.11.° O movilă de pietriş are forma unui con, raza bazei căruia este 2,1 m, iar generatoarea – 3,5 m. Câte tone alcătuieşte masa pietrişului, adunată în această movilă, dacă masa 1 m^3 de pietriş este egală cu 3 t? Rotunjiți răspunsul până la unități.

23.12.° Secțiunea axială a conului este triunghi echilateral, iar raza bazei conului este egală cu R. Aflați volumul conului.

23.13.° Aflați volumul conului, înălțimea căruia este egală cu 4 cm, iar unghiul dintre generatoare şi planului bazei este egal cu 30°.

23.14.° Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este egală cu 10 cm, unul din unghiuri – 60°. Aflați volumul corpului, obținut în rezultatul rotirii triunghiului dat în jurul dreptei, care conține cateta, alăturată unghiului dat.

23.15.° Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este egală cu 13 cm, iar una din catete – 5 cm. Aflați volumul corpului, obținut în rezultatul rotirii triunghiului dat în jurul dreptei, care conține cateta dată.

23.16.° Aflați volumul bilei, raza căreia este egală cu 3 cm.

23.17.° Demonstrați, că volumele a două bile se raportă ca cuburile razelor lor.

23.18.° De câte ori este necesar de mărit raza bilei, ca volumul ei să se mărească de 5 ori?

23.19.° Volumele a două bile se raportă ca 8 : 25, Găsiți raportul razelor lor.

23.20.° Raza sferei este egală cu 5 cm. Cu ce este egală aria ei?

23.21.° Aflați raza sferei, aria căreia este egală cu 256π cm^2.

23.22.° Raza unei bile au mărit-o de **7** ori. Cum s-a modificat aria suprafeței ei?

23.23.° Cum trebuie de schimbat raza bilei, ca aria suprafeței ei să se micşoreze de 3 ori?

23.24.° Volumele a două bile se raportă ca 27 : 125. Cum se raportă ariile suprafețelor lor?

23.25.• Un fir de aluminiu cu diametrul de 10 mm are masa de 16,3 kg. Greutatea specifică a aluminiului este egală cu 2600 kg/m^3. Care este lungimea firului? Răspunsul rotunjiți-l până la unități.

23.26.• O țeavă de plumb, grosimea peretelui căreia este egală cu 4 mm, are diametrul interior 32 mm. Greutatea specifică a plumbului este egală cu 11 400 kg/m^3. Câte kilograme alcătuieşte masa țevii, dacă lungimea ei este egală cu 15 m? Răspunsul rotunjiți-l până la unități.

23.27.• În baza de jos a cilindrului este dusă o coardă, care subîntinde un arc, măsura în grade a căruia este egală cu α, $0 < \alpha < 180°$. Segmentul, ce uneşte centrul bazei de sus cu mijlocul acestei coarde, face cu planul bazei unghiul β. Aflați volumul cilindrului, dacă înălțimea lui este egală cu m.

23.28.• În baza de jos a cilindrului este dusă o coardă, care se vede din centrul acestei baze sub unghiul de 90°, iar din centrul bazei de sus – sub unghiul de 60°. Aflați volumul cilindrului, dacă raza bazei lui este egală cu R.

23.29.• Unghiul de la vârf al secțiunii axiale a conului este egal cu α, iar distanța de la centrul bazei conului până la generatoare este egală cu m. Aflați volumul conului.

23.30.• În baza conului o coardă cu lungimea a subîntinde un arc, măsura în grade a căruia este egală cu α, $0 < \alpha < 180°$. Unghiul dintre generatoarea conului şi planul bazei lui este egal cu β. Aflați volumul conului.

23.31.• Coarda bazei conului subîntinde un arc, măsura în grade a căruia este egală cu 60°. Segmentul, ce uneşte vârful conului cu mijlocul coardei date, face cu planul bazei conului unghi de 60°. Înălțimea conului este egală cu $\sqrt{3}$ cm. Aflați volumul conului.

23.32.• Din vasul ce are forma unui con cu înălțimea de 8 cm şi diametrul bazei 12 cm, umplut cu apă până la margini, au turnat apa într-un vas ce are forma cilindrului (fig. 23.4). Diametrul bazei cilindrului este egal cu 8 cm. Care trebuie să fie cea mai mică înălțime a vasului cilindric, ca apa din el să nu se verse?

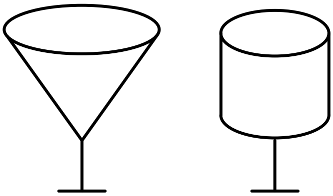


Fig. 23.4

23.33.$^{\bullet}$ Stogul de fân are formă de cilindru cu vârful conic. Raza bazei lui este egală cu 2,5 m, înălțimea stogului întreg – 4 m, iar înălțimea părții cilindrice a lui – 2,2 m. Densitatea fânului este egală cu 30 kg/m^3. Câte tone va alcătui masa stogului? Răspunsul rotunjiți-l până la zecimi.

23.34.$^{\bullet}$ Bila metalică, cu raza de 15 cm au topit-o şi din metalul topit au format câteva bile, razele cărora sunt egale cu 3 cm. Câte astfel de bile s-au turnat? Pierderile de metal în timpul topirii de le neglijat.

23.35.$^{\bullet}$ Trei bile de metal, razele cărora sunt egale cu 3 cm, 4 cm şi 5 cm, le-au topit şi din metalul obținut au turnat o bilă. Care va fi raza bilei obținute. Pierderile metalului în timpul retopirii se vor neglija.

23.36.$^{\bullet}$ Aria cercului mare a bilei este egală cu S. Aflați aria suprafeței bilei date.

23.37.$^{\bullet}$ Un plan, depărtat de la centrul sferei cu 7 cm, intersectează sfera după o linie, lungimea căreia este egală cu 6π cm. Aflați aria sferei.

23.38.$^{\bullet}$ Aria secțiunii bilei cu planul, depărtat de la centrul ei cu 4 cm, este egală cu 24π cm^2. Aflați aria suprafeței sferei.

23.39.$^{\bullet}$ Câți metri de pânză cu lățimea de 1 m vor trebui pentru confecționarea unui montgolfier, raza căruia, este egală cu 2 m, dacă pentru conexiunea detaliilor sferei şi a rămăşițelor se cheltuie 10% de pânză? Răspunsul rotunjiți-l până la zecimi.

23.40.$^{\bullet}$ În care caz se cheltuie mai multă materie primă: pentru nichelarea unei bile cu diametrul de 6 cm sau pentru nichelarea a 8 bile cu diametrul de 1 cm fiecare?

23.41.$^{\bullet\bullet}$ Paralel cu axa cilindrului s-a dus o secțiune, distanța de la planul căreia până la axa cilindrului este egală cu 12 cm. Diagonala secțiunii este egală cu $10\sqrt{5}$ cm, iar raza bazei cilindrului – 13 cm. Aflați volumul cilindrului.

23.42.$^{\bullet\bullet}$ Planul, paralel cu axa bazei cilindrului, retează de la circumferința bazei un arc, măsura în grade a căruia este egală cu α, $0° < \alpha < 80°$. Diagonala secțiunii obținute creează cu axa cilindrului unghiul β şi este depărtată de la ea la distanța d. Aflați volumul cilindrului.

23.43.$^{\bullet\bullet}$ Aflați volumul corpului, obținut în rezultatul rotirii triunghiului cu laturile 10 cm, 17 cm şi 21 cm în jurul dreptei, care conține latura mai mare a lui.

23.44.$^{\bullet\bullet}$ Trapezul isoscel cu bazele 1 cm şi 25 cm îl rotesc în jurul dreptei, ce conține baza mai mare a lui. Aflați volumul corpului obținut, dacă se cunoaşte, că în trapezul dat se poate înscrie o circumferință.

23.45.•• Aflați volumul corpului, obținut în rezultatul rotirii triunghiului dreptunghic în jurul dreptei ce conține ipotenuza acestui triunghi, dacă se ştie cateta lui a şi unghiul β alăturat acestei catete.

23.46.•• Ariile a două secțiuni paralele ale sferei, amplasate de aceeaşi parte de centrul ei, sunt egale cu 400π cm^2 şi 49π cm^2. Aflați aria suprafețelor bilelor, dacă distanța dintre planele secțiunilor este egală cu 9 cm.

23.47.•• Ariile a două secțiuni paralele ale sferei, amplasate pe ambele părți față de centrul ei, sunt egale cu 9π cm^2 şi 25π cm^2. Aflați aria suprafețelor sferelor, dacă distanța dintre planele secțiunilor este egală cu 8 cm.

EXERCIŢII PENTRU REPETARE

23.48. Într-o circumferință este înscris patrulaterul $ABCD$. Unghiul A este de 3 ori mai mare decât unghiul C, iar unghiul B de 5 ori mai mic decât unghiul A. Aflați unghiul D.

23.49. În triunghiul isoscel MKE ($MK = KE$) bisectoarea unghiului E intersectează latura MK în punctul C. Aflați unghiurile triunghiului MKE, dacă $\angle KCE = 126°$.

23.50. Modulul vectorului $\vec{a}\,(2; m+1; m+5)$ este egal cu $2\sqrt{3}$. este oare vectorul $\vec{a}$ coliniar cu vectorul $\vec{b}\,(-1; m+4; m+2)$?

ÎNSĂRCINAREA NR. 6 „CONTROLEAZĂ-TE” ÎN FORMĂ TEST

1. Muchia cubului au micşorat-o de 3 ori. De câte ori s-a micşorat volumul lui?
A) de 3 ori; B) de 6 ori; C) de 9 ori; D) de 27 ori.

2. Diagonala feței cubului este egală cu a. Cu ce este egal volumul cubului?
A) $\frac{a^3}{8}$; B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$; C) $\frac{a^3}{9}$; D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

3. Calculați volumul prismei triunghiulare regulate, latura bazei căreia este egală cu 20 cm, iar înălțimea – 9 cm.
A) $300\sqrt{3}$ cm^3; B) 300 cm^3; C) 900 cm^3; D) $900\sqrt{3}$ cm^3.

4. Calculați volumul prismei, baza căreia este un paralelogram cu laturile 6 cm şi 4 cm şi unghiul 45°, iar înălțimea prismei este egală cu $7\sqrt{2}$ cm.
A) 168 cm^3; B) 84 cm^3; C) 56 cm^3; D) 70 cm^3.

5. Baza unei prisme drepte este un triunghi dreptunghic cu ipotenuza c şi unghiul de 30°. Diagonala feței laterale care conține cateta, opusă unghiului dat, este înclinată la planul bazei sub unghiul de 60°. Găsiți volumul prismei.
A) $\frac{3c^3}{16}$; B) $\frac{3c^3}{8}$; C) $\frac{3c^3\sqrt{3}}{16}$; D) $\frac{3c^3\sqrt{3}}{8}$.

6. Calculați volumul piramidei, baza căreia este un romb cu diagonalele 10 cm şi 18 cm, iar înălțimea piramidei constituie 20 cm.
A) 1800 cm^3; B) 600 cm^3; C) 1200 cm^3; D) 300 cm^3.

7. Latura bazei piramidei patrulatere regulate este egală cu a, iar secțiunea diagonală a ei este un triunghi echilateral. Găsiți volumul piramidei.
A) $\frac{a^3}{3}$; B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$; C) $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$; D) $\frac{a^3}{6}$.

8. Baza piramidei este un dreptunghi cu laturile ce sunt egale cu 6 cm şi 8 cm. Fiecare muchie laterală a piramidei creează cu planul bazei ughiul de 60°. Găsiți volumul piramidei
A) $240\sqrt{3}$ cm^3; B) 160 cm^3; C) 80 cm^3; D) $80\sqrt{3}$ cm^3.

9. Baza piramidei este triunghiul cu laturile 39 cm, 39 cm şi 30 cm. Unghiurile diedre ale piramidei de la muchiile bazei sunt egale cu 45°. Găsiți volumul piramidei.
A) 900 cm^3; B) 600 cm^3; C) 1800 cm^3; D) 1200 cm^3.

10. Calculați volumul cilindrului, secțiunea axilă a căruia este pătratul cu latura de 8 cm.
A) 64π cm^3; B) 96π cm^3; C) 128π cm^3; D) 512π cm^3.

11. Cu ce este egală raza bazei cilindrului, volumul căruia alcătuieşte 36π cm^3, iar înălțimea este egală cu 4 cm?
A) 9 cm; B) 3 cm; C) 6 cm; D) $2\sqrt{3}$ cm.

12. Înălțimea conului este egală cu 9 cm, iar volumul lui – 6π cm^3. Cu ce este egală aria bazei conului?
A) 2 cm^2; B) 2π cm^2; C) 3π cm^2; D) 6 cm^2.

13. Razele conului şi a cilindrului sunt egale, înălțimea cilindrului este egală cu 8 cm, iar înălțimea conului – 6 cm. Aflați raportul volumului cilindrului la volumul conului.
A) 4 : 3; B) 1 : 1; C) 4 : 1; D) 3 : 1.

14. Aria totală a suprafeței conului este egală cu 200π cm^2, iar generatoarea lui – 17 cm. Aflați volumul conului.
A) 960π cm^3; B) 320π cm^3; C) 480π cm^3; D) 120π cm^3.

15. În baza conului este dusă o coardă cu lungimea de 12 cm, care se vede din centrul bazei sub unghiul de 120°. Aflați volumul conului, dacă generatoarea lui este egală cu 8 cm.
A) $64\pi\sqrt{3}$ cm^3; B) $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^3; C) 192π cm^3; D) 64π cm^3.

16. Calculați volumul sferei cu raza de 3 cm.
A) 36π cm^3; B) 9π cm^3; C) 108π cm^3; D) 54π cm^3.

17. Găsiți rapoartele ariilor a două sfere, razele cărora sunt egale cu 5 cm şi 10 cm.
A) 1 : 5; B) 1 : 2; C) 1 : 8; D) 1 : 4.

18. Cu ce este egală raza sferei, aria căreia este de 100π cm^2?
A) 100 cm; B) 50 cm; C) 5 cm; D) 20 cm.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 6

Volumul corpului

Volumul corpului se numeşte mărimea pozitivă, care posedă astfel de proprietăți:

1) corpurile egale au volume egale;
2) dacă corpul e compus din câteva alte corpuri, atunci volumul lui este egal cu suma volumelor acestor corpuri;
3) ca unitate de măsură a volumului corpului, se va alege cubul unitate, adică cubul cu muchia, care este egală cu unitatea de măsură a lungimii.

Volumul prismei

$V = Sh$, unde V este volumul prismei, S – aria bazei prismei, h – lungimea înălțimii prismei.

Volumul piramidei

$V = \frac{1}{3}Sh$, unde V– volumul piramidei, S – aria bazei piramidei, h – lungimea înălțimii piramidei.

Volumul cilindrului

$V = \pi r^2 h$, unde V este volumul cilindrului, r – raza bazei cilindrului, h – lungimea înălțimii cilindrului.

Volumul conului

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, unde V este volumul conului, r – raza bazei conului, h – lungimea înălțimii conului.

Volumul bilei

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, unde V este volumul bilei, R – raza bilei.

Aria bilei

$S = 4\pi R^2$, unde S este aria bilei, R – raza bilei.

§7 REPETAREA CURSULUI DE MATEMETICĂ

24. Probleme pentru repetarea cursului de algebră

Devizibilitatea numerelor naturale. Criteriile de divizibilitate.

24.1. Care din numerele 24, 75, 83, 378, 573, 898 sunt devizibile fără rest: 1) cu 2; 2) cu 3?

24.2. Care din numerele 28, 85, 108, 135, 240, 396 sunt divizibile fără rest: 1) cu 5; 2) cu 9?

24.3. Aflați cel mai mare divizor comun al numerelor: 1) 24 şi 42; 2) 18 şi 30; 3) 128 şi 192; 4) 328 şi 624.

24.4. Aflați cel mai mic multiplu comun al numerelor: 1) 16 şi 32; 2) 9 şi 14; 3) 18 şi 12; 4) 16 şi 24.

24.5. Înlocuiți asteriscul în scrierea 400^{*} cu aşa o cifră, ca numărul obținut să fie multiplu lui: 1) 2; 2) 5; 3) 9; 4) 3. Cercetați toate cazurile posibile.

24.6. Câtul incomplet, obținut de la împărțirea a două numere cu două cifre este egal cu 9, iar restul – cu 8. Cu ce este egal deîmpărțitul?

24.7. Maria locuieşte în apartamentul nr. 40 a unui bloc de locuință cu 5 etage. În fiecare scară, la fiecare etaj sunt repartizate câte 3 apartamente în ordinea creşterii numerelor: prima – la stânga, a doua – la mijloc, a treia – la dreapta.
1) Care este numărul scării, în care trăieşte Maria?
2) La ce etaj locuieşte fetița?
3) Unde se află apartamentul ei: la stânga, la mijloc sau la dreapta?

24.8. Care număr este împărțitorul a oricărui număr natural?

24.9. Care din numerele 4025, 7540, 2754, 6225 se împarte fără rest cu 3, dar nu se împart fără rest cu 2?

24.10. Câte numere de două cifre, multiple cu numărul: 1) 5; 2) 9; 3) 7, există?

24.11. Cărțile pot fi amplasate în mod egal pe 12 polițe sau pe 8 polițe. Câte cărți sunt, dacă se ştie, că sunt mai multe de 100 de cărți, dar mai puține de 140?

24.12. Merele pot fi repartizate în mod egal în 12 pachete, sau, tot în mod egal, în 16 pachete. Câte mere sunt, dacă se ştie, că sunt mai mult de 80 de mere, dar mai puțin de 120?

24.13. Care este cel mai mic număr care trebuie adunat cu numărul 826, pentru ca suma obținută să se împartă fără rest în același timp cu 3 şi cu 10?

24.14. Într-o livadă cresc meri şi vişini, totodată meri sunt de 3 ori mai mulți decât vişini. Cu care din numerele aduse mai jos se poate egala cantitatea totală de pomi din livadă?

1) 18; 2) 20; 3) 21; 4) 25.

24.15. Cu ce este egal restul ce se obține la împărțirea cu 7 a valorii expresiei $(5n + 8) - (5 - 2n)$, unde n – număr natural arbitrar?

24.16. În fiecare buchet trebuie să fie 4 trandafiri albi şi 3 roşii. Care este cea mai mare cantitate de astfel de buchete ce pot fi compuse din 36 de trandafiri roşii şi 45 de trandafiri albi?

24.17. Care este una şi aceeaşi cifră, ce trebuie pusă în scrierea **25** în locul fiecărui asterisc, ca numărul obținut să fie multiplu lui 6?

Numere raționale şi operații cu ele

24.18. Repartizați în ordine descrescătoare numerele:

1) $\frac{7}{10}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{13}{15}$; 2) $\frac{11}{16}, \frac{5}{8}, \frac{7}{24}, \frac{5}{12}$.

24.19. Aflați toate numerele naturale c, pentru care este adevărată inecuația:

1) $\frac{6}{11} < \frac{c}{11} < 1$; 2) $\frac{2}{9} < \frac{c}{18} < \frac{5}{6}$.

24.20. Aflați toate valorile naturale ale lui x, pentru care este adevărată inecuația $\frac{x}{9} < \frac{22}{45}$.

24.21. Câte fracții există:

1) cu numitorul 24, care sunt mai mari ca $\frac{3}{8}$, dar mai mici decât $\frac{2}{3}$;

2) cu numitorul 18, care sunt mai mari ca $\frac{7}{9}$, dar mai mici decât 1;

3) cu numitorul 28, care sunt mai mari ca $\frac{3}{7}$, dar mai mici decât $\frac{4}{7}$?

24.22. O limuzină parcurge distanța dintre două oraşe în 5 ore, iar un camion – în 8 ore. Care dintre aceste automobile va parcurge o distanță mai mare: limuzina în 3 ore sau camionul în 5 ore?

24.23. Câte fracții regulate cu numitorul 12 există?

24.24. Câte fracții neregulate cu numărătorul 10 există?

24.25. Cărui din intervalele date aparține numărul $\frac{10}{15}$:

1) (0; 0,25); 2) (0,25; 0,5); 3) (0,5; 0,75); 4) (0,75; 1)?

24.26. Calculați valoarea expresiei:

1) $\frac{9}{11}-\frac{3}{7}$; 4) $\frac{3}{16}+\frac{7}{24}-\frac{5}{8}$; 7) $4\frac{7}{30}-1\frac{11}{20}$;

2) $\frac{11}{16}-\frac{9}{32}$; 5) $2\frac{3}{4}+6\frac{7}{10}$; 8) $\frac{5}{7}-0,6$;

3) $\frac{14}{15}-\frac{9}{10}$; 6) $5\frac{2}{9}-2\frac{5}{7}$; 9) $0,35+\frac{8}{15}$.

24.27. Calculați valoarea expresiei:

1) $1\frac{3}{25}\cdot 2\frac{1}{7}-1\frac{8}{9}\cdot\frac{27}{170}$; 4) $(-5,16+5,02)\cdot(2,5-4)$;

2) $\left(9-2\frac{1}{7}\cdot 3\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{27}{35}$; 5) $\frac{5}{32}:\frac{5}{12}-3\frac{1}{4}:1\frac{2}{11}$;

3) $\left(5\frac{1}{16}-1\frac{1}{8}\right)\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{14}\right)$; 6) $\left(7-1\frac{5}{9}:\frac{7}{24}\right):\left(-\frac{25}{36}\right)$.

24.28. Care din fracțiile zecimale ordinare date nu pot fi transformate în fracție zecimală finită:

1) $\frac{11}{16}$; 2) $\frac{24}{600}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{18}{125}$?

24.29. Un tractorist poate ara un câmp în 12 ore, iar altul – în 8 ore. Ce parte din câmp pot ei ara, lucrând împreună, în decursul a 3 ore?

24.30. La un magazin au adus 540kg fructe, din ele $\frac{4}{9}$ constituiau merele, iar restul – perele. Câte kilograme de pere au adus la magazin?

24.31. În decursul a trei zile au introdus programe antivirus în 105 computatoare. În prima zi au introdus programe în $\frac{3}{7}$ computatoare, iar în a doua zi – în $\frac{7}{12}$ din restul computatoarelor. În câte computatoare au instalat programe antivirus în a treia zi?

24.32. Trebuie de ambalat $27\frac{1}{2}$ kg zahăr în pachete a câte $\frac{3}{4}$ kg în fiecare. Câte pachete pline se vor obținea?

24.33. Care este cea mai mică cantitate de borcane cu capacitatea de 0,3l necesară pentru ca în ea să încapă 4l de miere?

24.34. Un zugrav poate repara cabinetul de matematică în 48 ore, iar alt zugrav – în 96 ore. În câte ore, lucrând împreună, ei pot repara acest cabinet?

24.35. Doi muncitori lucrând împreună, pot executa un lucru oarecare în 6 ore. Unul din ei, lucrând de sine stătător, poate îndeplini acest lucru în 10 ore. În câte ore, lucrând singur, poate al doilea muncitor îndeplini acest lucru?

Mărimi proporționale. Calcule procentuale

24.36. O fetiță are o oarecare sumă de bani cu care dânsa poate procura 18 caiete la fel. Câte caiete poate achiziționa fetița de această sumă de bani, dacă ele: 1) se vor iefteni de 2 ori; 2) se vor scumpi de 1,5ori?

24.37. Din 12m de peluză au cusut 8 bluze la fel. Câte astfel de bluze pot fi confecționate din 18 m peluză?

24.38. Şase escavatoare identice, lucrând împreună, au săpat groapa fundației în 18 ore. În câte ore 4 astfel de escavatoare, lucrând împreună, vor săpa două astfel de gropi pentru fundație?

24.39. Se ştie că din 50 kg de făină se obțin 70 kg pâine. Câte kilograme de pâine vor obține din 150 kg făină? Câte kilograme de făină trebuie pentru a coace 14 kg de pâine?

24.40. Cu castraveți au sădit $\frac{1}{3}$ din grădină, iar cu roşii – 30%. Cu care plante, cu castraveți sau roşii, au sădit o parcelă mai mare?

24.41. 20% din caietele cumpărate erau în pătrățele, iar restul – în linii. De câte ori mai mult au cumpărat caiete în linii, decât în pătrățele?

24.42. Aliajul conține 9% zinc. Câte kilograme de zinc se conțin în 270 kg de aliaj?

24.43. Prețul mărfii la început l-au mărit cu 50%, apoi l-au micşorat cu 50%. S-a mărit sau s-a micşorat şi cu câte procente, prețul inițial al mărfii?

24.44. Prețul mărfii la început l-au micşorat cu 20%, iar apoi l-au mărit cu 30%. Cum şi cu câte procente s-a schimbat prețul inițial în urma acestor două reconsiderări?

24.45. Un deponent a pus în bancă 60 000 grn. pe două conturi diferite. Pentru primul din conturi banca plăteşte 5% dobândă anuală, iar al doilea – 7% dobândă anuală. Peste un an deponentul a primit venitul, pentru depozitul cu 5% dobândă, cu 1200 grn. mai mult, decât pentru depozitul cu 7% dobândă. Câți bani a pus el pe fiecare cont?

24.46. Au amestecat o soluție de 50% a acidului cu soluția de 20% a aceluiaşie acid şi au obținut 600 g soluție de 30% de acid. Câte grame de fiecare soluție au amestecat?

24.47. Câte kilograme de aliaj, ce conține 30% cupru, şi câte kilograme de aliaj ce conține 40% cupru trebuie de luat, pentru a obține 50kg de aliaj ce conține 36% cupru?

24.48. În prima zi turistul a parcurs 16 km, ceea ce constituie 40% din lungimea itinerarului turistic. Aflați lungimea acestui itinerar.

24.49. Minereul de fier conține 70% fier. Cât minereu trebuie de luat, pentru a obține 84 t de fier?

24.50. Într-un cinematograf sunt 480 de locuri, din care în timpul rulării filmului erau ocupate 408. Câte procente constituie locurile ocupate?

24.51. În soluția de sare de 10 procente cu masa 200 g au turnat 300 g apă. Care este conținutul procentual al sării în soluția obținută?

24.52. Prețul mărfii a crescut de la 1600 grn. până la 1640 grn. Cu câte procente a crescut prețul mărfii?

24.53. Prețul mărfii a scăzut de la 3200 grn. până la 2560 grn. Cu câte procente a scăzut prețul?

24.54. Un depozitar a pus pe cont în bancă 60 000 grn cu 10% dobândă anuală. Câți bani vor fi pe contul lui peste 2 ani?

Expresii raționale

24.55. Pentru care valori x_1 şi x_2 sunt satisfăcute egalitățile $x_1 - x_2 = 7$, $x_1x_2 = 4$. Aflați anume pentru aceste valori ale lui x_1 şi x_2 valoarea expresiei:

1) $x_1x_2^2 - x_1^2x_2$; 2) $x_1^2 + x_2^2$; 3) $(x_1 + x_2)^2$.

24.56. Simplificați fracția:

1) $\frac{3a}{12b}$; 2) $\frac{8xy}{4xz}$; 3) $\frac{20m^2}{15m^3}$; 4) $\frac{3a^2bc}{21abc^4}$; 5) $\frac{36m^5n^4}{24m^2n^7}$; 6) $\frac{39p^6q^9}{65p^9q^6}$.

24.57. Simplificați fracția:

1) $\frac{4a+12b}{4a}$; 4) $\frac{6y^2-3y}{4-8y}$; 7) $\frac{7a^2+7a+7}{14a^3-14}$;

2) $\frac{7x-14y}{3x-6y}$; 5) $\frac{4p^2+28pq+49q^2}{49q^2-4p^2}$; 8) $\frac{x^2-7x}{x^2-9x+14}$;

3) $\frac{x^2-25}{2x+10}$; 6) $\frac{a^3-27}{9a-27}$; 9) $\frac{x^2-64}{32+4x-x^2}$.

24.58. Aduceți la o formă mai simplă expresia:

1) $\frac{2a+5b}{ab}-\frac{2a-b}{ab}$;

2) $\frac{x^2+8x}{4-x^2}-\frac{4x-4}{4-x^2}$;

3) $\frac{5x+6}{5-x}+\frac{3x+16}{x-5}$;

4) $\frac{36-10x}{(x-6)^2}-\frac{2x-x^2}{(6-x)^2}$.

24.59. Simplificați expresia:

1) $\frac{4n+5m}{m}-\frac{6n^2+5m^2}{mn}$;

2) $\frac{a+2}{3a-3}+\frac{3-a}{5a-5}$;

3) $\frac{x-5}{x+5}-\frac{x-1}{x-5}$;

4) $\frac{4b}{3b-24}+\frac{3b}{16-2b}$;

5) $\frac{4}{m^2-36}-\frac{2}{m^2-6m}$;

6) $8-\frac{3a+8c}{c}$;

7) $\frac{m+1}{m-1}-\frac{m^2+1}{m^2-1}$;

8) $\frac{b^2}{2ab+a^2+b^2}+\frac{a-b}{a+b}$;

9) $\frac{3a}{9a^2-1}-\frac{a+2}{3a^2+a}$.

24.60. Efectuați înmulțirea:

1) $\frac{a^3}{b^4}\cdot\frac{b^2}{a^3}$;

2) $\frac{4m^2}{k^6}\cdot\frac{mk^6}{16}$;

3) $\frac{a}{7b}\cdot 7a$;

4) $20x^{16}\cdot\frac{y^4}{5x^4}$;

5) $\frac{17x^4}{y^8}\cdot\frac{y^6}{34x^7}$;

6) $\frac{8k^9}{9mp}\cdot\frac{81m^2}{56k^6p^2}$.

24.61. Aflați câtul:

1) $\frac{14}{a^2}:\frac{28}{a^6}$;

2) $\frac{b^5}{6}:\frac{b^3}{48}$;

3) $\frac{45}{m^8}:\frac{36}{m^7n^2}$;

4) $\frac{6x^7}{y^8}:(36x^7y^2)$;

5) $35m^4:\frac{21m^3}{n^2}$;

6) $\frac{16a^3b^8}{33c^5}:\left(-\frac{12a^2}{55c^6}\right)$.

24.62. Simplificați expresia:

1) $\frac{4x+4y}{x^6}\cdot\frac{x^3}{x+y}$;

2) $\frac{24b}{b^2-16}\cdot\frac{b-4}{3b}$;

3) $\frac{8}{m^2-25n^2}\cdot(m-5n)$;

4) $\frac{3c+6}{9c^2-6c+1}\cdot\frac{3c-1}{c+2}$;

5) $\frac{a^2-4a+4}{a+2}:(a-2)$;

6) $(p^2-36k^2):\frac{p+6k}{p}$.

24.63. Simplificați expresia:

1) $\left(\frac{m}{m-2}-1\right):\frac{6m}{mn-2n}$;

2) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\frac{a+b}{2ab}$;

3) $\frac{6x}{x+2} - \frac{x-6}{3x+6} \cdot \frac{72}{x^2-6x}$;

4) $\left(a - \frac{15a-25}{a+5}\right) : \frac{a^2-5a}{a+5}$;

5) $\left(\frac{m+1}{m-1} - \frac{m-1}{m+1}\right) : \frac{4m}{1-m^2}$;

6) $\left(\frac{2a-6}{a^2-4a+4} - \frac{a-4}{a^2-2a}\right) : \frac{a^2-8}{a^3-4a}$.

Ecuații algebrice. Sistem de ecuații algebrice

24.64. Rezolvați ecuațiile:

1) $\frac{x+2}{x^2-4} = 0$;

2) $\frac{x^2-4}{x+2} = 0$;

3) $\frac{x+2}{x+2} = 1$;

4) $\frac{x^2-9}{x^2-6x+9} = 0$;

5) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = 0$;

6) $\frac{10-4x}{x+9} + \frac{6x+8}{x+9} = 0$.

24.65. Rezolvați ecuațiile:

1) $\frac{2x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{4}{1-4x^2}$;

2) $\frac{x^2+8x}{x+10} = \frac{20}{x+10}$;

3) $\frac{x^2-4}{x+1} = \frac{3x}{x+1}$;

4) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$.

24.66. Rezolvați ecuațiile:

1) $x^4 - 10x^2 + 24 = 0$;
2) $x^4 - 3x^2 - 70 = 0$.

24.67. Pentru care valoare a lui b ecuația are o rădăcină:

1) $2x^2 + 8x - b = 0$;
2) $5x^2 - bx + 20 = 0$?

24.68. Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 7x - 3y = 23; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 3x - 5y = 6, \\ 6x + 5y = -3; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 6x + 7y = 38, \\ 3x - 4y = 4. \end{cases}$

24.69. Dreapta $y = kx + b$ trece prin punctele $M(3; 3)$ şi $E(1; 7)$. Scrieți ecuația acestei drepte.

24.70. Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -20; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x + 3y = 1, \\ x^2 + 2xy - y^2 = -1; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x^2 + xy - 5y = -3, \\ 4x - y = 3. \end{cases}$

24.71. Rezolvați sistemul de ecuații prin metoda grafică:

1) $\begin{cases} y - x = 0, \\ 2x + y = -6; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x + y = -1, \\ 2x + 2y = -3; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x^2 - y = 6, \\ x + y = 6; \end{cases}$
4) $\begin{cases} xy = 8, \\ x + y = -6. \end{cases}$

24.72. Determinați cu ajutorul metodei grafice cantitatea de soluții a sistemului de ecuații:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y + x = 3; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 - y = 1, \\ x^2 + y = 4x. \end{cases}$

Inegalităţi numerice şi proprietăţile lor. Inecuaţii pătratice şi liniare şi sistemele lor.

24.73. Se dă: $-4 < x < 2$. Apreciaţi valoarea expresiei: 1) $3x - 1$; 2) $8 - 5x$.

24.74. Se dă: $2 < x < 6$ şi $3 < y < 4$. Estimaţi valoarea expresiei:

1) $x + y$; 2) $x - y$; 3) xy; 4) $\frac{x}{y}$; 5) $5x + 2y$; 6) $3x - 4y$.

24.75. Evaluaţi lungimea liniei medii a trapezului cu bazele x cm şi y cm, dacă $8 < x < 12$, $7 < y < 14$.

24.76. Aflaţi mulţimea soluţiilor a inecuaţiei:

1) $(x+2)^2 \geqslant 0$; 3) $(x+2)^2 > 0$; 5) $0x < -5$; 7) $0x < 5$;
2) $(x+2)^2 \leqslant 0$; 4) $(x+2)^2 < 0$; 6) $0x \geqslant -5$; 8) $0x \geqslant 5$.

24.77. Rezolvaţi inecuaţia:

1) $8x + 4 \leqslant 30 - 5x$; 3) $0{,}3(8 - 3y) \leqslant 3{,}2 - 0{,}8(y - 7)$;
2) $9 - 4x < 6x - 25$; 4) $\frac{x+4}{3} - \frac{x+2}{6} \leqslant 4$.

24.78. Aflaţi cea mai mare soluţie întreagă a inecuaţiei:

1) $3x + 9 > 5x - 7$; 2) $14x^2 - (2x - 3)(7x + 4) \leqslant 14$.

24.79. Aflaţi cea mai mică soluţie întreagă a inecuaţiei:

1) $x - 5 < 3x + 8$; 2) $18x^2 - (3x - 2)(6x + 5) \leqslant 20$.

24.80. Pentru care valori ale lui a ecuaţia:

1) $x^2 + x - a = 0$ nu are soluţii;
2) $2x^2 - 16x + 5a = 0$ are cel puţin o soluţie reală?

24.81. Rezolvaţi sistemul de inecuaţii?

1) $\begin{cases} 7x - 1 \geqslant 5x - 3, \\ 3x + 6 \geqslant 8x - 14; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x(x - 3) - x(2 + 3x) < 4, \\ 6x^2 - (2x - 3)(3x + 4) < 17; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0{,}6(x - 6) \leqslant x + 2, \\ 4x + 7 > 2(x + 6{,}5); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{5x - 10}{6} > \frac{2x + 1}{3}, \\ \frac{3x + 1}{2} - 4x > 5 - \frac{3x - 2}{4}. \end{cases}$

24.82. Aflaţi soluţiile întregi ale sistemului de inecuaţii:

1) $\begin{cases} 6x - 7 < 3x + 17, \\ 8 - 2x > 14 - 5x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x + 20 \geqslant x + 5, \\ 2x + 2 \geqslant 4x - 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x - 1 > 2x + 4, \\ 6x - 5 \leqslant 13 - x. \end{cases}$

24.83. Rezolvaţi inecuaţia:

1) $x^2 - 6x - 7 < 0$; 6) $2x^2 - 3x + 1 > 0$;
2) $x^2 + 2x - 48 \geqslant 0$; 7) $4x^2 - 16x \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 6x - 5 > 0$; 8) $4x^2 - 49 > 0$;
4) $-x^2 - 4x - 3 < 0$; 9) $2x^2 - x + 1 > 0$;
5) $3x^2 - 7x + 4 \leqslant 0$; 10) $3x^2 - 4x + 2 \leqslant 0$.

24.84. Câte soluții întregi are inecuația:

1) $20 + 8x - x^2 > 0$; 2) $4x^2 - 17x + 4 \leqslant 0$?

Puteri şi rădăcini

24.85. Cu ce este egală valoarea expresiei:

1) $5^{-2} + 5^{-1}$; 2) $6^{-2} - 12^{-1}$; 3) $0{,}08^0 + 0{,}9^0$; 4) $(4 \cdot 2^{-3} - 10^{-1})^{-1}$?

24.86. Exprimați în formă de fracție expresia:

1) $a^{-3} + a^{-4}$;
3) $(a^{-1} - b^{-1}) \cdot (a - b)^{-2}$;
2) $mn^{-5} + m^{-5}n$;
4) $(x^{-4} + y^{-4}) \cdot (x^4 + y^4)^{-1}$.

24.87. Aflați valoarea expresiei:

1) $\dfrac{3^{12} \cdot 27^3}{9^9}$;
3) $100^{-2} : 1000^{-6} \cdot 0{,}01^8$;
5) $\dfrac{(-36)^{-3} \cdot 6^7}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;
2) $\left(5\dfrac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\dfrac{3}{16}\right)^7$;
4) $(0{,}2^{-3})^{-2} : 25^{-4}$;
6) $\dfrac{6^{-14}}{81^{-3} \cdot 16^{-4}}$.

24.88. Aflați valoarea expresiei:

1) $-3\sqrt{0{,}16} + 0{,}8$;
4) $\left(3\sqrt{8}\right)^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2$;
2) $\dfrac{1}{9} \cdot \left(\sqrt{18}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{28}\right)^2$;
5) $0{,}2\sqrt[3]{1000} - \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{81}$;
3) $50 \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\sqrt{3}\right)^2$;
6) $\sqrt[7]{-128} + 3\left(\sqrt[9]{9}\right)^9 - 4\sqrt[3]{216}$.

24.89. Pentru care valori ale variabilei are sens expresia:

1) $\sqrt{3 - a}$;
3) $\sqrt{a^4 + 1}$;
5) $\sqrt[9]{a - 8}$;
2) $\sqrt{a^2}$;
4) $\sqrt[8]{x + 4}$;
6) $\sqrt[6]{-x^2}$?

24.90. Rezolvați ecuația:

1) $x^2 = 7$;
3) $x^7 = 9$;
5) $x^4 = 16$;
2) $x^2 = -16$;
4) $x^5 = -2$;
6) $x^6 = 5$.

24.91. Aflați valoarea expresiei:

1) $\sqrt{0{,}1} \cdot \sqrt{0{,}4}$;
3) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}$;
5) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{250}}$;
2) $\dfrac{\sqrt{180}}{\sqrt{5}}$;
4) $\sqrt[9]{2^7 \cdot 7^4} \cdot \sqrt[9]{7^5 \cdot 2^{20}}$;
6) $\sqrt[5]{\sqrt{17} - 7} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{17} + 7}$.

24.92. Simplificați expresia:

1) $\sqrt{9x^8y^{10}}$, dacă $y \geqslant 0$;
3) $\sqrt[7]{k^7}$;
2) $\sqrt{0{,}64x^6y^2}$, dacă $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$;
4) $\sqrt[3]{0{,}008p^{24}n^{30}}$.

24.93. Simplificați expresia:

1) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^8}$;
2) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}-6\right)^4}$;
3) $\sqrt{\left(\sqrt{23}-7\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{23}-3\right)^2}$;
4) $\sqrt[6]{\left(5-4\sqrt{2}\right)^6}+\sqrt[5]{\left(5-4\sqrt{2}\right)^5}$.

24.94. Scoateți factorul de sub semnul rădăcinii:

1) $\sqrt{18a^8}$;
2) $\sqrt[4]{x^9}$;
3) $\sqrt[3]{-m^{10}}$;
4) $\sqrt[6]{a^{10}b^9}$, dacă $a \leqslant 0$;
5) $\sqrt[4]{-81a^{11}}$;
6) $\sqrt[10]{-p^{31}q^{24}}$.

24.95. Simplificați expresia (variabilele primesc valori nenegative):

1) $\sqrt[4]{b\sqrt[5]{b^4}}$;
2) $\sqrt[3]{c\sqrt[7]{c^2}}$;
3) $\sqrt[6]{a^2\sqrt[5]{a^2}}$.

24.96. Simplificați expresia:

1) $\sqrt{45}-\sqrt{125}+\sqrt{405}$;
2) $\left(\sqrt{99}-\sqrt{44}\right)\sqrt{11}$;
3) $\left(5-\sqrt{7}\right)\left(3+2\sqrt{7}\right)$;
4) $\left(\sqrt{14}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{14}+\sqrt{11}\right)$.

24.97. Simplificați fracția:

1) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}$;
2) $\dfrac{a-3\sqrt{a}}{a-9}$;
3) $\dfrac{7-\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$;
4) $\dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt[6]{x}-2}$.

24.98. Comparați:

1) $\sqrt{39}$ și $2\sqrt{10}$;
2) $0{,}3\sqrt{3\frac{1}{3}}$ și $\sqrt{0{,}4}$;
3) 4 și $\sqrt[3]{65}$;
4) $3\sqrt[3]{3}$ și $2\sqrt[3]{10}$;
5) $\sqrt[4]{6}$ și $\sqrt[8]{35}$;
6) $\sqrt[6]{7}$ și $\sqrt[4]{3}$.

24.99. Aflați valoarea expresiei:

1) $5^{3,6}\cdot 5^{-1,2}\cdot 5^{1,6}$;
2) $(3^{-0,8})^7 : 3^{-2,6}$;
3) $\left(7^{-\frac{4}{11}}\right)^{\frac{11}{20}}\cdot 49^{1,1}$;
4) $81^{-2,25}\cdot 9^{3,5}\cdot 27^{\frac{2}{3}}$.

24.100. Simplificați fracția:

1) $\dfrac{x-8x^{\frac{3}{7}}}{x^{\frac{4}{7}}-8}$;
2) $\dfrac{5y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{5}{6}}+y^{\frac{2}{3}}}$;
3) $\dfrac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a-b}$;
4) $\dfrac{m^{1,5}-n^{1,5}}{m+m^{0,5}n^{0,5}+n}$;
5) $\dfrac{a-2a^{0,5}b^{0,5}+b}{ab^{0,5}-a^{0,5}b}$;
6) $\dfrac{8a+1}{4a^{\frac{2}{3}}-1}$.

Ecuații iraționale

24.101. Câte rădăcini are ecuația:

1) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-3}=0$;
2) $\sqrt{x-4}\cdot\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[4]{6-x}=0$?

24.102. Rezolvați ecuațiile:

1) $\sqrt{3x-3}=\sqrt{4x^2-6x-1}$;
2) $\sqrt{x^2+x-4}=\sqrt{-2x}$;
3) $\sqrt{x+7}=x+5$;
4) $\sqrt{12+x-2x^2}=2-x$;
5) $\sqrt{x+5}-\sqrt{8-x}=1$;
6) $\sqrt{3x-6}+\sqrt{x-4}=4$.

24.103. Rezolvați ecuația:

1) $\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}+2=0$;
2) $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-3=0$;
3) $\sqrt[3]{4-4x+x^2}-\sqrt[3]{2-x}-2=0$;
4) $\sqrt{\dfrac{3x}{x-1}}-2\sqrt{\dfrac{x-1}{3x}}=1$.

Funcții şi proprietățile lor

24.104. Aflați domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{6-x}}$;
2) $f(x)=\dfrac{7x+14}{x^2-7x}$;
3) $f(x)=\sqrt[6]{x+6}+\sqrt[8]{4-x}$;
4) $f(x)=\sqrt{x-7}+\dfrac{x+2}{x-8}$;
5) $f(x)=\sqrt{x-5}+\sqrt{5-x}$;
6) $f(x)=\sqrt{x^2+4x-21}-\dfrac{6}{x^2-49}$.

24.105. În fig. 24.1 este reprezentat punctul, prin care trece graficul funcției $y=f(x)$. Dintre funcțiile date arătați această funcție.

1) $f(x)=x^{-4}$; 2) $f(x)=\dfrac{4}{x}$; 3) $f(x)=\sqrt{17+x}$; 4) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$.

24.106. Construiți graficul funcției date, folosindu-vă de el, indicați intervalele de semn constant ale funcției, intervalele ei de creştere şi intervalele de descreştere ale ei.

1) $y=2-x^2$; 2) $y=(x+4)^2$; 3) $y=8-2x-x^2$; 4) $y=x^2-2x+3$.

24.107. Aflați domeniul de definiție şi construiți graficul funcției:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-8x+16}{4-x}$;
2) $f(x)=\dfrac{4x-16}{x^2-4x}$.

24.108. Se ştie, că $f(-4)=-2$. Aflați $f(4)$, dacă funcția f este: 1) pară; 2) impară.

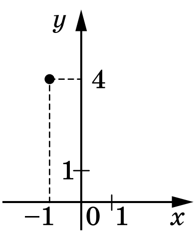


Fig. 24.1

24.109. Este pară sau impară funcția:

1) $f(x)=6x^3-7x^5$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-1}$;
3) $f(x)=\sqrt{6-x^2}$;
4) $f(x)=x^2+x-3$;
5) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-2x}$;
6) $f(x)=(x+5)(x-1)-4x$?

24.110. Reprezentați proporționalitatea directă cu o formulă, dacă se știe că graficul ei trece prin punctul $M(3; -7)$.

24.111. Aflați valoarea lui b, dacă se știe, că graficul funcției $y = -\frac{1}{6}x + b$ trece prin punctul $M(12; 5)$.

24.112. Aflați valoarea lui k, dacă se știe, că graficul funcției $y = kx - 10$ trece prin punctul $M(-4; 2)$.

24.113. Toate punctele graficului al funcției $y = kx + b$ au aceeași ordonată, care este egală cu -5. Aflați valorile lui k și b.

24.114. Definiți printr-o formulă funcția liniară al cărei grafic este reprezentat în figura 24.2.

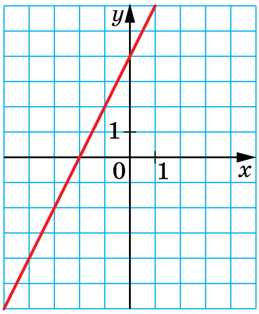


Fig. 24.2

24.115. Aflați valoarea lui k pentru care graficul funcției $y = \frac{k}{x}$ trece prin punctele:

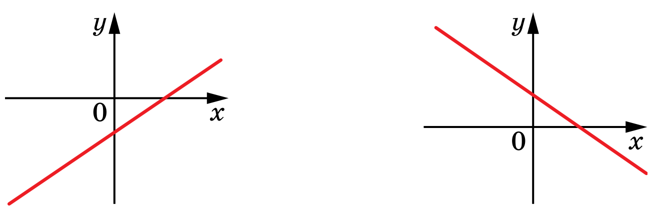
1) $A(-5; 8)$; 2) $B\left(\frac{1}{3}; -6\right)$.

24.116. Pentru care valori ale lui p și q graficul funcției $y = x^2 + px + q$ trece prin punctele $A(-1; 4)$ și $B(-2; 3)$?

24.117. Aflați cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției $y = x^6$ pentru x din intervalul: 1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-2; 2]$.

24.118. Aflați cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției $y = x^{-3}$ pentru x din intervalul: 1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $[-2; -1]$.

24.119. În figura 24.3 este reprezentat graficul funcției liniare $y = kx + b$. Arătați afirmația adevărată:
1) $k > 0$, $b > 0$; 2) $k > 0$, $b < 0$; 3) $k < 0$, $b > 0$; 4) $k < 0$, $b < 0$.



a *b*

Fig. 24.3

Progresii

24.120. Aflați rația progresiei aritmetice (x_n), dacă:
1) $x_1 = 17$, $x_9 = -7$; 2) $x_5 = -3$, $x_{14} = 42$.

24.121. Aflați primul termen al progresiei aritmetice (y_n), dacă:
1) $y_{10} = -19$, $d = -2$; 2) $y_5 = 13$, $y_{16} = 46$.

24.122. Aflați numărul termenului al progresiei aritmetice (z_n), care este egal cu 3,2, dacă $z_1 = 9{,}2$ şi $d = -0{,}6$.

24.123. Este oare numărul 24 termen al progresiei aritmetice (b_n), dacă $b_1 = 8$ şi $d = 3$? În cazul răspunsului afirmativ indicați numărul acestui termen.

24.124. Se dă progresia aritmetică 4,9; 4,5; 4,1; ... . Începând cu care număr termenii ei vor fi negativi?

24.125. Pentru care valoare a lui m valorile expresiilor $3m - 1$, $m^2 + 1$ şi $m + 3$ vor fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice? Aflați termenii acestei progresii.

24.126. Progresia aritmetică (a_n) este definită cu formula termenului n, $a_n = 0{,}2n + 5$. Aflați suma primilor douăzeci şi şase de termeni.

24.127. Aflați suma primilor zece termeni ai progresiei aritmetice (a_n), dacă:
1) $a_1 = 6$, $a_{14} = 45$; 2) $a_6 = 34$, $a_{14} = -54$.

24.128. Aflați suma a tuturor numerelor naturale, multiple lui 11, care nu depăşesc numărul 341.

24.129. Aflați suma a tuturor numerelor naturale, multiple lui 9, care nu depăşesc numărul 156.

24.130. Aflați suma tuturor numerelor cu două cifre, care-s multiple lui 8.

24.131. Aflați rația progresiei geometrice (b_n), dacă:
1) $b_1 = 108$, $b_4 = 32$; 2) $b_2 = 6$, $b_4 = 30$.

24.132. Aflați primul termen al progresiei geometrice (c_n), dacă $c_4 = 40$, $c_7 = -320$.

24.133. Numărul 192 este termenul progresiei $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, 3, ... Aflați numărul acestui termen.

24.134. Care trei numere trebuie introduse între numerele 48 şi 243, ca ele împreună cu numerele date, să formeze o progresie geometrică?

24.135. Aflați suma primilor patru termeni ai progresiei geometrice (b_n), dacă:
1) $b_4 = 280$, $q = 5$; 2) $b_1 = \sqrt{2}$, $b_5 = 4\sqrt{2}$, $q < 0$.

Funcții trigonometrice

24.136. Pentru care valori ale lui a este posibilă egalitatea $\cos x = a - 2$?

24.137. Aflați valorile cea mai mare şi cea mai mică ale expresiei:

1) $1 - 4\cos\alpha$; 2) $6 + \sin^2\alpha$.

24.138. Comparați:

1) tg 140° şi tg(–140°);
2) cos 50° şi sin 350°;
3) $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$ şi $\cos\frac{5\pi}{7}$;
4) cos 5 şi sin 4.

24.139. Oare este pară sau impară funcția dată cu formula:

1) $f(x) = 2x + \sin x$;
2) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 - 1}$;
3) $f(x) = \operatorname{tg} x + x^2$;
4) $f(x) = \frac{(2 - x)\cos x}{2 - x}$?

24.140. Calculați valorile funcțiilor trigonometrice cu argumentul α, dacă:

1) $\cos\alpha = -\frac{2}{7}$ şi $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
2) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2}$ şi $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

24.141. Simplificați expresia:

1) $\frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi} + \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}$;
2) $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

24.142. Demonstrați identitatea:

1) $\frac{\sin(45° + \alpha) - \cos(45° + \alpha)}{\sin(45° + \alpha) + \cos(45° + \alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$;

2) $\frac{\sin(\alpha - \beta) + 2\sin\beta\cos\alpha}{\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\sin\beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

24.143. Simplificați expresia:

1) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi - \alpha) + \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)\sin(2\pi - \alpha)$;

2) $\frac{\sin(180° - \alpha)\cos(180° + \alpha)\operatorname{tg}(180° - \alpha)}{\sin(270° - \alpha)\operatorname{tg}(180° + \alpha)\cos(90° + \alpha)}$.

24.144. Aduceți la o formă mai simplă expresia:

1) $\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}$;
2) $\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha}$.

24.145. Demonstrați identitatea:

1) $\operatorname{tg} 2\alpha(1 + \cos 4\alpha) - \sin 4\alpha = 0$;
2) $\frac{1 - \cos\alpha + \sin\alpha}{1 + \cos\alpha + \sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Ecuații trigonometrice

24.146. Rezolvați ecuația:

1) $\sin 5x = -\frac{1}{2}$;

2) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$;

3) $\cos\frac{x}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $\mathrm{tg}\, 7x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

6) $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{8}\right) = 1$.

24.147. Aflați rădăcinile cea mai mare, cea mai mică ale ecuației

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

24.148. Câte rădăcini ale ecuației $\mathrm{tg}\, 3x = \sqrt{3}$ aparține intervalului $[0; \pi]$?

24.149. Rezolvați ecuația:

1) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$;

2) $\sin^2 3x + 3\cos 3x = 3$;

3) $\cos 2x - 3\sin x = 2$;

4) $\cos 8x - 5\cos 4x - 2 = 0$;

5) $\frac{3}{\cos^2 x} + 5\,\mathrm{tg}\, x - 11 = 0$;

6) $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

15. Funcția exponențială. Ecuații şi inecuații exponențiale

24.150. În o figură din 24.4, *a–d* este reprezentat graficul funcției $y = 0{,}2^{-x}$. Arătați această figură.

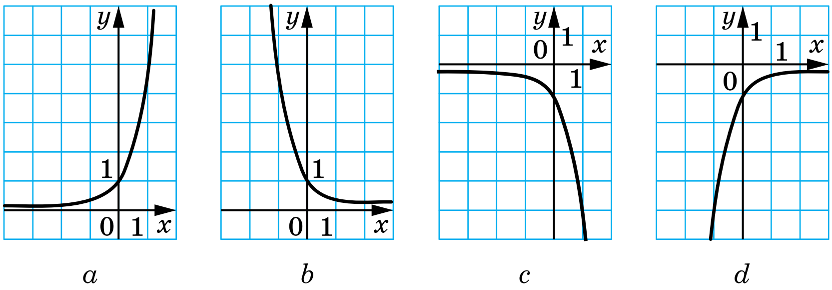


Fig. 24.4

24.151. Are este domeniul de valori al funcției $f(x) = 9^x + 2$?

24.152. Se ştie că $0{,}7^m > 0{,}7^n$. Comparați numerele m şi n.

24.153. Care din funcțiile date nu este crescătoare:

1) $y = e^x$;

2) $y = \pi^x$;

3) $y = \left(\frac{e}{2}\right)^x$;

4) $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$?

24.154. Rezolvaţi ecuaţia:

1) $8^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{4}$;

2) $0,75^{x+1} = \frac{16}{9}$;

3) $\sqrt{125^{x-1}} = \sqrt[3]{25^{2-x}}$;

4) $\left(\frac{6}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^x = \frac{125}{216}$;

5) $2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^x = 90^{3x-7}$;

6) $8 \cdot 7^{2x^2-x} - 7 \cdot 8^{2x^2-x} = 0$.

24.155. Aflaţi mulţimea soluţiilor a inecuaţiei:

1) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2-x} > 9^{2x-1}$;

2) $1 < 10^{x+1} \leqslant 100\,000$;

3) $1,3^{x^2-4x+2} \leqslant 1,69$;

4) $0,4^{x^2+2x+2} \leqslant 0,16$.

24.156. Rezolvaţi ecuaţia:

1) $3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 7$;

2) $2^{x+1} + 2^{x-3} = 68$;

3) $7^x - \left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 6$;

4) $4^{\frac{x}{2}} + 2^{x-5} - 2^{x-7} = 262$.

24.157. Rezolvaţi inecuaţia:

1) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} > 13$;

2) $5^{x+1} + 5^{x-2} < 630$;

3) $0,5^{x+3} - 0,5^{x+2} + 0,5^{x+1} < 0,375$;

4) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} > 17$.

24.158. Rezolvaţi ecuaţia:

1) $4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$;

2) $9^x + 3^x - 6 = 0$;

3) $49^x + 2 \cdot 7^x - 35 = 0$;

4) $9 - 2^x = 2^{3-x}$;

5) $(0,2)^{2x-2} - 126 \cdot (0,2)^x + 5 = 0$;

6) $\frac{5}{3^{x-1}} - \frac{2}{3^x - 1} = 4$.

24.159. Rezolvaţi inecuaţia:

1) $25^x - 2 \cdot 5^x - 15 > 0$;

2) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 \leqslant 0$;

3) $3^{x+2} - 28 \cdot 3^{0,5x} + 3 \geqslant 0$;

4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 27 \leqslant 0$.

Funcţia logaritmică. Ecuaţii şi inecuaţii logaritmice

24.160. Calculaţi:

1) $2^{1-\log_2 7}$;

2) $5^{3\log_5 2}$;

3) $4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + \log_2 5}$;

4) $\log_4 \log_{14} 196 + \log_5 \sqrt{5}$;

5) $\lg 20 + \lg 50$;

6) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{27}$.

24.161. Domeniul de definiţie al căreia din funcţiile date este mulţimea numerelor reale:

1) $y = \lg(x+1)$; 2) $y = \lg(x^2 - 1)$; 3) $y = \lg(x^2 + 1)$; 4) $y = \lg x^2$?

24.162. Aflați domeniul de definiție al funcției:

1) $y = \lg \lg x$; 2) $y = \log_{x-2}(x^2 + x + 3)$.

24.163. În figura 24.5 este reprezentat graficul funcției descrescătoare $y = f(x)$, definită pe mulțimea numerelor reale. Câte soluții are ecuația $f(x) = \log_4 x$?

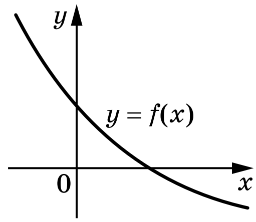


Fig. 24.5

24.164. Construiți graficul funcției:

1) $y = 5^{\log_5 (x-1)}$; 3) $y = e^{\ln(4-x^2)}$.
2) $y = 10^{\lg \sin x}$;

24.165. Comparați numerele m și n, dacă:

1) $\log_{\frac{1}{2}} m < \log_{\frac{1}{2}} n$; 2) $\log_{1,5} m < \log_{1,5} n$.

24.166. Comparați cu unitatea baza logaritmului, dacă:

1) $\log_a 7 < \log_a 6$; 2) $\log_a 5 > 0$.

24.167. Comparați cu zero numărul:

1) $\log_2 \frac{1}{5}$; 2) $\log_3 4$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}6$; 4) $\log_{\frac{1}{6}} 10$.

24.168. Rezolvați ecuația:

1) $\log_{0,2}(x^2 + 4x) = -1$; 4) $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$;
2) $\lg x = 3 - \lg 20$; 5) $\lg(5x + 2) = \frac{1}{2}\lg 36 + \lg 2$;
3) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5{,}5$; 6) $\log_9(4x - 6) = \log_9(2x - 4)$.

24.169. Rezolvați ecuația:

1) $\lg(2x - 1) + \lg(x + 5) = \lg 13$;
2) $\log_3(2x - 7) + \log_3(x - 1) = 2 + \log_3 2$;
3) $\log_{0,5}(4 - x) + \log_{0,5}(x - 1) = -1$;
4) $\log_7(-x) + \log_7(1 - x) = \log_7(x + 3)$.

24.170. Rezolvați ecuația:

1) $3\log_3^2 x + 7\log_3 x - 6 = 0$; 3) $\frac{2}{\lg x + 2} - \frac{1}{\lg x - 4} = 1$;
2) $\ln^2 x - 4\ln x - 21 = 0$; 4) $\log_9 x + \log_x 9 = 2{,}5$.

24.171. Aflați mulțimea soluțiilor a inecuației:

1) $\log_7(2x - 1) < 2$; 5) $\log_6(x + 1) < \log_6(2x + 5)$;
2) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) > 1$; 6) $\log_2(2x - 3) > \log_2(3x - 5)$;
3) $\log_4(x + 1) < -\frac{1}{2}$; 7) $\ln(x^2 - 3) > \ln(3x - 7)$;
4) $\log_{0,2}(x^2 + 4x) \geqslant -1$; 8) $\log_{0,7}(3x - 1) < \log_{0,7}(3 - x)$.

24.172. Rezolvați inecuația:

1) $\log_2 x + \log_2 (x+1) \leqslant 1$;   2) $\log_{\frac{1}{6}} x + \log_{\frac{1}{6}} (x-1) \geqslant \log_{\frac{1}{6}} (x+3)$.

24.173. Rezolvați inecuația:

1) $\lg^2 x - \lg x \geqslant 0$;

2) $\ln^2 x + \ln x \leqslant 0$;

3) $3\log_8^2 x + 2\log_8 x - 5 \geqslant 0$.

Derivata şi aplicarea ei

24.174. Aflați derivata funcției:

1) $y = x^6 + 2x^4 + \frac{4}{x^2} - 1$;

2) $y = \frac{1}{2x^3} + \frac{4}{x}$;

3) $y = (x^2 + x + 1)(x^2 - 4x + 1)$;

4) $y = (3 - 2x)\sqrt{x}$;

5) $y = 2^x \cos x$;

6) $y = \frac{3x - 1}{x^2 + 1}$.

24.175. Calculați valoarea derivatei a funcției date în punctul x_0:

1) $f(x) = \frac{3x^2}{1 - x}$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = \frac{1 + \sin x}{4 - \sin x}$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = \cos x - \sin\frac{\pi}{3}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

4) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$.

24.176. Punctul material se mişcă pe dreapta de coordonate după legitatea $s(t) = 3t^2 - 12t + 18$ (timpul t se măsoară în secunde, deplasarea s – în metri). Peste câte secunde de la începutul mişcării punctul se va opri?

24.177. Alcătuiți ecuația tangentei, duse la graficul funcției date în punctul cu abscisa x_0:

1) $f(x) = \frac{2}{x}$, $x_0 = -2$;   2) $f(x) = \sin x \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

24.178. La graficul funcției $f(x) = 5 + 7x - 4x^2$ este dusă tangenta, al cărei coeficient unghiular este egal cu –9. Găsiți coordonatele punctului de tangentă.

24.179. Aflați coordonatele punctului al parabolei $y = x^2 - 3x + 2$, în care tangenta, dusă la parabolă este paralelă cu dreapta $y = 6 - x$.

24.180. Alcătuiți ecuația tangentei, duse la graficul funcției $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x$, şi care este paralelă cu dreapta $y = 5x - 8$.

24.181. Funcția $y = f(x)$ este definită în intervalul [–8; 3] şi are derivata în fiecare punct al domeniului de definiție. În figura 24.6 este reprezentat graficul derivatei ei $y = f'(x)$. Arătați:
1) intervalele de creştere şi descreştere ale funcției $y = f(x)$;
2) punctele de minim şi punctele de maxim ale funcției $y = f(x)$.

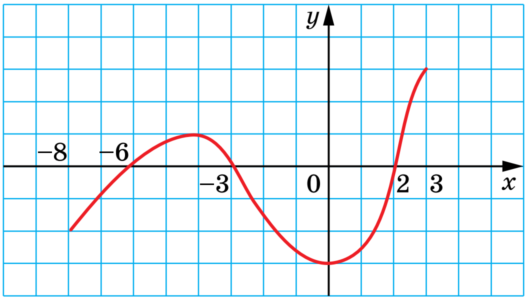


Fig. 24.6

24.182. Aflați intervalele de creştere şi de descreştere şi punctele de extremum ale funcției:

1) $f(x) = -8x^3 - x^2 + 2x$;
2) $f(x) = x^3 + 2x - 10$;
3) $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{4}{x}$;
4) $f(x) = \dfrac{5 - 2x}{x^2 - 4}$;
5) $f(x) = \dfrac{x}{e} - e^x$;
6) $f(x) = x^2 - 8 \ln x$.

24.183. Aflați valorile cea mai mare şi cea mai mică ale funcției:
1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$ pe intervalul [–2; 0];
2) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ pe intervalul [0; 4];
3) $f(x) = \cos x - \sin x$ pe intervalul [0; 2π];
4) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ pe intervalul $\left[-2; \dfrac{1}{2}\right]$.

24.184. Cercetați funcția şi construiți graficul ei:
1) $f(x) = x^3 - 9x$;
2) $f(x) = 6x^2 - 2x^3$.

Integrala şi aplicarea ei

24.185. Aflați forma generală a primitivelor ale funcției:
1) $f(x) = x - \dfrac{2}{x^5}$ pe intervalul $(-\infty; 0)$;
2) $f(x) = \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pe intervalul $(0; +\infty)$.

24.186. Pentru funcția f aflați pe intervalul arătat I primitiva F, al cărei grafic trece prin punctul dat M:

1) $f(x) = 2x + 4$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(2; 1)$;

2) $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(1; 8)$.

24.187. Calculați integrala:

1) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$;

2) $\int_{-2}^{1} (x^2 - 2x + 4)dx$;

3) $\int_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right)dx$;

4) $\int_0^{\pi} (6\cos x - 3\sin x)dx$.

24.188. Calculați aria figurii, mărginită de liniile:

1) $y = 2 - x^2$, $y = 0$;

2) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

3) $y = -x^2 + 4$, $x + y = 4$;

4) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5 - x$.

Elemente ale teoriei probabilităților şi ale statisticii matematice

24.189. În cantină sunt bucate de : felul întâi – 3, felul 2 – 6 şi felul trei – 4. În câte moduri se poate compune din ele prânzul?

24.190. În câte moduri se pot repartiza pe o poliță 8 cărți diferite?

24.191. În câte feluri se pot alege din 32 de elevi trei delegați la conferința şcolară?

24.192. Într-o orchestră sunt 16 violonişti şi 12 altişti. În câte moduri se poate alcătui un trio din doi violonişti şi un altist?

24.193. Câte numere cu cinci cifre există; care sunt scrise cu ajutorul cifrelor 2, 3, 4, 5, 6 şi ale căror toate cifre sunt diferite, şi care se împart fără rest la 5?

24.194. Într-o cutie sunt 12 bile verzi şi 18 bile albastre. Care este probabilitatea evenimentului, că bila aleasă la întâmplare va fi: 1) verde; 2) albastră; 3) roşie; 4) verde sau albastră?

24.195. Într-o loterie sunt puse în joc 6 automobile, 18 motociclete şi 42 de biciclete. De tot au fost emise 3000 bilete de loterie. Care este probabilitatea că cumpărând un bilet: 1) se poate câştiga o motocicletă; 2) se poate câştiga un oarecare premiu; 3) poate să nu se câştige nici un premiu?

24.196. Din numerele naturale de la 1 până la 16 inclusiv un elev a numit la întâmplare unul din ele. Care este probabilitatea a ceea, că acest număr va fi împărțitorul al numărului 16?

24.197. Care este probabilitatea faptului că numărul de două cifre, luat la întâmplare, se împarte fără rest cu 12?

24.198. Într-o cutie sunt 3 albe şi 4 albastre bile. Care este cea mai mică cantitate de bile, ce trebuie scoase la întâmplare, pentru ca probabilitatea evenimentului, că printre ele va fi măcar o bilă albastră, să fie egală cu 1?

24.199. Pentru fişe numerotate cu numerele 1, 2, 3 şi 4. Care este probabilitatea evenimentului, că produsul numerelor a două fişe, luate la întâmplare, va fi multiplu lui 3?

24.200. Într-o cutie sunt bile roşii şi galbene. Câte bile roşii sunt în cutie, dacă probabilitatea de a scoate din ea la întâmplare o bilă roşie este egală cu $\frac{3}{8}$, iar bile galbene în cutie sunt 20?

24.201. Pe 30 fişe sunt scrise numerele naturale de la 1 până la 30. Care este probabilitatea a aceea, că numărul, scris pe fişa, luată la întâmplare, se împarte fără rest cu 3 şi nu se împarte fără rest cu 2?

24.202. Din 28 piese de domino se ia una la întâmplare şi se calculează suma balurilor de pe ea (în figura 24.7 este reprezentată piesa, suma balurilor pe care este egală cu 7). Care este probabilitatea alegerii a piesei, suma balurilor de pe care este egală cu:
1) 4; 2) 7; 3) 10; 4) 12; 5) 15?

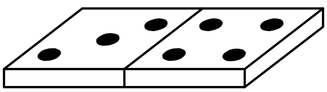


Fig. 24.7

24.203. În graficul reprezentat pe figura 24.8, este reprezentat volumul vânzării tocurilor într-un magazin de papetărie în decursul a 6 luni. Câte tocuri vindeau în mediu în decursul unei luni?

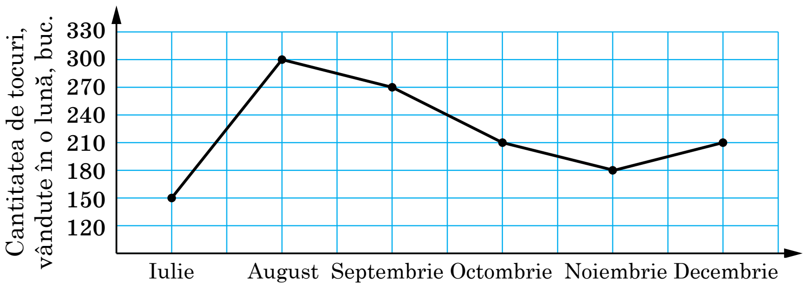


Fig. 24.8

24.204. Valoarea medie a probei 7, 10, y, 14 este egală cu 11. Cu ce este egal y?

24.205. Aflaţi valoarea medie, moda, mediana şi amplitudinea a setului de date:
1) 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 14, 15, 22;
2) 5, 12, 12, 14, 14, 8, 12.

24.206. Cu elevii şi elevele clasei a 11-a a fost petrecut sondajul: cât timp le trebuie zilnic pentru îndeplinirea temelor de acasă. Rezultatele sondajului au fost expuse în formă de diagramă în coloane, ce este reprezentată, în figura 24.9. Aflați moda şi valoarea medie a selecției date.

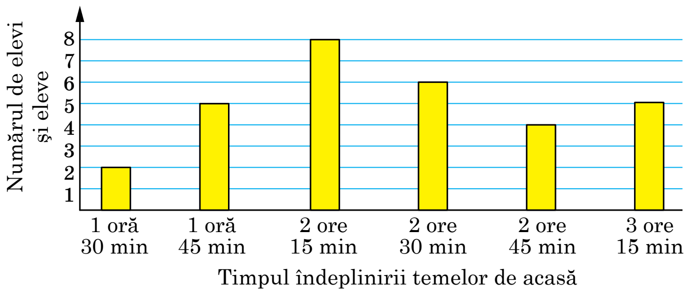


Fig. 24.9

24.207. Conform rezultatelor a dictării la limba maternă în clasa a 11-a a fost alcătuită tabela, în care au reprezentat repartizarea cantității de greşeli, pe care le-a comis o persoană:

Numărul de greşeli	0	1	2	3	4
Numărul de elevi şi eleve	5	4	6	8	2

Aflați moda şi valoarea medie a selecției, construiți diagrama în coloane corespunzătoare.

25. Probleme pentru repetarea cursului de geometrie

Triunghiuri

25.1. Aflați perimetrul triunghiului dreptunghic, ipotenuza căruia este cu 7 cm mai mare ca una din catete, iar a doua catetă este egală cu 21 cm.

25.2. Una din catetele triunghiului dreptunghic este egală cu 15 cm, iar mediana, dusă la ipotenuză, – 8,5 cm. Calculați aria triunghiului dat.

25.3. Înălțimea triunghiului isoscel împarte latura laterală a lui în segmentele cu lungimea de 1 cm şi 12 cm, considerând de la vârful unghiului de la bază. Aflați baza triunghiului dat.

25.4. Înălțimea AD a triunghiului ABC împarte latura BC în segmentele BD şi CD astfel, că $BD = 15$ cm, $CD = 5$ cm. Aflați latura AC, dacă $\angle B = 30°$.

25.5. Dintr-un punct la o dreaptă sunt duse două oblice, proiecțiile cărora pe dreaptă sunt egale cu 5 cm şi 9 cm. Aflați distanța de la punctul dat până la această dreaptă, dacă una din oblice este cu 2 cm mai mare decât alta.

25.6. Aflați aria triunghiului ABC, reprezentat în figura 25.1.

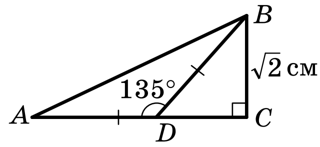


Fig. 25.1

25.7. Înălțimea triunghiului isoscel obtuzunghic, dusă la baza lui, este egală cu 8 cm, iar raza circumferinței circumscrise lui – 13 cm. Aflați latura laterală a triunghiului.

25.8. Înălțimea triunghiului dreptunghic cu unghiul ascuțit α, dusă la ipotenuză, este egală cu h. Aflați ipotenuza acestui triunghi.

25.9. Punctul de tangentă al circumferinței, înscrise în triunghiul dreptunghic, împarte ipotenuza lui în segmentele 8 cm şi 12 cm. Aflați perimetrul triunghiului.

25.10. Continuarea laturilor laterale AB şi CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul O. Aflați latura AB, dacă $AO = 18$ cm, $BC : AD = 5 : 9$.

25.11. Prelungirea laturilor laterale AB şi CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul F, $AB : BF = 3 : 7$, AD este baza mare a trapezului. Diferența bazelor trapezului este egală cu 6 cm. Aflați baza AD.

25.12. Unghiul de la vârf al primului triunghi isoscel este egal cu unghiul de la vârf al celui de-al doilea triunghi isoscel. Baza şi înălțimea dusă la ea a primului triunghi sunt egale corespunzător cu 30 cm şi 8 cm, iar latura laterală a celui de-al doilea triunghi – 51 cm. Cu ce este egal perimetrul triunghiului al doilea?

25.13. Pe latura BC a triunghiului ABC s-a notat punctul K astfel, că $\angle CAK = \angle ABC$, $BK = 12$ cm, $KC = 4$ cm. Aflați latura AC.

25.14. Diagonalele trapezului $ABCD$ ($AD \parallel BC$) se intersectează în punctul O, $BO : OD = 3 : 4$, $BC = 18$ cm. Aflați baza AD a trapezului.

25.15. Diagonalele trapezului $ABCD$ ($BC \parallel AD$) se intersectează în punctul O, $AO : OC = 7 : 3$, $BD = 40$ cm. Aflați segmentul OD.

25.16. În triunghiul ABC este înscris rombul $CDEF$ astfel, cum este indicat în figura 25.2. Aflați latura BC a triunghiului, dacă $AC = 15$ cm, iar latura rombului este egală cu 10 cm.

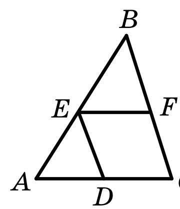


Fig. 25.2

25.17. Punctul M este mijlocul laturii AB a triunghiului ABC, Punctul K – mijlocul laturii AC. Aria triunghiului AMK este egală cu 12 cm^2. Cu ce este egală aria patrulaterului $BMKC$?

25.18. Punctul D este mijlocul laturii AB a triunghiului ABC, punctul E – mijlocul laturii BC. Aria patrulaterului $ADEC$ este egală cu 27 cm^2. Cu ce este egală aria triunghiului ABC?

25.19. Segmentul CM este mediana triunghiului ABC, reprezentat în figura 25.3, segmentul DE linia medie a triunghiului MBC. Cu ce este egală aria patrulaterului $MDEC$, dacă aria triunghiului ABC este egală cu 48 cm^2?

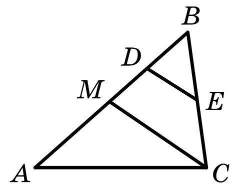


Fig. 25.3

25.20. Dreapta, paralelă laturii AC a triunghiului ABC, intersectează latura AB în punctul M, iar latura BC – în punctul K. Aflați aria triunghiului ABC, dacă $BM = 3$ cm, $AM = 4$ cm, iar aria patrulaterului $AMKC$ este egală cu 80 cm^2.

25.21. Mijlocul laturii laterale a triunghiului isoscel este depărtată de la baza lui cu 9 cm. Aflați distanța de la punctul de intersecție al medianelor triunghiului până la baza lui.

25.22. În triunghiul isoscel ABC cu baza AC punctul de intersecția al medianelor este depărtat de la vârful B cu 6 cm. Aflați distanța de la mijlocul laturii laterale a triunghiului până la baza lui.

25.23. Raza circumferinței, înscrise în triunghiul isoscel ABC ($AB = BC$), este egală cu 12 cm, iar distanța de la centrul acestei circumferințe până la vârful B – 20 cm. Aflați perimetrul triunghiului dat.

25.24. Latura laterală a triunghiului isoscel se împarte de punctul de tangență al circumferinței înscrise în raportul 8 : 9, socotind de la vârful unghiului de la baza triunghiului. Aflați aria triunghiului, dacă raza circumferinței înscrise este egală cu 16 cm.

25.25. Două laturi ale triunghiului, unghiul dintre care este egal cu 60°, se raportă ca 5 : 8, iar a treia latură este egală cu 21 cm. Aflați laturile necunoscute ale triunghiului.

25.26. Suma a două laturi ale triunghiului este egală cu 16 cm, iar unghiul dintre ele – 120°. Aflați cea mai mică dintre laturi, dacă latura a treia a triunghiului este egală cu 14 cm.

25.27. Aflați unghiul A al triunghiului ABC, dacă $BC = 7$ cm, $AC = 3$ cm, $AB = 8$ cm.

25.28. Aflați aria cercului, circumscris triunghiului cu laturile de 7 cm, 8 cm şi 9 cm.

25.29. Laturile triunghiului sunt egale cu 6 cm, 25 cm şi 29 cm. Aflaţi raza circumferinţei înscrise în triunghiul dat.

Чотирикутники. Правильні многокутники

25.30. Înălţimea paralelogramului, dusă din vârful unghiului obtuz, este egală cu 6 cm şi împarte latura paralelogramului în jumătate. Aflaţi diagonala mai mică a paralelogramului, dacă unghiul ascuţit al lui este egal cu 30°.

25.31. Bisectoarea unghiului obtuz a paralelogramului împarte latura lui în raportul 3 : 7, socotind de la vârful unghiului ascuţit, care este egal cu 45°. Calculaţi aria paralelogramului, dacă perimetrul lui este egal cu 52 cm.

25.32. Bisectoarea unghiului D a dreptunghiului $ABCD$ intersectează latura AB în punctul M, $BM = 5$ cm, $AD = 3$ cm. Aflaţi perimetrul dreptunghiului.

25.33. Calculaţi aria rombului, una din diagonalele căruia este egală cu 16 cm, iar latura – 10 cm.

25.34. Diagonala mare a rombului este egală cu c, iar unghiul obtuz – α Aflaţi perimetrul rombului.

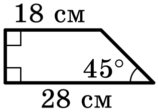


Fig. 25.4

25.35. Aflaţi înălţimea trapezului isoscel, bazele căruia sunt egale cu 23 cm, şi 17 cm, iar diagonala cu 25 cm.

25.36. Aflaţi aria trapezului, reprezentat în figura 25.4.

25.37. Latura laterală a trapezului isoscel, circumscris circumferinţei, este egală cu a, iar unul din unghiuri – 60°. Aflaţi aria trapezului.

25.38. Latura laterală a trapezului dreptunghic este egală cu 16 cm, iar unghiul ascuţit – 30°. Aflaţi aria acestui trapez, dacă în el se poate înscrie o circumferinţă.

25.39. Bazele trapezului isoscel sunt egale cu 1 cm şi 17 cm, iar diagonala împarte unghiul obtuz al lui în jumătate. Aflaţi aria trapezului.

25.40. Bazele trapezului isoscel sunt egale cu 15 cm şi 33 cm, iar diagonala împarte unghiul ascuţit al lui în jumătate. Aflaţi aria trapezului.

25.41. Circumferinţa, înscrisă în trapezul isoscel, împarte cu punctul de tangenţă latura laterală în două segmente cu lungimile de 8 cm şi 18 cm. Aflaţi aria trapezului.

25.42. Circumferinţa, înscrisă în trapezul dreptunghic, împarte cu punctul de tangenţă latura laterală mai mare în două segmente cu lungimile de 8 cm şi 50 cm. Aflaţi perimetrul trapezului.

25.43. Cu ce este egal unghiul BAD al patrulaterului $ABCD$, înscris în circumferință, dacă $\angle ACD = 37°$, $\angle ADB = 43°$?

25.44. Diagonala BD, a patrulaterului $ABCD$ este diametrul circumferinței circumscrise lui, M este punctul de intersecție al diagonalelor lui, $\angle ABD = 32°$, $\angle CBD = 64°$. Aflați unghiul BMC.

25.45. Cum se raportă latura triunghiului regulat, înscris în circumferință, la latura triunghiului regulat circumscris acestei circumferințe?

25.46. Cum se raportă latura hexagonului regulat, înscris în circumferință, la latura hexagonului regulat, circumscris acestei circumferințe?

25.47. Coarda comună a două circumferințe, ce se intersectează, este latura unui triunghi regulat, înscris într-o circumferință, şi latură a unui pătrat înscris în altă circumferință. Lungimea acestei coarde este egală cu a. Aflați distanța dintre centrele circumferințelor, dacă ele se află de părți diferite ale coardei.

Circumferința şi cercul

25.48. Aflați măsura în grade a arcului de circumferință, lungimea căruia este egală cu π cm, dacă raza circumferinței este egală cu 12 cm.

25.49. Lungimea arcului de circumferință este egală cu 2π cm, iar măsura în grade a lui – 60°. Aflați raza circumferinței.

25.50. Segmentul AB este diametrul circumferinței, $AB = 24$ cm. Punctul A este depărtat de la tangenta, la această circumferință cu 4 cm. Aflați distanța de la punctul B până la această tangentă.

25.51. Perpendiculara, coborâtă dintr-un punct al circumferinței pe diametrul ei, împarte diametrul în două segmente, diferența cărora este egală cu 21 cm. Aflați lungimea circumferinței, dacă lungimea perpendicularei este egală cu 10 cm.

25.52. Două circumferințe cu centrele O_1 şi O_2 au punctul de tangență exterior C. Dreapta, care trece prin punctul C, intersectează circumferința cu centrul O_1 în punctul A, iar a doua circumferință – în punctul B. Coarda AC este egală cu 12 cm, iar coarda BC – 18 cm. Aflați razele circumferințelor, dacă $O_1O_2 = 20$ cm.

25.53. În unghiul, mărimea căruia este egală cu 60°, sunt înscrise două circumferințe, care sunt tangente exterior. Aflați raza circumferinței mai mari, dacă raza celei mici este egală cu 6 cm.

Coordonatele carteziene

25.54. Punctul C este mijlocul segmentului AB, $A(-4; 3)$, $C(2; 1)$. Aflați coordonata punctului B.

25.55. Vârfurile triunghiului sunt punctele $A(-3; 1)$, $B(2; -2)$ şi $C(-4; 6)$. Aflați mediana AM a triunghiului ABC.

25.56. Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, $B(4; 1)$, $C(-1; 1)$, $D(-2; -2)$. Aflați coordonatele vârfului A.

25.57. Aflați coordonatele punctului, care aparține axei ordonatelor şi este egal depărtată de punctele $C(3; 2)$ şi $D(1; -6)$.

25.58. Circumferința este dată cu ecuația $(x+4)^2+(y-1)^2=12$. Cum este situat punctul $A(-2; 3)$ față de această circumferință?

25.59. Alcătuiți ecuația circumferinței, diametrul căreia este segmentul MK, dacă $M(-3; 4)$, $K(5; 10)$.

25.60. Alcătuiți ecuația dreptei, care trece prin punctele $A(-1; 4)$ şi $B(-3; -2)$.

25.61. Alcătuiți ecuația dreptei, care trece prin punctul $A\left(\sqrt{3}; 5\right)$ şi face cu direcția pozitivă a axei absciselor unghiul de 60°.

25.62. Alcătuiți ecuația dreptei, care trece prin punctul $P(2; -5)$ şi este paralelă cu dreapta $y=-0{,}5x+9$.

25.63. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ cu vârfurile în punctele $A(-1; 5)$, $B(4; 6)$, $C(3; 1)$ şi $D(-2; 0)$ este romb.

25.64. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ cu vârfurile în punctele $A(2; -2)$, $B(1; 2)$, $C(-3; 1)$ şi $D(-2; -3)$ este dreptunghi.

25.65. Aflați distanța de la punctul $M(4; -5; 6)$ până la planul xz.

25.66. Aflați distanța de la punctul $A(3; -2; 1)$ până la originea de coordonate.

25.67. Aflați distanța dintre punctele $A(2; -3; -4)$ şi $B(-6; -3; 2)$.

25.68. Punctele $A(-4; 2; -6)$ şi $B(-14; -10; 2)$ sunt simetrice în raport cu punctul C. Aflați coordonatele punctului C.

25.69. Aflați coordonatele punctului, care este simetric cu punctul $M(-1; 2; 3)$ în raport cu planul xy.

Vectori

25.70. Se dau vectorii $\vec{a}(3; -1)$ şi $\vec{b}(1; -2)$. Aflați coordonatele vectorului $\vec{m}$, dacă $\vec{m}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

25.71. Se cunoaşte, că $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. Aflaţi $|\vec{c}|$, dacă $\vec{a}(-1; 1)$, $\vec{b}(-2; 3)$.

25.72. Calculaţi produsul scalar $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$, dacă $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$.

25.73. Se dau punctele $M(4; -2)$, $N(1; 1)$ şi $P(3; 3)$. Aflaţi produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{MP}$.

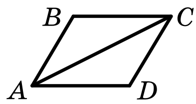


Fig. 25.5

25.74. În figura 25.5 este prezentat rombul $ABCD$, în care AB = 2 cm, $\angle ABC = 120°$. Aflaţi produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

25.75. Latura hexagonului regulat $ABCDEF$ este egală cu 1. Calculaţi produsul scalar:

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$.

25.76. Aflaţi unghiul dintre vectorii $\vec{a}(-1; -1)$ şi $\vec{b}(2; 0)$.

25.77. Pe latura CD a paralelogramului $ABCD$ s-a notat punctul M astfel, că $CM : MD = 2 : 3$. Exprimaţi vectorul $\overrightarrow{AM}$ prin vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, unde $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

25.78. Pe laturile BC şi CD ale paralelogramului $ABCD$ s-au notat corespunzător punctele E şi F astfel, că $BE : EC = 3 : 4$, $CF : FD = 1 : 3$. Exprimaţi vectorul $\overrightarrow{EF}$ prin vectorii $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ şi $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

25.79. Aflaţi modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$, dacă $A(-2; 8; 7)$, $B(-6; 5; 6)$.

25.80. Pentru care valoare a lui m vectorii $\vec{a}(5; m + 1; -3)$ şi $\vec{b}(-10; 4; 6)$ vor fi coliniari?

25.81. Pentru care valoare a lui n vectorii $\vec{a}(3; 2; 6)$ şi $\vec{b}(-8; 3; n)$ vor fi perpendiculari?

25.82. Aflaţi unghiul dintre vectorii $\vec{a}(-1; 1; 0)$ şi $\vec{b}(1; 0; -1)$.

Transformări geometrice

25.83. Câte translaţii paralele există, pentru care imaginea dreptei este: 1) însăşi această dreaptă; 2) dreapta paralelă ei?

25.84. Scrieţi ecuaţia circumferinţei, care este imaginea circumferinţei $x^2 + y^2 = 4$ la translaţia paralelă cu vectorul $\vec{a}(2; -3)$.

25.85. Arătați deplasarea, pentru care imaginea patrulaterului $ABCD$, reprezentat în figura 25.6 este patrulaterul $MNKP$.

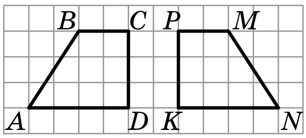


Fig. 25.6

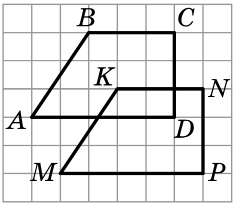


Fig. 25.7

25.86. Indicați mişcarea la care imagine a patrulaterului $ABCD$, reprezentat în figura 25.7, este patrulaterul $MKNP$.

25.87. La translația paralelă cu vectorul $\vec{a}$ imaginea punctului $A(-3; 7)$ este punctul $B(2; 3)$. Ce coordonate are punctul $C(1; -5)$ la translarea paralelă cu vectorul $\vec{a}$?

25.88. La translația paralelă cu vectorul $\vec{a}$ imaginea punctului $A(-5; 6)$ este punctul $B(2; -1)$. Ce coordonate are preimaginea punctului $D(10; -3)$ la translarea paralelă cu vectorul $\vec{a}$?

25.89. Ce coordonate are imaginea punctului $A(-4; 6)$ la simetria în raport cu originea de coordonate?

25.90. Ce coordonate are punctul, simetric cu punctul $A(2; -4)$ în raport cu punctul $M(3; -1)$?

25.91. Ce coordonate are imaginea punctului $A(-2; 5)$ la simetria în raport cu: 1) axa absciselor; 2) axa ordonatelor?

25.92. Câte axe de simetrie are dreptunghiul, care nu este pătrat?

25.93. Punctul O este centrul hexagonului regulat $ABCDEF$, reprezentat în figura 25.8. Indicați imaginea laturii CD la rotația în jurul punctului O după acele ceasornicului cu un unghi de 120°.

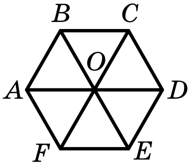


Fig. 25.8

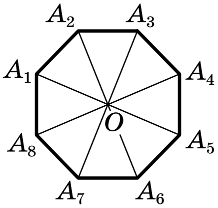


Fig. 25.9

25.94. Punctul O este centrul octogonului regulat, reprezentat în figura 25.9. Indicați imaginea laturii A_3A_4 la rotația în jurul punctului O împotriva acelor de ceasornic cu unghiul de 135°.

25.95. Pătratul $CDEF$, reprezentat în figura 25.10, este imaginea pătratului $ABCD$ la rotația după acele ceasornicului cu unghiul de 90°. Care punct este centrul de rotație?

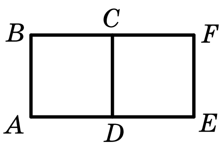


Fig. 25.10

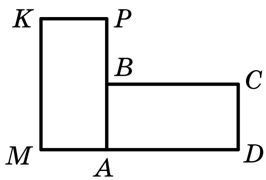


Fig. 25.11

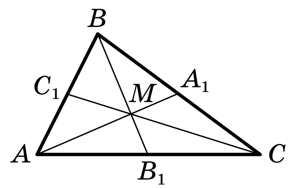


Fig. 25.12

25.96. Dreptunghiul $AMKP$, reprezentat în figura 25.11, este imaginea dreptunghiului $ABCD$ la rotația contra acelor de ceasornic cu unghiul de 90°. Care punct este centrul de rotație?

25.97. Medianele triunghiului ABC, reprezentat în figura 25.12, se intersectează în punctul M. Aflați coeficientul: 1) de omotetie cu centrul M, la care punctul C_1 este imaginea punctului C; 2) al omotetiei cu centrul B, la care punctul M este imaginea punctului B_1.

25.98. Punctul $A_1(-1; 4)$ este imaginea punctului $A(2; -8)$ la omotetia cu centrul în originea de coordonate. Cu ce este egal coeficientul de omotetie?

Poliedre

25.99. Laturile bazei paralelipipedului dreptunghic sunt egale cu 6 cm şi 8 cm, iar diagonala lui este înclinată la planul bazei sub unghiul de 60°. Aflați muchia laterală a paralelipipedului.

25.100. Baza prismei drepte este triunghiul dreptunghic cu catetele 5 cm şi 12 cm. Aflați aria suprafeței laterale a prismei, dacă muchia laterală a ei este egală cu 10 cm.

25.101. Latura bazei prismei triunghiulare regulate este egală cu 8 cm, iar diagonala feței laterale – 17 cm. Aflați aria suprafeței laterale a prismei.

25.102. Diagonala prismei patrulatere regulate este egală cu 25 cm, iar diagonala feței laterale – 20 cm. Aflați înălțimea prismei.

25.103. Laturile bazei prismei triunghiulare drepte se raportă ca 15 : 10 : 9. Aflați laturile bazei, dacă aria suprafeței laterale a prismei este egală cu 816 cm^2, iar muchia laterală – 12 cm.

25.104. Înălțimea prismei drepte $ABCA_1B_1C_1$ este egală cu 12 cm, $AC = BC$, $AB = 8$ cm, diagonala feței BB_1C_1C este egală cu 13 cm. Aflați arai secțiunii prismei, care trece prin dreapta AB şi punctul C_1.

25.105. Latura bazei prismei hexagonale regulate este egală cu a, cea mai mare diagonală a prismei este înclinată la planul bazei sub unghiul α. Aflați aria suprafeței laterale a prismei.

25.106. Este dată prisma dreaptă $ABCA_1B_1C_1$. Unghiul dintre planele ABC şi A_1BC este egal cu β. Aflați înălțimea prismei, dacă $BC = a$, $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = \alpha$.

25.107. Baza paralelipipedului drept este rombul cu latura a şi unghiul ascuțit α. Diagonala mică a paralelipipedului face cu planul bazei unghiul β. Aflați aria suprafeței totale a paralelipipedului.

25.108. Latura bazei piramidei triunghiulare regulate este egală cu $\sqrt{3}$ cm, iar înălţimea piramidei – $2\sqrt{2}$ cm. Aflați muchia laterală a piramidei.

25.109. Latura bazei piramidei patrulatere regulate este egală cu 6 cm, iar muchia laterală a piramidei – 5 cm. Aflați aria suprafeței laterale a piramidei.

25.110. Baza piramidei este dreptunghiul, o latură a căruia este egală cu a. Unghiul dintre această latură şi diagonala dreptunghiului este egală cu α. Fiecare muchie laterală a piramidei face cu planul bazei unghiul β. Aflați înălțimea piramidei.

25.111. Baza piramidei este rombul, diagonalele căruia sunt egale cu 40 cm şi 30 cm, iar înălțimea piramidei este egală cu 5 cm. Aflați aria suprafeței totale a piramidei, dacă unghiurile diedre de la muchiile bazei ei sunt egale.

25.112. Baza piramidei $DABC$ este triunghiul dreptunghic ABC ($\angle ACB = 90°$). Planele ABD şi ACD sunt perpendiculare pe planul bazei. Aflați aria suprafeței laterale a piramidei, dacă $AB = 26$ cm, $BC = 10$ cm, $AD = 18$ cm.

Corpuri de rotație

25.113. Aflați aria suprafeței totale a cilindrului, înălțimea căruia este egală cu 12 cm, iar raza bazei – 5 cm.

25.114. Secțiunea axială a cilindrului este pătratul cu latura de 8 cm. Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului.

25.115. Cum se va modifica – se va mări sau micşora – şi de câte ori aria suprafeței laterale a cilindrului, dacă:

1) raza bazei lui de o mărit de 3 ori, iar înălțimea – de 4 ori;
2) raza bazei lui de o micşorat de 2 ori, iar înălțimea de o mărit de 6 ori?

25.116. În cilindru s-a dus secțiunea, care este paralelă axei lui şi este depărtată de la ea cu 3 cm. Diagonala secțiunii este egală cu 16 cm şi face cu planul bazei cilindrului unghiul de 60°. Aflați raza bazei cilindrului.

25.117. În cilindru s-a dus secțiunea, care este paralelă axei lui şi taie de la circumferința bazei arcul, măsura în grade a căruia este egală cu α ($0° < \alpha < 180°$). Diagonala secțiunii creează cu planul bazei unghiul β. Aflați aria secțiunii, dacă raza bazei cilindrului este egală cu R.

25.118. Prin generatoarea cilindrului s-au dus două secțiuni, fiecare fiind paralelă cu axa cilindrului. Planele acestor secțiuni sunt perpendiculare. Aflați aria secțiunii axiale a cilindrului, dacă aria uneia din secțiunile date este egală cu 30 cm^2, iar a celei de a doua – 40 cm^2.

25.119. Diametrul bazei conului este egal cu 6 cm, iar înălțimea lui – 4 cm. Aflați generatoarea conului.

25.120. Generatoarea conului este egală cu m, iar unghiul dintre generatoare şi înălțime este egal cu α. Aflați aria suprafeței laterale a conului.

25.121. Generatoarea conului este egală cu 25 cm, iar înălțimea – 24 cm. Aflați aria suprafeței totale a conului.

25.122. Raza bazei şi înălţimea conului au fost mărite de 2 ori. De câte ori se va mări aria suprafeței laterale a conului?

25.123. Raza bazei conului s-a mărit de 6 ori, iar generatoarea lui a fost micşorată de 3 ori. Cum s-a modificat aria suprafeței laterale a conului – s-a mărit sau s-a micşorat – şi de câte ori?

25.124. Prin vârful conului şi coarda bazei, ce subîntinde arcul de 60°, s-a dus planul, care face cu planul bazei unghiul de 30°. Aflați aria secțiunii create, dacă raza bazei conului este egală cu 4 cm.

25.125. Secțiunea axială a conului este triunghi dreptunghic. Raza bazei conului este egală cu R. Aflați aria secțiunii axiale a conului.

25.126. Coarda bazei conului, lungimea căreia este egală cu a, se vede din centrul bazei sub unghiul α. Unghiul dintre generatoarea conului şi planul bazei este egal cu β. Aflaţi înălţimea conului.

25.127. Sfera este intersectată de planul, care este depărtat de la centrul ei cu 24 cm. Aflaţi raza sferei, dacă lungimea secţiunii obţinute alcătuieşte $\frac{3}{5}$ din lungimea secţiunii cu planul, ce trece prin centrul ei.

25.128. Vârfurile triunghiului dreptunghic se află pe sfera, raza căreia este egală cu $3\sqrt{5}$ cm. Aflaţi distanţa de la centrul sferei până la planul triunghiului, dacă catetele triunghiului sunt egale cu 8 cm şi 15 cm.

Volumele corpurilor. Aria sferei

25.129. Baza paralelipipedului dreptunghic este pătrat. Diagonala paralelipipedului este egală cu 8 cm şi face cu planul feţei laterale unghiul de 30°. Aflaţi volumul paralelipipedului dreptunghic.

25.130. Feţele laterale ale prismei hexagonale regulate sunt pătrate, iar diagonala mare a ei este egală cu d. Aflaţi volumul prismei.

25.131. Baza prismei drepte este trapez isoscel cu bazele de 4 cm şi 10 cm, şi latura laterală 5 cm. Muchia laterală a prismei este egală cu 10 cm. Aflaţi volumul prismei.

25.132. Diagonala prismei patrulatere regulate este egală cu 13 cm, iar diagonala muchiei laterale – 12 cm. Aflaţi volumul prismei.

25.133. Baza prismei drepte este triunghiul isoscel cu unghiul de 30° la bază. Diagonala feţei laterale a prismei, care conţine latura laterală a bazei, este egală cu 8 cm şi este înclinată la planul bazei sub unghiul de 60°. Aflaţi volumul prismei.

25.134. Baza prismei drepte este rombul cu diagonalele 5 cm şi 12 cm. Diagonala mică a prismei este egală cu 13 cm. Calculaţi volumul prismei.

25.135. Aflaţi volumul piramidei patrulatere regulate, latura bazei căreia este egală cu 6 cm, iar secţiunea diagonală este triunghi echilateral.

25.136. Înălţimea piramidei patrulatere regulate este egală cu 12 cm, iar apotema – 15 cm. Calculaţi volumul piramidei.

25.137. Latura bazei piramidei triunghiulare regulate este egală cu $16\sqrt{3}$ cm, iar apotema – 17 cm. Calculaţi volumul piramidei.

25.138. Latura bazei piramidei triunghiulare regulate este egală cu 6 cm, iar unghiul diedru al piramidei de la muchia bazei – 30°. Aflați volumul piramidei

25.139. Paralel cu axa cilindrului este dusă secțiunea, care este pătratul cu latura de 4 cm şi secționează de la circumferința bazei arcul, măsura în grade a căreia este egală cu 90°. Aflați volumul cilindrului.

25.140. Coarda bazei de jos a cilindrului este văzută din centrul acestei baze sub unghiul α. Segmentul, care uneşte centrul bazei de sus cu mijlocul acestei coarde este înclinat la planul bazei sub unghiul β. Aflați volumul cilindrului, dacă generatoarea lui este egală cu m.

25.141. Volumul conului este egal cu 96π cm^3, iar raza bazei este egală cu 6 cm. Aflați aria suprafeței laterale a conului.

25.142. În baza conului s-a dus coarda cu lungimea de $2\sqrt{2}$ cm la distanța de 1 cm de la centrul bazei. Aflați volumul conului, dacă generatoarea lui este înclinată la planul bazei sub unghiul de 60°.

25.143. Înălțimea conului este egală cu 12 cm, iar unghiul de la vârful secțiunii axiale – 120°. Aflați volumul conului.

25.144. La distanța de 12 cm de la centrul bilei s-a dus un plan. Aria secțiunii create este egală cu 64π cm^2. Aflați aria suprafeței bilei.

25.145. Lungimea liniei de intersecție a bilei cu planul, care este depărtat de la centrul ei cu $\sqrt{5}$ cm, este egală cu 4π cm. Aflați volumul bilei.

PRIETENIM CU CALCULATORUL

În acest an de învățământ voi sistematizați şi perfecționați cunoştințele voastre, care o să vă permită să folosiți calculatorul în timpul studierii cursului de matematică. Determinați de sine stătător, ce lucru tehnic voi puteți executa cu ajutorul calculatorului; în ce mod să prezentați materialele, ce se studiază într-un aspect mai intuitiv. Vă recomandăm de asemenea să alcătuiți algoritmi pentru rezolvarea exercițiilor şi programe pentru realizarea lor în limbajul de programare, pe care îl studiați. Mai jos sunt prezentate însărcinări, care corespund temelor, ce se studiază; însă cu aceste însărcinări deloc nu se limitează posibilitățile aplicării calculatorului în cursul şcolar de matematică.

Însărcinările cursului de matematică clasa a 11-a pentru executare cu ajutorul calculatorului

Pentru punctul 1 „Funcția exponențială şi proprietățile ei"

Dați exemple din cursurile de fizică, bilogie, chimie şi alte discipline şcolare, în care un proces oarecare poate fi descris cu funcția exponențială. Modelați aceste procese cu ajutorul procesorului tabelar; construiți grafice.

Este oare în microcalculator, în programul standard „Calculator" din calculator, în limbajul de programare, pe care-l studiați, posibilitatea calculării a^x?

Pentru punctul 2 „Ecuații exponențiale"

Folosindu-vă de noțiunea puterii cu exponent real, scrieți algoritmul rezolvării ecuației $a^x = b$ pentru $a > 0$ şi $b > 0$ date. Considerați, că rezultatul căutat este găsit, dacă a^x diferă de b mai puțin decât cu 0,01.

Pentru punctul 3 „Inecuații exponențiale"

Folosindu-vă de noțiunea puterii cu exponent real, scrieți algoritmul pentru rezolvarea aproximativă a inecuației $a^x > b$ pentru $a > 0$ şi b date. Cercetați de asemenea inecuațiile $a^x \geqslant b$, $a^x < b$, $a^x \leqslant b$.

Pentru punctul 4 „Logaritmul şi proprietățile lui"

Găsiți în microcalculator, în programul standard „Calculator" din calculator, în limbajul de programare, pe care-l studiați, mijloace pentru calcularea logaritmilor. În care bază se calculează logaritmul? Cum de folosit aceste mijloace pentru calcularea logaritmului în oricare bază necesară?

Pentru punctul 5 „Funcția logaritmică şi proprietățile ei"

Alcătuiți în procesorul tabelar tabelul valorilor funcțiilor exponențiale şi logaritmice cu una şi aceeaşi bază, mai mare decât 1; mai mică decât 1. Construiți graficele acestor funcții pe un ecran. Care proprietăți ale acestor funcții ilustrează graficele obținute?

Pentru punctul 8 „Derivatele funcțiilor exponențială şi logaritmică”

În ce mod în microcalculator, în programul standard „Calculator” din calculator, în limbajul de programare pe care-l studiați, se dă numărul *e*? Sunt oare mijloace pentru calcularea logaritmului natural?

Pentru punctul 9 „Primitiva”

Folosind mijloacele construirii graficelor funcțiilor, alcătuiți algoritmul construirii graficului primitivei funcției liniare.

Pentru Punctul 11 „Aria trapezului curbiliniu. Integrala determinată”

Admitem că voi dispuneți de subprogramul, care calculează valoarea unei oarecare funcții în oricare punct. Cum de calculat integrala determinată a acestei funcții în intervalul dat?

Calculați în acest mod câteva integrale din exercițiile pentru acest paragraf şi comparați rezultatele cu rezultatele, pe care le-ați obținut în timpul executări exercițiilor.

Pentru punctul 12 „Regulile combinatoricii pentru sumă şi produs”

Cu ce mijloace în microcalculator, în programul standard „Calculator” din calculator, în limbajul de programare pe care-l studiați, se poate calcula factorialul unui număr? Alcătuiți în procesorul tabelar tabelul valorilor a câtorva factoriale a primelor numere naturale.

Pentru punctul 13 „Permutări. Aranjamente. Combinații”

Admitem, că voi dispuneți de programul, care calculează factorialul numărului. Folosind acest subprogram, alcătuiți algoritmul pentru calcularea numărului de permutări, aranjamente şi combinații.

Pentru punctul 14 „Determinarea clasică a probabilității evenimentului aleatoriu”

Faceți cunoştință cu noțiunea „Generator de numere aleatorii”. Găsiți în limbajul de programare, pe care îl studiați, mijloacele de obținere a numerelor aleatorii.

Pentru punctul 15 „Elemente de statistică matematică”

Formați un set de valori cu folosirea generatorului de numere aleatorii. Completați cu aceste valori un tabel. Aflați amplitudinea, valoarea medie, moda şi mediana setului de numere obținute.

Pentru punctul 16 „Prisma”

Construiți în redactorul grafic imaginea prismei drepte, prismei oblice, imaginea înălțimii prismei, secțiunii diagonale a prismei. Construiți proiecțiile prismei pe planul, paralel bazei prismei, şi pe planul, paralel înălțimii prismei.

Pentru punctul 17 „Paralelipipedul”

Construiți în redactorul grafic imaginea paralelipipedului; paralelipipedului dreptunghic. Ce proprietăți ale acestui corp şi ce proprietăți ale proiectării paralele trebuie de luat în considerare pentru a obține o imagine adecvată?

Pentru punctul 18 „Piramida”

Construiți în redactorul grafic imaginile diferitor piramide. Construiți imaginea înălțimii piramidei, unghiului diedru al piramidei de la muchia bazei.

Pentru punctul 19 „Cilindrul”

Alcătuiți un program, care după raza bazei şi înălțimea date ale cilindrului va calcula aria suprafeței laterale şi aria suprafeței totale a lui.

Pentru punctul 20 „Conul”

Alcătuiți un program, care după raza bazei şi înălțimea date ale conului va calcula aria suprafeței laterale şi aria suprafeței totale a lui.

Pentru punctul 21 „Bila şi sfera”

Alcătuiți un program, care după raza dată a bilei şi distanța dată de la centrul bilei până la un plan determină:

- amplasarea reciprocă a bilei şi a planului;
- aria secțiunii bilei cu acest plan;
- lungimea liniei de intersecție a suprafeței bilei cu acest plan.

Pentru punctul 22 „Volumul corpului. Formulele pentru calculul volumului prismei şi piramidei ”

Alcătuiți un program pentru calcularea volumului:

1) prismei regulate cu n laturi, cu latura bazei a şi înălțimea h;
2) piramidei regulate cu n laturi, cu latura bazei a şi înălțimea h;

Pentru punctul 23 „Volumele corpurilor de rotație. Aria sferei”

Alcătuiți un program pentru calcularea:

1) volumelor corpurilor de rotație (conului, cilindrului, bilei);
2) ariei suprafeței sferei.

Construiți cu ajutorul redactorului de diagrame în *Word* sau *Excel* o diagramă cu coloane. Alegeți tipul diagramei „spațială” şi reprezentarea a unui şir de date în aspect de diferite corpuri geometrice (prisme, conuri etc.). Folosind cunoştințele obținute despre volumele corpurilor, determinați care din aceste figuri oferă o închipuire mai adecvată despre corespunderea mărimilor reprezentate pe diagramă cu realitatea.

Răspunsuri și indicații la exerciții

1.12. 1) $-6a^{\sqrt{5}}-13$; 2) $\frac{2a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}}$. **1.13.** 1) $4^{\frac{1}{\neq}}ab$; 2) $\frac{1}{a^{2\sqrt{5}}}$. **1.14.** 1) Da; 2) da; 3) nu; 4) nu. **1.15.** 36. **1.16.** $[-2;\ 4]$. **1.18.** 3) $(-4;\ +\infty)$; 4) $[1;\ +\infty)$. **1.19.** 1) $(-\infty;\ +\infty)$; 2) $[0;\ +\infty)$. **1.20.** $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. **1.22.** 1) Nu are rădăcina; 2) o mulțime de rădăcini; 3) 2 rădăcini. **1.23.** 1) 1 rădăcină; 2) o mulțime de rădăcini; 3) 2 rădăcini. **1.24.** *Indicație*. Găsiți domeniul de definiție al funcției date. **1.25.** 1) 4; $\frac{1}{4}$; 2) 1; -1. **1.26.** 1) 6; $\frac{1}{6}$; 2) 6; $5\frac{1}{5}$. **1.29.** 2) $33\cdot 2^{x-4}$; 3) $13\cdot 3^{x-1}$; 4) $5\cdot 2^{x+1}$; 5) $-29\cdot 6^{x-1}$; 6) $12\cdot 9^{x}$. **1.30.** 1) $(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 4)\cup$ $\cup(4;\ +\infty)$; 2) $[0;\ 16]$. **1.31.** 1) $(-\infty;\ 16]$; 2) $[3;\ +\infty)$; 3) $(-1;\ 1)$.

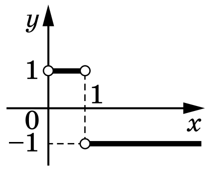
2.3. 1) 1; 2) 3; 3) 3; 4) 1; 5) 3; 6) 2. **2.4.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 3. **2.5.** 1) 1; 2; 2) 2; 3) 1; 4) 2. **2.6.** 1) 1; 2) -1; 2. **2.7.** 3) $-\frac{1}{3}$; 4) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **2.8.** 3) $(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) 6,5. **2.9.** 1) 5; 2) 2; 3) 1; 4) 3. **2.10.** 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) $\frac{3}{2}$. **2.11.** 1) -1; 1; 2) 2; 3) 1; 4) 1. **2.12.** 1) -1; 1; 2) -1; 3) 0; 4) 2. **2.13.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) 3; 3) 0; $\frac{1}{2}$; 4) 2. **2.14.** 1) 4; 2) 0; $\frac{1}{3}$; 3) 2. **2.15.** 1) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 2) 1. **2.16.** -1; 2. **2.17.** 2. **2.18.** 0. **2.19.** 1) 0; 1; 2) 0; -1; 3) -1; 4) 0. **2.20.** 1) 0; 1; 2) 0; 2. **2.21.** $[-3;\ 2)\cup(2;\ 7]$. **2.22.** $\frac{1}{2}$.

3.4. 5) $(-\infty;\ 1)\cup(5;\ +\infty)$; 6) $\left[-3;\ \frac{1}{3}\right]$; 7) $(-\infty;\ 0)$; 8) $[-1;\ 2]$. **3.5.** 3) $(-\infty;\ -1)\cup$ $\cup(2;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -2]\cup\left[\frac{1}{5};\ +\infty\right)$; 5) $(-1;\ +\infty)$. **3.6.** 1) 5; 2) 3; 3) 4. **3.7.** 1) -5; 2) 7. **3.9.** 1) $(-\infty;\ -2]$; 2) $(-\infty;\ 4]$. **3.10.** 1) $(-1;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 2)$; 3) $(5;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -1]$; 5) $(-\infty;\ 0]$; 6) $(-\infty;\ 1)$. **3.11.** 1) $(-\infty;\ 2)$; 2) $[0;\ +\infty)$; 3) $(3;\ +\infty)$; 4) $(1;\ +\infty)$. **3.12.** 1) $(2;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 1)$; 3) $[0;\ 1]$; 4) $(-\infty;\ -3]\cup[-2;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ 1]$; 6) $[1;\ +\infty)$. **3.13.** 1) $(-\infty;\ 0]$; 2) $[6;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -1)\cup(0;\ +\infty)$; 4) $[0;\ 2]$. **3.14.** 1) $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ 3]$; 2) $\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3};\ 2\right]$. **3.15.** 1) $(2;\ +\infty)$; 2) $(-3;\ 1)$; 3) $(-\infty;\ -2]\cup[0;\ +\infty)$; 4) $\{0\}$. **3.16.** 1) $(1;\ +\infty)$; 2) $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right]$. **3.17.** $[0;\ 1]$. **3.18.** $[0;\ 4]$. **3.19.** 1) $(0;\ 1)$; 2) $(-\infty;\ -1]\cup(0;\ +\infty)$. **3.20.** 1) $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$; 2) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1]$. **3.21.** 1,5. **3.22.** 1.

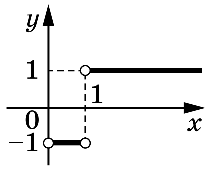
4.17. 1) -3; 2) -1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$. **4.18.** 1) 1; 2) -1; 3) -1. **4.19.** 2) 4; 3) 60; 4) 180. **4.20.** 1) 72; 2) 10. **4.21.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3; 3) 2; 4) 4. **4.22.** 1) -5; 2) -2; 3) 6; 4) 9. **4.23.** 2) 144; 3) 64; 4) 1; 5) 0; 6) 48. **4.24.** 1) 9; 2) 10; 4) 2. **4.25.** 0. **4.26.** lg 2. *Indicație*. În fiecare din logaritmi treceți la baza 10. **4.27.** $\frac{5}{2}$. **4.30.** $\frac{a+3b}{a-b}$.

4.31. 1) $x_{max} = -2$, $x_{min} = 2$; 2) $x_{max} = 1$, $x_{min} = -\frac{7}{9}$.

5.17. 2) $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; 4) $(-\infty; 9) \cup (9; 10)$. **5.18.** 2) $(-3; -2) \cup (-2; +\infty)$; 3) $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **5.19.** 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$. **5.20.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3. **5.21.** 1) 1 rădăcină; 2) 1 rădăcină; 3) 1 rădăcină. **5.22.** 1) 1 rădăcină; 2) 1 rădăcină. **5.23.** 1) $2 < \log_3 10 < 3$; 2) $2 < \log_2 5 < 3$; 3) $-2 < \log_{\frac{1}{3}} 7 < -1$; 4) $-1 < \log_{0,1} 2 < 0$. **5.24.** 1) $4 < \log_2 29 < 5$; 2) $-4 < \log_{\frac{1}{2}} 9 < -3$. **5.25.** 1) $\log_4 5 > \log_5 4$; 2) $\log_{1,5} 1{,}3 < \log_{1,3} 1{,}5$; 3) $\log_{0,7} 0{,}8 < \log_{0,8} 0{,}7$. **5.27.** 1) toate numerele reale, cu excepția numerelor de tipul $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 2) toate numerele de tipul $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\left(-2; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; 2\right)$; 4) $(3; 4) \cup (4; 6]$; 5) $(-2; -1) \cup (-1; 3)$; 6) $(-\infty; 1) \cup (3; 6) \cup (6; 7)$; 7) $(0; 2) \cup (2; 3)$; 8) $(-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (0; +\infty)$. **5.28.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) toate numerele reale, cu excepția numerelor de tipul $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) toate numerele de tipul $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 4) $(-8; -2) \cup (-2; -1)$; 5) $(0; 7) \cup (7; 8)$; 6) $(-1; 1) \cup (1; 2)$. **5.29.** 1) Vezi desenul; 2) vezi desenul. **5.30.** 1) 7; 2) nu are rădăcini; 3) 1; 4) 15; 5) $(-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 6) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.



Pentru sarcina 5.29 (1)



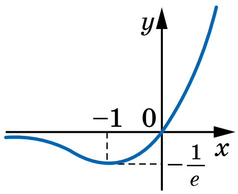
Pentru sarcina 5.29 (2)

6.5. 1) 16; 2) 64; 3) 27; 4) 6; 5) 6; 6) 512. **6.6.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) 5; 3) 10^{10}. **6.7.** 1) –2; 6; 2) 5; 3) nu are rădăcini; 4) –2. **6.8.** 1) –2; 2) nu are rădăcini. **6.9.** 1) 4; 2) 2; 3; 3) 5; 4) 4. **6.10.** 1) 1; 2) 2; 3) $\frac{3}{4}$; 4) –1. **6.11.** 1) 2; $\frac{1}{16}$; 2) 9; $\frac{1}{3}$; 3) 25; $\sqrt{5}$; 4) 8; $10^7 - 2$. **6.12.** 1) –8; $-\frac{1}{2}$; 2) 343; $\frac{1}{49}$; 3) 27; $\sqrt[3]{3}$; 4) $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **6.13.** 1) 1; 2) –1; 3) 0; 4) 6. **6.14.** 1) 0; 13; 2) –2. **6.15.** 1) 4; 2) 7. **6.16.** 1) 3; 2) 8. **6.17.** 1) 3; 4; 2) 1; 3) 4; 4) 3. **6.18.** 1) 4; 2) 3. **6.20.** 1) Creşte pe intervalul [–2; 1], $x_{max} = 1$, $x_{min} = -2$; 2) creşte pe intervalele $(-\infty; -3)$ şi (–3; 0], $x_{max} = 0$; 3) creşte pe intervalul [–1; 5], $x_{max} = -1$, $x_{min} = 5$. **6.21.** $y = -8x + 18$.

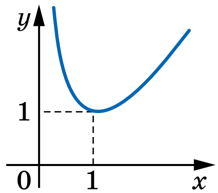
7.5. 1) 21; 2) 26. **7.6.** 1) 0; 2) 0; 1; 2; 3; 4; 5. **7.7.** 1) $(1; +\infty)$; 2) (0; 1);

3) $(3; +\infty)$; 4) $(-3; -2)\cup(3; +\infty)$; 5) $(-\infty; -3]\cup[4; 9)$; 6) $\left(-\frac{11}{10}; 4\right]\cup[5; +\infty)$.
7.8. 1) $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$; 2) $\left(\frac{5}{7}; \frac{3}{2}\right)$; 3) $[5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -4]\cup[3; 5)$. **7.9.** 1) $[-1; 1)\cup(3; 5]$; 2) $(-2; -1)\cup(0; 1)$; 3) $(-6; -5)\cup(-5; -4)$; 4) $[-1; 0)\cup(3; 4]$; 5) $(3; 6]$; 6) $(1; 3]$. **7.10.** 1) $(2; 3)$; 2) $[1; 2)\cup(4; 5]$; 3) $[-4; -3)\cup(0; 1]$; 4) $[0; 1)\cup(1; 2]$; 5) $(-3; -1)$; 6) $(4; 5]$. **7.11.** 1) $(5; +\infty)$; 2) $(1; +\infty)$; 3) $(0; 4)$; 4) $(5; 7]$; 5) $\left(-1; -\frac{3}{5}\right]$; 6) $\left(-\infty; -\frac{7}{5}\right]$. **7.12.** 1) $[-1; 0)$; 2) $(1; 2]$; 3) $[11; +\infty)$; 4) $\left[\frac{14}{3}; +\infty\right)$. **7.13.** 1) $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$; 2) $\left(0; \frac{1}{9}\right]\cup[9; +\infty)$; 3) $(0{,}0001; 10)$; 4) $\left[\frac{1}{16}; 256\right]$; 5) $(0; 4]\cup[8; +\infty)$; 6) $\left(0; \frac{1}{81}\right]\cup\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **7.14.** 1) $\left(0; \frac{1}{8}\right]\cup[8; +\infty)$; 2) $(0; 0{,}1]\cup[1000; +\infty)$; 3) $(0{,}5; 4)$; 4) $[0{,}04; 5]$. **7.15.** 1; –20. **7.16.** $(1; -2)$ și $\left(-\frac{1}{3}; \frac{14}{27}\right)$. **7.17.** $y = -x + 2$.

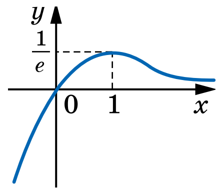
8.9. 1) $y = x + 1$; 2) $y = 2x + 1$; 3) $y = (2 + 2\ln 2)x - 2\ln 2$; 4) $y = 4x - 1$. **8.10.** 1) $y = x - 1$; 2) $y = 2x + 1$. **8.11.** 1) $y = 2$; 2) $y = -1$. **8.12.** $y = -1600$. **8.13.** 1) $y = ex$; 2) $y = x + 1 + \ln 5$. **8.14.** 1) Creşte pe intervalul $[0; +\infty)$, descreşte pe intervalul $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$; 2) creşte pe intervalul $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$, descreşte pe intervalul $(-\infty; 0]$ şi $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = \frac{2}{\ln 2}$; 3) creşte pe intervalul $[3; +\infty)$, descreşte pe intervalele $(-\infty; 2)$ şi $(2; 3]$, $x_{\min} = 3$; 4) creşte pe intervalul $(-\infty; 1]$, descreşte pe intervalul $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$; 5) creşte pe intervalul $\left[e^{-\frac{1}{3}}; +\infty\right)$, descreşte pe intervalul $\left(0; e^{-\frac{1}{3}}\right]$, $x_{\min} = e^{-\frac{1}{3}}$; 6) creşte pe intervalul $(0; 1]$, descreşte pe intervalul $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$; 7) creşte pe intervalul $(0; +\infty)$; 8) creşte pe intervalul $[e; +\infty)$, descreşte pe intervalele $(0; 1)$ şi $(1; e]$, $x_{\min} = e$.
8.15. 1) Creşte pe intervalul $\left(-\infty; \frac{3}{\ln 3}\right]$, descreşte pe intervalul $\left[\frac{3}{\ln 3}; +\infty\right)$, $x_{\max} = \frac{3}{\ln 3}$; 2) creşte pe intervalul $(-\infty; -2]$, descreşte pe intervalul $[-2; +\infty)$, $x_{\max} = -2$; 3) creşte pe intervalul $[1; +\infty)$, descreşte pe intervalul $(0; 1]$, $x_{\min} = 1$; 4) creşte pe intervalul $(0; e]$, descreşte pe intervalul $[e; +\infty)$, $x_{\max} = e$; 5) creşte pe intervalul $[1; +\infty)$, descreşte pe intervalul $(0; 1]$, $x_{\min} = 1$; 6) creşte pe intervalul $(0; e^2]$, descreşte pe intervalul $[e^2; +\infty)$, $x_{\max} = e^2$. **8.16.** $e + 1$; $\frac{1}{e} - 1$.
8.17. $\frac{1}{e^2}$; 0.



Pentru însărcinarea 8.18 (1)



Pentru însărcinarea 8.18 (2)



Pentru însărcinarea 8.19

8.18. 1) Priveşte desenul; 2) priveşte desenul. **8.19.** Priveşte desenul. **8.20.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ (-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **8.21.** 1) (4; 4); 2) (4; –4).

9.6. 1) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{10}{3}$; 2) $y=-\cos x-2$; 3) $y=e^x-7$. **9.7.** 1) $y=\frac{x^4}{4}+1$; 2) $y=\sin x+2$; 3) $y=\frac{3^x}{\ln 3}$. **9.8.** 1) $y=-\frac{1}{x}-6$; 2) $y=\operatorname{tg}x+2\sqrt{3}$; 3) $y=\ln(-x)+4$; 4) $y=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{3}$. **9.9.** 1) $y=2\sqrt{x}+2$; 2) $y=\ln x-1$; 3) $y=x^2-24$. **9.13.** 1) (2; 2, 12]; 2) [0,68; 0,7). **9.14.** 1) tg 2α; 2) 2.

10.3. 1) $F(x)=x-x^2+8$; 2) $F(x)=x^3-2x^2+5$; 3) $F(x)=4x+\frac{1}{x}-4$; 4) $f(x)=\frac{(3x-2)^3}{9}-\frac{1}{9}$. **10.4.** 1) $F(x)=3x-3x^2+6$; 2) $F(x)=x^4-2x^3+x+5$; 3) $F(x)=x^2-2\sqrt{x}-2$; 4) $F(x)=-2\cos x$. **10.5.** $F(x)=x^4+2x^2-3$, primitiva mai are încă un zerou, care este egal cu 1. **10.6.** $F(x)=\frac{x^3}{3}-12x+27$. **10.7.** F_2. **10.8.** F_2. **10.9.** $s(t)=\frac{t^3}{3}+t^2-3t$. **10.10.** $s(t)=2t^3+t-47$ sau $s(t)=2t^3+t-67$. **10.11.** $F(x)=-x^2+5x-\frac{17}{4}$. **10.12.** $F(x)=\frac{x^2}{2}+x-3{,}5$. **10.13.** 1) $\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 3) $\pi n,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **10.14.** 1) $(-\infty;-2{,}5)\cup(0;2{,}5]$; 2) $[-2;1)$.

11.5. 1) $4\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 4; 4) $7\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{2}\ln 8$; 6) $1\frac{1}{3}$. **11.6.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $7\frac{1}{3}$; 3) 8ln 2. **11.8.** 4) 70; 5) 39; 6) $1{,}5-0{,}5e^2$. **11.9.** 2) –45; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $1\frac{3}{4}$. **11.10.** 1) $10\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) e^2-1; 4) $4\ln 4-3$; 5) $12-4\ln 4$; 6) $10\frac{2}{3}$; 7) $1\frac{1}{3}$; 8) 4,5; 9) 4,5; 10) $\frac{1}{3}$; 11) $\frac{1}{12}$; 12) 1; 13) $24-7\ln 7$; 14) $\sqrt{2}-1$. **11.11.** 1) $4\frac{1}{4}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) $2\frac{2}{3}$; 6) $6-3\ln 3$; 7) 1; 8) $12-5\ln 5$. **11.12.** 1) $(0;1)\cup(3;+\infty)$; 2) $(\log_{0,2}6;+\infty)$. **11.13.** $(1;+\infty)$. **11.14.** 3; –3. **11.15.** 2; –2. **11.16.** 1) –1,5; 2) 1; 3) 1. **11.17.** 6.

12.1. $4\cdot 3$. **12.2.** $5\cdot 5$, $5\cdot 4$. **12.3.** $3\cdot 6\cdot 5$. **12.4.** 5!. **12.5.** 6^4. **12.6.** 5^3. **12.7.** 1) $3\cdot 2$; 2) $3\cdot 3$. **12.8.** Când Anton a luat un măr. **12.9.** $3\cdot 2+4\cdot 3$.

12.10. $3\cdot 6+3\cdot 5+6\cdot 5$. **12.11.** 1) 4!; 2) 3!. **12.12.** $5\cdot 6^3$. **12.13.** $4\cdot 5^2$. **12.14.** $9\cdot 10^6$. **12.15.** 2^4. **12.16.** 6^3. **12.17.** $6\cdot 7\cdot 4$. **12.18.** $6\cdot 7\cdot 3$. **12.19.** I mod. $4\cdot 4!$; modul II. $5!-4!$. **12.20.** $4!\cdot 2$. **12.21.** $9\cdot 10^3\cdot 2$. **12.22.** $9\cdot 10^4\cdot 4$. **12.23.** $4\cdot 3\cdot 2+$ $+5\cdot 2+6\cdot 4$. **12.24.** $5^7+4\cdot 5^6$. **12.25.** 1) 4,1; 2) 1; 3) 2; 4) 83; 5) 1; 6) 4. **12.26.** 3.

13.1. 7!. **13.2.** 20!. **13.3.** 5!. **13.4.** A_{11}^2. **13.5.** A_{15}^3. **13.6.** A_{12}^6. **13.7.** A_{16}^3. **13.8.** A_{32}^2. **13.9.** C_{29}^5. **13.10.** C_n^4. **13.11.** C_{10}^3. **13.12.** $A_3^2\cdot A_5^4$. **13.13.** $C_7^2\cdot C_{13}^3$. **13.14.** $C_{12}^3\cdot C_{88}^7$. **13.15.** $7\cdot C_{12}^2+12\cdot C_7^2$. **13.16.** I mod. $C_9^3+15\cdot C_9^2+9\cdot C_{15}^2$; modul II. $C_{24}^3-C_{15}^3$. **13.17.** 40 %.

14.1. Nu. **14.2.** Da. **14.3.** 1) 0; 2) 1. **14.4.** 1) 0; 2) 1. **14.6.** 3) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{2}{3}$. **14.9.** 5) $\frac{8}{17}$; 6) $\frac{7}{17}$. **14.11.** 1) $\frac{b}{a+b+c}$; 3) $\frac{a+b}{a+b+c}$. **14.12.** 2) $\frac{m+k}{n+m+k}$. **14.13.** $\frac{5}{33}$. **14.14.** $\frac{1}{494}$. **14.15.** $\frac{C_{12}^5}{C_{27}^8}$. **14.16.** $\frac{C_{15}^3}{C_{1000}^3}$. **14.17.** 1) 18; 2) 3. **14.18.** 2) 8. **14.19.** 2 ore.

15.3. Moda. **15.4.** Mediana şi moda. **15.11.** 2,21875 ≈ 2,2 mingi în timpul unui joc. **15.12.** 3,8. **15.17.** 1) 6; 2) 3. **15.18.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 1; 4) 1. **15.19.** –0,96.

16.13. 18 cm^2. **16.14.** $32\sqrt{2}$ cm^2. **16.15.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) 45°. **16.16.** $2a$, $a\sqrt{5}$. **16.17.** $2a\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **16.18.** 9 cm. **16.19.** 7 cm. **16.20.** 6 cm. **16.21.** $72\sqrt{6}$ cm^2. **16.22.** $12\sqrt{7}$ cm^2. **16.23.** 48 cm^2. **16.24.** 1250 cm^2. **16.25.** 1) $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$; 2) $\arcsin\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **16.26.** $\frac{a^2}{2\cos\beta\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}\alpha}$ **16.27.** 1) $\frac{1}{2}d\operatorname{tg}\beta$; 2) $\frac{d^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4\cos\beta}$. **16.28.** 522 cm^2. **16.29.** 6 cm, 8 cm sau 8 cm, 6 cm. **16.30.** $\frac{1}{2}h^2\operatorname{tg}\alpha$. **16.31.** $\frac{h^2\sin\alpha}{2\left(1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}$. **16.32.** $3\sqrt{10}$ cm.

17.5. 7 cm. **17.6.** 2 cm, 4 cm, 4 cm. **17.7.** $a\sqrt{3}$. **17.8.** $36\sqrt{2}$ cm^2. **17.9.** 1) $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{7}{13}$. **17.10.** 1) $\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{6\sqrt{74}}{37}$. **17.11.** 18 cm^2 sau 16 cm^2. **17.12.** $\frac{2d^2\operatorname{tg}\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **17.13.** $144\sqrt{2}$ cm^2. **17.14.** $12\left(\sqrt{2}+2\right)$ cm^2. **17.15.** $4\left(5\sqrt{3}+4\right)$ cm^2. **17.17.** 2 cm. **17.18.** 64 cm^2. **17.19.** $2\sqrt{S_1^2+S_2^2}$. **17.20.** $\sqrt{\frac{S_1S_2}{2S}}$. **17.21.** 300 cm^2. **17.22.** $50\left(\sqrt{2}+1\right)$ cm^2.

18.12. $100\left(\sqrt{3}+1\right)$ cm^2. **18.13.** $16\sqrt{3}$ cm^2. **18.14.** 6 cm. **18.15.** 20 cm, $\sqrt{281}$ cm, 20 cm, $\sqrt{281}$ cm. **18.16.** $\frac{1}{2}b^2\sin 2\beta$. **18.17.** $\frac{1}{2}a^2\operatorname{tg}\alpha$. **18.19.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$. **18.20.** $\frac{d^2}{2\cos\alpha}$. **18.21.** 72 cm^2. **18.22.** $75\sqrt{6}$ cm^2. **18.23.** 3) 24 cm^2. **18.24.** 20 cm.

18.25. 20 cm. **18.26.** $5\sqrt{3}$ cm. **18.27.** 1) $32\sqrt{2}$ cm^2; 2) 2 cm. **18.28.** 1) $20\sqrt{3}$ cm^2; 2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm. **18.29.** 1) 160 cm^2; 2) $4\sqrt{3}$ cm. **18.30.** 1) 4 cm; 2) $\left(32+8\sqrt{10}+\right.$ $\left.+24\sqrt{2}\right)$ cm^2. **18.31.** 360 cm^2. **18.32.** 16 cm. **18.33.** 1 : 9.

19.8. $18\pi\sqrt{3}$ cm^2. **19.9.** 13 cm. **19.10.** $\frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$. **19.11.** 2π cm^2. **19.13.** $24\pi\sqrt{2}$ cm^2. **19.14.** 128π cm^2. **19.15.** $\frac{2\pi a^2 \operatorname{tg}\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **19.16.** $\frac{\pi m^2 \sin 2\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **19.17.** 8 cm. **19.18.** $2R^2\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **19.19.** 48 cm^2. **19.20.** *Indicație.* Construiți secțiunea axială a cilindrului, care trece prin punctul A. **19.21.** 16 cm. **19.22.** 10 cm. **19.23.** $h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)$. **19.24.** 6 cm. **19.25.** $4\sqrt{13}$ cm.

20.7. 1) $\frac{H^2}{\operatorname{tg}\alpha}$; 2) $\frac{\pi H^2}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}$. **20.8.** 1) $\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$; 2) $\pi a^2\sin\frac{\alpha}{2}$. **20.11.** 25 cm, 20 cm. **20.12.** 160π cm^2. **20.13.** $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **20.14.** $2m\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta$. **20.15.** $\frac{1020\pi}{13}$ cm^2. **20.16.** $\frac{H^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}$. **20.17.** $32\pi\sqrt{2}$ cm^2. **20.18.** $\frac{1}{2}\pi a^2\operatorname{tg}\alpha(2\cos\alpha+1)$. **20.19.** $\frac{\pi a^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **20.20.** 84π cm^2. **20.21.** $\pi\left(9+\sqrt{2}\right)$ cm^2. **20.22.** $200\pi\sqrt{3}$ cm^2. **20.23.** 240π cm^2. **20.24.** 8 cm. **20.25.** 216°. **20.26.** $\frac{a}{\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}$. **20.27.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ cm. **20.28.** 10 cm. **20.29.** 8 cm. **20.30.** $12\sqrt{3}$ cm.

21.13. $\pi R^2\cos^2\alpha$. **21.14.** $4\pi\sqrt{3}$ cm. **21.15.** 24 cm. **21.16.** 8 cm. **21.17.** 7 cm. **21.18.** 32π cm^2. **21.19.** 1 cm. **21.20.** 15 cm. **21.21.** $8\sqrt{2}$ cm. **21.22.** 6 cm. **21.23.** 10π cm. **21.24.** 25 cm. **21.25.** $a^2\sqrt{2}$.

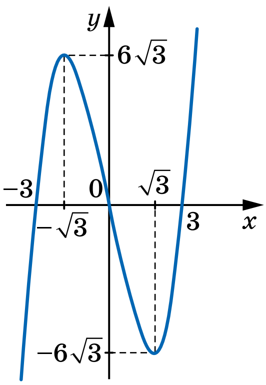
22.2. 8 cm^3. **22.5.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **22.7.** $\frac{h^3\sqrt{3}}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$. **22.8.** 288 cm^3. **22.9.** 6 cm. **22.10.** 36 800 m^3. **22.11.** $h=\frac{ab}{S}$. **22.12.** 456 m^3. **22.18.** $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ cm^3. **22.19.** 1692 cm^3. **22.20.** 18 cm^3. **22.21.** $480\sqrt{3}$ cm^3. **22.22.** $162\sqrt{3}$ cm^3. **22.23.** 1152 cm^3. **22.26.** $\frac{V}{6}$. **22.27.** $\frac{2}{3}b^3\sin^2\alpha\cos\alpha$. **22.28.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **22.29.** $\frac{\sqrt{3}}{4}b^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. **22.30.** $d^3\sin^2\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$. **22.31.** $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. **22.32.** $\frac{225\sqrt{23}}{2}$ cm^3. **22.33.** $\frac{1}{4}d^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **22.34.** $\frac{1}{4}c^3\sin 2\beta\sin\beta\operatorname{tg}\alpha$. **22.35.** $\frac{1}{4}a^3\operatorname{tg}\alpha$. **22.36.** $\frac{a^3}{2}$. **22.37.** 108 cm^3. **22.38.** 2880 cm^3. **22.39.** $\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{12\cos\alpha}$. **22.40.** $\frac{1}{6}b^3\sin\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

22.41. $\frac{1}{6}a^3\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$. **22.42.** $\frac{280}{3}$ cm^3. **22.43.** $40\sqrt{3}$ cm^3. **22.44.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **22.45.** $\frac{a^3}{16}$. **22.46.** 96 cm^3. **22.47.** $64\sqrt{3}$ cm^2. **22.48.** 936 cm^2. **22.49.** 1) $p=4$; 2) $p=0$.

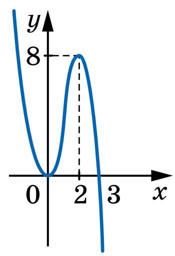
23.4. $\pi a^2 b$. **23.5.** $\frac{\pi H^3}{4}$. **23.6.** 750π cm^3. **23.11.** 39 t. **23.12.** $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$. **23.13.** 64π cm^3. **23.14.** 125π cm^3. **23.15.** 240π cm^3. **23.24.** 9 : 25. **23.25.** 80 m. **23.26.** 77 kg. **23.27.** $\frac{\pi m^3}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}^2\beta}$. **23.28.** πR^3. **23.29.** $\frac{\pi m^3}{3\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **23.30.** $\frac{\pi a^3\,\mathrm{tg}\,\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}$. **23.31.** $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$ cm^3. **23.32.** 6 cm. **23.33.** 1,6 t. **23.34.** 125 bile. **23.35.** 6 cm. **23.37.** 232π cm^2. **23.38.** 160π cm^2. **23.39.** 55,3 m. **23.41.** 3380π cm^3. **23.42.** $\frac{2\pi d^3\ \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\ \mathrm{tg}\,\beta}$. **23.43.** 448π cm^3. **23.44.** 225π cm^3. **23.45.** $\frac{1}{3}\pi a^3\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\beta$. **23.46.** 2500π cm^2. **23.47.** 136π cm^2. **23.48.** 153°. **23.49.** 36°, 36°, 108°. **23.50.** Da.

24.13. 14. **24.14.** 20. **24.15.** 3. **24.16.** 11 buchete. **24.17.** 4. **24.21.** 1) 6; 2) 3; 3) 3. **24.32.** 36 pachete. **24.33.** 14 borcane. **24.34.** 32 de ore. **24.35.** 15 ore. **24.36.** 1) 36 caiete; 2) 12 caiete. **24.38.** 54 ore. **24.43.** S-a micşorat cu 25%. **24.45.** 45 000 grn, 15 000 grn. **24.46.** 200 g, 400 g. **24.47.** 20 kg, 30 kg. **24.51.** 4%. **24.54.** 72 600 grn. **24.65.** 1) Nu are rădăcini; 2) 2; 3) 4; 4) 1,5. **24.68.** 1) (2; –3); 2) $\left(\frac{1}{3};-1\right)$; 3) (4; 2); 4) (8; –9). **24.70.** 2) (–2; 1); 3) (1; 1), (3,6; 11,4). **24.77.** 4) $(-\infty; 18]$. **24.80.** 1) $a<-\frac{1}{4}$; 2) $a\leqslant 6{,}4$. **24.81.** 3) $\left(-\frac{4}{11};5\right)$; 4) $\varnothing$. **24.84.** 1) 11; 2) 4. **24.87.** 5) $-\frac{1}{36}$; 6) $\frac{4}{9}$. **24.101.** 1) 1 rădăcină; 2) 2 rădăcini. **24.102.** 2) –4; 4) –1; 5) 4; 6) 5. **24.103.** 1) 1; 16; 2) $\frac{1}{64}$; 4) 4. **24.104.** 3) [–6; 4]; 4) $[7;8)\cup(8;+\infty)$; 5) {5}; 6) $(-\infty;-7)\cup[3;7)\cup(7;+\infty)$. **24.116.** $p=4$, $q=7$. **24.119.** *а*) $k>0$, $b<0$; *б*) $k<0$, $b>0$. **24.125.** Pentru $m=0$ avem: –1, 1, 3; pentru $m=2$ avem: 5, 5, 5. **24.129.** 1377. **24.130.** 616. **24.136.** $1\leqslant a\leqslant 3$. **24.137.** 1) 5; –3; 2) 7; 6. **24.144.** 1) $\frac{1}{4}\sin\alpha$; 2) $4\cos 4\alpha$. **24.147.** $-\frac{3\pi}{2}$. **24.148.** 3 rădăcini. **24.149.** 4) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $-\mathrm{arctg}\,\frac{8}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **24.155.** 2) (–1; 4]; 3) [0; 4]; 4) $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$. **24.156.** 1) 2; 2) 5; 3) 1; 4) 8. **24.157.** 1) $(2;+\infty)$; 2) $(-\infty;3)$; 3) $(0;+\infty)$; 4) $(2;+\infty)$. **24.158.** 1) 4; 2) $\log_3 2$; 3) $\log_7 5$; 4) 0; 3; 5) –1; 2; 6) 1; $\log_3\frac{5}{4}$. **24.159.** 1) $(1;+\infty)$; 2) [–2; 1]; 3) $(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$; 4) $[-2;+\infty)$. **24.162.** 1) $(1;+\infty)$; 2) $(2;3)\cup(3;+\infty)$. **24.168.** 2) 50; 3) 27; 6) nu are rădăcini. **24.169.** 1) 1,5; 2) 5,5; 3) 2; 3; 4) –1. **24.170.** 1) $\frac{1}{27}$; $\sqrt[3]{9}$; 2) e^7; $\frac{1}{e^3}$; 3) 10; 100; 4) 81; 3. **24.171.** 4) $[-5;-4)\cup(0;1]$;

7) $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$; 8) $(1;\ 3)$. **24.172.** 1) $(0;\ 1]$; 2) $(1;\ 3]$. **24.173.** 1) $(0; 1] \cup [10; +\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$; 3) $\left(0; \frac{1}{32}\right] \cup [8; +\infty)$. **24.177.** 1) $y = -\frac{1}{2}x - 2$; 2) $y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}$. **24.178.** $(2;\ 3)$. **24.179.** $(1;\ 0)$. **24.180.** $y = 5x$ şi $y = 5x - 27$. **24.182.** 1) Creşte pe intervalul $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right]$, descreşte pe intervalul $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ şi $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$, $x_{\max} = \frac{1}{4}$, $x_{\min} = -\frac{1}{3}$; 2) зростає на $\mathbb{R}$; 3) creşte pe intervalul $(-\infty; -4]$ şi $[4; +\infty)$, descreşte pe intervalul $[-4;\ 0)$ şi $(0;\ 4]$, $x_{\max} = -4$, $x_{\min} = 4$; 4) creşte pe intervalul $(-\infty; -2)$, $(-2;\ 1]$ şi $[4; +\infty)$, descreşte pe intervalul $[1;\ 2)$ şi $(2;\ 4]$, $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = 4$; 5) creşte pe intervalul $(-\infty; -1]$, спадає на проміж- ку $[-1; +\infty)$, $x_{\max} = -1$; 6) creşte pe intervalul $[2; +\infty)$, descreşte pe intervalul $(0;\ 2]$, $x_{\min} = 2$. **24.183.** 1) 1; –6; 2) $\frac{3}{5}$; –1; 3) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 4) $\frac{4}{5}$; –1. **24.184.** 1) Priveşte desenul; 2) priveşte desenul.



Pentru sarcina 24.184 (1)



Pentru sarcina 24.184 (2)

24.185. 2) $\sqrt{x} - \frac{1}{x^3} + C$. **24.186.** 1) $F(x) = x^2 + 4x - 11$; 2) $F(x) = x^4 - x^2 + 3x + 5$. **24.187.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) 18; 3) $4\ln 3 - 4$; 4) –6. **24.188.** 1) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; 2) ln 3; 3) $\frac{1}{6}$; 4) 4,5. **24.189.** 72. **24.190.** 8!. **24.191.** C_{32}^3. **24.192.** $12C_{16}^2$. **24.193.** 4!. **24.204.** 13. **24.206.** 2 ore 15 min, 2 ore 24 min.

25.1. 84 cm. **25.2.** 60 cm^2. **25.3.** $\sqrt{26}$ cm. **25.4.** 10 cm. **25.5.** 12 cm. **25.6.** $\left(\sqrt{2}+1\right)$ cm^2. **25.7.** $4\sqrt{13}$ cm. **25.8.** $\frac{2h}{\sin 2\alpha}$. **25.9.** 48 cm. **25.10.** 8 cm. **25.11.** 20 cm. **25.12.** 192 cm. **25.13.** 8 cm. **25.14.** 24 cm. **25.15.** 28 cm. **25.16.** 30 cm. **25.17.** 36 cm^2. **25.18.** 36 cm^2. **25.19.** 18 cm^2. **25.20.** 98 cm^2. **25.21.** 6 cm. **25.22.** 4,5 cm. **25.23.** 128 cm. **25.24.** $\frac{4000}{3}$ cm^2. **25.25.** 15 cm, 24 cm. **25.26.** 6 cm. **25.27.** 60°. **25.28.** $\frac{441\pi}{20}$ cm^2. **25.29.** 2 cm. **25.30.** 12 cm.

25.31. $60\sqrt{2}$ cm^2. **25.32.** 22 cm. **25.33.** 96 cm^2. **25.34.** $\dfrac{2c}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. **25.35.** 15 cm. **25.36.** 230 cm^2. **25.37.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **25.38.** 96 cm^2. **25.39.** 135 cm^2. **25.40.** 288 cm^2. **25.41.** 624 cm^2. **25.42.** 196 cm. **25.43.** 100°. **25.44.** 58°. **25.45.** 1 : 2. **25.46.** $\sqrt{3}:2$. **25.47.** $\dfrac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}$. **25.48.** 15°. **25.49.** 6 cm. **25.50.** 20 cm. **25.51.** 29π cm. **25.52.** 8 cm, 12 cm. **25.53.** 18 cm. **25.55.** $\sqrt{5}$. **25.56.** A (3; –2). **25.57.** (0; –1,5). **25.59.** $(x-1)^2+(y-7)^2=25$. **25.60.** $y=3x+7$. **25.61.** $y=x\sqrt{3}+2$. **25.62.** $y=-0{,}5x-4$. **25.67.** 10. **25.70.** $\vec{m}(7;1)$. **25.71.** $\sqrt{65}$. **25.72.** 1. **25.73.** 18. **25.74.** 6. **25.75.** 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) 1. **25.76.** 135°. **25.77.** $\overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\vec{b}$. **25.78.** $\overrightarrow{EF}=\dfrac{4}{7}\vec{b}-\dfrac{1}{4}\vec{a}$. **25.82.** 120°. **25.87.** (6; –9). **25.88.** (3; 4). **25.99.** $10\sqrt{3}$ cm. **25.100.** 300 cm^2. **25.101.** 360 cm^2. **25.102.** $5\sqrt{7}$ cm. **25.103.** 30 cm, 20 cm, 18 cm. **25.104.** $12\sqrt{17}$ cm^2. **25.105.** $12a^2\operatorname{tg}\alpha$. **25.106.** $\dfrac{a\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$. **25.107.** $2a^2\left(4\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta+\sin\alpha\right)$. **25.108.** 3 cm. **25.110.** $\dfrac{a\operatorname{tg}\beta}{2\cos\alpha}$. **25.111.** 1250 cm^2. **25.112.** 600 cm^2. **25.116.** 5 cm. **25.117.** $4R^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **25.118.** 50 cm^2. **25.121.** 350π cm^2. **25.124.** 8 cm^2. **25.125.** R^2. **25.126.** $\dfrac{\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. **25.127.** 30 cm. **25.128.** 6 cm. **25.129.** $64\sqrt{2}$ cm^3. **25.130.** $\dfrac{3d^3\sqrt{15}}{50}$. **25.132.** $25\sqrt{119}$ cm^3. **25.133.** 48 cm^3. **25.135.** $36\sqrt{6}$ cm^3. **25.138.** $3\sqrt{3}$ cm^3. **25.139.** 32π cm^3. **25.140.** $\dfrac{\pi m^3}{\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$. **25.141.** 60π cm^2. **25.142.** 3π cm^3. **25.144.** 832π cm^2.

Răspunsuri la însărcinările „Controlează-te” în formă test

Numărul	Numărul problemei																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	D	B	B	D	B	A	C	B	D	B	C	C	A	C	C	A	C	B
2	B	D	B	D	D	B	A	B	B	A	A	C	B	B	D	C	C	A
3	D	C	A	B	C	C	D	D	B	D	D	B	B	B	B	D	C	A
4	A	C	B	C	B	D	C	D	A	D	A	B	A	C	A	B	A	B
5	B	C	A	A	D	D	A	B	B	D	C	C	A	C	D	A	B	A
6	D	B	D	A	A	B	C	D	C	C	B	B	C	B	D	A	D	C

Indice de materie

Amplitudine (**Р́озмах**) 86
Apotema piramidei regulate
(**А́пофема пра́вильної піраміди**) 111.
Aranjamente (**Розмі́щення**) 75
Aria suprafeței laterale a conului
(**Пло́ща бічно́ї пове́рхні ко́нуса**) 129
— — — piramidei (**пірамі́ди**) 111
— — — prismei (**прѝзми**) 101
— — — cilindrului (**цилі́ндра**) 124
— suprafeței poliedrului (**suprafeței poliedrului**) 99
— suprafeței totale a conului (**по́вної пове́рхні ко́нуса**) 129
— — — piramidei (**пірамі́ди**) 111
— — — prismei (**прѝзми**) 101
— — — cilindrului (**цилі́ндра**) 124
Aspectul general al primitivelor
(**Зага́льний вѝгляд первісних**) 50

Baza conului (**Осно́ва ко́нуса**)128
— cilindrului (**цилі́ндра**) 122
Bilă (**Ку́ля**) 133

Centrul bilei (**Центр ку́лі**) 133
— sferei (**сфе́ри**) 133

Cercul mare a bilei (**Велѝкий кру́г ку́лі**) 134
Cilindru (**Цилі́ндр**) 122
Combinație (**Комбіна́ція**) 76
Combinatorică (**Комбінато́рика**) 70
Con (**Ко́нус**) 128
Corp (**Ті́ло**) 98
— de rotație (**оберта́ння**) 122
Corp geometric (**Геометрѝчне ті́ло**) 98
Cub (**Ку́б**) 106

Desfăşurata suprafeței laterale a conului
(**Розго́ртка бічної пове́рхні ко́нуса**) 129
— — — cilindrului (**цилі́ндра**) 123
— cilindrului 123
— conului (**ко́нуса**) 128
Determinarea clasică a probabilității
(**Класѝчне вѝзначення ймові́рності**) 78
Diagonala poliedrului (**Діагона́ль многогра́нника**) 99
Diametrul bilei (**Діа́метр ку́лі**) 133
— sferei (**сфе́ри**) 133
Dimensiunile paralelipipedului dreptunghic (**Вѝміри прямоку́тного паралелепі́педа**) 106

Eveniment verosimil (**Поді́я вірогі́дна**) 79
— adevărat (**достові́рна**) 79
— imposibil (**неможлѝва**) 79
Exponentă (**Експоне́нта**) 40

Fețele megieşe ale poliedrului (**Гра́ні многогра́нника сусі́дні**) 98
— opuse ale paralelipipedului
(**паралелепі́педа протиле́жні**) 105
Formula lui Newton-Leibnitz 59
Funcția logaritmică (**Фу́нкція логарифмі́чна**) 27
— primitivei (**пе́рвісна**) 49
— exponențială (**показнико́ва**) 7

Generatoarea conului (**Твірна́ ко́нуса**) 128
— cilindrului (**цилі́ндра**) 122

Identitatea logaritmică fundamentală (Основна́ логарифмі́чна тото́жність) 21
Indice de materie (Предме́тний пока́жчик) 205
Integrala determinată (Інтегра́л вѝзначений) 59
— nedeterminată (невѝзначений) 50

Înălțimea conului (Висота́ ко́нуса) 128
— piramidei (пірамі́ди) 110
— prismei (прѝзми) 100
— cilindrului (циллі́ндра) 122

Logaritmul (Логарѝфм) 21
— zecimal (десятко́вий) 22
— natural (натура́льний) 40
— puterii (сте́пеня) 22
— câtului (ча́стки) 22

Mediana (Медіа́на) 87
Moda (Мо́да) 87

Paralelipipedul (Паралелепі́пед) 105
— drept (прямѝй) 106
— dreptunghic (прямоку́тний) 106
Permutație (Перестано́вка) 74
Piramidă regulată (Пірамі́да пра́вильна) 110
— cu n laturi (n-ку́тна) 109
Planul tangent la sferă (Дотѝчна площина́ до сфе́ри) 134
Poliedru (Многогра́нник) 98
— convex (опу́клий) 99
Primitiva (Пе́рвісна) 49
Prismă regulată (Прѝзма пра́вильна) 100
— cu n laturi (n-ку́тна) 99
— dreaptă (пряма́) 100

Regula produsului (Пра́вило до́бутку) 70
— sumei (су́ми) 70
Rezultat favorabil (Результа́т сприятливий) 89
Rezultate egal posibile (Результа́ти рівноможлѝві) 78

Secțiunea axială a conului (Осьовѝй пере́різ ко́нуса) 128
— — cilindrului (циллі́ндра) 123
Secțiunea diagonală a piramidei (Діагона́льний пере́різ пірамі́ди) 110
— — prismei (прѝзми) 100
— cilindrului (циллі́ндра) 122
Selecție (Вѝбірка) 83
— reprezentativă (репрезентатѝвна) 83
Sensul geometric al integralei determinate (Геометрѝчний змі́ст вѝзначеного інтегра́ла) 60
Sferă (Сфе́ра) 133
Statistică (Статѝстика) 82
Suprafața laterală a conului (Бічна́ пове́рхня ко́нуса) 128.
— cilindrului (циллі́ндра) 122

Tetraedru regulat (Тетраедр пра́вильний) 111
Totalitatea generală (Генера́льна суку́пність) 86
Trapez curbiliniu (Криволіні́йна трапе́ція) 57

Unghi diedru de la muchia poliedrului (Ку́т многогра́нника двогра́нний при ребрі́) 99
— — plan de la vârf (пло́ский при вершѝні) 98

Valoarea medie (Сере́днє зна́чення) 86
Vârful conului (Вершѝна ко́нуса) 128
Volumul corpului (Об’єм ті́ла) 141

CUPRINS

De la autori 3
Însemnări convenționale 4

Capitolul 1. ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ

§ 1. Funcţiile exponenţială şi logaritmică 6
1. Funcția exponențială şi proprietățile ei 6
• Este oare nevoie de a studia funcția exponențială? 12
2. Ecuații exponențiale 13
3. Inecuații exponențiale 17
4. Logaritmul şi proprietățile lui 20
5. Funcția logaritmică şi proprietățile ei 27
6. Ecuații logaritmice 32
7. Inecuații logaritmice 36
8. Derivatele funcțiilor exponențială şi logaritmică 40
• Iubirea mea este Ucraina şi matematica 44
• Însărcinările primei olimpiade matematice din Kiev (a. 1935) 44
Însărcinarea nr. 1 „Controlează-te” în formă test 45
Principalul în Paragraful 1 47

§ 2. Integrala şi aplicarea ei 49
9. Primitiva 49
10. Regulile de aflare ale primitivei 54
11. Aria trapezului curbiliniu. Integrala determinată 57
• « Cu intelectul el a depăşit specia umană » 65
Însărcinarea nr. 2 „Controlează-te” în formă test 67
Principalul în paragraful 2 69

§ 3. Elemente de combinatorică, a teoriei probabilităţii şi de statistică matematică 70
12. Regulile combinatorice pentru sumă şi produs 70
13. Permutări. Aranjamente. Combinări 74
14. Determinarea clasică a probabilității unui eveniment aleatoriu 78
15. Elemente de statistică matematică 82
Însărcinarea nr. 3 „Controlează-te” în formă test 93
Principalul în paragraful 3 96

Capitolul 2. GOMETRIE

§ 4. Poliedre 98

16. Prisma 98
17. Paralelipipedul 105
18. Piramida 109
    • Frumusețea şi intelectul Ucrainei 117

Însărcinarea nr. 4 „Controlează-te” în formă test 118
Principalul în paragraful 4 120

§ 5. Corpuri de rotaţie 122

19. Cilindrul 122
20. Conul 128
21. Bila şi sfera 133

Însărcinarea nr. 5 „Controlează-te” în formă test 137
Principalul în paragraful 5 140

§ 6. Volumele corpurilor. Aria sferei 141

22. Volumul corpului. Formulele pentru calculul volumului prismei şi a piramidei 141
23. Volumele corpurilor de rotație. Aria sferei 148

Însărcinarea nr. 6 „Controlează-te” în formă test 155
Principalul în paragraful 6 157

§ 7. Repetarea cursului de matematică 158

24. Probleme pentru repetarea cursului de algebră 158
25. Probleme pentru repetarea cursului de geometrie 179

Prietenim cu calculatorul 192
Răspunsuri şi indicații la exercițiі 195
Răspunsuri la însărcinări „Controlează-te” în formă test 203
Indice de materie 204

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович,
НОМІРОВСЬКИЙ Дмитро Анатолійович,
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
та ін.

МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

Підручник для 11 класу з навчанням румунською/ молдовською мовами закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за державні кошти. Продаж заборонено

Переклад з української мови

Перекладач *Гаврилюк Юліана Мірчівна*

Румунською/молдовською мовами

Редактор *І. М. Грінчешин*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Коректор *М. В. Товарницький*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 13,00. Обл.-вид. арк. 12,28.
Тираж 1138 пр. Зам. № 1928

Державне підприємство „Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ”
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи серія ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua; e-mail: office@svit.gov.ua; svit_vydav@ukr.net

Друк ТОВ «РІК-У»
88000, м. Ужгород, вул. Гагаріна, 36
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи серія ДК № 5040 від 21.01.2016

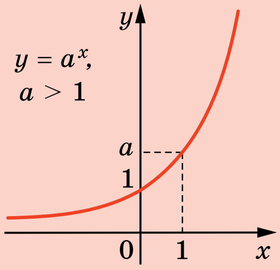
Forzaţul 1

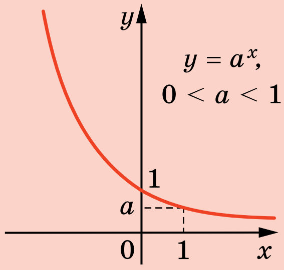
”Dragostea mea este Ucraina şi matematica”. Aceste cuvinte ale lui Mihail Pilipovici Kravciuk (1892–1942) sunt incrustate pe postamentul monumentului de granit al savantului.

Noi sperăm că această, teză patriotică a eminentului matematician ucrainean va deveni şi pentru voi un indicator sigur pe drumul spre profesionalism.

Forzaţul 2

Graficul funcţiei exponenţiale





Proprietăţile logaritmilor

$$a^{\log_a b} = b,$$

$$\log_a 1 = 0, \ \ \log_a a = 1,$$

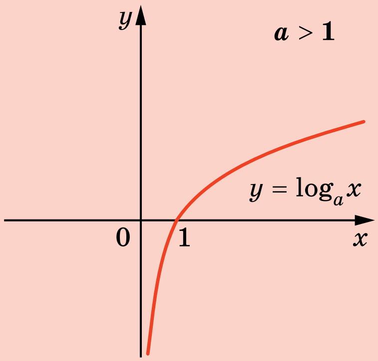
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y,$$

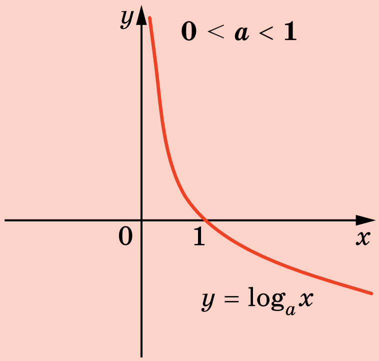
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^{\beta} = \beta \log_a x, \ \ \log_{a^{\beta}} x = \frac{1}{\beta} \log_a x,$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \ \ \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Graficul funcţiei logaritmice





Forzaţil 3

Tabelul derivatelor unor funcții

Funcția f	Primitiva funcției f
k (стала)	kx
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln \mid x \mid$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$

Funcția f	Primitiva funcției f
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
e^x	e^x

Regulile de integrare

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx,$$

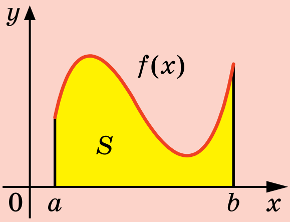
$$\int (f(x) - g(x))\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx,$$

$$\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$$

Formula lui Newton-Leibniz

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Aria trapezului curbiliniu



$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

Permutări	Aranjamente	Combinări
$P_n = n!$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\, k!}$

Forzaţil 4

Formulele pentru calculul ariilor suprafeţelor și volumelor corpurilor geometrice

Aria suprafeţei laterale a cilindrului

$S_l = 2\pi rh$, unde S_l — aria suprafeței laterale a cilindrului,
r — raza bazei cilindrului, h — lungimea înălțimii cilindrului

Aria suprafeţei totale a cilindrului

$S_t = S_l + 2S_{bază}$, unde S_t — aria suprafeței totale a cilindrului,
$S_{bază}$ — aria suprafeței laterale a cilindruluipa
$S_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Aria suprafeţei laterale a conului

$S_l = \pi rl$, unde r — raza bazei conului, l — lungimea înălțimii conului

Aria suprafeţei totale a conului

$S_t = S_l + S_{bază}$, unde S_t — aria suprafeței totale a conului,
$S_{bază}$ — aria suprafeței laterale a conului
$S_t = \pi rl + \pi r^2$

Volumul prismei

$V = Sh$, unde V — volumul prismei, S — aria bazei prismei,
h — lungimea înălțimii piramidei

Volumul piramidei

$V = \frac{1}{3}Sh$, unde V — volumul piramidei, S — aria bazei piramidei,
h — lungimea înălțimii piramidei

Volumul cilindrului

$V = \pi r^2 h$, unde V — volumul cilindrului, r — aria bazei cilindrului,
h — lungimea înălțimii cilindrului

Volumul conului

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, unde V — volumul conului, r — aria bazei conului,
h — lungimea înălțimii conului

Volumul bilei

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, unde V — volumul bilei, R — raza bilei

Aria sferei

$S = 4\pi R^2$, unde S — aria sferei, R — raza sferei