

10

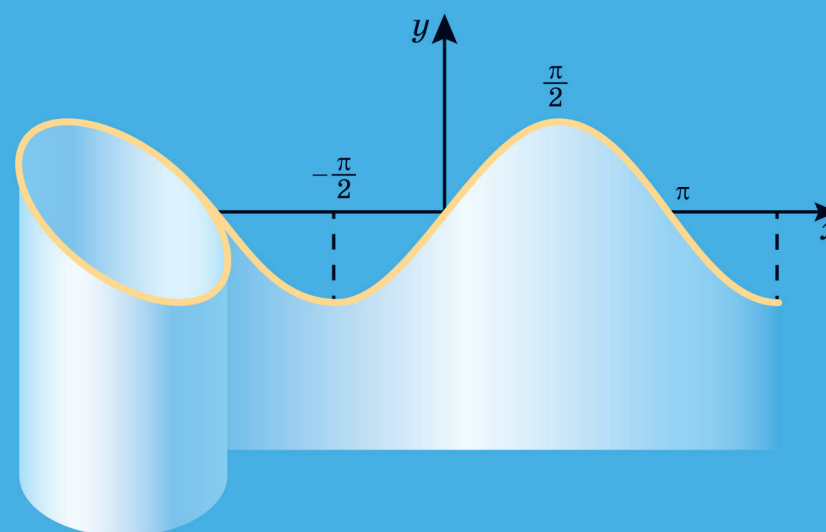
10

MATEMATICĂ  
ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ.  
GEOMETRIE

# MATEMATICĂ

ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ.  
GEOMETRIE

NIVELUL STANDARD



## Forzațul 1



”Dragostea mea este Ucraina și matematica”. Aceste cuvinte ale lui Mihail Pilipovici Kravciuk (1892–1942) constituie inscripția de pe postamentul monumentului de granit al savantului.

Noi sperăm că această, teză patriotică a eminentului matematician ucrainean va deveni și pentru voi un indicator sigur pe drumul spre profesionalism.

## Forzațul 2

### Proprietățile radicalului de ordinul $n$

${}^{2k+1}\sqrt{a^{2k+1}} = a,$ ${}^{2k}\sqrt{a^{2k}} =  a $	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[k]{\sqrt{a}} = \sqrt[k]{a}$
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$	$\sqrt[k]{a^k} = \sqrt[n]{a}$

### Proprietățile puterii

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$a^p : a^q = a^{p-q}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$
$(a^p)^q = a^{pq}$	$(ab)^p = a^p b^p$	

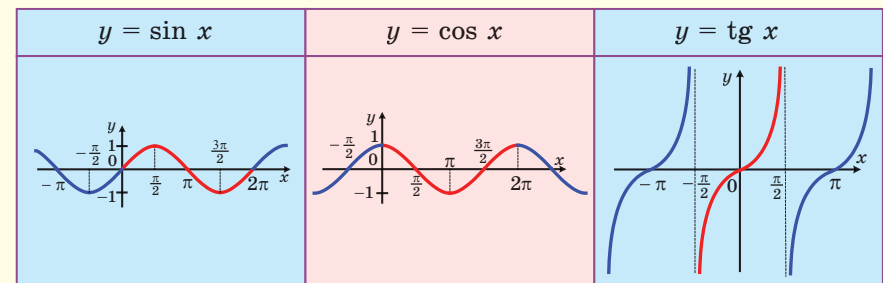
### Tabelul derivatelor

$(c)' = 0$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sin x)' = \cos x$
$(x)' = 1$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

### Regulile de aflare ale derivatelor

$(f \pm g)' = f' \pm g'$	$(fg)' = f' \cdot g + g' \cdot f$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$
--------------------------	-----------------------------------	---

### Graficele funcțiilor trigonometrice





### Forzațul 3

#### Valorile funcțiilor trigonometrice ale unor argumente

$\alpha^\circ$	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°
$\alpha$ , рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—

#### Corelațiile între funcțiile trigonometrice de unul și același argument

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

#### Formulele adunării

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

#### Formulele argumentului dublu

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

#### Formulele de reducere a puterii

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

### Forzațul 4

#### Formulele soluțiilor ale celor mai simple ecuații trigonometrice

Ecuția	Formula soluțiilor ecuației
$\cos x = b,  b  \leq 1$	$x = \pm \arccos b + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = b,  b  \leq 1$	$x = (-1)^n \arcsin b + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = b$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ecuția	Formula soluțiilor ecuației	Ecuția	Formula soluțiilor ecuației
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n$	$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$\sin x = 0$	$x = \pi n$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n$	$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

Dacă  $S$  este aria poligonului,

$S_{\text{pr}}$  - aria proiecției ortogonale a lui,

$\alpha$  - unghiul dintre poligon și proiecția lui, atunci

$$S_{\text{pr}} = S \cos \alpha$$

Distanța dintre punctele  $A(x_1; y_1; z_1)$  și  $B(x_2; y_2; z_2)$ :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Coordonatele mijlocului segmentului,

ce unește punctele  $A(x_1; y_1; z_1)$  și  $B(x_2; y_2; z_2)$ :

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Modulul vectorului  $\vec{a}$  cu coordonatele  $(a_1; a_2; a_3)$ :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Produsul scalar al vectorilor  $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$  și  $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}); \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Cosinusul unghiului dintre vectorii  $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$  și  $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ :

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Condiția de perpendicularitate a vectorilor nenuli  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

# MATEMATICĂ

## ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ. GEOMETRIE

NIVELUL STANDARD

Manual pentru clasa a 10-a  
a școlilor de cultură generală  
cu predarea în limba română/moldovenească

*Recomandat*  
*de Ministerul Învățământului și Științei al Ucrainei*

Львів  
Видавництво „Світ”  
2018

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]  
М52

Перекладено за виданням:

**Мерзляк А. Г.** Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018.

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*  
(наказ Міністерства освіти і науки України від 31.05.2018 № 551)

**Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено**

**Мерзляк А. Г.**

**М52** Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. осв. з навч. румунською/молдовською мовами / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. Ю. М. Гаврилюк. – Львів : Світ, 2018. – 256 с. : іл.

ISBN 978-966-914-138-5

**УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]**

© Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С., 2018

© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет, художнє оформлення, 2018

© Гаврилюк Ю. М., переклад румунською/молдовською мовами, 2018

ISBN 978-966-914-138-5 (рум./молд.)

ISBN 978-966-474-310-2 (укр.)

## DE LA AUTORI

### Dragi elevi ai clasei a 10-a!

În timpul nostru nu există așa o ramură a științei unde nu s-ar folosi realizările matematicii. În fizică și chimie, astronomie și biologie, geografie și economie, chiar și în lingvistică și istorie se folosește ”instrumentul matematic”.

Avem speranța, că manualul care va nimeri la voi în mâini o să vă ajute să obțineți cunoștințe matematice temeinice. El este alcătuit din două capitole: primul este consacrat algebrei și elementelor de analiză (punctele 1–26), al doilea – geometriei (punctele 27–43).

**Algebra și elementele de analiză** este util și foarte interesant obiect de studiu. El dezvoltă gândirea analitică și logică, deprinderile de cercetare, cultura matematică, ingeniozitatea. În acest an voi începeți să faceți cunoștință cu elementele analizei matematice; va trebui să cercetați clase noi de funcții, să studiați proprietățile lor, să însușiți (stăpâniți) metode de cercetare ale funcțiilor.

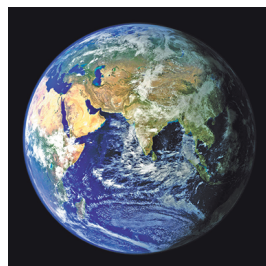
Capitolul de geometrie, în care se vor studia figurile în spațiu și proprietățile lor, este numit **stereometrie**. Anume acest capitol al geometriei voi o să-l studiați în clasele a 10–11-a. Cuvântul ”stereometrie” provine de la cuvintele grecești ”stereos” – ”voluminos”, ”spațial” și ”metreo” – ”a măsura”. Să cunoști stereometria este deosebit de important. Fără închipuirea spațială și cunoștințe adânci din geometrie nu este posibil de însușit specialități ingineresti, de constructor sau arhitect, să lucrezi în ramura graficii computaționale, designului, modelării îmbrăcămintei și încălțămintei etc. Aceasta este clar, deoarece majoritatea obiectelor, ce ne înconjoară, – create atât de om, cât și de natură, – nu sunt plane (fig. 1).



Clopotnița  
Lavrei  
Pecersk din  
Kiev



Avionul de producție ucraineană  
”Mriya” – cel mai mare avion din  
lume



Aspectul  
Pământului – vedere  
din cosmos

Fig. 1

Manualul este împărțit în puncte. Studiind materialul teoretic atrageți o deosebită atenție la textul, care este tipărit cu **caracter gras**, cu *cursiv gras* și *cursiv*; astfel în manual sunt evidențiate definițiile, regulile și cele mai importante afirmații matematice. De regulă expunerea materialului teoretic se termină cu exemple de probleme rezolvate. Aceste scrieri se pot accepta ca una din variantele posibile de definitivare a rezolvării.

În această carte voi o să faceți cunoștință cu o serie de teoreme importante. Unele din ele sunt prezentate cu demonstrații. În acele cazuri, când demonstrarea este în afara limitelor cursului dat, în manual sunt prezentate doar formulările teoremelor.

Pentru fiecare punct sunt selectate probleme destinate rezolvării de sine stătător, la rezolvarea cărora vă sfătuim să treceți după însușirea materialului teoretic. Printre însărcinări sunt atât exerciții de o complexitate simplă și mijlocie, cât și probleme complicate mai ales acelea, care sunt marcate cu „asterix” (\*).

Vă dorim succes!

## INSEMNĂRI CONVENȚIONALE

- $n^{\circ}$     însărcinări, ce corespund nivelului începător și mijlociu de pregătire;
- $n^{\bullet}$     însărcinări, ce corespund nivelului satisfăcător de pregătire;
- $n^{\bullet\bullet}$     însărcinări, ce corespund nivelului înalt de pregătire;
- $n^*$     probleme pentru cercurile și facultativele de matematică;
- ◀    terminarea demonstrației teoremei, rezolvării problemei;
- 🔑    probleme-cheie, rezultatul cărora poate fi folosit în timpul rezolvării altor probleme;

Cu culoare **verde** sunt însemnate numerele problemelor, ce sunt recomandate pentru teme de acasă, cu culoare **albastră** – numerele problemelor, ce sunt recomandate pentru rezolvare orală.



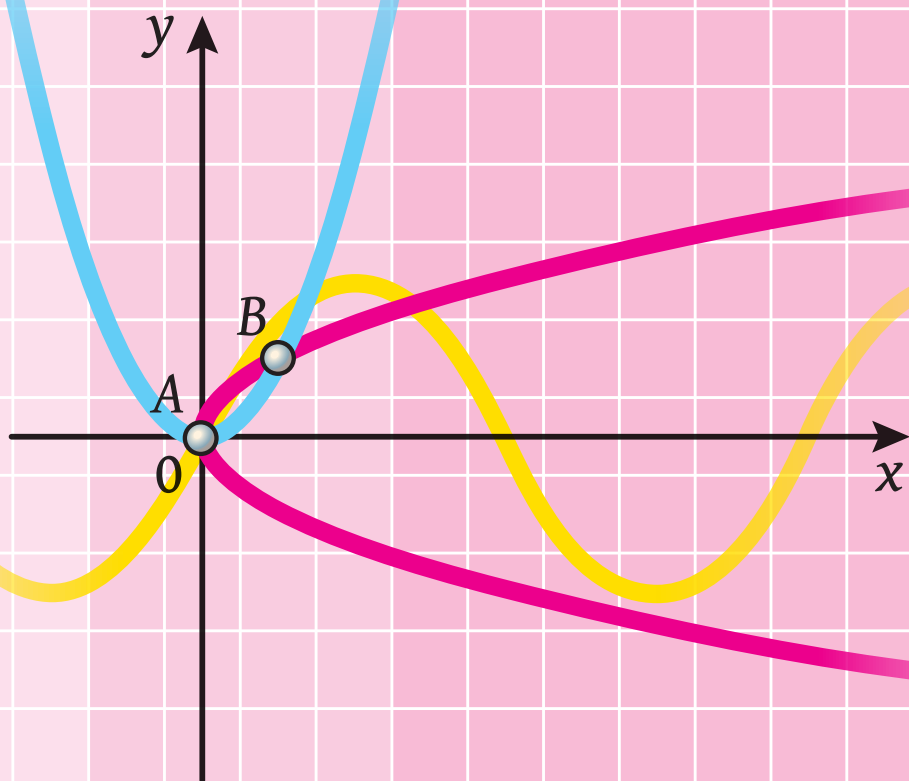
# Capitolul 1.

# Algebră și elemente de analiză

§ 1. Funcții, proprietățile și graficele lor

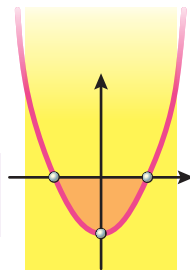
§ 2. Funcții trigonometrice

§ 3. Derivata și aplicația ei



# FUNCȚII, PROPRIETĂȚILE ȘI GRAFICELE LOR

## §1



În acest paragraf veți repeta principalele noțiuni despre funcție; veți afla, ce se numește cea mai mare și cea mică valoare a funcției pe mulțime, care funcții se numesc pare, și care – impare; veți face cunoștință cu proprietățile graficelor funcțiilor pare și impare.

Veți afla, care funcție se numește funcție putere cu exponent întreg, ce proprietăți posedă această funcție; ce se numește radical de ordinul  $n$ ; ce proprietăți are radicalul de ordinul  $n$ ; ce se numește putere cu exponent rațional și care sunt proprietățile ei; care ecuații se numesc iraționale.

O să vă învățați a extrage radicali de ordinul  $n$ ; de executat ridicarea la putere cu exponent rațional; de transformat expresiile, care conțin puteri cu exponent rațional și radicali de ordinul  $n$ ; de rezolvat ecuații iraționale.

## 1. Cea mai mică și cea mai mare valoare a funcției. Funcții pare și impare

Înainte de studierea acestui punct se recomandă îndeplinirea exercițiilor 1.24 – 1.28.

În clasa a 7-a ați făcut cunoștință cu noțiunea de funcție și în timpul studierii multor capitole ale cursului de algebră va-ți adresat deseori la această noțiune. O astfel de importanță funcția o are nu întâmplător, deoarece modelele matematice ale multor procese reale sunt anume funcțiile.

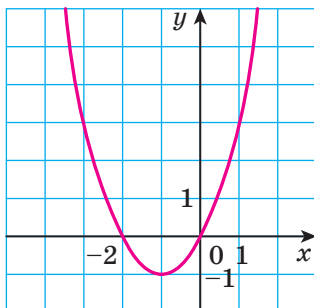


Fig. 1.1

Vă sunt cunoscute astfel de noțiuni, ca *domeniul de definiție*, *domeniul de valori*, *zerourile*, *intervalele de constanță ale semnului*, *intervalele de creștere și descreștere* ale funcției.

De exemplu, pentru funcția  $y = x^2 + 2x$ , graficul căreia este reprezentat în figura 1.1, avem:

- domeniul de definiție:  $D(y) = (-\infty; +\infty)$ ;
- domeniul de valori:  $E(y) = [-1; +\infty)$ ;
- zerourile: numerele  $-2$  și  $0$ ;

- intervalele de constanță ale semnului: funcția obține valori pozitive pe fiecare din intervalele  $(-\infty; -2)$  și  $(0; +\infty)$ , iar valori negative – pe intervalul  $(-2; 0)$ ;
- intervalele de creștere și descreștere: funcția descrește pe intervalul  $(-\infty; -1]$  și crește pe intervalul  $[-1; +\infty)$ .

Enumerarea prezentată mai sus deloc nu epuizează acele proprietăți care trebuie studiate în timpul cercetării funcției. Să cercetăm noțiuni noi, care o să vă ajute să caracterizați mai detaliat funcția.

**Definiție.** Numărul  $f(x_0)$  se numește **cea mai mare valoare a funcției**  $f$  pe mulțimea  $M \subset D(f)$ , dacă există un astfel de număr  $x_0 \in M$ , că pentru toate valorile lui  $x \in M$  se îndeplinește inegalitatea  $f(x_0) \geq f(x)$ .

Se înseamnă:  $\max_M f(x) = f(x_0)$ .

**Definiție.** Numărul  $f(x_0)$  se numește **cea mai mică valoare a funcției**  $f$  pe mulțimea  $M \subset D(f)$ , dacă există un astfel de număr  $x_0 \in M$ , că pentru toate valorile lui  $x \in M$  se îndeplinește inegalitatea  $f(x_0) \leq f(x)$ .

Se înseamnă:  $\min_M f(x) = f(x_0)$ .

Să cercetăm câteva exemple.

Pentru funcția  $f(x) = \sqrt{x}$  și mulțimea  $M = [0; 4]$  avem (fig. 1.2):  $\min_{[0;4]} f(x) = f(0) = 0$ ,

$\max_{[0;4]} f(x) = f(4) = 2$ .

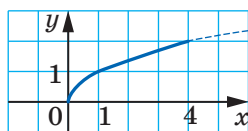


Fig. 1.2

Pentru funcția  $f(x) = x^2$  și mulțimea  $M = [-1;$

2] avem (fig. 1.3):  $\min_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 0$ ,  $\max_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 4$ .

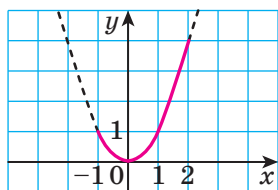


Fig. 1.3

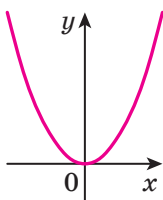


Fig. 1.4

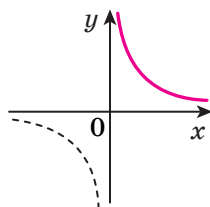


Fig. 1.5

Nu orice funcție pe mulțimea dată posedă valoare minimală sau valoare maximală. Astfel, pentru funcția  $f(x) = x^2$  avem:  $\min_{\mathbb{R}} f(x) = 0$ . Valoare maximală pe mulțimea numerelor reale această funcție nu are (fig. 1.4).

Funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  pe mulțimea  $(0; +\infty)$  nu are nici maximum nici minimum (fig. 1.5).

**Definiție.** Funcția  $f$  se numește **pară**, dacă pentru orice  $x$  din domeniul de definiție se îndeplinește egalitatea  $f(-x) = f(x)$ .

**Definiție.** Funcția  $f$  se numește **impară**, dacă pentru orice  $x$  din domeniul de definiție se îndeplinește egalitatea  $f(-x) = -f(x)$ .

De exemplu, funcția  $f(x) = x^2$  este pară, iar funcția  $g(x) = x^3$  – impară. Într-adevăr,  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $D(g) = \mathbb{R}$ . Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  se execută egalitățile  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$  și  $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ .

Satisfacerea egalității  $f(-x) = f(x)$  sau egalității  $f(-x) = -f(x)$  pentru orice  $x \in D(f)$  înseamnă, că domeniul de definiție al funcției  $f$  este simetric față de originea coordonatelor, adică posedă astfel de proprietate: dacă  $x_0 \in D(f)$ , atunci  $-x_0 \in D(f)$ .

Din definițiile prezentate reiese, că dacă domeniul de definiție al funcției nu este simetric față de originea de coordonate, atunci această funcție nu poate fi nici pară, nici impară.

De exemplu, domeniul de definiție al funcției  $y = \frac{1}{x-1}$  este mulțimea  $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ , care nu este simetric față de originea de coordonate. De aceea această funcție nu este nici pară, nici impară.

**Problemă.** Demonstrați, că funcția  $f(x) = x^3 - x$  este impară.

*Rezolvare:* Deoarece  $D(f) = \mathbb{R}$ , atunci domeniul de definiție al funcției  $f$  este simetric față de originea de coordonate.

Pentru orice  $x \in D(f)$  dispunem de:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x).$$

Deci funcția  $f$  este impară. ◀

**Teorema 1.1.** Axa de ordonate este axa de simetrie a graficului funcției pare.

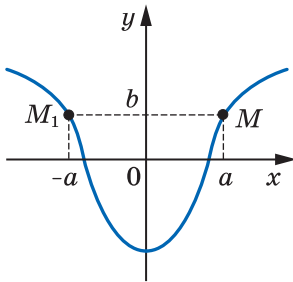


Fig. 1.6

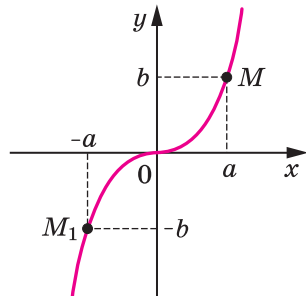


Fig. 1.7

**Teorema 1.2.** *Originea de coordonate este centrul de simetrie al graficului funcției impare.*

Afirmația teoremelor 1.1. și 1.2 este ilustrată în figurile 1.6 și 1.7 corespunzător.



1. Care număr se numește cea mai mare (mai mică) valoare a funcției pe mulțime?
2. Cum se înseamnă cea mai mare (cea mai mică) valoare a funcției  $f$  pe mulțimea  $M$ ?
3. Care funcție se numește pară (impară)?
4. Ce proprietate posedă graficul funcției pare (impare)?



### EXERCIIII

1.1.° În figura 1.8 este prezentat graficul funcției  $y = f(x)$ , definită pe intervalul  $[-4; 5]$ . Folosindu-vă de grafic, aflați cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției pe intervalul:

- 1)  $[1; 2]$ ;                      2)  $[-2,5; 1]$ ;                      3)  $[-2,5; 3,5]$ .

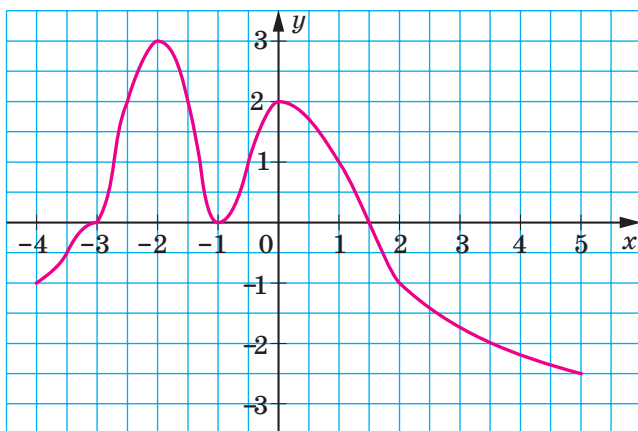


Fig. 1.8

1.2.° În figura 1.9 este prezentat graficul funcției  $y = g(x)$ , definită pe intervalul  $[-4; 4]$ . Folosindu-vă de grafic, aflați cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției pe intervalul:

- 1)  $[-3; -2]$ ;                      2)  $[-3; -1]$ ;                      3)  $[-3; 1]$ .



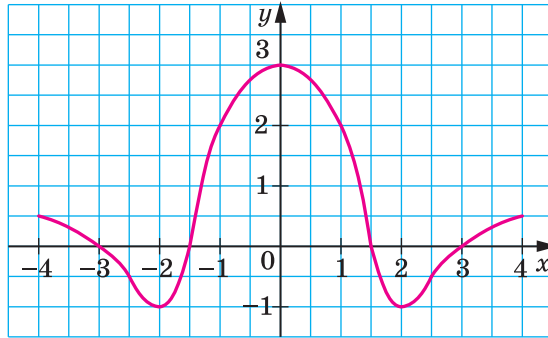
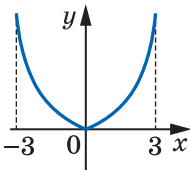
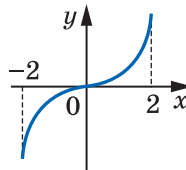


Fig. 1.9

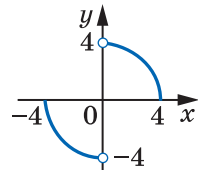
- 1.3.° Se cunoaște că,  $f(7) = -16$ . Aflați  $f(-7)$ , dacă funcția este:  
1) pară; 2) impară.
- 1.4.° Se știe că,  $f(-3) = 8$ . Aflați  $f(3)$ , dacă funcția este: 1) pară;  
2) impară.
- 1.5.° Funcția  $f$  este pară. Se poate oare îndeplini egalitatea:  
1)  $f(2) - f(-2) = 1$ ;                      2)  $f(5) f(-5) = -2$ ?
- 1.6.° Funcția  $f$  este impară. Se poate oare îndeplini egalitatea:  
1)  $f(1) + f(-1) = 1$ ;                      2)  $f(2) f(-2) = 3$ ?
- 1.7.° Este oare pară funcția, dată prin formula  $y = x^2$ , dacă domeniul de definiție al ei este mulțimea:  
1)  $[-9; 9]$ ;                      2)  $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$ ;                      3)  $[-6; 6]$ ;                      4)  $(-\infty; 4]$ ?
- 1.8.° Funcția, graficul căreia este prezentat în figura 1.10, este pară sau impară?



a



b



c

Fig. 1.10

- 1.9.° Pe intervalul  $[2; 5]$  aflați cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției:

1)  $f(x) = -\frac{10}{x}$ ;

2)  $f(x) = \frac{20}{x}$ .

1.10.\* Aflați:

1)  $\max_{[1;2]} (-x^2 + 6x)$ ;                      3)  $\max_{[4;5]} (-x^2 + 6x)$ .

2)  $\min_{[1;4]} (-x^2 + 6x)$ ;

1.11.\* Găsiți cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției:

$y = x^2 + 2 - 8$  pe intervalul:

1)  $[-5; -2]$ ;                      2)  $[-5; 1]$ ; 3)  $[0; 3]$ .

1.12.\* Demonstrați, că funcția este pară:

1)  $f(x) = -5x^4$ ;                      2)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ .

1.13.\* Demonstrați, că funcția este pară:

1)  $f(x) = x^6$ ;                      2)  $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$ .

1.14.\* Demonstrați, că funcția este impară:

1)  $f(x) = 4x^7$ ;                      2)  $f(x) = 2x - 3x^5$ .

1.15.\* Demonstrați, că funcția este impară:

1)  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ;                      2)  $f(x) = (x^3 + x)(x^4 - x^2)$ .

1.16.\*\* Suma a două numere este egală cu 8. Găsiți:

1) cea mai mare valoare pe care o poate obține produsul acestor numere:

2) cea mai mică valoare pe care o poate obține suma pătratelor acestor numere.

1.17.\*\* O parcelă de formă dreptunghiulară a fost împrejmuțată cu un gard cu lungimea de 200 m. Care poate fi cea mai mare arie a acestei parcele?

1.18.\*\* Cercetați la paritate funcția:

1)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ;      2)  $f(x) = \sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 1}$ ;      3)  $f(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^3 - x}$ .

1.19.\*\* Cercetați la paritate funcția:

1)  $f(x) = x^2 + 2x - 4$ ;      2)  $f(x) = \frac{6x^3}{x^2 - 9}$ ;      3)  $f(x) = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}$ .

1.20.\*\* În figura 1.11 este reprezentat un fragment de grafic al funcției  $y = f(x)$ , definit pe intervalul  $[-5; 5]$ . Terminați de construit graficul acestei funcții, dacă ea este: 1) pară; 2) impară.

1.21.\*\* Linia frântă  $ABCD$ , unde  $A(0; 0)$ ,  $B(2; -2)$ ,  $C(3; 4)$ ,  $D(6; 1)$  este o parte a graficului funcției  $y = f(x)$ , definită pe intervalul  $[-6; 6]$ . Construiți graficul acestei funcții, dacă ea este:

1) pară;                      2) impară.

1.22.\*\* Funcția  $f$  este pară și  $\min_{[1;3]} f(x) = 2$ ,  $\max_{[1;3]} f(x) = 5$ . Găsiți

$\min_{[-3;-1]} f(x)$ ,  $\max_{[-3;-1]} f(x)$ .

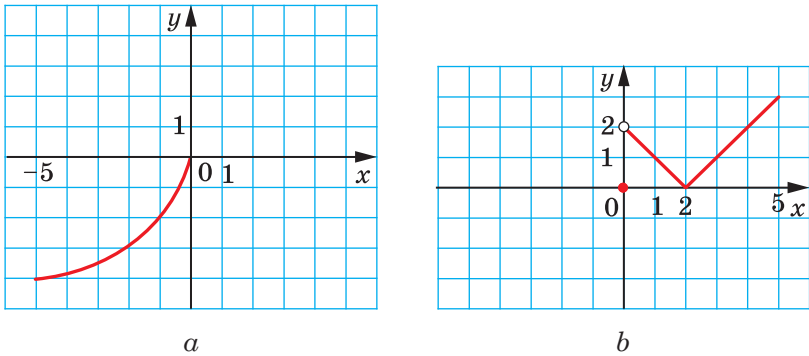


Fig. 1.11

1.23.\*\* Функція  $f$  є парною і  $\min_{[2;5]} f(x) = 1$ ,  $\max_{[2;5]} f(x) = 3$ . Знайдіть  $\min_{[-5;-2]} f(x)$ ,  $\max_{[-5;-2]} f(x)$ .



### EXERCIIJI PENTRU REPETARE

1.24. Функція задана формулою  $f(x) = -3x^2 + 2x$ .

1) Знайдіть:  $f(1)$ ;  $f(0)$ ;  $f\left(\frac{1}{3}\right)$ ;  $f(-2)$ .

2) Знайдіть значення аргументу, для якого значення функції  $f$  є рівним до: 0; -1; -56.

1.25. Вкажіть у фігурі 1.12 фігуру, яку не можна вважати графіком функції.

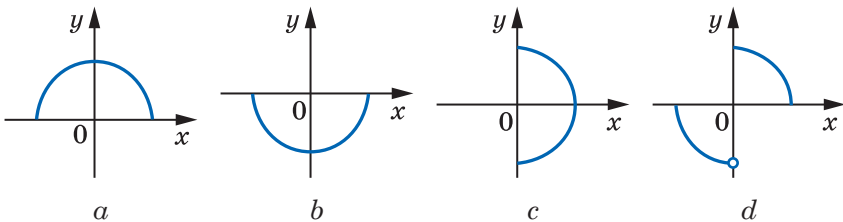


Fig. 1.12

1.26. Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1)  $f(x) = \frac{9}{x+4}$ ;

5)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x - 7}$ ;

2)  $f(x) = \frac{x-6}{4}$ ;

6)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x}$ ;

3)  $f(x) = \sqrt{x-7}$ ;

7)  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ ;

4)  $f(x) = \frac{10}{\sqrt{-x-1}}$ ;

8)  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ .

1.27. Găsiți zerourile funcției:

1)  $f(x) = 0,4x - 8$ ;

2)  $f(x) = \frac{x^2 + x - 30}{x + 5}$ .

1.28. Găsiți domeniul de definiție al funcției:

1)  $f(x) = \sqrt{x} + 2$ ;

2)  $f(x) = 7 - x^2$ ;

3)  $f(x) = -6$ .

## 2. Funcția putere cu exponent natural

Proprietățile și graficele funcțiilor  $y = x$  și  $y = x^2$  vă sunt bine cunoscute din cursul de matematică al claselor anterioare. Aceste funcții sunt cazuri particulare ale funcției  $y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , care se numește **funcție putere cu exponent natural**.

Deoarece expresia  $x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , este adevărată pentru orice  $x$ , atunci *domeniul de definiție al funcției putere cu exponent natural este mulțimea  $\mathbb{R}$* .

Evident, că funcția cercetată posedă un sigur zero  $x = 0$ .

Cercetarea de mai departe ale proprietăților funcției  $y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , o vom executa pentru două cazuri:  $n$  – număr natural par și  $n$  – număr natural impar.

### • Primul caz: $n = 2k$ , $k \in \mathbb{N}$ .

Menționăm, că pentru  $k = 1$  obținem funcția  $y = x^2$ , proprietățile și graficul căreia au fost cercetate în cursul de algebră clasa a 8-a.

Deoarece pentru orice valoare  $x$  expresia  $x^{2k}$  obține doar valori nenegative, atunci domeniul de valori al funcției cercetate nu conține nici un număr negativ.

Se poate arăta, că pentru orice  $a \geq 0$  există o astfel de valoare a argumentului  $x$ , că  $x^{2k} = a$ .

☞ Din cele spuse rezultă, că *domeniul de valori al funcției  $y = x^n$ , unde  $n$  – număr natural par, este mulțimea  $[0; +\infty)$* .

Dacă  $x \neq 0$ , atunci  $x^{2k} > 0$ .

☞ Deci, *intervalele*  $(-\infty; 0)$  și  $(0; +\infty)$  *sunt intervale de constanță ale semnului funcției*  $y = x^n$ , unde  $n$  – număr natural par.

☞ *Funcția*  $y = x^n$ , unde  $n$  – număr natural par, *este pară*. Într-adevăr, pentru orice  $x$  din domeniul de definiție se îndeplinește egalitatea  $(-x)^{2k} = x^{2k}$ .

Să considerăm numerele arbitrare  $x_1$  și  $x_2$ , astfel, că  $x_1 \in (-\infty; 0]$ ,  $x_2 \in (-\infty; 0]$  și  $x_1 < x_2$ . Atunci  $-x_1 > -x_2 \geq 0$ . Folosindu-ne de proprietățile inegalităților numerice, obținem:  $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$ . De aici  $x_1^{2k} > x_2^{2k}$ .

☞ Deci, *funcția*  $y = x^n$ , unde  $n$  – număr natural par, *descrește pe intervalul*  $(-\infty; 0]$ . Analogic se poate arăta, că această funcție *crește pe intervalul*  $[0; +\infty)$ .

Proprietățile obținute oferă posibilitatea de a reprezenta schematic graficul funcției  $y = x^n$ , unde  $n$  – număr natural par (fig. 2.1). În particular, graficul funcției  $y = x^4$  este reprezentat în figura 2.2.

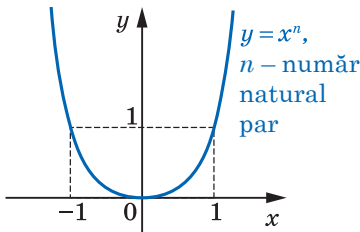


Fig. 2.1

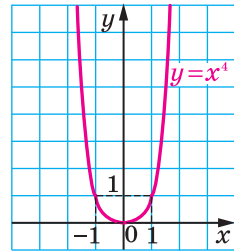


Fig. 2.2

• **Cazul doi:  $n = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$  sau  $k = 0$**

Menționăm că pentru  $k = 0$  obținem funcția  $y = x$ , proprietățile și graficul căreia au fost cercetate în cursul de algebră din clasa a 7-a.

Fie acum că  $k \in \mathbb{N}$ .

Se poate demonstra, că pentru orice  $a$  există o astfel de valoare a argumentului  $x$ , că  $x^{2k+1} = a$ .

☞ Cele spuse înseamnă, că *domeniul de valori al funcției*  $y = x^n$ , unde  $n$  – număr natural impar, *este mulțimea*  $\mathbb{R}$ .

Dacă  $x < 0$ , atunci  $x^{2k+1} < 0$ ; dacă  $x > 0$ , atunci  $x^{2k+1} > 0$ .

☞ Deci, *intervalele*  $(-\infty; 0)$  și  $(0; +\infty)$  *sunt intervale de constanță ale semnului funcției*  $y = x^n$ , unde  $n$  – număr natural impar.

☞ *Funcția*  $y = x^n$ , unde  $n$  – număr natural impar, *este impară*. Într-adevăr, pentru orice  $x$  din domeniul de definiție se îndeplinește egalitatea  $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$ .

Să considerăm numerele arbitrare  $x_1$  și  $x_2$ , astfel, că  $x_1 < x_2$ . Folosindu-ne de proprietățile inegalităților numerice, obținem:  $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$ .



↪ Deci, funcția  $y = x^n$ , unde  $n$  – număr natural impar, este crescătoare.

Proprietățile obținute oferă posibilitatea reprezentării schematice a graficului funcției  $y = x^n$ , unde  $n$  – număr natural impar,  $n > 1$  (fig. 2.3). În particular, graficul funcției  $y = x^3$  este reprezentat în figura 2.4.

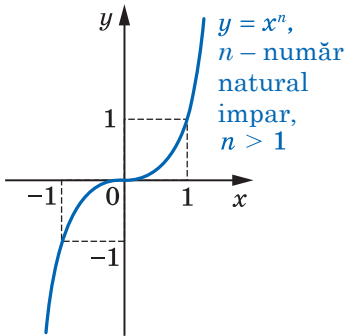


Fig. 2.3

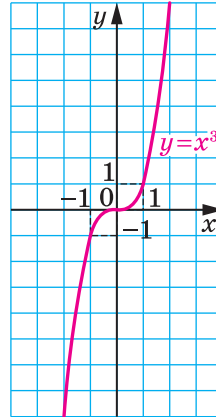


Fig. 2.4

În tabel sunt prezentate proprietățile funcțiilor  $y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , stabilite în acest punct.

Proprietatea	$n$ – număr natural par	$n$ – număr natural impar
Domeniul de definiție	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Domeniul de valori	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Zerourile funcției	$x = 0$	$x = 0$
Intervalele de constanță a semnului	$y > 0$ pe fiecare din intervalele $(-\infty; 0)$ și $(0; +\infty)$	$y < 0$ pe intervalul $(-\infty; 0)$ $y > 0$ pe intervalul $(0; +\infty)$
Paritatea	Pară	Impară
Creștere/descreștere	Descrește pe intervalul $(-\infty; 0]$ , crește pe intervalul $[0; +\infty)$	Crescătoare



1. Care funcție se numește funcție putere cu exponent natural?
2. Formulați proprietățile funcției  $y = x^n$ .
3. Reprezentați schematic graficul funcției  $y = x^n$ .



### EXERCIȚII

- 2.1.<sup>o</sup> Prin care din punctele date trece graficul funcției  $y = x^5$ :  
 1)  $A(-1; 1)$ ;                      2)  $B(2; 32)$ ;                      3)  $C(-3; -243)$ ?
- 2.2.<sup>o</sup> Prin care din punctele date trece graficul funcției  $y = x^4$ :  
 1)  $A(2; 16)$ ;                      2)  $B\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{81}\right)$ ;                      3)  $C(0,5; -0,0625)$ ?
- 2.3.<sup>o</sup> Funcția este dată prin formula  $f(x) = x^{19}$ . Comparați:  
 1)  $f(1,4)$  și  $f(1,8)$ ;                      3)  $f(-6,9)$  și  $f(6,9)$ ;  
 2)  $f(-7,6)$  și  $f(-8,5)$ ;                      4)  $f(0,2)$  și  $f(-12)$ .
- 2.4.<sup>o</sup> Funcția este dată prin formula  $f(x) = x^{50}$ . Comparați:  
 1)  $f(9,2)$  și  $f(8,5)$ ;                      3)  $f(19)$  și  $f(-19)$ ;  
 2)  $f(-1,1)$  și  $f(-1,2)$ ;                      4)  $f(-7)$  și  $f(9)$ .
- 2.5.\* Amplasati expresiile în ordinea descrescătoare a valorilor lor:  

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^5, \left(-2\frac{1}{3}\right)^5, \left(-\frac{2}{3}\right)^5, \left(-2\frac{2}{5}\right)^5.$$
- 2.6.\* Amplasati expresiile în ordinea descrescătoare a valorilor lor:  
 $(1,06)^4, (-0,48)^4, (-2,12)^4, (-3,25)^4.$
- 2.7.\* Aflati cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției  $f(x) = x^8$  pe intervalul:  
 1)  $[0; 2]$ ;                      2)  $[-2; -1]$ ;                      3)  $[-1; 1]$ ;                      4)  $(-\infty; -2]$ .
- 2.8.\* Găsiți cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției  $f(x) = x^5$  pe intervalul:  
 1)  $[-3; 3]$ ;                      2)  $[-2; 0]$ ;                      3)  $[1; +\infty)$ .
- 2.9.\*\* Determinați în mod grafic numărul rădăcinilor ecuației:  
 1)  $x^8 = x + 1$ ;                      2)  $x^5 = 3 - 2x$ ;                      3)  $x^4 = 0,5x - 2$ .
- 2.10.\*\* Determinați în mod grafic numărul de soluții al sistemului de ecuații  $\begin{cases} y = x^6, \\ 2x - y - 3 = 0. \end{cases}$
- 2.11.\* Câte rădăcini are ecuația în dependență de valoarea  $a$ :  
 1)  $x^{12} = a - 6$ ;                      2)  $x^{24} = a^2 + 7a - 8$ ?



## NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

2.12. Calculați valoarea expresiei:

- 1)  $3^{-1} - 4^{-1}$ ;      3)  $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2,3)^0 - 5^{-2}$ ;      5)  $0,5^{-2} \cdot 4^{-1}$ ;  
 2)  $2^{-3} + 6^{-2}$ ;      4)  $9 \cdot 0,1^{-1}$ ;      6)  $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$ .

2.13. Prezentați în formă de fracție ordinară expresia:

- 1)  $a^{-2} + a^{-3}$ ;      2)  $mn^{-4} + m^{-4}n$ ;      3)  $(c^{-1} - d^{-1})(c - d)^{-2}$ .

## 3. Funcția putere cu exponent întreg

Funcția, care poate fi prezentată prin formula  $y = x^n$ , unde  $n \in \mathbb{Z}$ , se numește **funcție putere cu exponent întreg**.

Proprietățile acestei funcții pentru exponent natural au fost cercetate în punctul precedent. Aici noi vom cerceta cazurile, când exponentul  $n$  este număr întreg negativ sau zero.

Domeniul de definiție al funcției  $y = x^0$  este mulțimea  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ , domeniul de valori – mulțimea unitară  $\{1\}$ . Graficul acestei funcții este reprezentat în figura 3.1.

Să cercetăm funcția  $y = x^{-n}$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ .

Cazul particular al acestei funcții, când

$n = 1$ , adică funcția  $y = \frac{1}{x}$ , vă este cunoscut din cursul de algebră al clasei a 8-a.

Să scriem funcția  $y = x^{-n}$  în forma  $y = \frac{1}{x^n}$ . Atunci devine clar, că *domeniul de*

*definiție al funcției*  $y = x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , este mulțimea  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

Evident, că această funcție nu posedă zerouri.

Cercetările de mai departe ale proprietăților funcției  $y = x^{-n}$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ , o să le executăm pentru două cazuri:  $n$  – număr natural par și  $n$  – număr natural impar.

### • Primul caz: $n = 2k$ , $k \in \mathbb{N}$ .

Disponem de:  $x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$ . Deoarece expresia  $\frac{1}{x^{2k}}$  obține doar valori pozitive, atunci în domeniul de valori al funcției cercetate nu intră numerele negative, precum și numărul 0.

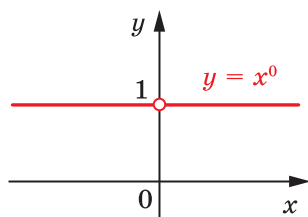


Fig. 3.1

Se poate arăta, că pentru oricare  $a > 0$  există o astfel de valoare a argumentului  $x$ , că  $x^{-2k} = a$ .

↪ Cele spuse înseamnă, că *domeniul de valori al funcției  $y = x^{-n}$ , unde  $n$  – număr natural par, este mulțimea  $(0; +\infty)$ .*

↪ Deoarece pentru oricare  $x \neq 0$  se execută inegalitatea  $\frac{1}{x^{2k}} > 0$ , atunci *intervalele  $(-\infty; 0)$  și  $(0; +\infty)$  sunt intervale de constanță a semnelui funcției  $y = x^{-n}$ , unde  $n$  – număr natural par.*

↪ Funcția  $y = x^{-n}$ , unde  $n$  – număr natural par, este pară. Într-adevăr, pentru oricare  $x$  din domeniul de definiție se execută egalitatea

$$(-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}.$$

Să luăm numerele arbitrare  $x_1$  și  $x_2$  astfel, că  $x_1 \in (0; +\infty)$ ,  $x_2 \in (0; +\infty)$  și  $x_1 < x_2$ . Folosindu-ne de proprietatea inegalităților numerice, obținem:

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} > 0. \text{ De aici } \left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k} > \left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k}; \quad x_1^{-2k} > x_2^{-2k}.$$

↪ Deci, *funcția  $y = x^{-n}$ , unde  $n$  – număr natural par, descresște pe intervalul  $(0; +\infty)$ .*

↪ Se poate de asemenea de demonstrat, că *funcția  $y = x^{-n}$ , unde  $n$  – număr natural par, crește pe intervalul  $(-\infty; 0)$ .*

Atragem atenția, că odată cu mărirea modului  $x$  valorile expresiei  $\frac{1}{x^{2k}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , devin tot mai mici și mai mici. Din această cauză

distanța de la punctul graficului funcției  $y = \frac{1}{x^{2k}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , până la axa absciselor se micșorează cu mărirea modului abscisei punctului și poate să devină oricât de mică, însă nicicând nu vă fi egală cu zero.

De asemenea se poate stabili, că odată cu mărirea modului ordonatei distanța de la punctul graficului funcției  $y = \frac{1}{x^{2k}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , până la axa ordonatelor se micșorează și poate să devină oricât de mică, însă nicicând nu vă fi egală cu zero.

Proprietățile obținute oferă posibilitatea reprezentării schematice a graficului funcției  $y = x^{-n}$ , unde  $n$  – număr natural par (fig. 3.2). În particular graficul funcției  $y = \frac{1}{x^2}$ , este reprezentat în figura 3.3.

• **Primul caz:  $n = 2k - 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .**

Se poate arăta că pentru oricare  $a \neq 0$  există o astfel de valoare a argumentului  $x$ , că  $x^{-(2k-1)} = a$ .

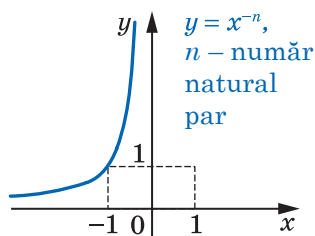


Fig. 3.2

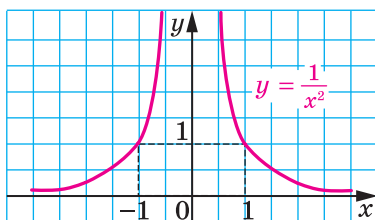


Fig. 3.3

- ☞ Cele spuse înseamnă, că *domeniul de valori al funcției*  $y = x^{-n}$ , unde  $n$  – număr natural impar, este mulțimea  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

Dacă  $x < 0$ , atunci  $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$ ; dacă  $x > 0$ , atunci  $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$ .

- ☞ Deci, *intervalele*  $(-\infty; 0)$  și  $(0; +\infty)$  sunt *intervale de constanță a semnului funcției*  $y = x^{-n}$ , unde  $n$  – număr natural impar.

- ☞ *Funcția*  $y = x^{-n}$ , unde  $n$  – număr natural impar, este impară. Într-adevăr, pentru oricare  $x$  din domeniul de definiție se execută egalitatea  $(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}$ .

- ☞ Se poate demonstra că, *funcția*  $y = x^{-n}$ , unde  $n$  – număr natural impar, *descrește pe fiecare din intervalele*  $(-\infty; 0)$  și  $(0; +\infty)$ .

Proprietățile obținute oferă posibilitatea reprezentării schematice a graficului funcției  $y = x^{-n}$ , unde  $n$  – număr natural impar (fig. 3.4).

În particular, graficul funcției  $y = \frac{1}{x^3}$ , este reprezentat în figura 3.5.

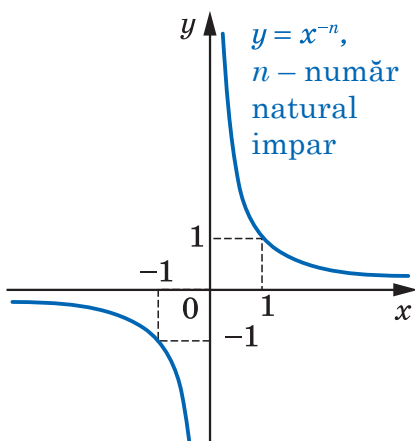


Fig. 3.4

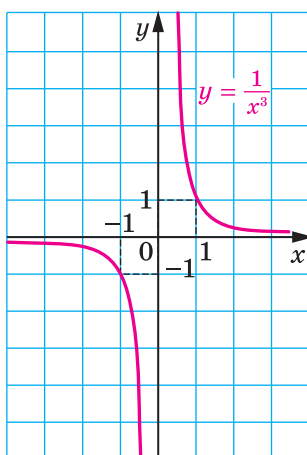


Fig. 3.5



În tabel sunt prezentate proprietățile funcției  $y = x^{-n}$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ , studiate în acest punct.

Proprietatea	$n$ – număr natural par	$n$ – număr natural impar
Domeniul de definiție	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Domeniul de valori	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Zerourile funcției	—	—
Intervalele de constanță a semnului	$y > 0$ pe fiecare din intervalele $(-\infty; 0)$ și $(0; +\infty)$	$y < 0$ pe intervalul $(-\infty; 0)$ , $y > 0$ pe intervalul $(0; +\infty)$
Paritatea	Pară	Impară
Creștere / descreștere	Crește pe intervalul $(-\infty; 0)$ , descrește pe intervalul $(0; +\infty)$	Descrește pe fiecare din intervalele $(-\infty; 0)$ și $(0; +\infty)$



1. Ce funcție se numește funcție putere cu exponent întreg?
2. Ce figură prezintă graficul funcției  $y = x^0$ ?
3. Formulați proprietățile funcției  $y = x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Reprezentați schematic graficul funcției  $y = x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .



### EXERCIIU

3.1.° Trece oare graficul funcției  $y = x^{-4}$  prin punctul:

- 1)  $A\left(2; \frac{1}{16}\right)$ ;    2)  $B\left(-2; \frac{1}{8}\right)$ ;    3)  $C\left(\frac{1}{3}; 81\right)$ ;    4)  $D\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{4}\right)$ ?

3.2.° Trece oare graficul funcției  $y = x^{-5}$  prin punctul:

- 1)  $A(0; 0)$ ;    2)  $B(-1; -1)$ ;    3)  $C\left(\frac{1}{2}; 32\right)$ ;    4)  $D\left(-3; -\frac{1}{243}\right)$ ?

3.3.° Se dă funcția  $f(x) = x^{-19}$ . Comparați:

- 1)  $f(1,6)$  și  $f(2)$ ;    3)  $f(-9,6)$  și  $f(9,6)$ ;  
2)  $f(-5,6)$  și  $f(-6,5)$ ;    4)  $f(0,1)$  și  $f(-10)$ .

**3.4.°** Funcția este dată prin formula  $f(x) = x^{-40}$ . Comparați:

- 1)  $f(6,2)$  și  $f(5,5)$ ;                      3)  $f(24)$  și  $f(-24)$ ;  
2)  $f(-1,6)$  și  $f(-1,7)$ ;                      4)  $f(-8)$  și  $f(6)$ .

**3.5.°** Găsiți domeniul de definiție al funcției:

- 1)  $y = (x^{-1})^{-1}$ ;                                      2)  $y = ((x - 2)^{-2})^{-2}$ .

**3.6.°** Găsiți cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției  $f(x) = x^{-6}$  pe intervalul:

- 1)  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ ;                                      2)  $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$ ;                                      3)  $[1; +\infty)$ .

**3.7.°** Găsiți cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției  $f(x) = x^{-3}$  pe intervalul:

- 1)  $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$ ;                                      2)  $[-2; -1]$ ;                                      3)  $(-\infty; -3]$ .

**3.8.\*\*** Construiți graficul funcției:

- 1)  $y = (x - 2)^0$ ;                                      2)  $y = (x^2 - 4x + 3)^0$ .

**3.9.\*\*** Construiți graficul ecuației:

- 1)  $(y + 2)^0 = x - 2$ ;                                      2)  $(y - 2)^0 = (x + 1)^0$ .



## NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

**3.10.** Aflați valoarea expresiei:

- 1)  $5\sqrt{4} - \sqrt{25}$ ;                                      2)  $\frac{1}{3}\sqrt{0,09} - 2$ ;                                      3)  $(\sqrt{13})^2 - 3 \cdot (\sqrt{8})^2$ .

**3.11.** Comparați numerele:

- 1)  $\sqrt{\frac{1}{3}}$  și  $\sqrt{\frac{1}{5}}$ ;                                      2)  $\sqrt{33}$  și 6;                                      3)  $\sqrt{30}$  și  $2\sqrt{7}$ .

## 4. Definiția radicalului de ordinul $n$

Cunoașteți faptul, că rădăcina de ordinul doi (rădăcina pătrată) din numărul  $a$  se numește un astfel de număr, care ridicat la puterea a doua este egal cu  $a$ . Analogic se dă definiția rădăcinii de ordinul  $n$  din numărul  $a$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ .

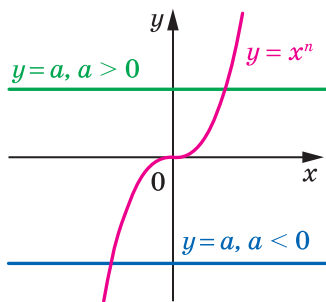
**Definiție.** Rădăcina de ordinul  $n$  din numărul  $a$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , se numește un astfel de număr, care ridicat la puterea  $n$  este egal cu  $a$ .

De exemplu, rădăcina de ordinul cinci din numărul 32 este numărul 2, deoarece  $2^5 = 32$ ; rădăcina de ordinul trei din numărul  $-64$  este

numărul  $-4$ , deoarece  $(-4)^3 = -64$ ; rădăcini de ordinul patru din numărul  $81$  sunt numerele  $3$  și  $-3$ , deoarece  $3^4 = 81$  și  $(-3)^4 = 81$ .

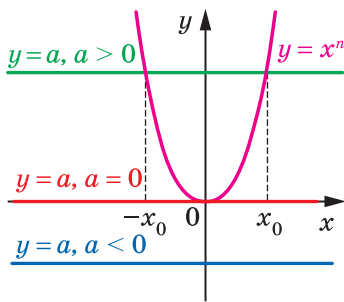
Dacă  $n$  – număr natural impar, atunci graficele funcțiilor  $y = x^n$  și  $y = a$  pentru oricare  $a$  se intersectează într-un punct (fig. 4.1). Această înseamnă, că ecuația  $x^n = a$  are o singură soluție pentru orice  $a$ . Atunci se poate trage o astfel de concluzie:

***dacă  $n$  – număr natural impar, este mai mare decât 1, atunci din orice număr există rădăcină de ordinul  $n$ , totodată numai una singură.***



$n$  — număr natural impar,  
 $n > 1$

Fig. 4.1



$n$  — număr natural par

Fig. 4.2

Rădăcina de ordin impar  $n$ ,  $n > 1$ , din numărul  $a$  se înseamnă astfel:  $\sqrt[n]{a}$  (se citește astfel: ”rădăcina de ordinul  $n$  din  $a$ ”). De exemplu,  $\sqrt[5]{32} = 2$ ,  $\sqrt[3]{-64} = -4$ ,  $\sqrt[7]{0} = 0$ .

Semnul  $\sqrt[n]{\phantom{a}}$  se numește **rădăcină de ordinul  $n$**  sau **radical de ordinul  $n$** . (Numărul  $n$  se numește **ordinul radicalului** sau **indicele radicalului**)<sup>1</sup>. Expresia, care se află sub semnul radicalului, se numește **expresie de sub radical**.

Radicalul de ordinul trei este primit deasemenea de-1 numit rădăcină cubică. De exemplu, scrierea  $\sqrt[3]{2}$  se citește: ”rădăcina cubică din numărul  $2$ ”.

Accentuăm, că expresia  ${}^{2k+1}\sqrt{a}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , este definită pentru oricare  $a$ .

Din definiția radicalului de ordinul  $n$  reiese, că **pentru  $a$  arbitrar se execută egalitatea**

$$\left( {}^{2k+1}\sqrt{a} \right)^{2k+1} = a$$

De exemplu,  $\left( \sqrt[3]{2} \right)^3 = 2$ ,  $\left( \sqrt[7]{-0,1} \right)^7 = -0,1$ .

<sup>1</sup> Nota traducătorului

Să considerăm ecuația  $x^n = a$ , unde  $n$  – număr natural par.

Din figura 4.2 se vede: dacă  $a < 0$ , atunci graficele funcțiilor  $y = x^n$  și  $y = a$  nu au puncte comune; dacă  $a = 0$ , atunci graficele considerate au un punct comun; dacă  $a > 0$ , atunci sunt două puncte comune, și totodată abscisele lor sunt numere opuse. Atunci se poate face astfel de concluzie:

**Dacă  $n$  este număr natural par, atunci pentru  $a < 0$  rădăcina de ordinul  $n$  din numărul  $a$  nu există; pentru  $a = 0$  rădăcina de ordinul  $n$  din numărul  $a$  este egală cu zero; pentru  $a > 0$  există două numere opuse, fiecare din ele fiind rădăcina de ordinul  $n$  din numărul  $a$ .**

Voi știți, că rădăcina pătrată aritmetică dintr-un număr nenegativ  $a$  se numește un astfel de număr nenegativ, pătratul căruia este egal cu  $a$ . Analogic se dă definiția rădăcinii aritmetice de ordinul  $n$ .

**Definiție.** Se numește **rădăcină aritmetică de ordin  $n$**  dintr-un număr nenegativ  $a$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , un astfel de număr nenegativ puterea  $n$  a căruia este egală cu  $a$ .

Rădăcina aritmetică de ordinul  $n$  dintr-un număr nenegativ  $a$  se înseamnă astfel:  $\sqrt[n]{a}$ .

De exemplu,  $\sqrt[4]{81} = 3$ , deoarece  $3 \geq 0$  și  $3^4 = 81$ ;

$\sqrt[6]{64} = 2$ , deoarece  $2 \geq 0$  și  $2^6 = 64$ ;

$\sqrt[10]{0} = 0$ , deoarece  $0 \geq 0$  și  $0^{10} = 0$ .

În general, **dacă  $b \geq 0$  și  $b^n = a$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , atunci  $\sqrt[n]{a} = b$ .**

Cu ajutorul semnului radicalului de ordinul  $n$  se pot scrie rădăcinile ecuației  $x^n = a$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ .

De exemplu, rădăcina ecuației  $x^3 = 7$  este singurul număr  $\sqrt[3]{7}$ ; rădăcinile ecuației  $x^4 = 5$  sunt două numere:  $-\sqrt[4]{5}$  și  $\sqrt[4]{5}$ .

Din definiția rădăcinii aritmetice de ordinul  $n$  reiese, că:

1)  $\sqrt[n]{a} \geq 0$ , unde  $a \geq 0$  (de exemplu,  $\sqrt[4]{7} \geq 0$ );

2)  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ , unde  $a \geq 0$  (de exemplu,  $(\sqrt[6]{5})^6 = 5$ );

3)  ${}^{2k+1}\sqrt{-a} = -{}^{2k+1}\sqrt{a}$  (de exemplu,  $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$ ).

Mai sus s-a stabilit, că rădăcina de ordin impar din orice număr există și are o singură valoare. Deci, fiecărui număr real  $x$  i se poate pune în corespondență un singur număr  $y$ , astfel, că  $y = \sqrt[2k+1]{x}$ . Regula menționată definește funcția  $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ , unde  $k \in \mathbb{N}$ , cu domeniul de definiție  $\mathbb{R}$ . Graficul acestei funcții este prezentat în figura 4.3. În figura 4.4 este prezentat graficul funcției  $y = \sqrt[3]{x}$ .

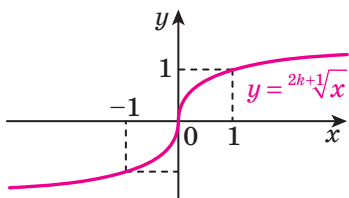


Fig. 4.3

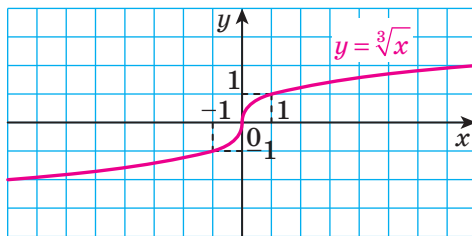


Fig. 4.4

Analogic se definește și funcția  $f(x) = \sqrt[k]{x}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Domeniul de definiție al acestei funcții este intervalul  $[0; +\infty)$ .

În figura 4.5. este reprezentat graficul funcției  $f(x) = \sqrt[k]{x}$ , iar în figura 4.6. – graficul funcției  $f(x) = \sqrt[4]{x}$ .

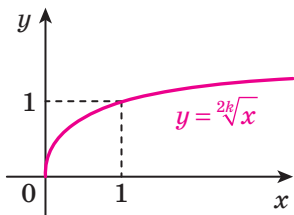


Fig. 4.5

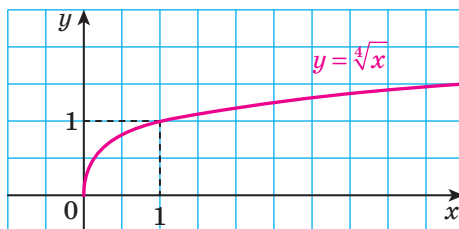


Fig. 4.6

În tabel sunt expuse proprietățile funcției  $y = \sqrt[n]{x}$ .

Proprietatea	$n$ – număr natural impar, $n > 1$	$n$ – număr natural par
Domeniul de definiție	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$
Domeniul de valori	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$
Zerourile funcției	$x = 0$	$x = 0$
Intervalele de constanță a semnului	$y < 0$ pe intervalul $(-\infty; 0)$ $y > 0$ pe intervalul $(0; +\infty)$	$y > 0$ pe intervalul $(0; +\infty)$
Paritatea	Impară	Nu este nici pară nici impară
Creștere / descreștere	Crescătoare	Descrescătoare

**Problemă.** Rezolvați inecuația: 1)  $\sqrt[3]{x} < 2$ ; 2)  $\sqrt[4]{x-2} < 1$ .

*Rezolvare.* 1) Inecuația dată o transcriem în astfel de mod:  $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{8}$ . Deoarece funcția  $y = \sqrt[3]{x}$  este crescătoare, atunci se poate concluziona, că  $x < 8$ .

*Răspuns:*  $(-\infty; 8)$ .

2) Dispunem de:  $\sqrt[4]{x-2} < \sqrt[4]{1}$ . Deoarece funcția  $y = \sqrt[4]{t}$  este crescătoare și este definită pe mulțimea  $[0; +\infty)$ , atunci egalitatea dată este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x - 2 < 1, \\ x - 2 \geq 0. \end{cases}$$

De aici  $2 \leq x < 3$ .

*Răspuns:*  $[2; 3)$ . ◀



1. Ce se numește rădăcină de ordinul  $n$  din numărul  $a$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ ?
2. Pentru care valori ale lui  $a$  are sens expresia  $\sqrt[2k+1]{a}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ?
3. Ce se numește rădăcină aritmetică de ordinul  $n$  dintr-un număr nenegativ  $a$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ ?
4. Pentru care valori ale lui  $a$  are sens expresia  $\sqrt[2k]{a}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ?
5. Formulați proprietățile funcției  $y = \sqrt[2k+1]{x}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , și reprezentați schematic graficul ei.
6. Formulați proprietățile funcției  $y = \sqrt[2k]{x}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , și reprezentați schematic graficul ei.



## EXERCIȚII

4.1.° Are oare sens scrierea:

- 1)  $\sqrt[3]{2}$ ;      2)  $\sqrt[3]{-2}$ ;      3)  $\sqrt[4]{2}$ ;      4)  $\sqrt[6]{0}$ ;      5)  $\sqrt[6]{-1}$ ?

4.2.° Este oare corectă egalitatea (argumentați răspunsul):

- 1)  $\sqrt[3]{27} = 3$ ;      2)  $\sqrt[3]{343} = -3$ ?

4.3.° Demonstrați, că:

- 1) Numărul 2 este rădăcina cubică din numărul 8;
- 2) Numărul 3 este rădăcina aritmetică de ordinul patru din numărul 81;
- 3) Numărul  $-3$  nu este rădăcina aritmetică de ordinul patru din numărul 81.

4.4.° Аflаți valoarea expresiei:

$$1) \sqrt[3]{216}; \quad 2) \sqrt[4]{0,0016}; \quad 3) \sqrt[5]{-0,00001}; \quad 4) \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}; \quad 5) \frac{1}{3} \sqrt[5]{-243}.$$

4.5.° Cu ce este egală valoarea expresiei:

$$1) \sqrt[3]{343}; \quad 2) 0,5 \sqrt[3]{-64}; \quad 3) -\sqrt[5]{-1024}?$$

4.6.° Calculаți:

$$1) (\sqrt[3]{5})^3; \quad 2) (-\sqrt[4]{7})^4; \quad 3) (-\sqrt[7]{2})^7; \quad 4) (-2\sqrt[7]{-5})^7.$$

4.7.° Аflаți valoarea expresiei:

$$1) (\sqrt[8]{18})^8; \quad 2) (-\sqrt[9]{9})^9; \quad 3) (-\sqrt[6]{11})^6; \quad 4) \left(\frac{1}{3} \sqrt[3]{45}\right)^3.$$

4.8.° Rezolvați ecuația:

$$\begin{array}{lll} 1) x^3 = 27; & 4) x^4 = 16; & 7) 27x^3 - 1 = 0; \\ 2) x^5 = 9; & 5) x^6 = 5; & 8) (x - 2)^3 = 125; \\ 3) x^7 = -2; & 6) x^4 = -81; & 9) (x + 5)^4 = 10\,000. \end{array}$$

4.9.° Rezolvați ecuația:

$$\begin{array}{lll} 1) x^9 = 1; & 3) x^{18} = 0; & 5) 64x^5 + 2 = 0; \\ 2) x^{10} = 1; & 4) x^6 = -64; & 6) (x - 3)^6 = 729. \end{array}$$

4.10.° Rezolvați ecuația:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt[3]{x} = \frac{4}{5}; & 3) \sqrt[3]{x} = -6; & 5) \sqrt[3]{2x} + 7 = 0; \\ 2) \sqrt[4]{x} = 3; & 4) \sqrt[6]{x} = -2; & 6) \sqrt[3]{2x} + 7 = 0. \end{array}$$

4.11.° Rezolvați ecuația:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt[3]{x} = -2; & 3) \sqrt[5]{x} = -2; & 5) \sqrt[4]{3x - 2} = 0; \\ 2) \sqrt[4]{x} = -2; & 4) \sqrt[4]{3x - 2} = 0; & 6) \sqrt[4]{3x - 2} = 2. \end{array}$$

4.12.° Calculаți:  $0,3 \sqrt[3]{1000} - 5 \sqrt[8]{256} + 6 \cdot (-\sqrt[10]{6})^{10}$ .

4.13.° Calculаți:  $200 \sqrt[3]{0,001} - \sqrt[5]{-0,00032} - (-4\sqrt{2})^2$ .

4.14.° Găsiți domeniul de definiție al funcției:

$$1) y = \sqrt[3]{x - 1}; \quad 2) y = \sqrt[6]{x + 1}; \quad 3) y = \sqrt[4]{x^2 - x - 2}.$$

4.15.° Găsiți domeniul de definiție al funcției:

$$1) y = \sqrt[4]{2 - x}; \quad 2) y = \sqrt[9]{\frac{x + 1}{x - 3}}; \quad 3) y = \sqrt[6]{x^2 - 4x + 3}.$$

4.16.° Între care două numere consecutive întregi se află numărul pe dreapta de coordonate:

$$1) \sqrt[3]{3}; \quad 2) \sqrt[4]{21}; \quad 3) \sqrt[3]{100}; \quad 4) -\sqrt[3]{81}?$$

4.17.\* Între care două numere consecutive întregi se află numărul pe dreapta de coordonate:

1)  $\sqrt[3]{18}$ ;                      2)  $\sqrt[4]{139}$ ;                      3)  $-\sqrt[3]{212}$ ?

4.18.\* Rezolvați inecuația:

1)  $\sqrt[5]{x} > 3$ ;                      2)  $\sqrt[6]{x-3} < 2$ ;                      3)  $\sqrt[4]{x+1} > 1$ .

4.19.\*\* Construiți graficul funcției:

1)  $y = (\sqrt[3]{x})^3$ ;                      2)  $y = (\sqrt[4]{x})^4$ .

4.20.\*\* Rezolvați ecuația:

1)  $(x^2 - 4)\sqrt[4]{x+1} = 0$ ;                      2)  $(x-1)\sqrt[10]{x^2 - 2x - 3} = 0$ .

4.21.\*\* Rezolvați ecuația  $(x+2)\sqrt[6]{x^2 + 2x - 3} = 0$ .

4.22.\*\* Construiți graficul funcției  $y = (\sqrt[4]{x-1})^4 + (\sqrt[4]{1-x})^4 + 1$ .

4.23.\*\* Construiți graficul funcției  $y = (\sqrt[8]{2+x})^8 + (\sqrt[6]{2-x})^6$ .



NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

4.24. Calculați valoarea expresiei:

1)  $\sqrt{0,64 \cdot 36}$ ;                      2)  $\sqrt{6^2 \cdot 3^4}$ ;                      3)  $\sqrt{\frac{81}{100}}$ .

4.25. Calculați valoarea expresiei:

1)  $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$ ;                      2)  $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3^3}$ ;                      3)  $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$ .

## 5. Proprietățile radicalului de ordinul $n$

Să cercetăm teoremele, care exprimă proprietățile radicalului de ordinul  $n$ .

**Teorema 5.1 (prima teoremă despre rădăcina din putere).** Pentru oricare  $a \in \mathbb{R}$  și  $k \in \mathbb{N}$  sunt adevărate egalitățile:

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a,$$

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|.$$

*Demonstrație.* Pentru a demonstra egalitatea  $\sqrt[2k+1]{x} = y$ , este suficient de arătat, că  $y^{2k+1} = x$ . Pentru prima egalitate, ce se demonstrează,  $x = a^{2k+1}$ , iar  $y = a$ . De aici egalitatea  $y^{2k+1} = x$  este evidentă.



Для а демонстра егалитатеа  $\sqrt[2k]{x} = y$ , есте сфученте де арăтат, чă  $y \geq 0$  ши  $y^{2k} = x$ . Для а ддуа егалитате, се се демонстреазă, авем:  $|a| \geq 0$  ши  $(|a|)^{2k} = a^{2k}$ . ◀

**Теорема 5.2 (рăдăчина дин проду).** *Дачă  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , атунци*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

*Демонстраџие.* Для а демонстра егалитатеа  $\sqrt[n]{x} = y$ , unde  $x \geq 0$ , есте сфученте де арăтат чă  $y \geq 0$  ши  $y^n = x$ .

Диспунем де:  $\sqrt[n]{a} \geq 0$  ши  $\sqrt[n]{b} \geq 0$ . Атунци  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$ .

Тотодатă,  $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab$ . ◀

**Теорема 5.3 (рăдăчина дин чăт).** *Дачă  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , атунци*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

**Теорема 5.4 (путереа рăдăчинии).** *Дачă  $a \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , атунци*

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

*Демонстраџие.* Дачă  $k = 1$ , атунци егалитатеа, се се демонстреазă, есте евидентă.

Фие  $k > 1$ .

$$\text{Авем: } (\sqrt[n]{a})^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ фактори}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{k \text{ фактори}}} = \sqrt[n]{a^k}. \quad \blacktriangleleft$$

**Теорема 5.5 (рăдăчина дин радикал).** *Дачă  $a \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ ,  $k > 1$ , атунци*

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

*Демонстраџие.* Диспунем де:  $\sqrt[nk]{a} \geq 0$ .

Тотодатă,  $(\sqrt[nk]{a})^{nk} = ((\sqrt[nk]{a})^n)^k = (\sqrt[k]{a})^k = a$ . ◀

**Теорема 5.6 (а ддуа теоремă despre рăдăчина дин путере).** *Дачă  $a \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , атунци*

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}.$$

*Демонстраџие.* Дачă  $k = 1$ , атунци егалитатеа, се се демонстреазă, есте евидентă.

Фие  $k > 1$ . Авем:  $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}$ . ◀

**Problema 1.** Aflați valoarea expresiei:

$$1) \sqrt[4]{(-7,3)^4}; \quad 2) \sqrt[6]{1,2^{12}}; \quad 3) \sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}; \quad 4) \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}}.$$

*Rezolvare.* 1) Folosind teorema 5.1, se poate scrie:

$$\sqrt[4]{(-7,3)^4} = |-7,3| = 7,3.$$

$$2) \sqrt[6]{1,2^{12}} = 1,2^2 = 1,44.$$

3) Înlocuind produsul rădăcinilor prin rădăcina din produs, obținem:

$$\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{16 \cdot 2} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

4) Înlocuind câtul rădăcinilor prin rădăcina câtului, vom avea:

$$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}} = \sqrt[3]{\frac{24}{375}} = \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}. \quad \blacktriangleleft$$

**Problema 2.** Simplificați expresia:

$$1) \sqrt[4]{a^{28}}; \quad 2) \sqrt[6]{64a^{18}}, \text{ dacă } a \leq 0; \quad 3) \sqrt[12]{a^3}; \quad 4) \sqrt[6]{a^2}.$$

*Rezolvare.* 1) Folosind teorema 5.1 obținem:  $\sqrt[4]{a^{28}} = \sqrt[4]{(a^7)^4} = |a^7|$ .

2) Avem:  $\sqrt[6]{64a^{18}} = 2|a^3|$ . Deoarece conform condiției  $a \leq 0$ , atunci  $a^3 \leq 0$ . Atunci  $\sqrt[6]{64a^{18}} = 2|a^3| = -2a^3$ .

$$3) \sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}.$$

$$4) \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{|a|}. \quad \blacktriangleleft$$

**Problema 3.** Scoateți factorul de sub semnul radicalului:

$$1) \sqrt[3]{250}; \quad 2) \sqrt[8]{b^{43}}.$$

*Rezolvare.* 1) Vom prezenta numărul, care se află sub semnul radicalului, în formă de produs a două numere, unul din care este cubul numărului rațional, și scoatem factorul de sub semnul rădăcinii:

$$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \cdot 2} = 5 \sqrt[3]{2}.$$

2) Din condiție reiese, că  $b \geq 0$ .

$$\text{Atunci } \sqrt[8]{b^{43}} = \sqrt[8]{b^{40}b^3} = |b^5| \sqrt[8]{b^3} = b^5 \sqrt[8]{b^3}. \quad \blacktriangleleft$$

**Problema 4.** Introduceți factorul sub semnul radicalului:

$$1) -2 \sqrt[6]{3}; \quad 2) c \sqrt[10]{c^7}.$$

*Rezolvare.* 1)  $-2 \sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{192}$ .

2) Din condiție reiese, că  $c \geq 0$ .

$$\text{Atunci } c \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{10}} \cdot \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{17}}. \quad \blacktriangleleft$$

**Проблема 5.** Зменшіть дріб  $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}}$ .

*Розв'язок.* Розкладаючи чисельник і знаменник дробу на множники, маємо:

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})^2} = \frac{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}. \blacktriangleleft$$



1. Сформулюйте першу теорему про степінь кореня.
2. Сформулюйте теорему про степінь добутку.
3. Сформулюйте теорему про степінь частки.
4. Сформулюйте теорему про степінь степеня радикалу.
5. Сформулюйте теорему про степінь кореня радикалу.
6. Сформулюйте другу теорему про степінь кореня.



## ВІВЧЕННЯ

5.1.° Знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt[3]{64 \cdot 125}; \quad 2) \sqrt[5]{2^{10} \cdot 7^5}; \quad 3) \sqrt[4]{\frac{3^{12} \cdot 11^4}{5^8 \cdot 2^{16}}}.$$

5.2.° Обчисліть значення виразу:

$$1) \sqrt[3]{0,064 \cdot 343}; \quad 2) \sqrt[5]{\frac{7^5}{2^{10}}}; \quad 3) \sqrt[8]{\frac{2^{24} \cdot 3^{16}}{5^{16}}}.$$

5.3.° Знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}; \quad 3) \frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}; \quad 5) \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10};$$

$$2) \sqrt[3]{0,054} \cdot \sqrt[3]{4}; \quad 4) \frac{\sqrt[8]{2^{30} \cdot 7^{12}}}{\sqrt[8]{2^6 \cdot 7^4}}; \quad 6) \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[3]{-9}.$$

5.4.° Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}; \quad 3) \sqrt[7]{2^{15} \cdot 5^3} \cdot \sqrt[7]{2^6 \cdot 5^4}; \quad 5) \sqrt[3]{2\sqrt{17} + 10} \cdot \sqrt[5]{2\sqrt{17} - 10};$$

$$2) \frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}; \quad 4) \frac{\sqrt[6]{3^{10} \cdot 10^2}}{\sqrt[6]{10^8 \cdot 3^4}}; \quad 6) \frac{\sqrt[3]{256} \cdot \sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{12}}.$$

5.5.° Спростіть вираз:

$$1) \sqrt[5]{a}; \quad 2) \sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}; \quad 3) \sqrt[15]{c^6}; \quad 4) \sqrt[18]{a^8 b^{24}}.$$

**5.6.°** Simplificați expresia:

$$1) \sqrt[6]{\sqrt{x}}; \quad 2) \sqrt{\sqrt{y}}; \quad 3) \sqrt[12]{a^3}; \quad 4) \sqrt[21]{a^{14}b^7}.$$

**5.7.°** Scoateți factorul de sub semnul radicalului:

$$1) \sqrt[3]{16}; \quad 2) \sqrt[4]{162}; \quad 3) \sqrt[3]{250}; \quad 4) \sqrt[3]{40a^5}; \quad 5) \sqrt[3]{-a^7}.$$

**5.8.°** Scoateți factorul de sub semnul radicalului:

$$1) \sqrt[4]{80}; \quad 2) \sqrt[3]{432}; \quad 3) \sqrt[3]{54y^8}.$$

**5.9.°** Introduceți factorul sub semnul radicalului:

$$1) 2\sqrt{3}; \quad 2) 4\sqrt[3]{5}; \quad 3) 5\sqrt[3]{0,04x}; \quad 4) b\sqrt[5]{3b^3}; \quad 5) c\sqrt[3]{\frac{5}{c^2}}.$$

**5.10.°** Introduceți factorul sub semnul radicalului

$$1) \frac{1}{4}\sqrt[3]{320}; \quad 2) 2\sqrt[4]{7}; \quad 3) 5\sqrt[4]{4a}; \quad 4) 2x^3\sqrt[5]{\frac{x^3}{8}}.$$

**5.11.°** Schimbați expresia  $\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{320} - \sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{40}$  cu una identică egală cu ea.

**5.12.°** Simplificați expresia  $\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{2000}$ .

**5.13.°** Simplificați expresia:

$$1) \sqrt{2\sqrt{3}}; \quad 2) \sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}; \quad 3) \sqrt[3]{2\sqrt{2}\sqrt{2}}.$$

**5.14.°** Simplificați expresia:

$$1) \sqrt[3]{\sqrt{3}}; \quad 2) \sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}; \quad 3) \sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}.$$

**5.15.°** Simplificați expresia:

$$1) (1 + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2})(1 - \sqrt[3]{a}); \quad 2) (1 + \sqrt{a})(1 + \sqrt[4]{a})(1 - \sqrt[4]{a}).$$

**5.16.°** Simplificați expresia  $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{ab} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})$ .

**5.17.°** Pentru care valori ale lui  $a$  este adevărată egalitatea:

$$1) \sqrt[4]{a^4} = a; \quad 2) \sqrt[4]{a^4} = -a; \quad 3) \sqrt[3]{a^3} = a; \quad 4) \sqrt[3]{a^3} = -a?$$

**5.18.\*\*** Pentru care valori ale lui  $a$  este adevărată egalitatea:

$$1) \sqrt[6]{a^{30}} = a^5; \quad 2) \sqrt[6]{a^{30}} = -a^5; \quad 3) \sqrt[4]{a^4} = (\sqrt[4]{a})^4; \quad 4) \sqrt[4]{a^4} = (\sqrt[4]{-a})^4?$$

**5.19.\*\*** Pentru care valori ale lui  $a$  și  $b$  este adevărată egalitatea:

$$1) \sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{-a} \cdot \sqrt[4]{-b}; \quad 3) \sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{b};$$

$$2) \sqrt[4]{-ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{-b}; \quad 4) \sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{-a} \cdot \sqrt[5]{-b}?$$

**5.20.\*\*** Pentru care valori ale lui  $x$  este adevărată egalitatea:

$$1) \sqrt[4]{x^2 - 4} = \sqrt[4]{x - 2} \cdot \sqrt[4]{x + 2};$$

$$2) \sqrt[3]{(x - 6)(x - 10)} = \sqrt[3]{x - 6} \cdot \sqrt[3]{x - 10}?$$

5.21.\*\* Спростуйте вираз:

- 1)  $\sqrt[6]{m^6}$ , якщо  $m \geq 0$ ;                      4)  $\sqrt[6]{c^{24}}$ ;  
 2)  $\sqrt[4]{n^4}$ , якщо  $n \leq 0$ ;                      5)  $\sqrt{0,25b^{14}}$ , якщо  $b \leq 0$ ;  
 3)  $\sqrt[8]{256k^8}$ , якщо  $k \leq 0$ ;                      6)  $\sqrt[4]{81x^8y^4}$ , якщо  $y \geq 0$ .

5.22.\*\* Спростуйте вираз:

- 1)  $\sqrt[4]{625a^{24}}$ ;                      3)  $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$ , якщо  $p \geq 0$ .  
 2)  $-5\sqrt{4x^2}$ , якщо  $x \leq 0$ ;

5.23.\*\* Спростуйте дріб:

- 1)  $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$ ;                      3)  $\frac{\sqrt[8]{ab^2} - \sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$ ;                      5)  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{ab} + \sqrt[3]{b}}$ ;  
 2)  $\frac{\sqrt[6]{x} - 9}{\sqrt[12]{x} + 3}$ ;                      4)  $\frac{\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} + 16}{x - 64}$ ;                      6)  $\frac{\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{a} + \sqrt{a} - 1}{a - \sqrt{a}}$ .

5.24.\*\* Спростуйте дріб:

- 1)  $\frac{\sqrt[6]{a} + 1}{\sqrt[3]{a} - 1}$ ;                      2)  $\frac{\sqrt{m} - \sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn} - \sqrt{n}}$ ;                      3)  $\frac{a - b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$ ;                      4)  $\frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$ .

5.25.\*\* Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $\sqrt[4]{(x+4)^4} = x+4$ ;                      2)  $\sqrt[4]{(1-3x)^8} = (1-3x)^2$ .

5.26.\*\* Спростуйте вираз:

- 1)  $\sqrt[6]{(\sqrt{6}-2)^3}$ ;                      2)  $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}$ ;                      3)  $\sqrt[9]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3}$ .

5.27.\*\* Спростуйте вираз:

- 1)  $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4}$ ;                      2)  $\sqrt[10]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$ ;                      3)  $\sqrt[15]{(\sqrt{7}-3)^3}$ .

5.28.\*\* Виведіть множник під знаком радикала:

- 1)  $\sqrt[4]{-m^9}$ ;                      2)  $\sqrt[4]{a^8b^{13}}$ , якщо  $a > 0$ .

5.29.\*\* Виведіть множник під знаком радикала:

- 1)  $\sqrt[4]{32a^6}$ , якщо  $a \leq 0$ ;                      2)  $\sqrt[4]{-625a^5}$ .

5.30.\*\* Введіть множник під знаком радикала:

- 1)  $c\sqrt[3]{3}$ , якщо  $c \leq 0$ ;                      2)  $b\sqrt[6]{6}$ ;                      3)  $a\sqrt[6]{-a}$ .

5.31.\*\* Введіть множник під знаком радикала:

- 1)  $a\sqrt[6]{a}$ ;                      2)  $a\sqrt[4]{-a^3}$ .

5.32.\* Розв'яжіть рівняння  $\sqrt[4]{(x-3)^4} + \sqrt[6]{(5-x)^6} = 2$ .



## NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

5.33. Prezentați sub formă de putere cu baza  $a$  expresia:

- 1)  $\frac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}$ ;      3)  $a^{-5} \cdot a^{10} \cdot a^{-12}$ ;      5)  $a^{12} \cdot a^{-20} : a^{-9}$ ;  
 2)  $a^5 \cdot a^{-8}$ ;      4)  $a^{-3} : a^{-15}$ ;      6)  $(a^{-5})^4$ .

5.34. Găsiți valoarea expresiei:

- 1)  $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$ ;      3)  $\frac{14^{-5}}{7^{-5}}$ ;      5)  $\left(2\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$ ;  
 2)  $3^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ ;      4)  $9^{-4} \cdot 27^2$ ;      6)  $\frac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9}$ .

## 6. Definiția și proprietățile puterii cu exponent rațional

În clasa a 7-a ați aflat, că puterea cu exponent natural are astfel de proprietăți:

- 1)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ;  
 2)  $a^m : a^n = a^{m-n}$ ,  $a \neq 0$ ,  $m > n$ ;  
 3)  $(a^m)^n = a^{mn}$ ;  
 4)  $(ab)^n = a^n b^n$ ;  
 5)  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ,  $b \neq 0$ .

Mai târziu ați făcut cunoștință cu definiția puterii cu exponent nul și a puterii cu exponent întreg negativ:

$$a^0 = 1, a \neq 0;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Aceste definiții sunt foarte reușite: prin această abordare toate cinci proprietăți ale puterii cu exponent natural au rămas adevărate și pentru puterea cu exponent întreg.

Să introducem noțiunea de putere cu exponent fracționar, adică a puterii  $a^r$ , exponentul căreia este număr rațional  $r = \frac{m}{n}$ , unde  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ . Este de dorit de realizat aceasta astfel, ca puterea cu exponent fracționar să posede toate proprietățile puterii cu exponent întreg. Sugestie pentru definirea necesară poate servi astfel de exemplu.

Însemnăm prin  $x$  valoarea căutată a puterii  $2^{\frac{2}{3}}$ , adică  $x = 2^{\frac{2}{3}}$ . Ținând cont de proprietatea  $(a^m)^n = a^{mn}$ , putem nota:  $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^2$ . Deci,  $x$  este rădăcina cubică din numărul  $2^2$ , adică  $x = \sqrt[3]{2^2}$ . Astfel,  $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$ .

Aceste raționamente ne vorbesc de faptul, că este rațional de acceptat astfel de definiție.

**Definiție. Putere a numărului pozitiv  $a$  cu exponent rațional  $r$ , prezentat sub forma  $\frac{m}{n}$ , unde  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , se numește, numărul  $\sqrt[n]{a^m}$ , adică**

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

De exemplu,  $5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}$ ,  $3^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{3^{-1}}$ ,  $0,4^{0,3} = 0,4^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0,4^3}$ .

Menționăm, că valoarea puterii  $a^r$ , unde  $r$  – număr rațional, nu depinde de aceea, care-i forma fracției cu care este egal numărul  $r$ . Aceasta se poate arăta, folosind egalitățile  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  și  $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$ .

Puterea cu baza, care este egală cu zero, se definește doar pentru exponent pozitiv rațional.

**Definiție.  $0^{\frac{m}{n}} = 0$ , unde  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .**

Atragem atenția, că, de exemplu, notarea  $0^{\frac{1}{2}}$  nu are sens.

Accentuăm, că în definiții nu merge vorba despre puterea  $a^{\frac{m}{n}}$  pentru  $a < 0$ , de exemplu, expresia  $(-2)^{\frac{1}{3}}$  rămâne nedeterminată. Totodată expresia  $\sqrt[3]{-2}$  are sens. Apare întrebarea: de ce să nu socotim, că  $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$ ? Vom arăta că o astfel de înțelegere ar duce la contradicție:

$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Am obține, că numărul negativ  $\sqrt[3]{-2}$  "este egal" cu numărul pozitiv  $\sqrt[6]{4}$ .

Funcția, care poate fi definită cu ajutorul formulei  $y = x^r$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ , se numește **funcție putere cu exponent rațional**.

Dacă fracția ireductibilă  $\frac{m}{n}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , este număr pozitiv, atunci domeniul de definiție al funcției  $y = x^{\frac{m}{n}}$  este intervalul  $[0; +\infty)$ ; dar dacă această fracție este număr negativ, atunci intervalul  $(0; +\infty)$ .

În figura 6.1 sunt reprezentate graficele funcțiilor  $y = x^{\frac{1}{2}}$ ,  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ,  $y = x^{\frac{1}{4}}$ .

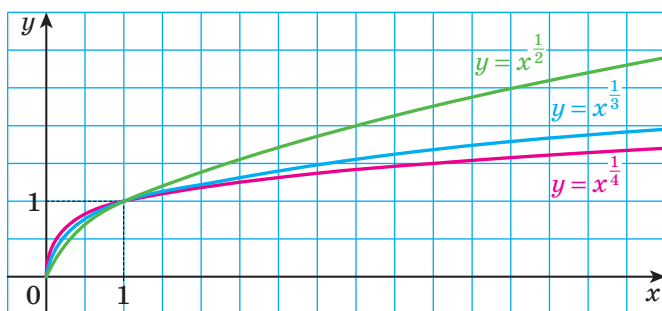


Fig. 6.1

Vom arăta, că proprietățile puterii cu exponent întreg rămân adevărate și pentru puterea cu exponent rațional arbitrar.

**Teorema 6.1 (produsul puterilor).** Pentru  $a > 0$  arbitrar și pentru orice numere raționale  $p$  și  $q$  se realizează egalitatea

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

*Demonstrație.* Scriem numerele raționale  $p$  și  $q$  în formă de fracții cu același numitor:  $p = \frac{m}{n}$ ,  $q = \frac{k}{n}$ , unde  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ . Disponem de:

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{n}} = a^{p+q}. \blacktriangleleft$$

**Consecință.** Pentru orice  $a > 0$  și orice număr rațional  $p$  este adevărată egalitatea

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$



*Демонстрація.* Фолосинд теорема 6.1, срием:  $a^{-p} \cdot a^p = a^{-p+p} = a^0 = 1$ . Де аици  $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ . ◀

**Теорема 6.2 (цѣтл путерилор).** *Пену орице  $a > 0$  њи орице нумере рацїонале  $p$  њи  $q$  есте адевѣратѣ егалитеа*

$$a^p : a^q = a^{p-q}$$

*Демонстрація.* Фолосинд теорема 6.1, нотѣм:  $a^q \cdot a^{p-q} = a^{q+p-q} = a^p$ . Де аици  $a^{p-q} = a^p : a^q$ . ◀

**Теорема 6.3 (путереа путерии).** *Пену орице  $a > 0$  њи орице нумере рацїонале  $p$  њи  $q$  есте адевѣратѣ егалитеа*

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

*Демонстрація.* Фие  $p = \frac{m}{n}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , њи  $q = \frac{s}{k}$ ,  $s \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1$ . Авем:

$$(a^p)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{s}{k}} = \sqrt[k]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^s} = \sqrt[k]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ms}}} = \sqrt[kn]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{kn}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{s}{k}} = a^{pq}. \blacktriangleleft$$

**Теорема 6.4 (путереа продусулї њи путереа цѣтулї).** *Пену  $a > 0$  си  $b > 0$  арбитрари њи орице нумѣр рацїонал  $p$  есте адевѣратѣ егалитеа:*

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Демонстрацї ацеастѣ теоремѣ де сине стѣтѣтор.

**Проблема 1.** Сиплїфикацї еспрїа

$$(3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})(a^{0,3} - 2b^{0,2}).$$

*Резолваре.* Десчїдем парантезе, фолосинд регула їнмулцїрїї полїномелор њи формула дїференцїї пѣтрателор, їар аполї редукем терменїї асемenea:

$$\begin{aligned} & (3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})(a^{0,3} - 2b^{0,2}) = \\ & = \underline{3a^{0,6}} - \underline{12a^{0,3}b^{0,2}} + \underline{a^{0,3}b^{0,2}} - \underline{4b^{0,4}} - \underline{a^{0,6}} + \underline{4b^{0,4}} = 2a^{0,6} - 11a^{0,3}b^{0,2}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

**Проблема 2.** Сиплїфикацї еспрїа  $\frac{x^{\frac{1}{3}} + 2}{x^{\frac{1}{3}} - 2} - \frac{x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{3}} + 2} - \frac{16}{x^{\frac{2}{3}} - 4}$ .

*Rezolvare.* Efectuăm înlocuirea  $x^{\frac{1}{3}} = y$ . Atunci expresia dată obține aspectul:

$$\frac{y+2}{y-2} - \frac{y-2}{y+2} - \frac{16}{y^2-4}.$$

Această expresie este ușor de-o simplificat. Terminați singuri rezolvarea acestei probleme.

*Răspuns:*  $\frac{8}{x^{\frac{1}{3}}+2}$ . ◀



1. Ce se numește putere a numărului  $a$  cu exponentul  $\frac{m}{n}$ , unde  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ ?
2. Ce se numește putere a numărului 0 cu exponentul  $\frac{m}{n}$ , unde  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ?
3. Care funcție se numește funcție putere cu exponent rațional?
4. Formulați proprietățile puterii cu exponent rațional.



### EXERCIIII

**6.1.°** Prezentați sub formă de radical puterea cu exponent fracționar:

1)  $5^{\frac{1}{3}}$ ;                      2)  $b^{-\frac{1}{7}}$ ;                      3)  $(ab)^{\frac{4}{7}}$ .

**6.2.°** Prezentați sub formă de radical puterea cu exponent fracționar:

1)  $3^{-\frac{1}{9}}$ ;                      2)  $c^{0,2}$ ;                      3)  $x^{\frac{6}{7}}$ .

**6.3.°** Prezentați expresia sub formă de putere cu exponent fracționar:

1)  $\sqrt{x}$ ;                      2)  $\sqrt[7]{6^5}$ ;                      3)  $\sqrt[5]{2^{-2}}$ .

**6.4.°** Prezentați expresia sub formă de putere cu exponent fracționar:

1)  $\sqrt[7]{a^3}$ ;                      2)  $\sqrt[14]{m^{-9}}$ ;                      3)  $\sqrt[6]{5a^5}$ .

**6.5.°** Găsiți valoarea expresiei:

1)  $4^{\frac{1}{2}}$ ;                      3)  $3 \cdot 64^{\frac{1}{3}}$ ;                      5)  $27^{\frac{4}{3}}$ ;

2)  $25^{-\frac{1}{2}}$ ;                      4)  $-5 \cdot 0,01^{\frac{3}{2}}$ ;                      6)  $32^{-0,2}$ .

**6.6.°** Cu ce este egală valoarea expresiei:

1)  $8^{\frac{1}{3}}$ ;                      2)  $10000^{\frac{1}{4}}$ ;                      3)  $0,125^{-\frac{2}{3}}$ ?

6.7.° Гасіть значення виразу:

$$1) 3^{1,8} \cdot 3^{-2,6} \cdot 3^{2,8}; \quad 3) \left(25^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}; \quad 5) \left(\frac{5}{6}\right)^{4,5} \cdot 1,2^{4,5};$$

$$2) (5^{-0,8})^6 \cdot 5^{4,8}; \quad 4) \left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5}; \quad 6) \frac{8^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$$

6.8.° Чи є рівною значення виразу:

$$1) 5^{3,4} \cdot 5^{-1,8} \cdot 5^{-2,6}; \quad 2) (7^{-0,7})^8 : 7^{-7,6}; \quad 3) \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25}; \quad 4) \frac{81^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$$

6.9.° Відкрийте дужки:

$$1) 2a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} - 4\right) + 8a^{\frac{1}{2}}; \quad 4) (b^{0,4} + 3)^2 - 6b^{0,4};$$

$$2) \left(3b^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{3}{2}}\right) \left(3b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{3}{2}}\right); \quad 5) \left(c^{\frac{1}{3}} - 1\right) \left(c^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{1}{3}} + 1\right);$$

$$3) \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^2; \quad 6) \left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{2}}\right) \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{5}{6}} + a\right).$$

6.10.° Відкрийте дужки:

$$1) (5a^{0,4} + b^{0,2})(3a^{0,4} - 4b^{0,2}); \quad 4) \left(x^{\frac{1}{6}} + 2\right) \left(x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} + 4\right);$$

$$2) (m^{0,5} + n^{0,5})(m^{0,5} - n^{0,5}); \quad 5) (y^{1,5} - 4y^{0,5})^2 + 8y^2;$$

$$3) \left(m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right)^2; \quad 6) \left(a^{\frac{1}{8}} - 1\right) \left(a^{\frac{1}{4}} + 1\right) \left(a^{\frac{1}{8}} + 1\right).$$

6.11.° Обчисліть значення виразу:

$$1) 12^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}} \cdot (0,5)^{\frac{1}{3}}; \quad 3) \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (0,81)^{-0,5};$$

$$2) 25^{1,5} + (0,25)^{-0,5} - 81^{0,75}; \quad 4) 16^{\frac{1}{8}} \cdot 8^{-\frac{5}{6}} \cdot 4^{1,5}.$$

6.12.° Гасіть значення виразу:

$$1) \left(343^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}; \quad 3) 0,0016^{\frac{3}{4}} - 0,04^{\frac{1}{2}} + 0,216^{\frac{2}{3}};$$

$$2) 10^{\frac{1}{4}} \cdot 40^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}; \quad 4) 625^{-1,25} \cdot 25^{1,5} \cdot 125^{\frac{2}{3}}.$$

6.13.° Спростіть дріб:

$$1) \frac{a - 5a^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{a^2} - 5}; \quad 2) \frac{a - 4b}{a^{0,5} + 2b^{0,5}}; \quad 3) \frac{a - b}{\frac{1}{ab^2} + \frac{1}{a^2b}}$$

$$4) \frac{a + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}; \quad 5) \frac{a + b}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}; \quad 6) \frac{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}}.$$

6.14.\* Reduceți fracția:

$$1) \frac{a + 2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + 2}; \quad 3) \frac{a - b^2}{a - a^{\frac{1}{2}}b}; \quad 5) \frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{a - b};$$

$$2) \frac{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{1}{4}} - m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{5}{4}}}{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{5}{4}}}; \quad 4) \frac{a - b}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}; \quad 6) \frac{a - 125}{a^{\frac{2}{3}} - 25}.$$

6.15.\*\* Simplificați expresia  $\frac{a - b}{a^{0,5} - b^{0,5}} - \frac{a^{1,5} - b^{1,5}}{a - b}$ .

6.16.\*\* Simplificați expresia  $\frac{m - n}{m^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}} - \frac{m + n}{m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}}}$ .

6.17.\*\* Demonstrați identitatea  $\left(\frac{a^{0,5} + 2}{a + 2a^{0,5} + 1} - \frac{a^{0,5} - 2}{a - 1}\right) : \frac{a^{0,5}}{a^{0,5} + 1} = \frac{2}{a - 1}$ .

6.18.\*\* Demonstrați identitatea  $\left(\frac{m^2 + n^2}{m^{\frac{3}{2}} + mn^{\frac{1}{2}}} - \frac{m + n}{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \frac{m}{n} = n^{\frac{1}{2}} - m^{\frac{1}{2}}$ .



## NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

6.19. Rezolvați ecuația:

$$1) \sqrt{3x - 7} = 0; \quad 3) \sqrt{x^2 - 64} = 6; \quad 5) \sqrt{x} + \sqrt{x - 2} = 0;$$

$$2) \sqrt{4x - 1} = 6; \quad 4) \sqrt{1 + \sqrt{3 + x}} = 4; \quad 6) (x - 2)\sqrt{x + 2} = 0.$$

## 7. Ecuatii iraționale

În timpul rezolvării ecuațiilor uneori apare necesitatea de a ridica ambele părți ale ecuației la una și aceeași putere. Să clarificăm, cum aceasta influențează asupra mulțimii soluțiilor ecuației date.

**Teorema 7.1.** *Dacă ridicam ambele părți ale ecuației la putere impară, atunci obținem ecuație, echivalentă celei date.*

**Problema 1.** Rezolvați ecuația  $\sqrt[7]{x^2 - 2} = \sqrt[7]{x}$ .

*Rezolvare.* Ridicăm ambele părți ale ecuației date la puterea șaptea. Obținem o ecuație echivalentă

$$(\sqrt[7]{x^2 - 2})^7 = (\sqrt[7]{x})^7.$$

De aici  $x^2 - 2 = x$ ;  $x^2 - x - 2 = 0$ ;  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$ .

*Răspuns:*  $-1$ ;  $2$ . ◀

Ecuatia, pe care noi am cercetat-o în problema 1, conține variabila sub semnul radicalului. Astfel de ecuații se numesc **iraționale**.

Iată încă câteva exemple de ecuații iraționale:

$$\begin{aligned}\sqrt{x-3} &= 2; \\ \sqrt{x-2} - \sqrt[4]{x+1} &= 0; \\ \sqrt{3-x} &= \sqrt[3]{2+x}.\end{aligned}$$

În timpul rezolvării problemei 1 noi am fost nevoiți să transformăm ecuația, care conținea rădăcini de ordin impar. Să cercetăm ecuații, ce conțin rădăcini de ordin par.

**Problema 2.** Rezolvați ecuația  $(\sqrt{3x+4})^2 = (\sqrt{x-2})^2$ . (1)

*Rezolvare.* Folosind formula  $(\sqrt{a})^2 = a$ , înlocuim ecuația dată cu următoarea:

$$3x + 4 = x - 2. \quad (2)$$

De aici  $x = -3$ .

Însă verificarea indică, că numărul  $-3$  nu este soluția ecuației inițiale. Se spune, că numărul  $-3$  este **soluție străină** a ecuației (1).

Deci, ecuația (1) nu are soluții.

*Răspuns:* soluții nu există. ◀

Cauza apariției rădăcinii străine în timpul rezolvării problemei 2 constă în faptul că, aplicând formula  $(\sqrt{a})^2 = a$ , noi nu am ținut cont de considerentul  $a \geq 0$ . Din această cauză ecuația (2) s-a dovedit a fi neechivalentă cu ecuația (1).

**Definiție.** Dacă mulțimea soluțiilor ecuației  $f_2(x) = g_2(x)$  conține mulțimea soluțiilor ecuației  $f_1(x) = g_1(x)$ , atunci ecuația  $f_2(x) = g_2(x)$  este numită **consecință** a ecuației  $f_1(x) = g_1(x)$ .

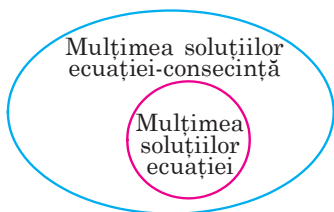


Fig. 7.1

În figura 7.1 definiția ecuației-consecință este ilustrată cu ajutorul diagramei lui Euler.

De exemplu, ecuația  $x^2 = 25$  este consecință a ecuației  $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$ .

Convingeți-vă de aceasta de sine stătător.

Deasemeni se spune, că din ecuația  $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$  **reiese** ecuația  $x^2 = 25$ .

Încă o cauză a apariției soluțiilor străine este faptul, că din egalitatea  $x_1^{2k} = x_2^{2k}$  nu reiese obligatoriu egalitatea  $x_1 = x_2$ . De exemplu,  $(-2)^4 = 2^4$ , însă  $-2 \neq 2$ . În același timp din egalitatea  $x_1 = x_2$  reiese egalitatea  $x_1^{2k} = x_2^{2k}$ .

Justă este următoarea teoremă.

**Teorema 7.2.** *La ridicarea ambelor părți ale ecuației la putere pară ecuația obținută este consecință a celei date.*

**Problema 3.** Rezolvați ecuația  $\sqrt{4+3x} = x$ .

*Rezolvare.* Ridicăm ambele părți ale ecuației la pătrat. Obținem o ecuație, care este consecința celei date:

$$4 + 3x = x^2.$$

De aici  $x^2 - 3x - 4 = 0$ ;  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 4$ .

Verificarea arată, că numărul  $-1$  este rădăcină străină, iar numărul  $4$  satisface ecuația dată.

*Răspuns:* 4. ◀

**Problema 4.** Rezolvați ecuația  $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$ .

*Rezolvare.* Ridicăm ambele părți ale ecuației date la pătrat:

$$2x - 3 + 2\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{4x+1} + 4x + 1 = 16.$$

De aici  $\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{4x+1} = 9 - 3x$ .

Trecând la ecuația-consecință, obținem:

$$\begin{aligned} 8x^2 - 10x - 3 &= 81 - 54x + 9x^2; \\ x^2 - 44x + 84 &= 0; \quad x_1 = 42, \quad x_2 = 2. \end{aligned}$$

Verificarea ne arată, că numărul  $42$  este soluție străină, iar numărul  $2$  satisface ecuația dată.

*Răspuns:* 2. ◀

**Problema 5.** Rezolvați ecuația  $\sqrt{x^3+1} + 2\sqrt[4]{x^3+1} - 3 = 0$ .

*Rezolvare.* Fie  $\sqrt[4]{x^3+1} = t$ . Atunci  $\sqrt{x^3+1} = t^2$ . Acum ecuația inițială obține aspectul

$$t^2 + 2t - 3 = 0.$$

De aici  $t = -3$  sau  $t = 1$ .

În cazul, când  $t = -3$ , obținem ecuația  $\sqrt[4]{x^3+1} = -3$ , care nu are soluții.

În cazul, când  $t = 1$ , obținem ecuația  $\sqrt[4]{x^3+1} = 1$ .

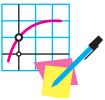
Terminați rezolvarea de sine stătător.

*Răspuns:* 0. ◀

Ваминтим, що метод, який використовується при розв'язанні останньої рівняння, вам є відомим ще з курсу алгебри в класах 8–9-а. Цей метод називається *методом заміни змінної*.



1. Яку рівняння називають ірраціональним?
2. Обидві частини рівняння піднесені до парної степені. Чи обов'язково початкове рівняння є еквівалентним до отриманого?
3. Обидві частини рівняння піднесені до непарної степені. Чи обов'язково початкове рівняння є еквівалентним до отриманого?
4. Як можна визначити сторонні розв'язки рівняння?



### ВІВАННЯ

**7.1.°** Поясніть, чому не має розв'язків рівняння:

- 1)  $\sqrt{x-2} + 1 = 0$ ;
- 2)  $\sqrt[6]{x} + \sqrt[8]{x-1} = -2$ ;
- 3)  $\sqrt{x-4} + \sqrt{1-x} = 5$ ;
- 4)  $\sqrt[4]{x-6} + \sqrt{6-x} = 1$ .

**7.2.°** Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $\sqrt[4]{2x-2} = 2$ ;
- 2)  $\sqrt[3]{x-4} = 2$ ;
- 3)  $\sqrt[5]{x-6} = -3$ ;
- 4)  $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 3} = x$ .

**7.3.°** Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $\sqrt[3]{x-3} = 4$ ;
- 2)  $\sqrt[3]{8x^3 - x - 15} = 2x$ ;
- 3)  $\sqrt[3]{25 + \sqrt{x^2 + 3}} = 3$ .

**7.4.°** Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $\sqrt[7]{2x-1} = \sqrt[7]{3-x}$ ;
- 2)  $\sqrt{2x-1} = \sqrt{1-2x}$ ;
- 3)  $\sqrt{2x^2-1} = \sqrt{x-3}$ ;
- 4)  $\sqrt{x^2-36} = \sqrt{2x-1}$ .

**7.5.°** Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $\sqrt[4]{x+3} = \sqrt[4]{2x-3}$ ;
- 2)  $\sqrt{4x-5} = \sqrt{1-x}$ .

**7.6.°** Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $\sqrt{2-x} = x$ ;
- 2)  $\sqrt{x+1} = x-1$ ;
- 3)  $\sqrt{3x-2} = x$ ;
- 4)  $\sqrt{2x^2-3x-10} = x$ ;
- 5)  $2\sqrt{x+5} = x+2$ ;
- 6)  $\sqrt{15-3x}-1 = x$ .

**7.7.°** Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $\sqrt{10-3x} = -x$ ;
- 2)  $x = \sqrt{x+5} + 1$ ;
- 3)  $3\sqrt{x+10}-11 = 2x$ ;
- 4)  $x - \sqrt{3x^2-11x-20} = 5$ .

7.8.\* Резолваї екуаїа:

$$1) \sqrt{(2x+3)(x-4)} = x-4; \quad 2) \sqrt{(x-2)(2x-5)} + 2 = x.$$

7.9.\* Резолваї екуаїа  $\sqrt{(3x-1)(4x+3)} = 3x-1$ .

7.10.\* Резолваї екуаїа, фолосїнд метода субстїтуїїї варїабїлї:

$$1) \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} - 3 = 0; \quad 4) 2\sqrt{x+1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x+1}};$$

$$2) \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 6 = 0; \quad 5) \frac{1}{\sqrt[4]{x-1}} + \frac{3}{\sqrt[4]{x+1}} = 2;$$

$$3) 2x - 7\sqrt{x} - 15 = 0; \quad 6) \sqrt{\frac{x+5}{x-1}} + 7\sqrt{\frac{x-1}{x+5}} = 8.$$

7.11.\* Резолваї екуаїа, фолосїнд метода субстїтуїїї варїабїлї:

$$1) x - \sqrt{x} - 12 = 0; \quad 3) \sqrt{x+5} - 3\sqrt[4]{x+5} + 2 = 0;$$

$$2) \sqrt[3]{x^2} + 8 = 9\sqrt[3]{x}; \quad 4) \sqrt{\frac{3x+2}{2x-3}} + \sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}} = 2,5.$$

7.12.\*\* Резолваї екуаїа:

$$1) \sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}} = x+1; \quad 2) \sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} = x-1.$$

7.13.\*\* Резолваї екуаїа:

$$1) \sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2; \quad 3) \sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1;$$

$$2) \sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1; \quad 4) 2\sqrt{2-x} - \sqrt{7-x} = 1.$$

7.14.\*\* Резолваї екуаїа:

$$1) \sqrt{2x+5} - \sqrt{3x-5} = 2; \quad 2) \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} = 2.$$

7.15.\*\* Резолваї екуаїа:

$$1) \sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} = 3; \quad 3) \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 1;$$

$$2) \sqrt{x-7} + \sqrt{x-1} = 4; \quad 4) \sqrt{13-4x} + \sqrt{x+3} = 5.$$

7.16.\*\* Резолваї екуаїа:

$$1) \sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} = 3; \quad 2) \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+5} = 3.$$

7.17.\*\* Резолваї екуаїа, фолосїнд метода субстїтуїїї варїабїлї:

$$1) x^2 - 5x + 16 - 3\sqrt{x^2 - 5x + 20} = 0;$$

$$2) x^2 + 4 - 5\sqrt{x^2 - 2} = 0;$$

$$3) \sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7;$$

$$4) \sqrt{3x^2 - 9x - 26} = 12 + 3x - x^2.$$



**7.18.\*\*** Rezolvați ecuația, folosind metoda substituției variabilei:

$$1) x^2 - 4x - 3\sqrt{x^2 - 4x + 20} + 10 = 0;$$

$$2) 2\sqrt{x^2 - 3x + 11} = 4 + 3x - x^2;$$

$$3) 5x^2 + 10x + \sqrt{x^2 + 2x - 15} = 123.$$

**7.19.\*** Rezolvați ecuația  $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 6$ .

**7.20.\*** Rezolvați ecuația  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 6$ .



### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

**7.21.** Construiți graficul funcției  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{dacă } x < 1, \\ x - 1, & \text{dacă } x \geq 1 \end{cases}$  Folosin-

du-vă de graficul construit, determinați intervalele de creștere și descreștere ale funcției date.

**7.22.** Specificați prin formulă funcția liniară  $f$ , dacă  $f(-2) = 5$ ,  $f(2) = -3$ .



### ȘCOALA DE MATEMATICĂ DIN LVOV

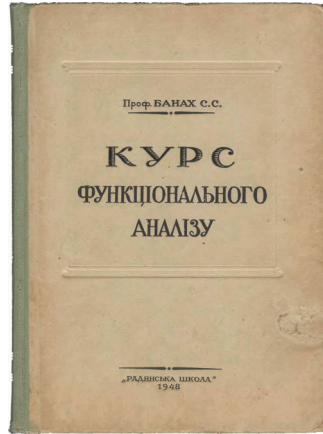
Voi studiați capitolul "Algebra și elemente de analiză". În denumire a apărut o nouă îmbinare de cuvinte – "elemente de analiză". Ce se ascunde în spatele acestei denumiri? Răspunsul este foarte simplu – analiza matematică studiază funcțiile. Anul acesta voi începeți să faceți cunoștință cu elemente de analiză: o să fiți nevoiți să cercețați clase de funcții tot mai noi și mai noi, să studiați proprietățile lor, să însușiți metode de cercetare ale funcțiilor.

În prima jumătate a secolului al XX-lea studierea anumitor clase de funcții a dus la apariția unei discipline matematice noi – analiza funcțională. Un rol important, de fapt principalul rol, în crearea acestei discipline au jucat-o savanții școlii de matematică din Lvov.

În anii 20-30 ai secolului XX-ci orașul Lvov a fost adevărata capitală mondială a matematicii. Pe timpul acela în așezămintele științifice lucrau astfel de matematicieni legendari, ca Kazimir Kuratovschi, Stanislav Mazur, Vladislav Orlici, Vațlav Serpinsky, Stanislav Ulam, Iulii Shauder, Gugo Shteingauz și mulți alții. Calificarea savanților de la Lvov era atât de înaltă, că savantul cu renume mondial în matematică, autorul multor teoreme remarcabile în logica



**Stefan Banach**  
(1892–1945)



**Manualul lui Banach**  
"Curs de analiză funcțională"

matematică și teoria mulțimilor Alfred Tarskiy n-a trecut concursul pentru obținerea locului vacant de profesor al Universității din Lvov.

Matematicienii din Lvov au creat un colectiv științific puternic, cunoscut ca școala de matematică din Lvov. Conducătorul ei este socotit genialul matematician Stefan Banach.

În zilele noastre societatea matematicienilor pe drept cuvânt îl consideră pe S. Banach fondatorul analizei funcționale. Unul din primele manuale din lume, destinate acestei discipline, a fost scris anume de S. Banach. Multe rezultate ale lui Banach și noțiuni, introduse de el, au devenit clasice. De exemplu, mulțimile cercetate de savant au obținut denumirea "spațiile lui Banach" și în zilele noastre intră în minimumul necesar pentru toți care fac studii superioare în domeniile de matematică, fizică, cibernetică etc.

Se povestește, că multe teoreme matematicienii din Lvov le demonstau ... în cafenele. S. Banach cu elevii săi au îndrăgit cafeneaua "Scoțiană", unde mesele mici aveau fețele de marmură – foarte comode pentru scrisul formulelor și teoremelor matematice. Stăpânul cafelei era nemulțumit de libera purtare a savanților, dar situația a fost salvată de soția lui Banach, care a cumpărat un caiet mare pentru notițe. Așa a apărut vestita "Carte Scoțiană" – culegerea de probleme matematice, asupra cărora lucra grupul lui Banach. Ca răsplătă pentru rezolvarea problemelor complicate autorii propuneau în glumă ba un bocal de bere, ba o cină în restaurant. De exemplu, una din probleme, autorul căreia a promis un gânsac viu (a. 1936), a fost rezolvată doar în anul 1972, atunci și a fost înmănată recompensa.



**Înmânarea gânsacului**

Problemele, ridicate în "Cartea Scoțiană", sunt atât de importante și complicate, că oricine, care reușește să rezolve măcar una din ele, obține imediat recunoaștere mondială. Însăși "Cartea Scoțiană" este una din cele mai cunoscute și de preț relicve ale științei mondiale.



## PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 1

### Cea mai mică și cea mai mare valori ale funcției

Dacă pentru toate valorile lui  $x \in M$  este satisfăcută inegalitatea  $f(x_0) \leq f(x)$ , unde  $x_0 \in M$ , atunci numărul  $f(x_0)$  se numește cea mai mică valoare a funcției  $f$  pe mulțimea  $M$  și se notează:  $\min_M f(x) = f(x_0)$ .

Dacă pentru toți  $x \in M$  se satisface inegalitatea  $f(x_0) \geq f(x)$ , unde  $x_0 \in M$ , atunci numărul  $f(x_0)$  se numește cea mai mare valoare a funcției  $f$  pe mulțimea  $M$  și se notează:  $\max_M f(x) = f(x_0)$ .

### Funcții pare și impare

Funcția  $f$  se numește pară, dacă pentru orice  $x$  din domeniul de definiție  $f(-x) = f(x)$ .

Funcția  $f$  se numește impară, dacă pentru orice  $x$  din domeniul de definiție  $f(-x) = -f(x)$ .

Axa ordonatelor este axă de simetrie a graficului funcției pare.

Originea de coordonate este centrul de simetrie al graficului funcției impare.

### Rădăcina de ordinul $n$

Rădăcina de ordinul  $n$  din numărul  $a$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , se numește un astfel de număr, care ridicat la puterea  $n$  este egal cu  $a$ .

Se numește rădăcină aritmetică de ordinul  $n$  dintr-un număr nenegativ  $a$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , un astfel de număr nenegativ puterea  $n$  a căruia este egală cu  $a$ .

Pentru oricare  $a$  și  $k \in \mathbb{N}$  sunt adevărate egalitățile:  $(\sqrt[n]{a})^{2k+1} = a$ ,  $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$ ,  $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$ .

Pentru oricare  $a \geq 0$  și  $k \in \mathbb{N}$  este adevărată egalitatea  $(\sqrt[2k]{a})^{2k} = a$ .

Dacă  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , atunci  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ .

Dacă  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , atunci  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ .

Dacă  $a \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , atunci  $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$ ,  $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a}$ .

Dacă  $a \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ ,  $k > 1$ , atunci  $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ .

### Putere cu exponent rațional

Putere a numărului pozitiv  $a$  cu exponentul  $\frac{m}{n}$ , unde  $m \in \mathbb{Z}$ ,

$n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , se numește numărul  $\sqrt[n]{a^m}$ , adică  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ;

$0^{\frac{m}{n}} = 0$ , unde  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Funcția, care poate fi definită cu formula  $y = x^r$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ , se numește funcție putere cu exponent rațional.

Pentru orice  $a > 0$  și orice numere raționale  $p$  și  $q$  sunt adevărate egalitățile:  $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ ,  $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ,  $a^p : a^q = a^{p-q}$ ,  $(a^p)^q = a^{pq}$ .

Pentru orice  $a > 0$  și  $b > 0$  precum și orice număr rațional  $p$  sunt juste egalitățile:  $(ab)^p = a^p b^p$ ,  $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$ .

### Ecuatii iraționale

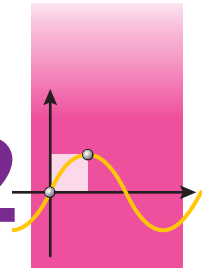
Ecuatiile, care conțin variabila sub semnul radicalului, se numesc iraționale.

Dacă ridicam ambele părți ale ecuației la o putere impară, atunci obținem o ecuație, echivalentă celei date.

Dacă ridicam ambele părți ale ecuației la o putere pară ecuația obținută este consecința celei date.

# FUNCTII TRIGONOMETRICE

## §2



Studiind materialul acestui paragraf, voi o să extindeți cunoștințele voastre despre funcțiile trigonometrice și proprietățile lor; o să aflați, ce este măsura în radiani a unghiurilor, ce funcții se numesc periodice. O să faceți cunoștință cu formulele, care leagă diferite funcții trigonometrice, o să vă învățați să le aplicați pentru executarea calculului, simplificarea expresiilor, demonstrarea identităților.

O să aflați care ecuații se numesc cele mai simple ecuații trigonometrice; o să faceți cunoștință cu formulele soluțiilor celor mai simple ecuații trigonometrice.

## 8. Măsura în radiani a unghiurilor

Până acum pentru măsurarea unghiurilor voi ați folosit gradele sau părți de grade – minutele și secundele.

În multe cazuri este comod de folosit altă unitate de măsurare a unghiurilor. Ea se numește **radian**.

**Definiție.** Unghi de un radian se numește unghiul de la centru al circumferinței, ce se sprijină pe arcul, lungimea căruia este egală cu raza circumferinței.

În figura 8.1 este prezentat unghiul de la centru  $AOB$ , ce se sprijină pe arcul  $AB$ , lungimea căruia este egală cu raza circumferinței. Mărima unghiului  $AOB$  este egală cu un radian. Se scrie:  $\angle AOB = 1 \text{ rad}$ . De asemenea se spune, că măsura în radiani a arcului  $AB$  este egală cu un radian. Se scrie  $\cup AB = 1 \text{ rad}$ .

Măsura în radiani a unghiului (arcului) nu depinde de raza circumferinței. Această afirmație este ilustrată în figura 8.2.

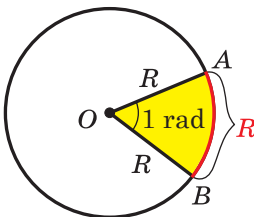


Fig. 8.1

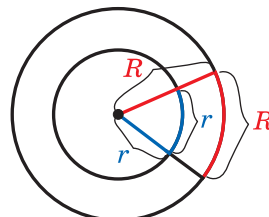


Fig. 8.2

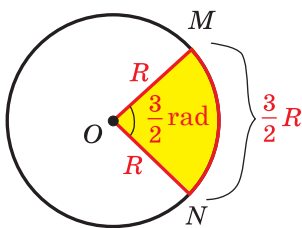


Fig. 8.3

În figura 8.3 este reprezentată circumferința cu raza  $R$  și arcul  $MN$ , lungimea căruia este egală cu  $\frac{3}{2}R$ . Atunci măsura în radiani a unghiului  $MON$  (arcului  $MN$ ) este egală cu  $\frac{3}{2}$  rad. În general, dacă unghiul la centru al circumferinței cu raza  $R$  se sprijină pe arcul, lungimea căruia este egală cu  $\alpha R$ , atunci se spune, că **măsura în radiani** a unghiului de la centru este egală cu  $\alpha$  rad.

Lungimea jumătății de circumferință este egală cu  $\pi R$ . Deci măsura în radiani a unei jumătăți de circumferință este egală cu  $\pi$  rad. Măsura în grade a unei jumătăți de circumferință este egală cu  $180^\circ$ . Cele spuse permit de stabilit legătura între măsurile în radiani și grade, și anume:

$$\pi \text{ рад} = 180^\circ. \quad (1)$$

De aici

$$1 \text{ rad} = \left( \frac{180}{\pi} \right)^\circ$$

Împărțind 180 la 3,14 (vă amintim, că  $\pi \approx 3,14$ ), se poate determina:  $1 \text{ rad} \approx 57^\circ$ .

Dacă împărțim ambele părți ale egalității (1) la 180, atunci obținem:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \quad (2)$$

Din această egalitate este ușor de stabilit, că, de exemplu,

$$15^\circ = 15 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{12} \text{ рад}, \quad 90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{2} \text{ рад},$$

$$135^\circ = 135 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{3\pi}{4} \text{ рад}.$$

Scriind măsura unghiului în radiani, de regulă, însemnarea "rad" se omite. De exemplu, se scrie:  $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$ .

În tabel sunt prezentate măsurile unghiurilor în grade și radiani, care se întâlnesc cel mai frecvent:

Măsura unghiului în grade	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
Măsura unghiului în radiani	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$

Utilizând măsura în radiani a unghiului, se poate obține o formă comodă de calculare a lungimii arcului circumferinței.

Deoarece unghiul la centru de 1 rad se sprijină pe arcul, lungimea căruia este egală cu raza  $R$ , atunci unghiul de  $\alpha$  rad, se sprijină pe arcul, lungimea căruia este egală cu  $\alpha R$ . Dacă lungimea arcului, ce conține  $\alpha$  rad de-o însemnat prin  $l$ , atunci se poate scrie:

$$l = \alpha R$$

Pe planul de coordonate cercetăm circumferința cu rază unitară și centrul în originea de coordonate. Astfel de circumferință se numește **unitară**.

Fie că punctul  $P$ , începând mișcarea de la punctul  $P_0$  (1; 0), se deplasează pe circumferința unitate împotriva mișcării acului de ceasornic. Într-un anumit moment el va ocupa locul, pentru care  $\angle P_0OP = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$  (fig. 8.4). Vom spune, că **punctul  $P$  este obținut în rezultatul rotației punctului  $P_0$  în jurul originii de coordonate cu unghiul  $\frac{2\pi}{3}$  (cu unghiul  $120^\circ$ ).**

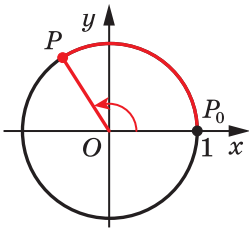


Fig. 8.4

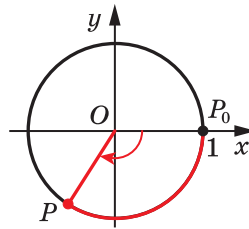


Fig. 8.5

Fie acum, că punctul  $P$  s-a deplasat pe circumferința unitate în direcția mișcării acului ceasornicului și a ocupat poziția, pentru care  $\angle POP_0 = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$  (fig. 8.5). Vom spune, că punctul  $P$  este obținut în rezultatul rotației punctului  $P_0$  în jurul originii de coordonate cu unghiul  $-\frac{2\pi}{3}$  (cu unghiul  $-120^\circ$ ).

În genere, când se cercetează mișcarea punctului pe circumferință contra acelor ceasornicului (fig. 8.4), atunci unghiul se consideră pozitiv, iar când după acele ceasornicului (fig. 8.5) – atunci negativ.



Să cercetăm încă câteva exemple. Să ne adresăm la figura 8.6. Se poate spune, că punctul  $A$  este obținut în rezultatul rotației punctului  $P_0$  în jurul originii de coordonate cu unghiul

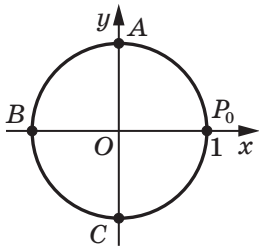


Fig. 8.6

$\frac{\pi}{2}$  (cu un unghi de  $90^\circ$ ) sau cu un unghi  $-\frac{3\pi}{2}$  (cu un unghi de  $-270^\circ$ ). Punctul  $B$  este obținut în rezultatul rotației punctului  $P_0$  cu un unghi de  $\pi$  (cu unghiul de  $180^\circ$ ) sau cu un unghi de  $-\pi$  (cu unghiul de  $-180^\circ$ ). Punctul  $C$  este obținut în rezultatul rotației punctului  $P_0$  cu un unghi de  $\frac{3\pi}{2}$  (cu unghiul de  $270^\circ$ ) sau cu un unghi de  $-\frac{\pi}{2}$  (cu unghiul de  $-90^\circ$ ).

Dacă punctul  $P$ , mișcându-se pe circumferința unitate, va executa o rotație întreagă, se poate spune, că unghiul de rotație este egal cu  $2\pi$  (adică  $360^\circ$ ) sau  $-2\pi$  (adică  $-360^\circ$ ).

Dacă punctul  $P$ , va executa o rotație și jumătate contra acelor ceasornicului, atunci este natural de considerat, că unghiul de rotație este egal cu  $3\pi$  (adică  $540^\circ$ ), dacă după acele ceasornicului – atunci  $-3\pi$  (adică  $-540^\circ$ ).

*Mărimea unghiului de rotație atât în radiani, cât și în grade se poate exprima prin orice număr real.*

Unghiul de rotație determină univoc poziția punctului  $P$  pe circumferința unitate. Însă oricărei poziții a punctului  $P$  pe circumferință îi corespunde o infinitate de unghiuri de rotație. De exemplu, punctului  $P$  (fig. 8.7) îi corespund

așa unghiuri de rotație:  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{4} + 2\pi$ ,  $\frac{\pi}{4} + 4\pi$ ,

$\frac{\pi}{4} + 6\pi$  ș.a.m.d., și totodată  $\frac{\pi}{4} - 2\pi$ ,  $\frac{\pi}{4} - 4\pi$ ,

$\frac{\pi}{4} - 6\pi$  ș.a.m.d. Menționăm, că toate aceste

unghiuri se pot obține cu ajutorul for-

mulei  $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

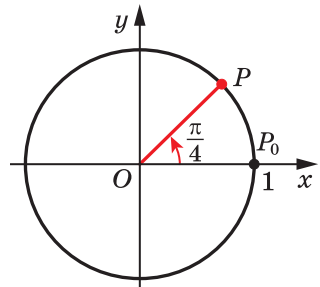


Fig. 8.7



1. Ce se numește unghi de un radian?
2. Care este măsura în radiani a unghiului egal cu  $1^\circ$ ?
3. Cu ce este egală lungimea arcului circumferinței cu raza  $R$ , care conține  $\alpha$  rad?



## EXERCII

8.1.° Aflați măsura în radiani a unghiului, care este egal cu

- 1) 25°; 2) 40°; 3) 100°; 4) 160°; 5) 210°; 6) 300°.

8.2.° Aflați măsura unghiului în grade, a cărui măsură în radiani este egală cu:

- 1)  $\frac{\pi}{10}$ ; 2)  $\frac{2\pi}{5}$ ; 3)  $\frac{\pi}{9}$ ; 4)  $1,2\pi$ ; 5)  $3\pi$ ; 6)  $2,5\pi$ .

8.3.° Completați tabelul:

Măsura unghiului în grade		12°	36°			105°	225°			240°
Măsura unghiului în radiani	$\frac{\pi}{18}$			$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{5}$			$4\pi$	$1,8\pi$	

8.4.° Cu ce este egală lungimea arcului circumferinței, raza căreia este egală cu 12 cm, dacă măsura în radiani a arcului alcătuieste:

- 1)  $\frac{\pi}{2}$ ; 2) 2; 3)  $\frac{5\pi}{6}$ ; 4)  $2\pi$ ?

8.5.° Calculați lungimea arcului circumferinței, dacă este cunoscută măsura lui în radiani  $\alpha$  și raza circumferinței  $R$ .

- 1)  $\alpha = 3$ ,  $R = 5$  cm; 2)  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ,  $R = 6$  cm; 3)  $\alpha = 0,4\pi$ ,  $R = 2$  cm.

8.6.° Notați pe circumferința unitate un punct, pe care îl obținem în rezultatul rotației punctului  $P_0(1; 0)$  cu un unghi de:

- 1)  $\frac{\pi}{3}$ ; 2) 150°; 3)  $\frac{5\pi}{3}$ ; 4) -45°; 5) -120°; 6) -450°.

8.7.° Notați pe circumferința unitate un punct, pe care îl obținem în rezultatul rotației punctului  $P_0(1; 0)$  cu un unghi de:

- 1) -60°; 2)  $\frac{\pi}{6}$ ; 3) 320°; 4) 420°; 5)  $\frac{2\pi}{3}$ ; 6)  $-\frac{5\pi}{6}$ .

8.8.° În ce cadran al planului de coordonate se află punctul circumferinței unitate, care este obținut în rezultatul rotației punctului  $P_0(1; 0)$  cu un unghi de:

- 1) 127°; 2) 89°; 3) 276°; 4) 400°; 5) 600°; 6) -400°; 7) -470°; 8)  $\frac{\pi}{5}$ ; 9)  $-\frac{7\pi}{6}$ ; 10)  $2,4\pi$ ; 11) 3; 12) -2?

8.9.° În ce cadran al planului de coordonate se află punctul circumferinței unitate, care este obținut în rezultatul rotației punctului  $P_0(1; 0)$  cu un unghi de:

- 1) 94°; 2) 176°; 3) 200°; 4) -100°;

$$5) -380^\circ; \quad 7) \frac{3\pi}{4}; \quad 9) -\frac{7\pi}{3}; \quad 11) 1;$$

$$6) 700^\circ; \quad 8) -\frac{3\pi}{4}; \quad 10) -\frac{11\pi}{6}; \quad 12) -3?$$

**8.10.°** Гăсиți coordonatele punctului de pe circumferința unitate, obținut în rezultatul rotației punctului  $P_0(1; 0)$  cu un unghi de:

$$1) \frac{\pi}{2}; \quad 2) \pi; \quad 3) -90^\circ; \quad 4) -180^\circ; \quad 5) -\frac{3\pi}{2}; \quad 6) -2\pi.$$

**8.11.°** Ce coordonate are punctul circumferinței unitate, obținut în rezultatul rotației punctului  $P_0(1; 0)$  cu un unghi de:

$$1) \frac{3\pi}{2}; \quad 2) 3\pi; \quad 3) -\frac{\pi}{2}; \quad 4) 180^\circ?$$

**8.12.\*** Indicați unghiurile cel mai mic pozitiv și cel mai mare negativ, cu care trebuie de rotit punctul  $P_0(1; 0)$ , pentru a obține punctul cu coordonatele:

$$1) (0; 1); \quad 2) (-1; 0).$$

**8.13.\*** Indicați unghiurile cel mai mic pozitiv și cel mai mare negativ, cu care trebuie de rotit punctul  $P_0(1; 0)$ , pentru a obține punctul cu coordonatele:

$$1) (0; -1); \quad 2) (1; 0).$$

**8.14.\*\*** Aflați toate unghiurile, cu care trebuie de rotit punctul  $P_0(1; 0)$ , pentru a obține punctul:

$$1) P_1(0; 1); \quad 2) P_2(-1; 0); \quad 3) P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

**8.15.\*\*** Aflați toate unghiurile, cu care este necesar de rotit punctul  $P_0(1; 0)$ , pentru a obține punctul:

$$1) P_1(0; -1); \quad 2) P_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad 3) P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

**8.16.\*\*** Găsiți coordonatele punctelor de pe circumferința unitate, obținute în rezultatul rotației punctului  $P_0(1; 0)$  cu unghiurile de:

$$1) \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad 3) \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) -\frac{\pi}{2} + 4\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad 4) \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**8.17.\*\*** Găsiți coordonatele punctelor de pe circumferința unitate, obținute în rezultatul rotației punctului  $P_0(1; 0)$  cu unghiurile de:

$$1) \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad 2) -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 🔑 8.18.\*\* Demonstrați, că aria sectorului, care conține arcul de  $\alpha$  rad, se poate calcula după formula  $S = \frac{\alpha R^2}{2}$ , unde  $R$  – raza circumferinței.



### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

- 8.19. Rezolvați ecuația:

$$1) \frac{x^2 - 6}{x - 3} = \frac{x}{x - 3}; \quad 2) \frac{3x - 1}{x} - \frac{4}{x - 2} = \frac{10 - 9x}{x^2 - 2x}.$$

- 8.20. Într-un oraș oarecare locuiesc 88 200 de locuitori. Câți locuitori au fost în acest oraș doi ani în urmă, dacă creșterea anuală a populației alcătuiește 5%?

## 9. Funcții trigonometrice de argument numeric

În clasa a 9-a, introducând definiția funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de la  $0^\circ$  până la  $180^\circ$ , noi ne foloseam de semicircumferința unitate. Să generalizăm aceste definiții pentru un unghi de rotație  $\alpha$  arbitrar.

Să cercetăm circumferința unitate (fig. 9.1).

**Definiție.** **Cosinusul și sinusul unghiului de rotație  $\alpha$**  se numește corespunzător abscisa  $x$  și ordonata  $y$  a punctului  $P(x; y)$  a circumferinței unitate, care a fost obținut în rezultatul rotației punctului  $P_0(1; 0)$  în jurul originii de coordonate cu unghiul  $\alpha$  (fig. 9.1).

Se notează:  $\cos \alpha = x$ ,  $\sin \alpha = y$ .

Punctele  $P_0$ ,  $A$ ,  $B$  și  $C$  (fig. 9.2) au corespunzător coordonatele  $(1; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(0; -1)$ . Aceste puncte au fost obținute în rezultatul

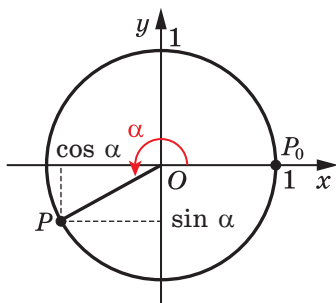


Fig. 9.1

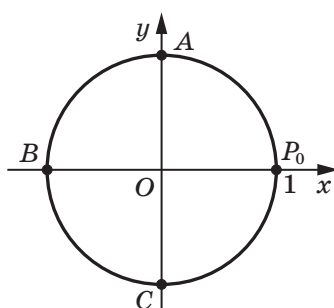


Fig. 9.2

rotației punctului  $P_0(1; 0)$  corespunzător cu unghiurile  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ .  
Deci, folosindu-ne de definiția dată, putem alcătui un astfel de tabel<sup>1</sup>:

$x$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	$0$	$1$	$0$	$-1$
$\cos x$	$1$	$0$	$-1$	$0$

**Problema 1.** Găsiți toate unghiurile de rotație  $\alpha$ , pentru care:  
1)  $\sin \alpha = 0$ ; 2)  $\cos \alpha = 0$ .

*Rezolvare.* 1) Ordonata, care este egală cu zero, o posedă numai două puncte ale circumferinței unitate:  $P_0$  și  $B$  (fig. 9.2). Aceste puncte sunt obținute în rezultatul rotației punctului  $P_0$  cu astfel de unghiuri:

$$0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots \text{ și } -\pi, -2\pi, -3\pi, -4\pi, \dots$$

Toate aceste unghiuri se pot scrie cu ajutorul formulei  $\alpha = \pi k$ , unde  $k \in \mathbb{Z}$ . Deci,  $\sin \alpha = 0$  pentru  $\alpha = \pi k$ , unde  $k \in \mathbb{Z}$ .

2) Abscisă, care este egală cu zero, o posedă numai două puncte ale circumferinței unitate:  $A$  și  $C$  (fig. 9.2). Aceste puncte sunt obținute în rezultatul rotației punctului  $P_0$  cu astfel de unghiuri:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 3\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \dots \text{ și } \frac{\pi}{2} - \pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2} - 3\pi, \frac{\pi}{2} - 4\pi, \dots$$

Toate aceste unghiuri se pot scrie cu ajutorul formulei  $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,

unde  $k \in \mathbb{Z}$ . Deci,  $\cos \alpha = 0$  pentru  $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$ , unde  $k \in \mathbb{Z}$ . ◀

**Definiție.** **Tangenta unghiului de rotație  $\alpha$  se numește raportul sinusului acestui unghi la cosinusul lui:**

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{De exemplu, } \operatorname{tg} \pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{1} = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{\cos \frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1.$$

<sup>1</sup> În forțașul 3 este prezentat tabelul valorilor funcțiilor trigonometrice a unor unghiuri.

Din definiția tangentei reiese, că tangenta este definită pentru acele unghiuri de rotație  $\alpha$ , pentru care  $\cos \alpha \neq 0$ , adică pentru  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Voi știți, că fiecărui unghi de rotație  $\alpha$  îi corespunde *un singur* punct al circumferinței unitate. Deci, fiecărei valori a unghiului  $\alpha$  îi corespunde un singur număr, care este valoarea sinusului (cosinusului, tangentei pentru  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) a unghiului  $\alpha$ . Din această cauză dependența valorii sinusului (cosinusului, tangentei) de mărimea unghiului de rotație este funcțională.

Funcțiile  $f(\alpha) = \sin \alpha$ ,  $g(\alpha) = \cos \alpha$  și  $h(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ , care corespund acestor dependențe funcționale, sunt numite **funcții trigonometrice** ale unghiului de rotație  $\alpha$ .

Fiecărui număr real  $\alpha$  îi punem în corespondență unghiul  $\alpha$  rad. Aceasta oferă posibilitatea cercetării funcțiilor trigonometrice de argument numeric.

De exemplu, scrierea "sin 2" determină "sinusul unghiului de 2 radiani".

Din definițiile sinusului și cosinusului reiese, că domeniul de definiție al funcțiilor  $y = \sin x$  și  $y = \cos x$  este mulțimea  $\mathbb{R}$ .

Deoarece abscisele și ordonatele punctelor circumferinței unitate obțin valori de la  $-1$  până la  $1$  inclusiv, rezultă că domeniul de valori al funcțiilor  $y = \sin x$  și  $y = \cos x$  este intervalul  $[-1; 1]$ .

Unghiurilor de rotație  $\alpha$  și  $\alpha + 2\pi n$ , unde  $n \in \mathbb{Z}$ , le corespunde unul și același punct al circumferinței unitate. De aceea

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin (\alpha + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z} \\ \cos \alpha &= \cos (\alpha + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Domeniul de definiție al funcției  $y = \operatorname{tg} x$  este alcătuit din toate numerele reale, în afară de numerele de tipul  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Domeniul de valori ale funcției  $y = \operatorname{tg} x$  este mulțimea  $\mathbb{R}$ .

Se poate demonstra că este adevărată formula:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

**Problema 2.** Găsiți cea mai mare și cea mai mică valori ale expresiei  $1 - 4 \cos \alpha$ .

*Rezolvare.* Deoarece  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ , atunci  $-4 \leq -4 \cos \alpha \leq 4$ ,  $-3 \leq 1 - 4 \cos \alpha \leq 5$ . Deci, cea mai mică valoare a expresiei date este egală cu  $-3$ ; expresia o obține pentru  $\cos \alpha = 1$ . Cea mai mare valoare a expresiei date este egală cu  $5$ ; expresia o obține pentru  $\cos \alpha = -1$ . ◀



1. Ce se numește cosinusul unghiului de rotație? sinusul unghiului de rotație? tangenta unghiului de rotație?
2. Care este domeniul de definiție al funcției  $y = \sin x$ ?  $y = \cos x$ ?
3. Care este domeniul de valori al funcției  $y = \sin x$ ?  $y = \cos x$ ?
4. Cu ce este egal  $\sin(\alpha + 2\pi n)$ , unde  $n \in \mathbb{Z}$ ?  $\cos(\alpha + 2\pi n)$ , unde  $n \in \mathbb{Z}$ ?
5. Care este domeniul de definiție al funcției  $y = \operatorname{tg} x$ ?
6. Care este domeniul de valori al funcției  $y = \operatorname{tg} x$ ?
7. Cu ce este egală  $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$ , unde  $n \in \mathbb{Z}$ ?



### EXERCIȚII

9.1.° Calculați valoarea expresiei:

- 1)  $2 \cos 0^\circ + 3 \sin 90^\circ$ ;
- 2)  $\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ$ ;
- 3)  $\sin 0^\circ + \operatorname{tg} \pi - \sin \frac{3\pi}{2}$ ;
- 4)  $2 \sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{6}$ .

9.2.° Cu ce este egală valoarea expresiei:

- 1)  $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$ ;
- 2)  $7 \operatorname{tg}^2 45^\circ - 3 \sin 45^\circ$ ;
- 3)  $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ ;
- 4)  $\cos \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2}$ ?

9.3.° Este oare posibilă egalitatea:

- 1)  $\cos \alpha = \frac{\pi}{3}$ ;
- 2)  $\sin \alpha = \frac{9}{8}$ ?

9.4.° Poate oare să fie egală valoarea expresiei cu numărul  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ :

- 1)  $\sin \alpha$ ;
- 2)  $\cos \alpha$ ;
- 3)  $\operatorname{tg} \alpha$ ?

9.5.° Indicați cea mai mare și cea mai mică valori ale expresiei:

- 1)  $3 \sin \alpha$ ;
- 2)  $4 + 2 \cos \alpha$ ;
- 3)  $2 - \sin \alpha$ ;
- 4)  $\sin^2 \alpha$ .

9.6.° Indicați cea mai mare și cea mai mică valori ale expresiei:

- 1)  $-5 \cos \alpha$ ;
- 2)  $3 \cos \alpha - 2$ ;
- 3)  $5 + \sin^2 \alpha$ .

9.7.° Indicați trei valori oarecare ale lui  $x$ , pentru care este justă egalitatea:

- 1)  $\sin x = 1$ ;
- 2)  $\sin x = -1$ .

9.8.° Indicați trei valori arbitrare ale lui  $x$ , pentru care se execută egalitatea:

- 1)  $\cos x = 1$ ;
- 2)  $\cos x = -1$ .

🔑 **9.9.™** Găsiți toate valorile  $x$ , pentru care se îndeplinește egalitatea:

- 1)  $\sin x = 1$ ;                                  2)  $\sin x = -1$ .

🔑 **9.10.™** Găsiți toate valorile  $x$ , pentru care se îndeplinește egalitatea:

- 1)  $\cos x = 1$ ;  
2)  $\cos x = -1$ .

🔑 **9.11.™** Folosind figura 9.3, demonstrați, că  $\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ .

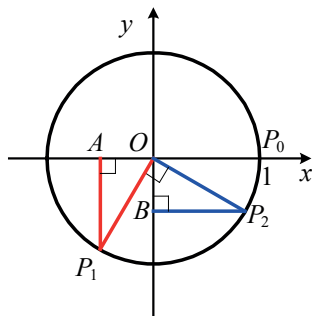


Fig. 9.3

🔑 **9.12.™** Demonstrați, că  $\sin \alpha = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ .



## NE PREGĂTIM PENTRU STUDIEREA TEMEI NOI

**9.13.** Comparați cu zero coordonatele punctului  $A(x; y)$ , dacă acest punct se află:

- în cadranul I al planului de coordonate;
- în cadranul II al planului de coordonate;
- în cadranul III al planului de coordonate;
- în cadranul IV al planului de coordonate;

**9.14.** Funcția dată este pară sau impară:

- 1)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ;                                  2)  $f(x) = 2x^7 + 4x^5 - 3x^2$

## 10. Semnele valorilor funcțiilor trigonometrice. Paritatea și imparitatea funcțiilor trigonometrice

Fie că punctul  $P$  este obținut în rezultatul rotației punctului  $P_0(1; 0)$  în jurul originii de coordonate cu un unghi  $\alpha$ . Dacă punctul  $P$  aparține cadranului I, atunci se spune, că  $\alpha$  este **unghi din cadranul I**. Analogic se poate spune despre unghiurile cadranelor II, III și IV.

De exemplu,  $\frac{\pi}{7}$  și  $-300^\circ$  – unghiuri ale cadranului I,  $\frac{2\pi}{3}$  și  $-185^\circ$  – unghiurile cadranului II,  $\frac{5\pi}{4}$  și  $-96^\circ$  – unghiurile cadranului III,  $355^\circ$  și  $-\frac{\pi}{8}$  – unghiurile cadranului IV.



Unghiurile de tipul  $\frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , nu aparțin nici unui cadran.

Punctele, amplasate în cadranul I, au abscisa și ordonata pozitive.

Deci, dacă  $\alpha$  este unghi din cadranul I, atunci  $\sin \alpha > 0$ ,  $\cos \alpha > 0$ .

Dacă  $\alpha$  este unghi din cadranul II, atunci  $\sin \alpha > 0$ ,  $\cos \alpha < 0$ .

Dacă  $\alpha$  este unghi din cadranul III, atunci  $\sin \alpha < 0$ ,  $\cos \alpha < 0$ .

Dacă  $\alpha$  este unghi din cadranul IV, atunci  $\sin \alpha < 0$ ,  $\cos \alpha > 0$ .

Semnele valorilor sinusului și cosinusului schematic sunt prezentate în figura 10.1.

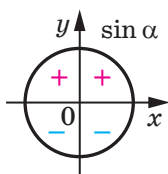


Fig. 10.1

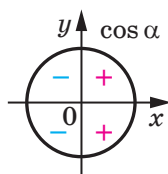


Fig. 10.2

Deoarece  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , atunci tangentele unghiurilor din cadranele

I și III sunt pozitive, iar a unghiurilor din cadranele II și IV – negative (fig. 10.2).

Fie punctele  $P_1$  și  $P_2$  sunt obținute prin rotația punctului  $P_0(1; 0)$  cu unghiurile  $\alpha$  și  $-\alpha$  corespunzător (fig. 10.3).

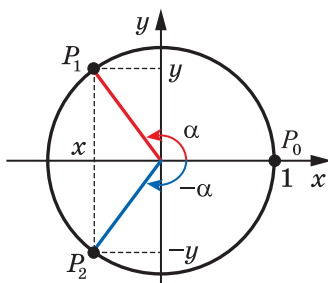


Fig. 10.3

Pentru orice unghi  $\alpha$  punctele  $P_1$  și  $P_2$  au abscise egale și ordonate opuse. Atunci din definiția sinusului și cosinusului reiese, că pentru orice număr real  $\alpha$

$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \end{aligned}$$

Aceasta înseamnă, că **funcția cosinus este pară, iar funcția sinus – impară.**

Domeniul de definiție al funcției  $y = \operatorname{tg} x$  este simetric față de originea de coordonate (controlați aceasta independent). Totodată:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Deci, **funcția tangenta este impară.**

**Problema 1.** Ce semn are: 1)  $\sin 280^\circ$ ; 2)  $\operatorname{tg}(-140^\circ)$ ?

*Rezolvare*

1) Deoarece  $280^\circ$  este unghi al cadranelui IV, atunci  $\sin 280^\circ < 0$ .

2) Deoarece  $-140^\circ$  este unghi al cadranelui III, atunci  $\operatorname{tg}(-140^\circ) > 0$ . ◀

**Problema 2.** Comparați  $\sin 200^\circ$  și  $\sin(-200^\circ)$ .

*Rezolvare.* Deoarece  $200^\circ$  – unghi al cadranelui III,  $-200^\circ$  – unghi al cadranelui II, atunci  $\sin 200^\circ < 0$ ,  $\sin(-200^\circ) > 0$ .

Deci,  $\sin 200^\circ < \sin(-200^\circ)$ . ◀

**Problema 3.** Studiați la paritate funcția: 1)  $f(x) = \frac{1 + \cos x}{x^2}$ ;

2)  $f(x) = 1 + \sin x$ .

*Rezolvare*

1) Domeniul de definiție al acestei funcții,  $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ , este simetric față de originea de coordonate. Avem:

$$f(-x) = \frac{1 + \cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{1 + \cos x}{x^2} = f(x).$$

Deci, funcția dată este pară.

2) Domeniul de definiție al acestei funcții,  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ , este simetric față de originea de coordonate. Notăm:

$$f(-x) = 1 + \sin(-x) = 1 - \sin x.$$

Deoarece nici una din egalitățile  $f(-x) = f(x)$  și  $f(-x) = -f(x)$  nu se îndeplinește pentru toți  $x$  din domeniul de definiție, rezultă că funcția dată nu este nici pară, nici impară. ◀



1. Când se spune, că unghiul  $\alpha$  este unghi al cadranelui I? al cadranelui II? al cadranelui III? al cadranelui IV?
2. Ce semne au sinus, cosinus, și tangenta în fiecare din cadranele planului de coordonate?
3. Care din funcțiile trigonometrice sunt pare, și care – impare: scrieți egalitățile corespunzătoare.



## EXERCIIII

**10.1.°** Unghi al cărui cadran este unghiul:

- 1)  $38^\circ$ ;    2)  $196^\circ$ ;    3)  $-74^\circ$ ;    4)  $\frac{3\pi}{5}$ ;    5)  $\frac{7\pi}{4}$ ;    6)  $-\frac{2\pi}{3}$ ?

**10.2.°** Valoarea funcției trigonometrice este număr pozitiv sau negativ:

- 1)  $\sin 110^\circ$ ;    2)  $\cos 200^\circ$ ;    3)  $\sin(-280^\circ)$ ;    4)  $\operatorname{tg}(-75^\circ)$ ;    5)  $\cos 2$ ;    6)  $\operatorname{tg} 1$ ?

**10.3.°** Comparați cu zero:

- 1)  $\operatorname{tg} 104^\circ$ ;    3)  $\sin(-36^\circ)$ ;    5)  $\operatorname{tg}(-291^\circ)$ ;  
2)  $\cos 220^\circ$ ;    4)  $\cos(-78^\circ)$ ;    6)  $\sin \frac{3\pi}{7}$ .

**10.4.°** Aflați valoarea expresiei:

- 1)  $\sin(-30^\circ)$ ;    2)  $\operatorname{tg}(-60^\circ)$ ;    3)  $\cos(-45^\circ)$ .

**10.5.°** Cu ce este egală valoarea expresiei  $\cos(-60^\circ) + \operatorname{tg}(-45^\circ)$ ?

**10.6.°** Aflați valoarea expresiei  $\sin(-30^\circ) - 2 \operatorname{tg}(-45^\circ) + \cos(-45^\circ)$ .

**10.7.°** Găsiți valoarea expresiei  $\sin^2(-60^\circ) + \cos^2(-30^\circ)$ .

**10.8.\*** Cărui cadran al planului de coordonate aparține unghiul  $\alpha$ , dacă:

- 1)  $\sin \alpha > 0$  și  $\cos \alpha < 0$ ;    2)  $\sin \alpha < 0$  și  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ?

**10.9.\*** Este cunoscut, că  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Comparați cu zero valoarea expresiei:

- 1)  $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$ ;    2)  $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$ .

**10.10.\*** Se știe, că  $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ . Comparați cu zero valoarea expresiei:

- 1)  $\sin \beta \cos \beta$ ;    2)  $\frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta}$ .

**10.11.\*** Comparați:

- 1)  $\operatorname{tg} 130^\circ$  și  $\operatorname{tg}(-130^\circ)$ ;    2)  $\cos 80^\circ$  și  $\sin 330^\circ$ ;    3)  $\operatorname{tg} 6$  și  $\operatorname{tg} 6^\circ$ .

**10.12.\*\*** Se știe, că  $\alpha$  – unghi al cadranelui III. Simplificați expresia:

- 1)  $\sin \alpha - |\sin \alpha|$ ;    2)  $|\cos \alpha| - \cos \alpha$ ;    3)  $|\operatorname{tg} \alpha| - \operatorname{tg} \alpha$ .

**10.13.\*\*** Se știe, că  $\beta$  – unghi al cadranelui IV. Simplificați expresia:

- 1)  $|\sin \beta| + \sin \beta$ ;    2)  $\cos \beta - |\cos \beta|$ ;    3)  $|\operatorname{tg} \beta| + \operatorname{tg} \beta$ .

**10.14.\*\*** Cercetați la paritate funcția:

- 1)  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ ;    2)  $f(x) = x^3 + \cos x$ ;    3)  $f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ .

10.15.\*\* Cercetați la paritate funcția:

$$1) f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x; \quad 2) f(x) = \frac{\cos x}{x^2 - 1}; \quad 3) f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^3 - 1}.$$



### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

10.16. Rezolvați ecuația:

$$1) \sqrt{x^2 - 18} = \sqrt{2x - 3}; \quad 2) \sqrt{10 - 3x} + 8 = 5x.$$

## 11. Proprietățile și graficele funcțiilor trigonometrice

Voi cunoașteți, că pentru orice număr  $x$  se execută egalitățile

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi);$$

$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi).$$

Aceasta înseamnă că valorile funcțiilor sinus și cosinus se repetă periodic la schimbarea argumentului cu  $2\pi$ . Funcțiile  $y = \sin x$  și  $y = \cos x$  sunt exemple de **funcții periodice**.

**Definiție.** Funcția  $f$  se numește **periodică**, dacă există un astfel de număr  $T \neq 0$ , că pentru orice  $x$  din domeniul de definiție al funcției  $f$  se execută egalitatea

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Numărul  $T$  se numește **perioada** funcției  $f$ .

Voi știți, că pentru orice  $x$  din domeniul de definiție al funcției  $y = \operatorname{tg} x$  se îndeplinesc egalitățile

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi).$$

Atunci din definiția funcției periodice reiese, că tangenta este funcție periodică cu perioada  $\pi$ .

Se poate arăta, că dacă funcția  $f$  are perioada  $T$ , atunci oricare din numerele  $2T, 3T, \dots$ , și de asemenea oricare din numerele  $-T, -2T, -3T, \dots$  de asemenea este perioada ei.

Din această proprietate reiese, că fiecare funcție periodică posedă o mulțime de perioade.

De exemplu, orice număr de forma  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$  este perioadă a funcțiilor  $y = \sin x$  și  $y = \cos x$ ; iar orice număr de forma  $\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$  este perioadă a funcției  $y = \operatorname{tg} x$ .

Dacă printre toate perioadele funcției  $f$  există cea mai mică perioadă pozitivă, atunci ea este numită **perioada principală** a funcției  $f$ .

**Teorema 11.1.** *Perioada principală a funcțiilor  $y = \sin x$  și  $y = \cos x$  este numărul  $2\pi$ ; perioada principală a funcției  $y = \operatorname{tg} x$  este numărul  $\pi$ .*

**Problema 1.** Găsiți valoarea expresiei: 1)  $\sin 660^\circ$ ; 2)  $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$ ;

3)  $\operatorname{tg} 135^\circ$ .

*Rezolvare*

$$1) \sin 660^\circ = \sin(720^\circ - 60^\circ) = \sin(-60^\circ + 360 \cdot 2) =$$

$$= \sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2) \sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = -\sin \frac{13\pi}{3} = -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$3) \operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(-45^\circ + 180^\circ) = \operatorname{tg}(-45^\circ) = -1. \blacktriangleleft$$

În figura 11.1 este prezentat graficul unei oarecare funcții periodice  $f$  cu perioada  $T$ ,  $D(f) = \mathbb{R}$ .

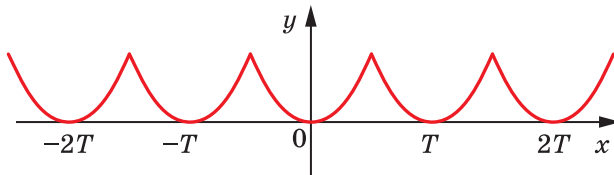


Fig. 11.1

Fragmentele graficului acestei funcții pe intervalele  $[0; T]$ ,  $[T; 2T]$ ,  $[2T; 3T]$ , ș. a. m. d., precum și pe intervalele  $[-T; 0]$ ,  $[-2T; -T]$ ,  $[-3T; -2T]$ , ș. a. m. d. sunt figuri egale, totodată oricare din aceste figuri se poate obține din oricare alta prin translație cu vectorul cu coordonatele  $(nT; 0)$ , unde  $n$  – un număr întreg oarecare.

**Problema 2.** În figura 11.2 este prezentat un fragment al graficului unei funcții periodice, perioada căreia este egală cu  $T$ . Construiți graficul acestei funcții pe intervalul  $\left[-\frac{3T}{2}; \frac{5T}{2}\right]$ .

*Rezolvare.* Construim imaginile figurii reprezentate, obținute în rezultatul translației cu vectorul cu coordonatele  $(T; 0)$ ,  $(2T; 0)$  și  $(-T; 0)$ . Reuniunea figurii date și a imaginilor obținute este graficul căutat (fig. 9.13).  $\blacktriangleleft$

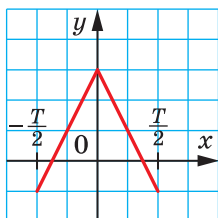


Fig. 11.2

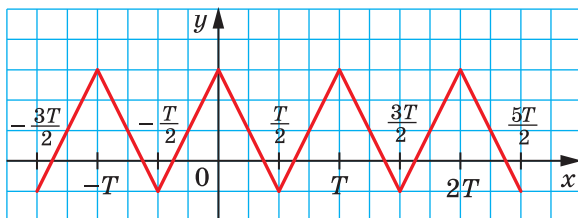


Fig. 11.3

↪ Să cercetăm funcția  $y = \sin x$  pe intervalul  $[0; 2\pi]$ , adică pe intervalul cu lungimea de o perioadă al acestei funcții.

În timpul rotației punctului  $P_0(1; 0)$  în jurul originii coordonatelor cu unghiurile de la 0 până la  $\frac{\pi}{2}$  unghiului mai mare de rotație îi corespunde punctul circumferinței unitate cu ordonata mai mare (fig. 11.4). Aceasta înseamnă, că funcția

$y = \sin x$  crește pe intervalul  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

În timpul rotației punctului  $P_0(1; 0)$  cu unghiurile de la  $\frac{\pi}{2}$  până la  $\frac{3\pi}{2}$  unghiului mai mare de rotație îi corespunde punctul de pe circumferința unitate cu ordonata mai mică (fig. 11.4). Deci, funcția  $y = \sin x$  des-

crește pe intervalul  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

În timpul rotației punctului  $P_0(1; 0)$  cu unghiurile de la  $\frac{3\pi}{2}$  până la  $2\pi$  unghiului de rotație mai mare îi corespunde punctul de pe circumferința unitate cu ordonata mai mare (fig. 11.4). Deci, funcția

$y = \sin x$  crește pe intervalul  $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ .

Funcția  $y = \sin x$  pe intervalul  $[0; 2\pi]$  are trei zerouri:  $x = 0$ ,  $x = \pi$ ,  $x = 2\pi$ .

Dacă  $x \in (0; \pi)$ , atunci  $\sin x > 0$ ; dacă  $x \in (\pi; 2\pi)$ , atunci  $\sin x < 0$ .

Funcția  $y = \sin x$  pe intervalul  $[0; 2\pi]$  obține cea mai mare valoare, care este egală cu 1, pentru  $x = \frac{\pi}{2}$  și cea mai mică valoare, care

este egală cu -1, pentru  $x = \frac{3\pi}{2}$ .

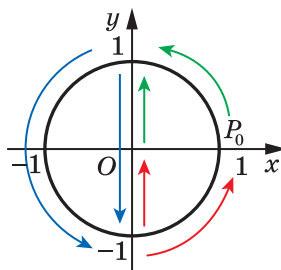


Fig. 11.4

Funcția  $y = \sin x$  pe intervalul  $[0; 2\pi]$  obține toate valorile din intervalul  $[-1; 1]$ .

Proprietățile obținute ale funcției  $y = \sin x$  oferă posibilitatea de a construi graficul ei pe intervalul  $[0; 2\pi]$  (fig. 11.5). Graficul se poate construi mai exact, dacă ne-am folosi de datele tabelului valorilor funcțiilor trigonometrice pentru unele argumente, prezentat în forzațul 3.

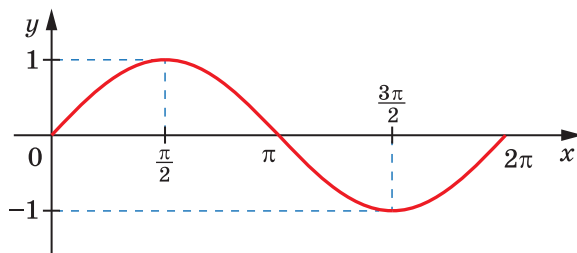


Fig. 11.5

Pe tot domeniul de definiție graficul funcției  $y = \sin x$  se poate obține din graficul construit cu ajutorul translațiilor cu vectorii ce au coordonatele  $(2\pi n; 0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  (fig. 11.6).

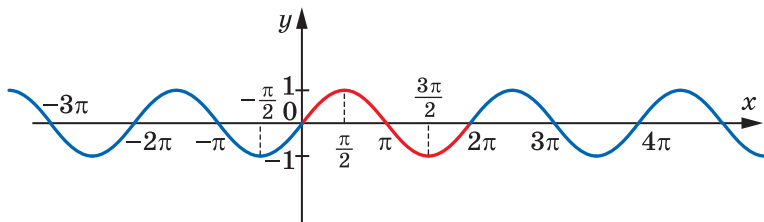


Fig. 11.6

Graficul funcției  $y = \sin x$  se numește **sinusoidă**.

↳ Să cercetăm funcția  $y = \cos x$ . Dacă ne folosim de formula  $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  (vezi exercițiul 9.11), atunci devine clar, că graficul funcției  $y = \cos x$  se poate obține în rezultatul translației a graficului  $y = \sin x$  cu vectorul ce are coordonatele  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  (fig. 11.7). Aceasta înseamnă că graficele funcțiilor  $y = \sin x$  și  $y = \cos x$  sunt figuri egale.

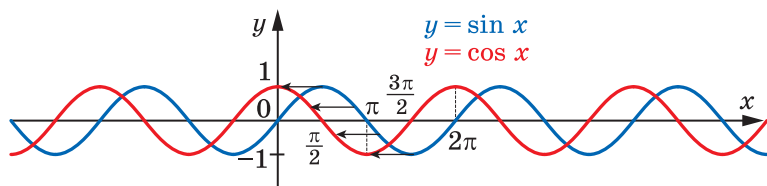


Fig. 11.7

Graficul funcției  $y = \cos x$  se numește **cosinusoidă** (fig. 11.8).

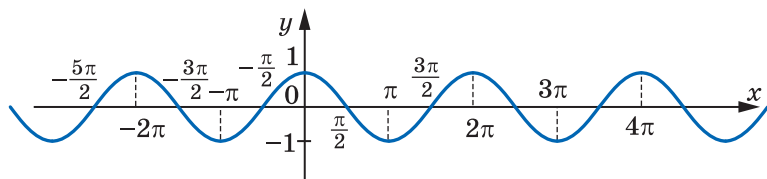


Fig. 11.8

↪ Să cercetăm funcția  $y = \operatorname{tg} x$  pe intervalul  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ , adică pe intervalul cu lungimea perioadei acestei funcții (vă amintim că funcția  $y = \operatorname{tg} x$  în punctele  $-\frac{\pi}{2}$  și  $\frac{\pi}{2}$  nu este determinată).

Se poate arăta, că în timpul variației unghiului de rotație de la  $-\frac{\pi}{2}$  până la  $\frac{\pi}{2}$  valoarea tangentei se mărește. Aceasta înseamnă, că funcția  $y = \operatorname{tg} x$  crește pe intervalul  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Funcția  $y = \operatorname{tg} x$  pe intervalul  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  are un zero:  $x = 0$ .

Dacă  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ , atunci  $\operatorname{tg} x < 0$ ; dacă

$x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , atunci  $\operatorname{tg} x > 0$ .

Proprietățile obținute ale funcției  $y = \operatorname{tg} x$  oferă posibilitatea construirii graficului ei pe intervalul  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  (fig. 11.9). Graficul se poa-

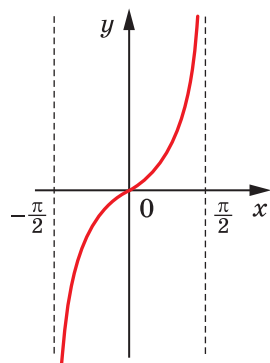


Fig. 11.9



te construi mai exact, dacă folosim datele din tabelul valorilor funcțiilor trigonometrice pentru unele argumente, prezentat în forțașul 3.

Pe tot domeniul de definiție graficul funcției  $y = \operatorname{tg} x$  se poate obține din graficul construit cu ajutorul translației cu vectorul ce are coordonatele  $(\pi n; 0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  (fig. 11.10).

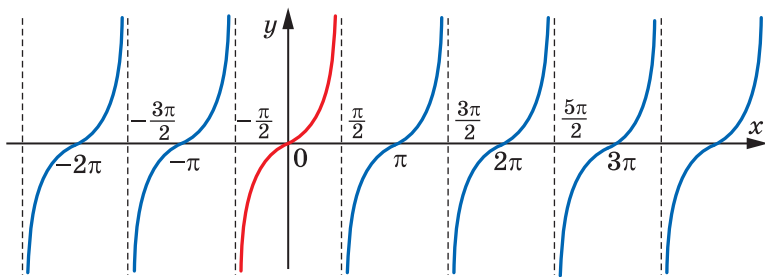


Fig. 11.10

În tabel (vezi pag. 69) sunt prezentate proprietățile principale ale funcțiilor trigonometrice.

**Problema 3.** Comparați: 1)  $\sin 0,7\pi$  și  $\sin 0,71\pi$ ; 2)  $\cos 324^\circ$  și  $\cos 340^\circ$ .

*Rezolvare.* 1) Deoarece numerele  $0,7\pi$  și  $0,71\pi$  aparțin intervalului  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ , pe care funcția  $y = \sin x$  descrește, și  $0,7\pi < 0,71\pi$ , atunci  $\sin 0,7\pi > \sin 0,71\pi$ .

2) Deoarece unghiurile  $324^\circ$  și  $340^\circ$  aparțin intervalului  $[180^\circ; 360^\circ]$ , pe care funcția  $y = \cos x$  crește, și  $324^\circ < 340^\circ$ , atunci  $\cos 324^\circ < \cos 340^\circ$ . ◀



1. Care funcție se numește periodică?
2. Care număr se numește perioada principală a funcției?
3. Reprezentați schematic graficul și formulați principalele proprietăți ale funcției  $y = \sin x$ .
4. Reprezentați schematic graficul și formulați principalele proprietăți ale funcției  $y = \cos x$ .
5. Reprezentați schematic graficul și formulați principalele proprietăți ale funcției  $y = \operatorname{tg} x$ .

Proprietatea	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$
Domeniul de definiție	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$
Domeniul de valori	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbb{R}$
Perioada principală	$2\pi$	$2\pi$	$\pi$
Zorourile funcției	$\pi n$	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	$\pi n$
Funcția obține valori pozitive pe intervalele	$(2\pi n; \pi + 2\pi n)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
Funcția obține valori negative pe intervalele	$(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$
Paritatea	Impară	Pară	Impară
Intervalele de creștere	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
Intervalele de descreștere	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[2\pi n; \pi + 2\pi n]$	—
Cea mai mare valoare	1	1	—
Cea mai mică valoare	-1	-1	—



### EXERCITII

11.1.° Găsiți valoarea expresiei:

- 1)  $\sin 390^\circ$ ;                      3)  $\sin(-390^\circ)$ ;                      5)  $\cos 300^\circ$ ;  
 2)  $\operatorname{tg} 780^\circ$ ;                      4)  $\operatorname{tg}(-210^\circ)$ ;                      6)  $\sin \frac{5\pi}{3}$ .

11.2.° Găsiți valoarea expresiei:

- 1)  $\sin 420^\circ$ ;      2)  $\operatorname{tg}(-315^\circ)$ ;      3)  $\sin 1110^\circ$ ;      4)  $\cos \frac{7\pi}{3}$ .

11.3.° Aparține oare graficului funcției  $y = \cos x$  punctul:

- 1)  $A\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$ ;      2)  $B\left(\frac{9\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ;      3)  $C(-4\pi; -1)$ ?

11.4.° Trece oare graficul funcției  $y = \operatorname{tg} x$  prin punctul:

- 1)  $A\left(-\frac{\pi}{4}; 1\right)$ ;      2)  $B\left(-\frac{\pi}{3}; -\sqrt{3}\right)$ ;      3)  $C(\pi; 0)$ ?

11.5.° Trece oare graficul funcției  $y = \sin x$  prin punctul:

- 1)  $A\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$ ;      2)  $B(\pi; -1)$ ;      3)  $C\left(\frac{23\pi}{6}; -\frac{1}{2}\right)$ ?

11.6.° Printre punctele  $-2\pi$ ,  $-\frac{3\pi}{2}$ ,  $-\pi$ ,  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ ,  $2\pi$ ,  $\frac{9\pi}{2}$ ,  $6\pi$ ,

$7\pi$  indicați:

- 1) zerourile funcției  $y = \sin x$ ;
- 2) valorile argumentului, pentru care funcția  $y = \sin x$  obține cea mai mare valoare;
- 3) valorile argumentului, pentru care funcția  $y = \sin x$  obține cea mai mică valoare;

11.7.° Printre punctele  $-\frac{5\pi}{2}$ ,  $-\frac{3\pi}{2}$ ,  $-\pi$ ,  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ ,  $\frac{5\pi}{2}$ ,  $\frac{7\pi}{2}$ ,  $5\pi$ ,  $8\pi$

indicați:

- 1) zerourile funcției  $y = \cos x$ ;
- 2) valorile argumentului, pentru care funcția  $y = \cos x$  obține cea mai mare valoare;
- 3) valorile argumentului, pentru care funcția  $y = \cos x$  obține cea mai mică valoare;

11.8.° Care din numere  $-\frac{3\pi}{2}$ ,  $-\pi$ ,  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $0$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{5\pi}{2}$ ,  $3\pi$ :

- 1) sunt zerourile funcției  $y = \operatorname{tg} x$ ;
- 2) nu aparțin domeniului de definiție al funcției  $y = \operatorname{tg} x$ ?

11.9.\* În figura 11.11 este reprezentată o parte a graficului a unei funcții periodice, perioada căreia este egală cu  $T$ . Construiți graficul acestei funcții pe intervalul  $[-2T; 3T]$ .

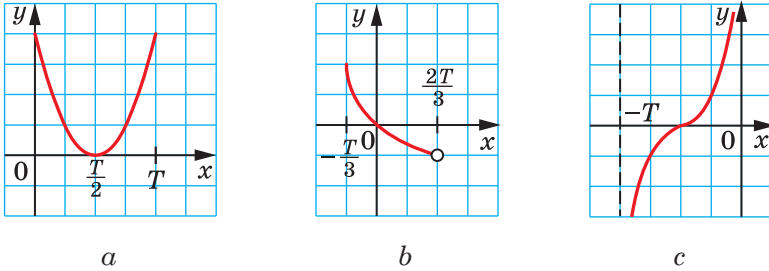


Fig. 11.11

11.10.\* În figura 11.12 este reprezentată o parte a graficului a unei funcții periodice, perioada căreia este egală cu  $T$ . Construiți graficul acestei funcții pe intervalul  $[-2T; 2T]$ .

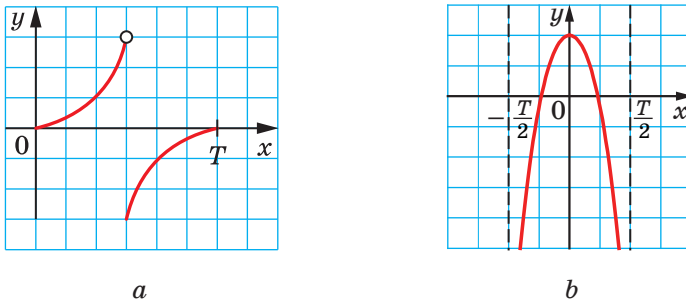


Fig. 11.12

11.11.\* Pe care din intervalele aduse funcția  $y = \sin x$  crește:

- 1)  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ; 2)  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ; 3)  $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$ ; 4)  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$ ?

11.12.\* Pe care din intervalele indicate funcția  $y = \sin x$  scade:

- 1)  $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$ ; 2)  $[-\pi; 0]$ ; 3)  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ; 4)  $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$ ?

11.13.\* Care din intervalele prezentate sunt intervale de descrescere ale funcției  $y = \cos x$ :

- 1)  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$ ; 2)  $[-2\pi; -\pi]$ ; 3)  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ; 4)  $[6\pi; 7\pi]$ ?

**11.14.\*** Care din intervalele prezentate sunt intervale de creștere ale funcției  $y = \cos x$ :

- 1)  $[-3\pi; -2\pi]$ ;    2)  $[0; \pi]$ ;    3)  $[-\pi; \pi]$ ;    4)  $[3\pi; 4\pi]$ ?

**11.15.\*** Comparați:

- 1)  $\sin 20^\circ$  și  $\sin 21^\circ$ ;    3)  $\sin \frac{10\pi}{9}$  și  $\sin \frac{25\pi}{18}$ ;  
 2)  $\cos 20^\circ$  și  $\cos 21^\circ$ ;    4)  $\operatorname{tg}(-38^\circ)$  și  $\operatorname{tg}(-42^\circ)$ .

**11.16.\*** Comparați:

- 1)  $\cos \frac{\pi}{9}$  și  $\cos \frac{4\pi}{9}$ ;    2)  $\sin \frac{5\pi}{9}$  și  $\sin \frac{17\pi}{18}$ ;    3)  $\operatorname{tg} 100^\circ$  și  $\operatorname{tg} 92^\circ$ .

**11.17.\*\*** Demonstrați, că numărul  $T$  este perioada funcției  $f$ :

- 1)  $f(x) = \cos \frac{x}{4}$ ,  $T = 8\pi$ ;    2)  $f(x) = \operatorname{tg} 3x$ ,  $T = -\frac{2\pi}{3}$ .

**11.18.\*\*** Demonstrați, că numerele  $\frac{2\pi}{3}$  și  $-4\pi$  sunt perioade ale funcției  $f(x) = \cos 3x$ .

**11.19.\*** Comparați:

- 1)  $\sin 58^\circ$  și  $\cos 58^\circ$ ;    2)  $\sin 18^\circ$  și  $\cos 18^\circ$ ;    3)  $\cos 80^\circ$  și  $\sin 70^\circ$ .



## EXERCIȚII PENTRU REPETARE

**11.20.** Găsiți zerourile funcției:

- 1)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ ;    2)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ ;    3)  $f(x) = x\sqrt{x - 1}$ .

**11.21.** Găsiți domeniul de definiție al funcției:

- 1)  $f(x) = x^2 + 2$ ;    2)  $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$ .

## 12. Relațiile fundamentale dintre funcțiile trigonometrice de același argument

În acest punct vom stabili identitățile, care leagă valorile funcțiilor trigonometrice ale unuia și aceluiași argument.

Coordonatele oricărui punct  $P(x; y)$  al circumferinței unitare satisfac ecuația  $x^2 + y^2 = 1$ . Deoarece  $x = \cos \alpha$ ,  $y = \sin \alpha$ , unde  $\alpha$  – unghiul de rotație, în rezultatul căreia din punctul  $P_0(1; 0)$  a fost obținut punctul  $P$ , atunci

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

(1)

Atragem atenția la faptul, că punctul  $P$  pe circumferința unitate este ales arbitrar, de aceea identitatea (1) este adevărată pentru orice  $\alpha$ . Ea este numită **identitatea trigonometrică fundamentală**.

Utilizând identitatea trigonometrică fundamentală, să aflăm dependența dintre tangentă și cosinus.

Admitem că  $\cos \alpha \neq 0$ . Împărțim ambele părți ale egalității (1) la  $\cos^2 \alpha$ . Obținem:

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

De aici

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}}$$

**Problema 1.** Simplificați expresia:

1)  $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x$ ; 2)  $\frac{1}{\cos^2 \varphi} - \operatorname{tg}^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ .

*Rezolvare.* 1)  $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

2)  $\frac{1}{\cos^2 \varphi} - \operatorname{tg}^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi =$   
 $= \cos^2 \varphi. \blacktriangleleft$

**Problema 2.** Se cunoaște, că  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ . Calculați  $\sin \alpha$ .

*Rezolvare.* Dispunem de:  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ .

De aici  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$  sau  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ .

Figura 12.1 ilustrează această problemă.  $\blacktriangleleft$

**Problema 3.** Aflați  $\cos \alpha$  și  $\operatorname{tg} \alpha$ ,

dacă  $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$  și  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

*Rezolvare.* Avem:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}.$$

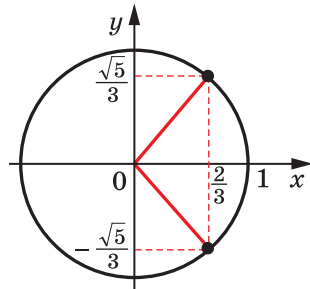


Fig. 12.1

Deoarece  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , atunci  $\cos \alpha < 0$ ; prin urmare,  $\cos \alpha =$   
 $= -\sqrt{\frac{576}{625}} = -\frac{24}{25}$ .  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}$ . ◀



1. Care egalitate se numește identitatea trigonometrică fundamentală?
2. Care identitate leagă tangenta și cosinusul de același argument?



### EXERCIȚII

12.1.° Simplificați expresia:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $1 - \cos^2 \alpha$ ;                   | 4) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$ ;  |
| 2) $\sin^2 \beta - 1$ ;                    | 5) $1 - \sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$ ; |
| 3) $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + 1$ ; | 6) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ .        |

12.2.° Simplificați expresia:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 5\alpha}$ ; | 3) $(\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha)^2 + \left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2$ ; |
| 2) $\left(1 + \sin \frac{x}{2}\right)\left(1 - \sin \frac{x}{2}\right)$ ;      | 4) $\frac{\sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1}$ .        |

12.3.° Se pot oare satisface în același timp egalitățile  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$

și  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{13}}{4}$ ?

12.4.° Se pot oare satisface în același timp egalitățile  $\sin \alpha = \frac{2}{5}$

și  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ?

12.5.° Simplificați expresia:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2$ ;       | 3) $\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ ;               |
| 2) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ ; | 4) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ . |

**12.6.\*** Simplificați expresia:

$$1) \sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha;$$

$$3) \frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} + \frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta};$$

$$2) \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha;$$

$$4) \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

**12.7.\*** Aflați valorile funcțiilor trigonometrice de argumentul  $\alpha$ , dacă:

$$1) \cos \alpha = \frac{1}{2}; \quad 2) \sin \alpha = 0,6 \text{ și } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \quad 3) \operatorname{tg} \alpha = 2 \text{ și } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

**12.8.\*** Găsiți valorile funcțiilor trigonometrice de argumentul  $\alpha$ ,

$$\text{dacă: } 1) \cos \alpha = \frac{12}{13} \text{ și } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad 3) \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3} \text{ și } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

$$2) \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ și } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2};$$

**12.9.\*\*** Demonstrați identitatea:

$$1) \frac{\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha; \quad 2) \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha.$$

**12.10.\*\*** Demonstrați identitatea:

$$1) \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha; \quad 2) \frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

**12.11.\*\*** Găsiți valoarea expresiei  $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ , dacă  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ .

**12.12.\*\*** Găsiți valoarea expresiei  $\frac{5 \cos \alpha + 6 \sin \alpha}{3 \sin \alpha - 7 \cos \alpha}$ , dacă  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ .

**12.13.\*\*** Găsiți cea mai mare și cea mai mică valori ale expresiei  $\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha$ .

**12.14.\*\*** Găsiți cea mai mare și cea mai mică valori ale expresiei  $3 \sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha$ .



## EXERCIȚII PENTRU REPETARE

**12.15.** Găsiți valoarea expresiei:

$$1) \left( \frac{a^{\frac{8}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} \text{ pentru } a = 0,008; \quad 2) \left( \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{3}{4}} \text{ pentru } a = 0,0625.$$



### 13. Формуле адунării

Формуле адунării се нумеск формуле, care exprimă  $\cos(\alpha \pm \beta)$ ,  $\sin(\alpha \pm \beta)$  și  $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$  prin funcțiile trigonometrice ale unghiurilor  $\alpha$  și  $\beta$ .

Să demonstrăm, că  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ .

Fie că punctele  $P_1$  și  $P_2$  sunt obținute prin rotația punctului  $P_0(1; 0)$  cu unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$ ; respectiv.

Considerăm cazul, când  $0 \leq \alpha - \beta \leq \pi$ . Atunci unghiul dintre vectorii  $\overline{OP_1}$  și  $\overline{OP_2}$  este egal cu  $\alpha - \beta$  (fig. 13.1). Coordonatele punctelor

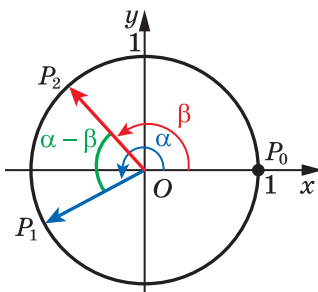


Fig. 13.1

$P_1$  și  $P_2$  sunt corespunzător egale cu  $(\cos \alpha; \sin \alpha)$  și  $(\cos \beta; \sin \beta)$ . Atunci vectorul  $\overline{OP_1}$  are coordonatele  $(\cos \alpha; \sin \alpha)$ , iar vectorul  $\overline{OP_2}$  are coordonatele  $(\cos \beta; \sin \beta)$ .

Exprimăm produsul scalar al vectorilor  $\overline{OP_1}$  și  $\overline{OP_2}$  prin coordonatele lor:

$$\overline{OP_1} \cdot \overline{OP_2} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Totodată conform definiției produsului scalar al vectorilor se poate scrie:

$$\overline{OP_1} \cdot \overline{OP_2} = |\overline{OP_1}| \cdot |\overline{OP_2}| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta).$$

De aici obținem formula, care se numește **cosinusul diferenței**.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (1)$$

Formula (1) este adevărată și în acel caz, când  $(\alpha - \beta) \notin [0; \pi]$ . Demonstrăm formula **cosinusului sumei**:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Disponem de:  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) =$   
 $= \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$

Formulele **sinusului sumei** și **sinusului diferenței** au aspectul:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Formulele **tangentei sumei** și **tangentei diferenței** au aspectul:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (3)$$

Identitatea (2) este justă pentru toate  $\alpha$  și  $\beta$ ; pentru care  $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$ ,  $\cos \alpha \neq 0$ ,  $\cos \beta \neq 0$ .

Identitatea (3) este justă pentru toate  $\alpha$  și  $\beta$ ; pentru care  $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$ ,  $\cos \alpha \neq 0$ ,  $\cos \beta \neq 0$ .

Formulele, care exprimă funcțiile trigonometrice de argumentul  $2\alpha$  prin funcțiile trigonometrice de argumentul  $\alpha$ , se numesc **formule de argument dublu**.

În formulele adunării

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

considerăm  $\beta = \alpha$ . Obținem:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Aceste formule se numesc respectiv **formulele cosinusului, sinusului și a tangentei argumentului dublu**.

Deoarece  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$  și  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ , atunci din formula  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$  obținem încă două formule:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

Uneori aceste formule este comod de le folosit în astfel de înfățișare:

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha,$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

sau în aspectul următor:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Ultimele două formule sunt numite **formule de descreștere a puterii**.

**Проблема 1.** Спростіть вираз:

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right);$$

$$2) \sin(\alpha + 45^\circ) \cos(\alpha - 45^\circ) - \cos(\alpha + 45^\circ) \sin(\alpha - 45^\circ).$$

*Розв'язок.* 1) Використовуючи формули синуса суми та синуса різниці, отримуємо:  $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) =$

$$\begin{aligned} &= \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right) - \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \alpha. \end{aligned}$$

2) Підставимо вираз даний з синуса різниці аргументів  $\alpha + 45^\circ$  та  $\alpha - 45^\circ$ . Отримуємо:

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha + 45^\circ) \cos(\alpha - 45^\circ) - \cos(\alpha + 45^\circ) \sin(\alpha - 45^\circ) = \\ &= \sin((\alpha + 45^\circ) - (\alpha - 45^\circ)) = \sin(\alpha + 45^\circ - \alpha + 45^\circ) = \sin 90^\circ = 1. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

**Проблема 2.** Доведіть тотожність  $\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

$$\begin{aligned} \text{Розв'язок. } \sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \sin \alpha - \frac{\cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

**Проблема 3.** Знайти значення виразу  $\frac{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ}$ .

*Розв'язок.* Використовуючи формулу тангенса суми кутів  $20^\circ$  та  $25^\circ$ , отримуємо:

$$\frac{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg}(20^\circ + 25^\circ)} = \frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ} = 1. \quad \blacktriangleleft$$

**Проблема 4.** Спростіть вираз: 1)  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ ;

$$2) 1 - 8 \sin^2 \beta \cos^2 \beta.$$

*Розв'язок*

$$1) \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha.$$

$$2) 1 - 8 \sin^2 \beta \cos^2 \beta = 1 - 2 \cdot 4 \sin^2 \beta \cos^2 \beta = 1 - 2 \sin^2 2\beta = \cos 4\beta. \quad \blacktriangleleft$$



1. Scrieți formula:

- 1) cosinusului diferenței;      4) sinusului diferenței;  
 2) cosinusului sumei;      5) a tangentei sumei;  
 3) sinusului sumei;      6) a tangentei diferenței.

2. Scrieți formulele cosinusului, sinusului și tangentei de argument dublu.

3. Scrieți formulele descreșterii puterii.



### EXERCIȚII

13.1.° Simplificați expresia:

- 1)  $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ ;      3)  $\sqrt{2} \sin(\alpha - 45^\circ) - \sin \alpha + \cos \alpha$ ;  
 2)  $\sin(30^\circ + \alpha) - \cos(60^\circ + \alpha)$ ;      4)  $2 \cos(60^\circ - \alpha) - \sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha$ .

13.2.° Simplificați expresia:

- 1)  $\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)$ ;      2)  $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos \alpha - \sin \alpha$ .

13.3.° Simplificați expresia:

- 1)  $\sin \alpha \cos 4\alpha + \cos \alpha \sin 4\alpha$ ;  
 2)  $\cos 17^\circ \cos 43^\circ - \sin 17^\circ \sin 43^\circ$ ;  
 3)  $\cos \frac{3\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{3\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$ ;  
 4)  $\sin 53^\circ \cos 7^\circ - \cos 53^\circ \sin(-7^\circ)$ ;  
 5)  $\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)$ ;  
 6)  $\frac{\sin 20^\circ \cos 5^\circ - \cos 20^\circ \sin 5^\circ}{\cos 10^\circ \cos 5^\circ - \sin 10^\circ \sin 5^\circ}$ .

13.4.° Simplificați expresia:

- 1)  $\cos 6\alpha \cos 2\alpha - \sin 6\alpha \sin 2\alpha$ ;  
 2)  $\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \sin 18^\circ \cos 12^\circ$ ;  
 3)  $\sin(-15^\circ) \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \sin 75^\circ$ ;  
 4)  $\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta$ .

13.5.° Se știe, că  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4}$ . Aflați valoarea expresiei  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ .

13.6.° Se știe, că  $\operatorname{tg} \alpha = 3$ ,  $\operatorname{tg} \beta = 5$ . Găsiți valoarea expresiei  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ .

13.7.° Simplificați expresia:

$$1) \frac{\operatorname{tg} 13^\circ + \operatorname{tg} 47^\circ}{1 - \operatorname{tg} 13^\circ \operatorname{tg} 47^\circ};$$

$$2) \frac{1 - \operatorname{tg} 27^\circ \operatorname{tg} 33^\circ}{\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 33^\circ}.$$

13.8.° Simplificați expresia:

$$1) \frac{\operatorname{tg} 24^\circ + \operatorname{tg} 36^\circ}{1 - \operatorname{tg} 24^\circ \operatorname{tg} 36^\circ};$$

$$2) \frac{\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha}{1 + \operatorname{tg} 5\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}.$$

13.9.° Simplificați expresia:

$$1) \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha};$$

$$5) \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha};$$

$$2) \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha};$$

$$6) 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{4};$$

$$3) \cos 2\alpha + \sin^2 \alpha;$$

$$7) \left( \sin \frac{\alpha}{4} + \cos \frac{\alpha}{4} \right) \left( \sin \frac{\alpha}{4} - \cos \frac{\alpha}{4} \right);$$

$$4) \frac{\sin 50^\circ}{2 \cos 25^\circ};$$

$$8) \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha}.$$

13.10.° Simplificați expresia:

$$1) \frac{\sin 80^\circ}{\cos 40^\circ};$$

$$5) \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha);$$

$$2) \cos 4\beta + \sin^2 2\beta;$$

$$6) \frac{\sin 4\alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha};$$

$$3) \cos 6\alpha + 2 \sin^2 3\alpha;$$

$$7) \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right);$$

$$4) \frac{1 + \sin 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2};$$

$$8) \frac{2 \operatorname{tg} 1,5\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 1,5\alpha}.$$

13.11.° Calculați valoarea expresiei:

$$1) 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ;$$

$$3) 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{12};$$

$$2) \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ;$$

$$4) \frac{2 \operatorname{tg} 165^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 165^\circ}.$$

13.12.° Calculați valoarea expresiei:

$$1) \frac{2 \operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ};$$

$$2) 2 \sin \frac{3\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8};$$

$$3) 1 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{12}.$$

13.13.° Demonstrați identitatea:

$$1) \frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta} = 1;$$

$$2) \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos(45^\circ + \alpha)}{2 \sin(45^\circ + \alpha) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

13.14.♦ Демонстраți идентитатеа:

$$1) \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta) + \sin \beta \cos \alpha} = 1; \quad 2) \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \sin(45^\circ - \alpha)}{2 \sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3} \cos \alpha} = \sqrt{2}.$$

13.15.♦ Гăсиți  $\cos(\alpha + \beta)$ , dacă  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  și  $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ .

13.16.♦ Гăсиți  $\sin(\alpha - \beta)$ , dacă  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  și  $\cos \beta = \frac{7}{25}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ .

13.17.♦ Се дă:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \beta = \frac{3}{5}$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ . Аflаți  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ .

13.18.♦ Се cunoaște că:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$ . Аflаți  $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$ .

13.19.♦ Гăсиți  $\sin 2\alpha$ , dacă  $\sin \alpha = -0,6$  și  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ .

13.20.♦ Гăсиți  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , dacă  $\operatorname{tg} \alpha = 4$ .

13.21.♦ Гăсиți  $\cos 2\alpha$ , dacă  $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$ .

13.22.♦ Гăсиți  $\sin 15^\circ$ .

13.23.♦ Гăсиți  $\cos 75^\circ$ .

13.24.♦ Демонстраți идентитатеа  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ .

13.25.♦ Simplificați expresia  $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$ .

13.26.♦♦ Simplificați expresia:

$$1) \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}; \quad 3) \frac{\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha};$$

$$2) \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha}; \quad 4) \frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)}.$$

13.27.♦♦ Simplificați expresia:

$$1) \frac{\cos 6\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha}; \quad 2) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}.$$

13.28.♦♦ Гăсиți cea mai mare valoare a expresiei  $\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha$ .

13.29.♦♦ Гăсиți cea mai mică valoare a expresiei  $\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha$ .

13.30.\* Гăсиți  $\sin 2\alpha$ , dacă  $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3}$ .

13.31.\* Гăсиți  $\sin \alpha$ , dacă  $\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$ .



## EXERCIȚII PENTRU REPETARE

- 13.32.** Pentru care valori ale lui  $x$  valorile expresiilor  $4x + 5$ ,  $7x - 1$  și  $x^2 + 2$  vor fi termeni consecutivi ai progresiei aritmetice? Găsiți acești termeni ai progresiei.
- 13.33.** Pentru care valori ale lui  $x$  valorile expresiilor  $x - 1$ ,  $1 - 2x$  și  $x + 7$  vor fi termeni consecutivi ai progresiei geometrice? Găsiți acești termeni ai progresiei.

## 14. Formulele de reducere

Periodicitatea funcțiilor trigonometrice dă posibilitatea de redus calcularea sinusului și a cosinusului la cazul, când valoarea argumentului aparține intervalului  $[0; 2\pi]$ . În acest punct noi vom examina formulele, care permite de a se mărgini în asemenea calcule doar cu unghiuri din intervalul  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Fiecare unghi din intervalul  $[0; 2\pi]$  poate fi prezentat în forma  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ , sau  $\pi \pm \alpha$ , sau  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ , unde  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . De exemplu,  $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ .

Calcularea sinusurilor și cosinusurilor a unghiurilor cu aspectul  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ,  $\pi \pm \alpha$ ,  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$  se poate reduce la calcularea sinusului sau cosinusului unghiului  $\alpha$ . De exemplu:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2} \sin\alpha = -\sin\alpha.$$

Folosind formulele adunării, analogic se poate obține:

$$\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha \end{array}$$

Aceste formule se numesc **formule de reducere pentru sinus**.

Formulele prezentate mai jos se numesc **formule de reducere pentru cosinus**:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha & \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha & \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= -\sin \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha & \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha & \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= \sin \alpha \end{aligned}$$

Analizând formulele de reducere scrise, se pot observa anumite legități, datorită cărora nu este obligatoriu de învățat pe de rost aceste formule.

Pentru a scrie oricare din ele, se poate ținea cont de așa reguli.

1. *În partea dreaptă a egalității se pune acel semn, care are partea stângă cu condiția, că  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .*

2. *Dacă în partea stângă a formulei argumentul are aspectul  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$  sau  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ , atunci sinusul se înlocuiește cu cosinusul și invers. Dacă argumentul are aspectul  $\pi \pm \alpha$ , atunci schimbarea funcțiilor nu se petrece.*

Vom arăta, cum de folosit aceste reguli pentru expresia  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ .

Acceptând, că  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , ajungem la concluzia:  $\frac{3\pi}{2} - \alpha$  este unghi

al cadranelui III al planului de coordonate. Atunci  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$ .

Conform primei reguli în partea dreaptă a egalității trebuie să fie semnul ”-”.

Deoarece, argumentul are înfățișarea  $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ , atunci conform celei de-a doua regulă trebuie să înlocuim sinusul cu cosinusul.

Deci,  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$ .

**Problema 1.** Simplificați expresia  $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ .

*Rezolvare.* Dispunem de:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2 = (-\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha. \blacktriangleleft$$



**Проблема 2.** Schimbați valoarea funcției trigonometrice cu valoarea funcției de unghi ascuțit: 1)  $\cos \frac{9\pi}{10}$ ; 2)  $\cos \frac{8\pi}{7}$ .

*Rezolvare.* 1)  $\cos \frac{9\pi}{10} = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{10} \right) = -\cos \frac{\pi}{10}$ .

2)  $\cos \frac{8\pi}{7} = \cos \left( \pi + \frac{\pi}{7} \right) = -\cos \frac{\pi}{7}$ . ◀



Formulați regulile, de care ne putem conduce în timpul aplicării formulelor de reducere.



## EXERCIIII

14.1.° Simplificați expresia:

1)  $\sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ ;      3)  $\cos(-\alpha + 270^\circ)$ ;      5)  $\cos^2(3\pi - \alpha)$ ;

2)  $\sin(\pi - \alpha)$ ;      4)  $\cos(\alpha - 180^\circ)$ ;      6)  $\sin \left( \frac{3\pi}{2} + \alpha \right)$ .

14.2.° Simplificați expresia:

1)  $\cos \left( \frac{3\pi}{2} + \alpha \right)$ ;      3)  $\sin(180^\circ + \alpha)$ ;

2)  $\cos(\pi - \alpha)$ ;      4)  $\sin^2 \left( \frac{5\pi}{2} + \alpha \right)$ .

14.3.° Înlocuiți valoarea funcției trigonometrice cu valoarea funcției de unghi ascuțit:

1)  $\cos 123^\circ$ ;      2)  $\sin 216^\circ$ ;      3)  $\cos(-218^\circ)$ ;      4)  $\cos \frac{5\pi}{9}$ .

14.4.° Înlocuiți valoarea funcției trigonometrice cu valoarea funcției de unghi ascuțit:

1)  $\sin(-305^\circ)$ ;      2)  $\sin \frac{14\pi}{15}$ ;      3)  $\cos(-0,7\pi)$ ;      4)  $\cos \frac{6\pi}{5}$ .

14.5.° Calculați valoarea funcției trigonometrice:

1)  $\cos 225^\circ$ ;      2)  $\sin 240^\circ$ ;      3)  $\cos \frac{5\pi}{4}$ ;      4)  $\cos \left( -\frac{4\pi}{3} \right)$ .

14.6.° Calculați valoarea funcției trigonometrice: 1)  $\cos(-150^\circ)$ ;

2)  $\cos 210^\circ$ ;      3)  $\sin 315^\circ$ ;      4)  $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ .

14.7.° Calculați valoarea expresiei:

1)  $\frac{\sin^2 315^\circ \cos 300^\circ + \operatorname{tg}(-315^\circ)}{\sin(-120^\circ) \cos 150^\circ}$ ;      2)  $\frac{\cos 66^\circ \cos 6^\circ + \cos 84^\circ \cos 24^\circ}{\cos 65^\circ \cos 5^\circ + \cos 85^\circ \cos 25^\circ}$ .

14.8.° Găsiți valoarea expresiei  $\frac{\cos 64^\circ \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cos 19^\circ}$ .

14.9.\*\* Simplificați expresia:

1)  $\frac{\sin(\pi + \alpha) \cos(2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \cos(\pi - \alpha)}$ ;

2)  $\sin(\pi - \beta) \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \cos(\pi - \beta)$ .

14.10.\*\* Demonstrați identitatea  $\frac{\sin(\pi - \alpha) \sin(\alpha + 2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -\cos \alpha$ .

14.11.\* Calculați:  $\sin 0^\circ + \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 359^\circ + \sin 360^\circ$ .



## EXERCIȚII PENTRU REPETARE

14.12. Aflați valoarea expresiei:

1)  $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}}$ ;      2)  $\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ .

14.13. Pentru care valori ale variabilei are sens egalitatea:

1)  $\frac{x+4}{x^2-4}$ ;

4)  $\sqrt{7x-42} + \frac{1}{x^2-8x}$ ;

2)  $\frac{x^2-4}{x^2+4}$ ;

5)  $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x-12}}$ ;

3)  $\frac{9}{\sqrt{3x+6}}$ ;

6)  $\frac{x+2}{\sqrt{35+2x-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{8-4x}}?$

## 15. Ecuția $\cos x = b$

Deoarece domeniul de valori al funcției  $y = \cos x$  este intervalul  $[-1; 1]$ , atunci pentru  $|b| > 1$  ecuația  $\cos x = b$  nu are soluții. O dată cu aceasta pentru orice  $b$  astfel, că  $|b| \leq 1$ , această ecuație are rădăcini, totodată ele-s o infinitate.

Este ușor de înțeles cele spuse, adresându-se la interpretarea grafică: graficele funcțiilor  $y = \cos x$  și  $y = b$ , unde  $|b| \leq 1$ , au o infinitate de puncte comune (fig. 15.1).

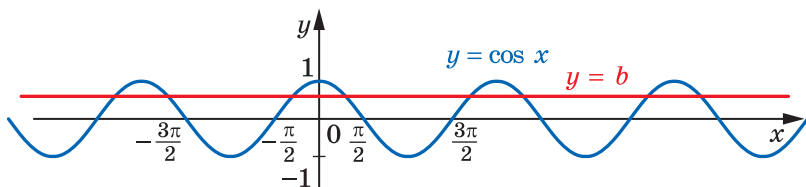


Fig. 15.1

Pentru a înțelege, cum se poate de rezolvat ecuația  $\cos x = b$  în caz general, vă poate ajuta cercetarea unui caz particular. De exemplu, să rezolvăm ecuația  $\cos x = \frac{1}{2}$ .

În figura 15.2 sunt reprezentate graficele funcțiilor  $y = \cos x$  și  $y = \frac{1}{2}$ .

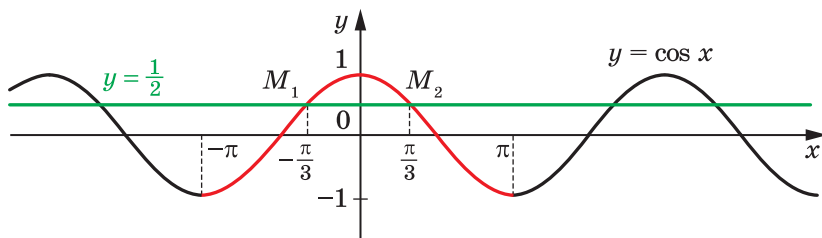


Fig. 15.2

Să examinăm funcția  $y = \cos x$  pe intervalul  $[-\pi; \pi]$  (partea roșie a curbei din figura 15.2), adică pe intervalul, lungimea căruia este egală cu perioada acestei funcții. Dreapta  $y = \frac{1}{2}$  intersectează graficul funcției  $y = \cos x$  pe intervalul  $[-\pi; \pi]$  în două puncte  $M_1$  și  $M_2$ , abscisele cărora sunt numere opuse. Deci, ecuația  $\cos x = \frac{1}{2}$  pe intervalul  $[-\pi; \pi]$  are două rădăcini. Deoarece  $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ , rezultă că aceste soluții sunt numerele  $-\frac{\pi}{3}$  și  $\frac{\pi}{3}$ .

Funcția  $y = \cos x$  este periodică cu perioada  $2\pi$ . De aceea fiecare din altele rădăcini ale ecuației  $\cos x = \frac{1}{2}$  se deosebește de una din rădăcinile cele găsite  $-\frac{\pi}{3}$  sau  $\frac{\pi}{3}$  cu numărul  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Deci, soluțiile ecuației cercetate se pot da prin formulele  $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$  și  $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

De regulă, aceste două formule se înlocuiesc printr-o singură înscrisere:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Să ne întoarcem la ecuația  $\cos x = b$ , unde  $|b| \leq 1$ . În figura 15.3 este arătat, că pe intervalul  $[-\pi; \pi]$  această ecuație are două soluții  $\alpha$  și  $-\alpha$ , unde  $\alpha \in [0; \pi]$  (pentru  $b = 1$  aceste soluții coincid și sunt egale cu zero).

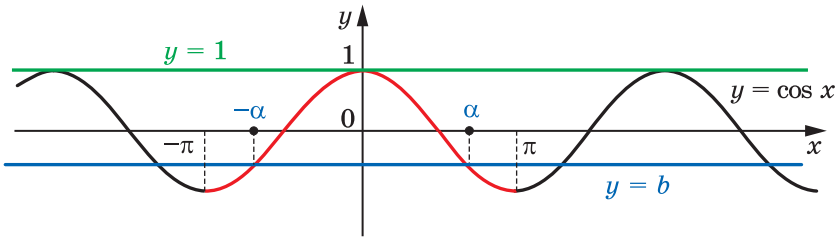


Fig. 15.3

Atunci toate soluțiile ecuației  $\cos x = b$  au forma

$$x = \pm\alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Această formulă demonstrează, că rădăcina  $\alpha$  joacă un rol deosebit: cunoscând-o, se pot găsi toate celelalte rădăcini ale ecuației  $\cos x = b$ . Rădăcina  $\alpha$  are o denumire specială – **arccosinus**.

**Definiție. Arccosinusul numărului  $b$ , unde  $|b| \leq 1$ , se numește un astfel de număr  $\alpha$  din intervalul  $[0; \pi]$ , cosinusul căruia este egal cu  $b$ .**

Pentru arccosinusul numărului  $b$  se folosește însemnarea  $\arccos b$ . De exemplu,

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{ deoarece } \frac{\pi}{3} \in [0; \pi] \text{ și } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\arccos \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\pi}{4}, \text{ deoarece } \frac{3\pi}{4} \in [0; \pi] \text{ și } \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

În general,  **$\arccos b = \alpha$ , dacă  $\alpha \in [0; \pi]$  și  $\cos \alpha = b$ .**

Acum formula rădăcinilor ale ecuației  $\cos x = b$ ,  $|b| \leq 1$ , se poate scrie în așa mod:

$$x = \pm \arccos b + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Menționăm, că cazurile particulare ale ecuației  $\cos x = b$  (pentru  $b = 1$ ,  $b = 0$ ,  $b = -1$ ) au fost cercetate mai înainte (vezi p. 9). Vă amintim rezultatele obținute:

$\cos x = 1$	$\cos x = 0$	$\cos x = -1$
$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Aceleași răspunsuri pot fi obținute, folosind formula (1).

Are loc egalitatea

$$\arccos(-b) = \pi - \arccos b.$$

**Problemă.** Rezolvați ecuația:

$$1) \cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}; \quad 3) \cos\left(\frac{\pi}{5} - 7x\right) = 0.$$

*Rezolvare.* 1) Folosind formula (1), scriem:

$$4x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{În continuare obținem: } 4x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \quad x = \pm \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}.$$

$$\text{Răspuns: } \pm \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \text{ Dispunem de: } \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \quad \frac{x}{3} = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad x = \pm \pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n.$$

$$\text{Răspuns: } \pm \pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$3) \text{ Transcriem ecuația dată astfel: } \cos\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = 0. \text{ De aici}$$

$$7x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Atunci } 7x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi n; \quad 7x = \frac{7\pi}{10} + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}.$$

$$\text{Răspuns: } \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \blacktriangleleft$$



1. Pentru care valori ale lui  $b$  ecuația  $\cos x = b$  are soluții?
2. Câte soluții are ecuația  $\cos x = b$  pentru  $|b| \leq 1$ ?
3. Ce se numește arccosinusul numărului  $b$ ?
4. Ce aspect are formula soluțiilor ecuației  $\cos x = b$  pentru  $|b| \leq 1$ ?
5. Ce înfățișare are formula soluțiilor ecuației  $\cos x = 1$ ?  $\cos x = 0$ ?  $\cos x = -1$ ?



### EXERCIȚII

15.1.° Rezolvați ecuația:

$$1) \cos x = \frac{1}{2}; \quad 2) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 3) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 4) \cos x = \frac{1}{3}.$$

15.2.° Rezolvați ecuația:

$$1) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2) \cos x = -\frac{1}{2}; \quad 3) \cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}; \quad 4) \cos x = \frac{4}{7}.$$

15.3.° Rezolvați ecuația:

$$1) \cos 3x = -\frac{1}{2}; \quad 3) \cos 6x = 1; \quad 5) \cos 9x = -\frac{1}{5};$$

$$2) \cos \frac{5}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 4) \cos \frac{2\pi x}{3} = 0; \quad 6) \cos\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

15.4.° Rezolvați ecuația:

$$1) \cos 2x = \frac{1}{2}; \quad 2) \cos \frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \cos \frac{3x}{4} = -1.$$

15.5.° Rezolvați ecuația:

$$1) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 3) \cos\left(\frac{x}{6} - 2\right) = -1;$$

$$2) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 4) 2 \cos\left(\frac{\pi}{8} - 3x\right) + 1 = 0.$$

15.6.° Rezolvați ecuația:

$$1) \cos\left(\frac{\pi}{9} - 4x\right) = 1; \quad 2) \sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2} + 3\right) + 1 = 0.$$

15.7.° Găsiți cea mai mare rădăcină negativă a ecuației

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

15.8.\* Găsiți o rădăcină negativă oarecare a ecuației

$$\cos \frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

15.9.\*\* Câte soluții ale ecuației  $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  aparțin intervalului  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ ?

15.10.\*\* Aflați toate soluțiile ecuației  $\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}$ , care satisfac inecuația  $-\frac{\pi}{6} < x < 4\pi$ .



### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

15.11. Simplificați expresia  $\frac{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}} : \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{ab^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}}$ .

15.12. Aflați domeniul de definiție al funcției:

$$1) y = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{3x^2 - 5x + 2}}; \quad 2) y = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x + 2}.$$

## 16. Ecuațiile $\sin x = b$ și $\operatorname{tg} x = b$

Deoarece domeniul de valori al funcției  $y = \sin x$  este intervalul  $[-1; 1]$ , atunci pentru  $|b| > 1$  ecuația  $\sin x = b$  nu are soluții. În același timp pentru oricare  $b$  astfel, că  $|b| \leq 1$ , această ecuație are soluții, totodată ele sunt infinit de multe.

Menționăm, că cazurile particulare ale ecuației  $\sin x = b$  (pentru  $b = 1$ ,  $b = 0$ ,  $b = -1$ ) au fost cercetate anterior (vezi p. 9). Vă amintim rezultatele obținute:

$\sin x = 1$	$\sin x = 0$	$\sin x = -1$
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Pentru a obține formula generală a soluțiilor ecuației  $\sin x = b$ , unde  $|b| \leq 1$ , ne adresăm la interpretarea grafică.

În figura 16.1 sunt reprezentate graficele funcțiilor  $y = \sin x$  și  $y = b$ ,  $|b| \leq 1$ .

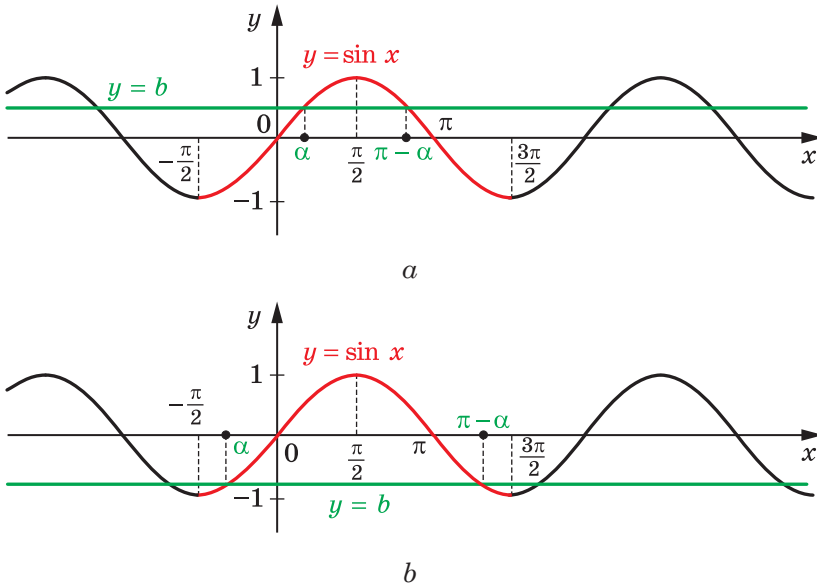


Fig. 16.1

Să studiem funcția  $y = \sin x$  pe intervalul  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$  (partea roșie a curbei din figura 16.1), adică pe intervalul, lungimea căruia este egală cu perioada acestei funcții. Pe acest interval ecuația  $\sin x = b$  are două soluții  $\alpha$  și  $\pi - \alpha$ , unde  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  (pentru  $b = 1$  aceste soluții coincid și sunt egale cu  $\frac{\pi}{2}$ ).

Deoarece funcția  $y = \sin x$  este periodică, cu perioada  $2\pi$ , atunci fiecare din altele soluții ale ecuației  $\sin x = b$  se deosebesc de una din soluțiile aflate cu numărul  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Atunci soluțiile ecuației  $\sin x = b$  pot fi date cu formulele

$$x = \alpha + 2\pi n \text{ și } x = \pi - \alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Aceste două formule pot fi înlocuite cu o sigură scriere:

$$x = (-1)^k \alpha + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Într-adevăr, dacă  $k$  – număr par, adică  $k = 2n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , atunci obținem  $x = \alpha + 2\pi n$ ; dacă  $k$  – număr impar, adică  $k = 2n + 1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , atunci obținem  $x = -\alpha + \pi + 2\pi n = \pi - \alpha + 2\pi n$ .



Формула (1) демонструє, що рідикина  $\alpha$  жоакє ун рол деосебит: куноскєнд-о, се пот гєси тоакє келелакє рєдєкєни алє екуацєи  $\sin x = b$ . Рєдєкєна  $\alpha$  арє о дєнуєрє спєцєлє – **аркєсинус**.

**Дєфєнєцє.** **Аркєсинус** нумєрului  $b$ , ундє  $|b| \leq 1$ , се нумєшє ун асфєл дє нумєр  $\alpha$  дєн интервалу  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , синусу кєруєа єсє єгал ку  $b$ .

Пєнру аркєсинусу нумєрului  $b$  се фолосєшє єнсьєннарєа  $\arcsin b$ .

Дє єкємплу,  $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ , дєоарєкє  $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  шє  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ;

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ , дєоарєкє  $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  шє  $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Єн гєнєрал, **аркєсин  $b = \alpha$ , дєкє  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  шє **син  $\alpha = b$ .****

Акун формула рєдєкєнєлор екуацєи  $\sin x = b$ ,  $|b| \leq 1$ , се поакє сєрєє єн ашє о формє:

$$x = (-1)^k \arcsin b + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Арє лок єгалєтєа

$$\arcsin(-b) = -\arcsin b.$$

**Проблєма 1.** Рєзolvацєи екуацєа:

$$1) \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}; \quad 2) \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

*Рєзolvарє.* 1) Утилєзєнд формула (2), сєрєкє:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Єн кєнєуєрєа обтєнєм:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n; \quad \frac{x}{2} = -(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; \quad x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

*Рєспунс:*  $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

2) Трансьєрєм екуацєа дєтєа асфєл:  $-\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Атунє  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n; \quad 3x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n;$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$$

*Răspuns:*  $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \blacktriangleleft$

↪ Deoarece domeniul de valori al funcției  $y = \operatorname{tg} x$  este mulțimea  $\mathbb{R}$ , atunci ecuația  $\operatorname{tg} x = b$  are soluții pentru orice valoare  $b$ .

Pentru a obține formula soluțiilor ecuației  $\operatorname{tg} x = b$ , să ne adresăm la interpretarea grafică.

În figura 16.2 sunt reprezentate graficele funcțiilor  $y = \operatorname{tg} x$  și  $y = b$ .

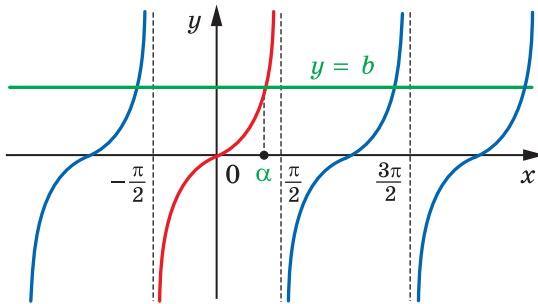


Fig. 16.2

Să studiem funcția  $y = \operatorname{tg} x$  pe intervalul  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  (curba roșie din figura 16.2), adică pe intervalul, lungimea căruia este egală cu perioada acestei funcții. Pe acest interval ecuația  $\operatorname{tg} x = b$  pentru  $b$  arbitrar are o singură soluție  $\alpha$ .

Deoarece funcția  $y = \operatorname{tg} x$  este periodică, cu perioada  $\pi$ , atunci fiecare din altele soluții ale ecuației  $\operatorname{tg} x = b$  se deosebește de soluția aflată cu numărul de forma  $\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Atunci soluțiile ecuației  $\operatorname{tg} x = b$  se pot da cu formula

$$x = \alpha + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Formula obținută arată, că rădăcina  $\alpha$  joacă un rol deosebit: cunoscând-o, se pot găsi toate celelalte rădăcini ale ecuației  $\operatorname{tg} x = b$ . Rădăcina  $\alpha$  are o denumire specială – **arctangenta**.

**Definiție. Arctangenta** numărului  $b$ , se numește un astfel de număr  $\alpha$  din intervalul  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ , tangenta căruia este egală cu  $b$ .

Pentru arctangenta numărului  $b$  se folosește însemnarea  $\arctg b$ .

De exemplu,  $\arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ , deoarece  $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ;

$\arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$ , deoarece  $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ .

În general,  $\arctg b = \alpha$ , dacă  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\operatorname{tg} \alpha = b$ .

Acum formula rădăcinilor ecuației  $\operatorname{tg} x = b$  se poate scrie așa:

$$x = \arctg b + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Are loc egalitatea

$$\arctg(-b) = -\arctg b.$$

**Problema 2.** Rezolvați ecuația  $\operatorname{tg} \frac{2x}{3} = -\sqrt{3}$ .

*Rezolvare.* Avem la dispoziție:  $\frac{2x}{3} = \arctg(-\sqrt{3}) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ ;

$$\frac{2}{3}x = -\frac{\pi}{3} + \pi k; \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k.$$

*Răspuns:*  $-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ . ◀



1. Pentru care valori ale lui  $b$  ecuația  $\sin x = b$  are soluții?
2. Ce se numește arcsinusul numărului  $b$ ?
3. Scrieți formula rădăcinilor ecuației  $\sin x = b$  pentru  $|b| \leq 1$ .
4. Scrieți formula rădăcinilor ecuației  $\sin x = 1$ ;  $\sin x = 0$ ;  $\sin x = -1$ .
5. Pentru care valori  $b$  ecuația  $\operatorname{tg} x = b$  are soluții?
6. Ce se numește arctangenta numărului  $b$ ?
7. Scrieți formula rădăcinilor ecuației  $\operatorname{tg} x = b$ .



## EXERCIȚII

16.1.° Rezolvați ecuația:

$$1) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \sin x = \frac{1}{4}; \quad 4) \sin x = \sqrt{2}.$$

16.2.° Rezolvați ecuația:

$$1) \sin x = \frac{1}{2}; \quad 2) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 3) \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad 4) \sin x = 1,5.$$

16.3.° Розв'яжіть еquацію:

$$1) \sin \frac{x}{6} = -\frac{1}{2}; \quad 2) \sin 5x = 1; \quad 3) \sin(-8x) = \frac{2}{9}.$$

16.4.° Розв'яжіть еquацію:

$$1) \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \sin \frac{x}{7} = 0; \quad 3) \sin \frac{2x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

16.5.° Розв'яжіть еquацію:

$$1) \operatorname{tg} x = \sqrt{3}; \quad 2) \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \quad 3) \operatorname{tg} x = -1; \quad 4) \operatorname{tg} x = 5.$$

16.6.° Розв'яжіть еquацію:

$$1) \operatorname{tg} x = 1; \quad 2) \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad 3) \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}; \quad 4) \operatorname{tg} x = -2.$$

16.7.° Розв'яжіть еquацію:

$$1) \operatorname{tg} 2x = 1; \quad 2) \operatorname{tg} \frac{x}{3} = \frac{1}{3}; \quad 3) \operatorname{tg} \left( -\frac{7x}{4} \right) = \sqrt{3}.$$

16.8.° Розв'яжіть еquацію  $\operatorname{tg} \frac{3}{5}x = 0$ .

16.9.° Розв'яжіть еquацію:

$$1) \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 3) \sin \left( \frac{x}{3} + 1 \right) = -1;$$

$$2) \sin \left( \frac{\pi}{8} - x \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 4) \sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{12} - 3x \right) - 1 = 0.$$

16.10.° Розв'яжіть еquацію:

$$1) \sin \left( \frac{\pi}{18} - 8x \right) = 1; \quad 2) 2 \sin \left( \frac{x}{5} - 4 \right) + 1 = 0.$$

16.11.° Розв'яжіть еquацію:

$$1) \operatorname{tg} \left( 3x - \frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad 2) \operatorname{tg} (3 - 2x) = 2.$$

16.12.° Розв'яжіть еquацію:

$$1) \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 1; \quad 2) 3 \operatorname{tg} (3x + 1) - \sqrt{3} = 0.$$

16.13.\* Гясіть cea mai mică rădăcină pozitivă a еquаției

$$\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

16.14.\* Гясіть cea mai mare rădăcină negativă a еquаției

$$\sin \left( 3x - \frac{\pi}{15} \right) = -1.$$

16.15.\*\* Găsiți toate soluțiile ecuației  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ , care aparțin intervalului  $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

16.16.\*\* Câte rădăcini ale ecuației  $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  aparțin intervalului  $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ?

16.17.\*\* Câte rădăcini ale ecuației  $\operatorname{tg} 4x = 1$  aparțin intervalului  $[0; \pi]$ ?

16.18.\*\* Aflați suma rădăcinilor ecuației  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$ , care aparțin intervalului  $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ .



### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

16.19. Rezolvați ecuația:

1)  $x - \sqrt{x-1} = 3$ ;

3)  $\sqrt{3x+4} \cdot \sqrt{2x-5} = 2x+1$ ;

2)  $\sqrt{1+4x-x^2} + 1 = x$ ;

4)  $\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{5+x}} = \sqrt{5+x}$ .

## 17. Ecuații trigonometrice, care se reduc la cele algebrice

În punctele 15, 16 noi am obținut formule pentru rezolvarea ecuațiilor de tipul  $\cos x = a$ ,  $\sin x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ . Aceste ecuații se numesc **cele mai simple ecuații trigonometrice**. Cu ajutorul diferitelor metode și procedee multe ecuații trigonometrice se pot reduce la cele mai simple.

**Problema 1.** Rezolvați ecuația  $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$ .

*Rezolvare.* Folosim substituția  $\cos x = t$ . Atunci ecuația dată obține forma  $2t^2 - 5t + 2 = 0$ . De aici  $t_1 = \frac{1}{2}$ ,  $t_2 = 2$ . Deoarece  $|\cos x| \leq 1$ ,

atunci  $\cos x = 2$  nu are soluții. Deci, ecuația inițială este echivalentă cu ecuația  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Definitiv obținem:  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Răspuns:*  $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . ◀

**Problema 2.** Rezolvați ecuația  $\sin x - 3 \cos 2x = 2$ .

*Rezolvare.* Folosind formula  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ , transformăm ecuația dată:

$$\begin{aligned} \sin x - 3(1 - 2 \sin^2 x) - 2 &= 0; \\ 6 \sin^2 x + \sin x - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Admitem  $\sin x = t$ . Obținem ecuație pătrată  $6t^2 + t - 5 = 0$ . De aici

$$t_1 = -1, \quad t_2 = \frac{5}{6}.$$

Deci, ecuația dată este echivalentă cu totalitatea a două ecuații:

$$\begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Disponem de:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^n \arcsin \frac{5}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

*Răspuns:*  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $(-1)^n \arcsin \frac{5}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . ◀

**Problema 3.** Rezolvați ecuația  $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3$ .

*Rezolvare.* Deoarece  $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ , atunci ecuația dată se poate transcrie în așa un mod:

$$\operatorname{tg} x + (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 3.$$

De aici  $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$ . Fie  $\operatorname{tg} x = t$ . Avem:  $t^2 + t - 2 = 0$ . Atunci  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = -2$ .

Obținem, că ecuația dată este echivalentă cu totalitatea a două ecuații:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -2. \end{cases}$$

$$\text{De aici } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = -\arctg 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Răspuns: } \frac{\pi}{4} + \pi n, -\arctg 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \blacktriangleleft$$



## EXERCIIII

17.1.° Rezolvați ecuația:

$$\begin{array}{ll} 1) 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0; & 3) \sin^2 3x + 2 \sin 3x - 3 = 0; \\ 2) 2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0; & 4) \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0. \end{array}$$

17.2.° Rezolvați ecuația:

$$\begin{array}{ll} 1) 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0; & 3) 4 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0; \\ 2) 2 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0; & 4) 3 \cos^2 \frac{x}{4} + 5 \cos \frac{x}{4} - 2 = 0. \end{array}$$

17.3.\* Rezolvați ecuația:

$$\begin{array}{ll} 1) \sin x - \cos x = 0; & 3) 4 \cos 2x - \sin 2x = 0. \\ 2) \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0; \end{array}$$

17.4.\* Rezolvați ecuația:

$$\begin{array}{ll} 1) \sin x + \cos x = 0; & 3) \cos 4x - 3 \sin 4x = 0. \\ 2) \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0; \end{array}$$

17.5.\* Rezolvați ecuația:

$$\begin{array}{ll} 1) 6 \cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0; & 5) \cos 2x + \sin x = 0; \\ 2) 2 \sin^2 x + 7 \cos x + 2 = 0; & 6) \cos \frac{2x}{3} - 5 \cos \frac{x}{3} - 2 = 0; \\ 3) \cos 2x = 1 + 4 \cos x; & 7) \cos \frac{x}{2} + \cos x = 0; \\ 4) 2 \cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0; & 8) \cos 2x - 4 \sqrt{2} \cos x + 4 = 0. \end{array}$$

17.6.\* Rezolvați ecuația:

$$\begin{array}{ll} 1) 4 \sin^2 x + 8 \cos x + 1 = 0; & 4) \cos 2x + \sin^2 x = \cos x; \\ 2) 2 \cos^2 x = 1 + \sin x; & 5) 5 \sin \frac{x}{6} - \cos \frac{x}{3} + 3 = 0; \\ 3) \cos 2x + 8 \sin x = 3; & 6) \cos x + \sin \frac{x}{2} = 0. \end{array}$$

17.7.\*\* Rezolvați ecuația:

$$\begin{array}{ll} 1) 8 \sin^2 3x + 4 \sin^2 6x = 5; & 2) 2 \operatorname{tg}^2 x + 4 \cos^2 x = 7. \end{array}$$

17.8.\*\* Rezolvați ecuația:

$$1) 2 \cos^2 4x - 6 \cos^2 2x + 1 = 0; \quad 2) \sqrt{3} \operatorname{tg} x + 3 = \frac{3}{\cos^2 x}.$$



### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

17.9. Comparați numerele:

$$1) \sqrt[5]{7} \text{ și } \sqrt[10]{47}; \quad 2) \sqrt{2} \text{ și } \sqrt[5]{\sqrt{33}}; \quad 3) \sqrt[3]{15} \text{ și } \sqrt{5}; \quad 4) \sqrt[5]{25} \text{ și } \sqrt[3]{5}.$$

17.10. Rezolvați ecuația:

$$1) 6x^3 - 24x = 0; \quad 3) x^5 + 2x^4 + 8x + 16 = 0; \\ 2) x^3 - 5x^2 + 9x - 45 = 0; \quad 4) x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0.$$



### FII CA OSTROGRADSKII!

Ilustrul matematician ucrainean Mihail Vasilievici Ostrogradskii s-a născut în satul Pașenivka gubernia Poltava. În anii 1816 – 1820 el a învățat la universitatea din Harcov, iar apoi și-a perfecționat studiile matematice, studiind în Franța sub tutela a așa savanți vestiți, ca Pierre-Simeon Laplace (1749 – 1827), Simeon Denis Poisson (1781 – 1840), Augustin Lois Cauchy (1789 – 1857), Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830).

În marea moștenire științifică, pe care ne-a lăsat-o Mihail Ostrogradskii, un rol important îl joacă lucrările, legate de cercetarea șirurilor trigonometrice și a oscilațiilor. Multe teoreme matematice importante poartă numele lui Ostrogradskii.

În afară de lucrările științifice, Ostrogradskii a scris un șir de manuale ilustre pentru tineret, în particular, ”Programa și conșpectul trigonometriei”. Însuși Ostrogradskii acorda o mare atenție întrebării predării trigonometriei, ceea ce a devenit obiectul unui raport în Academia de științe .

Autoritatea științifică a lui Ostrogradskii era atât de mare, că pe atunci, trimițând tineretul la studii, spuneau ”Fii ca Ostrogradskii!”. Această urare este actuală și astăzi, de aceea

”Fii ca Ostrogradskii!”



**Mihail Vasilievici  
Ostrogradskii**  
(1801–1862)





## PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 2

### Măsura în radiani a unghiului

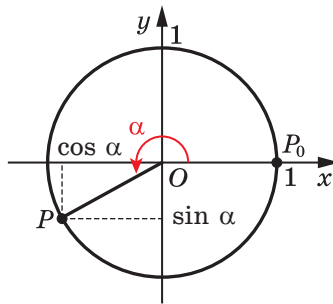
Unghi de un radian se numește unghiul de la centru al circumferinței, ce se sprijină pe arc, lungimea căruia este egală cu raza circumferinței.

Măsurile în grade și radiani sunt legate prin formulele

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ, \quad 1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ rad.}$$

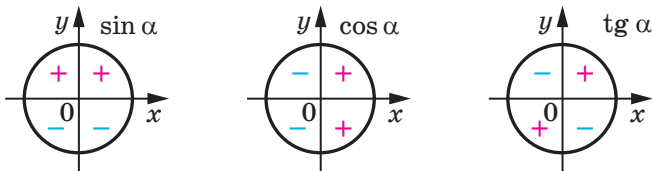
### Cosinusul, sinusul și tangenta unghiului de rotație

Cosinusul și sinusul unghiului de rotație  $\alpha$  se numește corespunzător abscisa  $x$  și ordonata  $y$  a punctului  $P(x; y)$  a circumferinței unitate, care a fost obținut în rezultatul rotației punctului  $P_0(1; 0)$  în jurul originii de coordonate cu unghiul  $\alpha$



Tangenta unghiului de rotație  $\alpha$  se numește raportul sinusului acestui unghi la cosinusul lui:  $\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

### Semnele valorilor funcțiilor trigonometrice



### Funcții periodice

Funcția  $f$  se numește periodică, dacă există un astfel de număr  $T \neq 0$ , că pentru orice  $x$  din domeniul de definiție al funcției  $f$  se execută egalitatea  $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$ . Numărul  $T$  se numește perioada funcției  $f$ .

Dacă printre toate perioadele funcției  $f$  există cea mai mică perioadă pozitivă, atunci ea este numită perioada principală a funcției  $f$ .

### Relațiile dintre funcțiile trigonometrice ale unuia și aceluiași argument

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

### Formulele adunării

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

### Formulele de reducere

Pentru a scrie oricare din formulele de reducere, se poate ținea cont de așa reguli:

1) în partea dreaptă a egalității se pune acel semn, care are partea stângă cu condiția, că  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ;

2) dacă partea stângă a formulei argumentul are aspectul  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$  sau  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ , atunci sinusul se înlocuiește cu cosinusul și invers.

Dacă argumentul are aspectul  $\pi \pm \alpha$ , atunci înlocuirea funcțiilor nu se petrece.

**Formulele de argument dublu**

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

**Arccosinusul, arcsinusul și arctangenta**

Arccosinusul numărului  $b$ , unde  $|b| \leq 1$ , se numește un astfel de număr  $\alpha$  din intervalul  $[0; \pi]$ , cosinusul căruia este egal cu  $b$ .

Arcsinusul numărului  $b$ , unde  $|b| \leq 1$ , se numește un astfel de număr  $\alpha$  din intervalul  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , sinusul căruia este egal cu  $b$ .

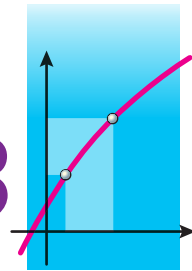
Arctangenta numărului  $b$ , se numește un astfel de număr  $\alpha$  din intervalul  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ , tangenta căruia este egală cu  $b$ .

**Rezolvarea celor mai simple ecuații trigonometrice**

Ecuția	Formulele rădăcinilor ecuației
$\cos x = b,  b  \leq 1$	$x = \pm \arccos b + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = b,  b  \leq 1$	$x = (-1)^n \arcsin b + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = b$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

# DERIVATA ȘI APLICĂRILE EI

## §3



În acest paragraf veți face cunoștință cu noțiunea de derivată a funcției într-un punct; o să vă învățați a folosi derivata la cercetarea proprietăților funcției și construirea graficelor funcției.

## 18. Probleme despre viteza instantanee și tangenta la graficul funcției

Dacă funcția este modelul matematic al unui proces real, atunci frecvent apare necesitatea aflării diferenței valorilor acestei funcții în două puncte. De exemplu, însemnăm prin  $f(t)$  și  $f(t_0)$  sumele fondurilor care s-au acumulat pe un depozit<sup>1</sup> al deponentului până la momentele de timp  $t$  și  $t_0$ . Atunci diferența  $f(t) - f(t_0)$ , unde  $t > t_0$ , indică venitul, pe care îl obține deponentul în timpul  $t - t_0$ .

Să studiem funcția  $y = f(x)$ . Fie  $x_0$  – punct fixat din domeniul de definiție al funcției  $f$ .

Dacă  $x$  este un așa punct arbitrar din domeniul de definiție al funcției  $f$ , că  $x \neq x_0$ , atunci diferența  $x - x_0$  se numește **creșterea argumentului funcției  $f$  în punctul  $x_0$**  și se înseamnă  $\Delta x$  (se citește: ”delta ics”)<sup>2</sup>. Avem:

$$\Delta x = x - x_0.$$

De unde

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Se spune că argumentul **a obținut creșterea  $\Delta x$  în punctul  $x_0$** .

Menționăm că creșterea poate fi atât pozitivă cât și negativă: dacă  $x > x_0$ , atunci  $\Delta x > 0$ ; dacă  $x < x_0$ , atunci  $\Delta x < 0$ .

Dacă argumentul în punctul  $x_0$  a obținut creșterea  $\Delta x$ , atunci valoarea funcției  $f$  s-a modificat cu mărimea

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Această diferență se numește **creșterea funcției  $f$  în punctul  $x_0$**  și se înseamnă  $\Delta f$  (se citește: ”delta ef”)

Avem:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ sau } \Delta f = f(x) - f(x_0).$$

<sup>1</sup> Depozit – fonduri (sume de bani), pe care deponentul le transmite băncii pe un termen oarecare, pentru care banca plătește deponentului procente.

<sup>2</sup> Vorbind despre creșterea argumentului funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , aici și mai departe, vom admite, că în orice interval de tipul  $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$  sunt puncte ale domeniului de definiție al funcției  $f$ , diferite de  $x_0$ .

Pentru creșterea funcției  $y = f(x)$  este acceptată de asemenea însemnarea  $\Delta y$  adică

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \text{ sau } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Creșterea  $\Delta x$  a argumentului în punctul  $x_0$  și creșterea corespunzătoare  $\Delta f$  a funcției sunt ilustrate în figura 18.1.

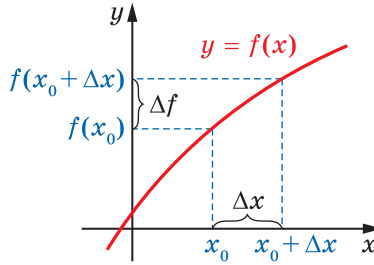


Fig. 18.1

Menționăm, că pentru un punct fixat  $x_0$  creșterea funcției  $f$  în punctul  $x_0$  este funcție de argumentul  $\Delta x$ .

**Problemă.** Găsiți creșterea funcției  $y = x^2$  în punctul  $x_0$ , care corespunde creșterii  $\Delta x$  al argumentului.

*Rezolvare.* Avem:

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

*Răspuns:*  $2x_0\Delta x + \Delta x^2$ . ◀

### Problema despre viteza instantanee

Fie că un automobil, mișcându-se rectiliniu pe o porțiune de drum într-o direcție, în două ore a parcurs drumul de 120 km. Atunci viteza medie de mișcare a lui este egală:  $v_{med} = \frac{120}{2} = 60$  (km/год).

Mărimea aflată ne dă o imagine incompletă despre caracterul mișcării automobilului: pe unele porțiuni ale drumului automobilul se putea deplasa mai repede, pe altele – mai încet, uneori se putea opri.

În același timp în orice moment vitezometrul automobilului arăta o mărime oarecare – viteza în momentul dat. Valoarea vitezei în diferite momente mai deplin caracterizează mișcarea automobilului.

Să studiem problema căutării vitezei în momentul dat pe baza exemplului mișcării uniform accelerate.

Fie că punctul material se mișcă pe dreapta de coordonate și peste timpul  $t$  de la începutul mișcării are coordonata  $s(t)$ . Astfel se specifică funcția  $y = s(t)$ , care oferă posibilitatea determinării poziției

punctului în orice moment de timp. De aceea această funcție se numește **legea mișcării** punctului.

Din cursul de fizică se cunoaște, că legea mișcării uniform accelerate se dă cu formula  $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ , unde  $s_0$  – coordonata punctului la începutul mișcării (pentru  $t = 0$ ),  $v_0$  – viteza inițială,  $a$  – accelerația.

Admitem, de exemplu,  $s_0 = 0$ ,  $v_0 = 1$  м/с,  $a = 2$  м/с<sup>2</sup>. Atunci  $s(t) = t^2 + t$ .

Fixăm un moment oarecare  $t_0$  și dăm argumentului în punctul  $t_0$  creșterea  $\Delta t$ , adică studiem intervalul de timp de la  $t_0$  până la  $t_0 + \Delta t$ . În acest interval de timp punctul material a efectuat deplasarea  $\Delta s$ . Acum avem:

$$\begin{aligned} \Delta s &= s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \underbrace{(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t)}_{s(t_0 + \Delta t)} - \underbrace{(t_0^2 + t_0)}_{s(t_0)} = \\ &= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - t_0^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2. \end{aligned}$$

Viteza medie  $v_{med}(\Delta t)$  de mișcare a punctului în intervalul de timp de la  $t_0$  până la  $t_0 + \Delta t$  este egală cu raportul  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ . Obținem:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t, \text{ adică } v_{med}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t.$$

Însemnarea pentru viteza medie  $v_{med}(\Delta t)$  accentuează, că pentru legea deplasării date  $y = s(t)$  și momentul de timp fixat  $t_0$  valoarea vitezei medii depinde numai de  $\Delta t$ .

Dacă vom considera intervalele de timp destul de mici de la  $t_0$  până la  $t_0 + \Delta t$ , atunci din considerente practice este clar, că vitezele medii  $v_{med}(\Delta t)$  în astfel de intervale mici de timp puțin se vor deosebi una de alta, adică mărimea  $v_{med}(\Delta t)$  practic nu se schimbă. Cu cât este mai mic  $\Delta t$ , cu atât mai aproape este valoarea vitezei medii de un număr oarecare, care determină viteza în momentul  $t_0$ . Cu alte cuvinte, dacă  $\Delta t$  tinde spre zero (se înseamnă  $\Delta t \rightarrow 0$ ), atunci valoarea  $v_{med}(\Delta t)$  tinde spre numărul  $v(t_0)$ . Numărul  $v(t_0)$  se numește **viteza instantanee** în momentul  $t_0$ . Aceasta se scrie astfel:  $v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{med}(\Delta t)$ . Se spune, că numărul  $v(t_0)$  este **limita** funcției

$v_{med}(\Delta t)$  când  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Dacă în exemplul prezentat  $\Delta t \rightarrow 0$ , atunci valoarea expresiei  $2t_0 + 1 + \Delta t$  tinde către numărul  $2t_0 + 1$ , care este valoarea vitezei instantanee  $v(t_0)$ , adică

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1.$$

Acest exemplu arată, că dacă punctul material se mișcă conform legii  $y = s(t)$ , atunci viteza instantanee în momentul  $t_0$  se determină cu ajutorul formulei

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{med}(\Delta t), \text{ adică}$$

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

### Problema despre tangenta la graficul funcției

Cunoscuta definiție a tangentei la circumferință ca a unei drepte ce are cu circumferința numai un punct comun, este inaplicabilă în cazul unei curbe arbitrare.

De exemplu, axa ordonatelor are cu parabola  $y = x^2$  numai un punct comun (fig. 18.2). Însă intuiția ne spune, că nu este natural de socotit această dreaptă tangentă la parabola dată. Totodată în cursul de algebră noi frecvent vorbeam, că parabola  $y = x^2$  se atinge de axa absciselor în punctul  $x_0 = 0$ .

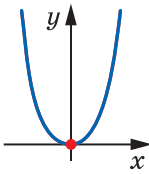


Fig. 18.2

Să precizăm imaginea intuitivă despre tangenta la graficul funcției.

Fie  $M$  – un punct oarecare, ce se află pe parabola  $y = x^2$ . Ducem dreapta  $OM$ , pe care o numim secantă (fig. 18.3). Să ne închipuim, că punctul  $M$ , mișcându-se pe parabolă, se apropie de punctul  $O$ . În același timp secanta  $OM$  se va roti în jurul punctului  $O$ . Atunci unghiul dintre dreapta  $OM$  și axa absciselor va deveni tot mai mic și mai mic, iar secanta  $OM$  va tinde să ocupe poziția axei absciselor. De aceea axa absciselor este considerată tangentă la parabola  $y = x^2$  în punctul  $O$ .

Fie  $M$  – un punct oarecare, ce se află pe parabola  $y = x^2$ . Ducem dreapta  $OM$ , pe care o numim secantă (fig. 18.3). Să ne închipuim, că punctul  $M$ , mișcându-se pe parabolă, se apropie de punctul  $O$ . În același timp secanta  $OM$  se va roti în jurul punctului  $O$ . Atunci unghiul dintre dreapta  $OM$  și axa absciselor va deveni tot mai mic și mai mic, iar secanta  $OM$  va tinde să ocupe poziția axei absciselor. De aceea axa absciselor este considerată tangentă la parabola  $y = x^2$  în punctul  $O$ .

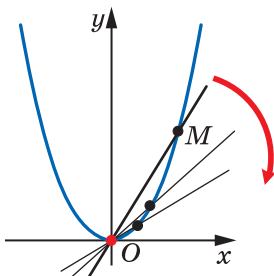


Fig. 18.3

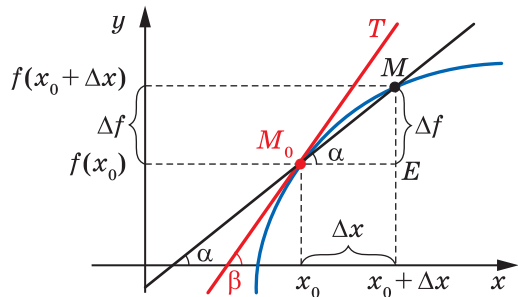


Fig. 18.4

Să examinăm graficul unei oarecare funcții  $f$  și punctul  $M_0(x_0; f(x_0))$ . În punctul  $x_0$  aplicăm argumentului creșterea  $\Delta x$  și examinăm pe grafic punctul  $M(x; f(x))$ , unde  $x = x_0 + \Delta x$  (fig. 18.4).

Din figură se vede, că dacă  $\Delta x$  devine din ce în ce tot mai mic, atunci punctul  $M$ , mișcându-se pe grafic, se apropie de punctul  $M_0$ . Dacă pentru  $\Delta x \rightarrow 0$  secanta  $MM_0$  tinde să ocupe poziția unei oarecare drepte (în figura 18.4 aceasta este dreapta  $M_0T$ ), atunci așa o dreaptă se numește **tangentă la graficul funcției  $f$  în punctul  $M_0$** .

Fie că secanta  $MM_0$  are ecuația  $y = kx + b$  și creează cu direcția pozitivă a axei absciselor unghiul  $\alpha$ . După cum se știe, coeficientul unghiular  $k$  al dreptei  $MM_0$  este egal cu  $\operatorname{tg} \alpha$ , adică  $k = \operatorname{tg} \alpha$ . Evident, că  $\angle MM_0E = \alpha$  (fig. 18.4). Atunci din triunghiul  $MM_0E$  obținem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Introducem însemnarea  $k_{\text{sec}}(\Delta x)$  pentru coeficientul unghiular al secantei  $MM_0$ , subliniind prin aceasta, că pentru funcția dată  $f$  și punctul fixat  $x_0$  coeficientul unghiular al secantei  $MM_0$  depinde numai de creșterea  $\Delta x$  al argumentului.

$$\text{Avem: } k_{\text{sec}}(\Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Fie că tangenta  $M_0T$  face cu direcția pozitivă a axei absciselor unghiul  $\beta$  ( $\beta \neq 90^\circ$ ). Atunci coeficientul ei unghiular  $k(x_0)$  este egal cu  $\operatorname{tg} \beta$ .

Este natural de considerat, cu cât este mai mic  $\Delta x$ , cu atât mai puțin se va deosebi valoarea coeficientului unghiular al secantei de valoarea coeficientului unghiular al tangentei. Cu alte cuvinte, dacă  $\Delta x \rightarrow 0$ , atunci  $k_{\text{sec}}(\Delta x) \rightarrow k(x_0)$ . În general, coeficientul unghiular al tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul cu abscisa  $x_0$  se determină cu ajutorul formulei

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\text{sec}}(\Delta x), \text{ adică}$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



1. Ce este creșterea funcției în punctul dat?
2. Cu ce formulă se determină viteza instantanee?
3. Cu ce formulă se determină coeficientul unghiular al tangentei la graficul funcției?





## EXERCIIII

18.1.° Găsiți creșterea funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , dacă:

1)  $f(x) = 2x - 1$ ,  $x_0 = -1$ ,  $\Delta x = 0,2$ ;

2)  $f(x) = 3x^2 - 2x$ ,  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = 0,1$ .

18.2.° Determinați creșterea funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , dacă:

1)  $f(x) = 4 - 3x$ ,  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = 0,3$ ;

2)  $f(x) = 0,5x^2$ ,  $x_0 = -2$ ,  $\Delta x = 0,8$ .

18.3.° Pentru funcția  $f(x) = x^2 - 3x$  exprimați creșterea  $\Delta f$  a funcției  $f$  în punctul  $x_0$  prin  $x_0$  și  $x$ . Aflați  $\Delta f$ , dacă:

1)  $x_0 = 3$ ,  $x = 2,5$ ;

2)  $x_0 = -2$ ,  $x = -1$ .

18.4.° Pentru funcția  $f(x) = x^3$  exprimați creșterea  $\Delta f$  a funcției  $f$  în punctul  $x_0$  prin  $x_0$  și  $x$ . Aflați  $\Delta f$ , dacă  $x_0 = 0,5$ ,  $x = 0,4$ .

18.5.\* Pentru funcția  $f(x) = x^2 - x$  și punctul  $x_0$  găsiți  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  și  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ .

18.6.\* Pentru funcția  $f(x) = 5x + 1$  și punctul  $x_0$  găsiți  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  și  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ .

18.7.\* Punctul material se mișcă pe dreapta de coordonate conform legii  $s(t) = 2t^2 + 3$  (deplasarea se măsoară în metri, timpul – în secunde). Aflați viteza instantanee a punctului material în momentul  $t_0 = 2$  s.

18.8.\* Corpul se mișcă pe dreapta de coordonate după legea  $s(t) = 5t^2$  (deplasarea se măsoară în metri, timpul – în secunde). Determinați:

1) viteza medie a corpului pentru variația timpului de la  $t_0 = 1$  s, până la  $t_1 = 3$  s;

2) viteza instantanee a corpului în momentul  $t_0 = 1$  s.



## NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

18.9. Se cunoaște, că  $\operatorname{tg} \alpha = 1$  și  $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Aflați unghiul  $\alpha$ .

18.10. Se cunoaște, că  $\operatorname{tg} \alpha = -1$  și  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ . Aflați unghiul  $\alpha$ .

## 19. Noțiune de derivată

În punctul precedent, rezolvând două probleme diferite despre viteza instantanee a punctului material și despre coeficientul unghiular al tangentei, noi am ajuns la unul și același model matematic – limita raportului creșterii funcției la creșterea argumentului cu condiția, că creșterea argumentului tinde spre zero:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (1)$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \quad (2)$$

La asemenea formule aduce rezolvarea multor probleme din fizică, chimie, biologie, economie etc. Aceasta mărturisește despre faptul, că modelul cercetat merită o atenție deosebită. El merită să i se dea nume, să se introducă însemnarea lui, să fie studiate proprietățile lui și de a se învăța a le aplica.

**Definiție. Derivată a funcției  $f$  în punctul  $x_0$  se numește numărul, care este egal cu limita raportului creșterii funcției  $f$  în punctul  $x_0$  la creșterea corespunzătoare a argumentului cu condiția, că creșterea argumentului tinde spre zero.**

Derivata funcției  $y = f(x)$  în punctul  $x_0$  se înseamnă astfel:  $f'(x_0)$  (se citește: "ef prim de ics zero") sau  $y'(x_0)$ . Se poate scrie:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

sau

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Ținând cont de definiția vitezei instantanee (1), se poate face concluzia: *dacă  $y = s(t)$  este legea mișcării punctului material pe dreapta de coordonate, atunci viteza instantanee a lui în momentul de timp  $t_0$  este egală cu derivata funcției  $y = s(t)$  în punctul  $t_0$ , adică*

$$v(t_0) = s'(t_0)$$

Această egalitate exprimă **conținutul mecanic al derivatei**.

Cu privire la formula pentru coeficientul unghiular al tangentei (2) se poate concluziona astfel: *coeficientul unghiular al tangentei, duse la graficul funcției  $f$  în punctul cu abscisa  $x_0$ , este egal cu valoarea derivatei funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , adică*

$$k(x_0) = f'(x_0)$$

Această egalitate exprimă **conținutul geometric al derivatei**.

Dacă funcția  $f$  are derivată în punctul  $x_0$ , atunci această funcție se numește **derivabilă în punctul  $x_0$** .

Dacă funcția  $f$  este derivabilă în fiecare punct al domeniului de definiție, atunci ea este numită **diferențiabilă**.

Aflarea derivatei funcției  $f$  se numește **derivarea funcției  $f$** .

**Problema 1.** Derivați (aflați derivata) funcția (funcției)  $f(x) = kx + b$ .

*Rezolvare.* Să aflăm derivata funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , unde  $x_0$  – un punct arbitrar din domeniul de definiție al funcției  $f$ .

$$1) \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x;$$

$$2) \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k;$$

$$3) \text{Conform definiției derivatei } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k = k.$$

Deci,  $f'(x_0) = k$ .

Deoarece  $x_0$  – un punct arbitrar din domeniul de definiție al funcției  $f$ , atunci ultima egalitate stabilește, că pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  este adevărată egalitatea  $f'(x) = k$ . ◀

Concluzia despre faptul, că derivata funcției liniare  $f(x) = kx + b$  este egală cu  $k$ , se scrie de-așemenea și astfel:

$$\boxed{(kx + b)' = k} \quad (3)$$

Dacă în formula (3) substituim  $k = 1$  și  $b = 0$ , atunci obținem:

$$\boxed{(x)' = 1}$$

Dacă în formula (3) să punem  $k = 0$ , atunci obținem:

$$\boxed{(b)' = 0}$$

Ultima egalitate înseamnă, că *derivata funcției, care este constantă, în fiecare punct este egală cu zero.*

**Problema 2.** Găsiți derivata funcției  $f(x) = x^2$ .

*Rezolvare.* Să aflăm derivata funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , unde  $x_0$  – punct arbitrar din domeniul de definiție al funcției  $f$ .

$$1) \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2;$$

$$2) \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x;$$

3) dacă  $\Delta x \rightarrow 0$ , atunci pentru orice  $x_0 \in \mathbb{R}$  valoarea expresiei  $2x_0 + \Delta x$  tinde către numărul  $2x_0$ . Deci,  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$ .

Deoarece  $x_0$  – punct arbitrar din domeniul de definiție al funcției  $f(x) = x^2$ , atunci pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  se execută egalitatea

$$f'(x) = 2x. \quad \blacktriangleleft$$

Ultima egalitate se mai scrie astfel

$$\boxed{(x^2)' = 2x} \quad (4)$$

Formula (4) este un caz particular a unei formula mai generale

$$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}, n > 1 \quad (5)$$

De exemplu,  $(x^5)' = 5x^4$ ,  $(x^7)' = 7x^6$ .

Formula (5) rămâne adevărată pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$  și  $x \neq 0$ , adică

$$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

De exemplu, folosim formula (6) pentru aflarea derivatei funcției  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Dispunem de:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Deci pentru orice  $x \neq 0$  se îndeplinește egalitatea  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  sau

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Formula (6) de asemenea se poate generaliza pentru orice  $r \in \mathbb{Q}$  și  $x > 0$ :

$$(x^r)' = rx^{r-1}, r \in \mathbb{Q} \quad (7)$$

De exemplu, să găsim derivata funcției  $f(x) = \sqrt{x}$ , folosind formula (7). Avem,  $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Deci, pentru  $x > 0$  se poate scrie:  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  sau

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

În general, derivata funcției  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , se poate afla cu formula

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad (8)$$

Dacă  $n$  – număr impar natural, atunci formula (8) oferă posibilitatea aflării derivatei funcției  $f$  în toate astfel de puncte  $x$ , pentru care  $x \neq 0$ .

Dacă  $n$  – număr natural par, atunci formula (8) oferă posibilitatea aflării derivatei funcției  $f$  pentru toate valorile pozitive ale lui  $x$ .

Să ne adresăm la funcțiile trigonometrice  $y = \sin x$  și  $y = \cos x$ . Aceste funcții sunt derivabile, și derivatele lor se află conform formulilor:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

În timpul calculării derivatei este comod de folosit tabelul derivatelor, amplasat în forzațul 2.



### EXERCIȚII

**19.1.°** Găsiți derivata funcției:

1)  $y = 5x - 6$ ;

2)  $y = 9$ ;

3)  $y = 8 - 3x$ .

**19.2.°** Găsiți derivata funcției:

1)  $y = x^4$ ;

2)  $y = x^{-15}$ ;

3)  $y = \frac{1}{x^{17}}$ ;

4)  $y = x^{\frac{1}{5}}$ .

**19.3.°** Găsiți derivata funcției:

1)  $y = x^{10}$ ;

2)  $y = \frac{1}{x^8}$ ;

3)  $y = x^{\frac{7}{6}}$ ;

4)  $y = x^{-0,2}$ .

**19.4.°** Calculați valoarea derivatei funcției  $f$  în punctul  $x_0$ :

1)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ ;

2)  $f(x) = x^{-2}$ ,  $x_0 = -2$ .

**19.5.°** Calculați valoarea derivatei funcției  $f$  în punctul  $x_0$ :

1)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 9$ ;

2)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = -\frac{\pi}{4}$ .

**19.6.°** Derivați funcția:

1)  $y = \sqrt[4]{x}$ ;

2)  $y = \sqrt[8]{x^7}$ ;

3)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ;

4)  $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$ .

**19.7.°** Derivați funcția:

1)  $y = \sqrt[9]{x}$ ;

2)  $y = \sqrt[6]{x^5}$ ;

3)  $y = \frac{1}{\sqrt[12]{x^7}}$ .

**19.8.°** Găsiți coeficientul unghiular al tangentei, duse la graficul funcției  $f$  în punctul cu abscisa  $x_0$ :

1)  $f(x) = x^3$ ,  $x_0 = -1$ ;

3)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $x_0 = 2$ ;

2)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 4$ ;

4)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$ .

**19.9.\*** Găsiți coeficientul unghiular al tangentei, duse la graficul funcției  $f$  în punctul cu abscisa  $x_0$ :

1)  $f(x) = x^4$ ,  $x_0 = -2$ ;

3)  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ,  $x_0 = -3$ ;

2)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $x_0 = 27$ ;

4)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ .

**19.10.\*** Aflați cu ajutorul graficului funcției  $f$  (fig. 19.1) valoarea  $f'(x_1)$  și  $f'(x_2)$ .

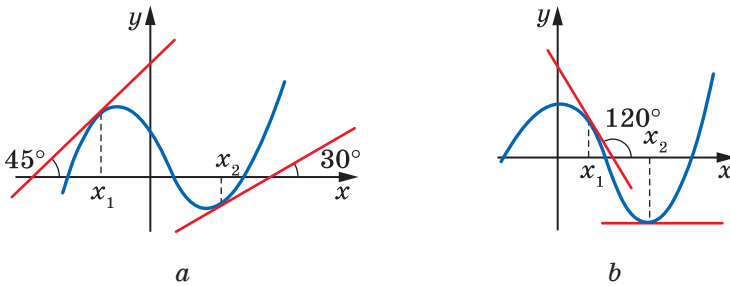


Fig. 19.1

**19.11.\*** Aflați cu ajutorul graficului funcției  $f$  (fig. 19.2) valoarea  $f'(x_1)$  și  $f'(x_2)$ .

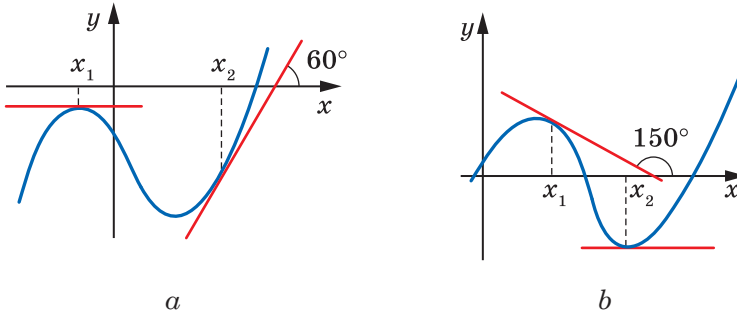


Fig. 19.2

**19.12.\*\*** Calculați valoarea derivatei funcției  $f$  în punctul  $x_0$ :

1)  $f(x) = x\sqrt{x}$ ,  $x_0 = 81$ ;

3)  $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x}$ ,  $x_0 = 16$ ;

2)  $f(x) = x^3\sqrt[4]{x}$ ,  $x_0 = 1$ ;

4)  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$ ,  $x_0 = 64$ .

**19.13.\*\*** Calculați valoarea derivatei funcției  $f$  în punctul  $x_0$ :

1)  $f(x) = x\sqrt[4]{x}$ ,  $x_0 = 256$ ;

2)  $f(x) = \sqrt[3]{x}\sqrt{x}$ ,  $x_0 = 1$ .



### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

19.14. Simplificați expresia  $\left(\frac{a+5}{a^2-81} + \frac{a+7}{(a-9)^2}\right)\left(\frac{a-9}{a+3}\right)^2 + \frac{7+a}{9+a}$ .

19.15. Rezolvați ecuația  $\frac{5}{x^2-4x+4} - \frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} = 0$ .

## 20. Regulele de calculare ale derivatelor

În timpul calculării derivatelor este comod de folosit astfel de teoreme<sup>1</sup>.

**Teorema 20.1 (derivata sumei).** *În acele puncte, în care sunt derivabile funcțiile  $y = f(x)$  și  $y = g(x)$ , de asemenea este derivabilă și funcția  $y = f(x) + g(x)$ , totodată pentru toate astfel de puncte se realizează egalitatea*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Pe scurt se poate spune astfel: *derivata sumei este egală cu suma derivatelor.*

Deasemenea este acceptată scrierea simplificată:

$$(f + g)' = f' + g'$$

Teorema 20.1 se poate generaliza pentru orice număr finit de termeni:

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'$$

**Teorema 20.2 (derivata produsului).** *În acele puncte, în care sunt derivabile funcțiile  $y = f(x)$  și  $y = g(x)$ , de asemenea este derivabilă și funcția  $y = f(x) g(x)$ , totodată pentru toate astfel de puncte se execută egalitatea*

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + g'(x) f(x).$$

Deasemenea este acceptată scrierea simplificată:

$$(fg)' = f'g + g'f$$

<sup>1</sup> Condițiile teoremelor 20.1 – 20.3 prevăd următoarele: dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile în punctul  $x_0$ , atunci corespunzător funcțiile

$y = f(x) + g(x)$ ,  $y = f(x) g(x)$  și  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  sunt definite pe un interval oarecare, care conține punctul  $x_0$ .

**Consecința 1.** În acele puncte, în care este derivabilă funcția  $y = f(x)$ , de asemenea este derivabilă funcția  $y = kf(x)$ , unde  $k$  – un număr oarecare, totodată pentru toate astfel de puncte este adevărată egalitatea

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Pe scurt se spune: *factorul constant se poate scoate de sub semnul derivatei.*

Deasemenea este acceptată scrierea simplificată:

$$(kf)' = kf'$$

*Demonstrație.* Deoarece funcția  $y = kx$  este derivabilă în orice punct, atunci, folosind teorema despre derivata produsului, se poate scrie:

$$(kf(x))' = (k)' f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x). \blacktriangleleft$$

**Consecința 2.** În acele puncte, în care sunt derivabile funcțiile  $y = f(x)$  și  $y = g(x)$ , deasemenea este derivabilă funcția  $y = f(x) - g(x)$ , totodată pentru toate astfel de puncte este adevărată egalitatea

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

*Demonstrație.* Avem:

$$(f(x) - g(x))' = (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = (f(x))' + ((-1) \cdot g(x))' = f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x). \blacktriangleleft$$

**Teorema 20.3 (derivata câtului).** În acele puncte, în care funcțiile  $y = f(x)$  și  $y = g(x)$  sunt derivabile, deasemenea este derivabilă și funcția  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ , totodată pentru toate astfel de puncte este adevărată egalitatea

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}.$$

Deasemenea este acceptată scrierea simplificată:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

**Problemă.** Găsiți derivata funcției: 1)  $y = \frac{1}{x} - \sin x + 4x^2$ ;

2)  $y = x^{-\frac{1}{2}}(5x - 3)$ ; 3)  $y = x^3 \cos x$ ; 4)  $y = \frac{2x^2 + 1}{3x - 2}$ .



*Rezolvare.* 1) Utilizând formula despre derivata sumei și consecințele din teoremele despre derivata produsului, obținem:

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{1}{x} - \sin x + 4x^2 \right)' = \left( \frac{1}{x} \right)' - (\sin x)' + 4 \cdot (x^2)' = \\ &= -\frac{1}{x^2} - \cos x + 4 \cdot 2x = -\frac{1}{x^2} - \cos x + 8x. \end{aligned}$$

2) Conform teoremei despre derivata produsului obținem:

$$\begin{aligned} y' &= \left( x^{\frac{1}{2}} (5x - 3) \right)' = \left( x^{\frac{1}{2}} \right)' \cdot (5x - 3) + (5x - 3)' \cdot x^{\frac{1}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot (5x - 3) + 5 \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{3 - 5x}{2\sqrt{x^3}} + \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{3 - 5x + 10x}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3 + 5x}{2\sqrt{x^3}}. \end{aligned}$$

3) Avem:

$$\begin{aligned} y' &= (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x^3 = \\ &= 3x^2 \cos x - \sin x \cdot x^3 = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x. \end{aligned}$$

4) În virtutea teoremei despre derivata câtului obținem:

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{2x^2 + 1}{3x - 2} \right)' = \frac{(2x^2 + 1)'(3x - 2) - (3x - 2)'(2x^2 + 1)}{(3x - 2)^2} = \\ &= \frac{4x(3x - 2) - 3(2x^2 + 1)}{(3x - 2)^2} = \frac{12x^2 - 8x - 6x^2 - 3}{(3x - 2)^2} = \frac{6x^2 - 8x - 3}{(3x - 2)^2}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Folosind teorema despre derivata câtului, se poate ușor de demonstrat, că

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned} \text{Într-adevăr, } (\operatorname{tg} x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$



Formulați teorema despre derivata: 1) sumei; 2) produsului; 3) câtului.



## EXERCIȚII

20.1.° Aflați derivata funcției:

1)  $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 10$ ;

2)  $y = 4x^6 + 20\sqrt{x}$ ;

3)  $y = x^8 + 7x^6 + \frac{4}{x} - 1$ ;

5)  $y = \operatorname{tg} x - 9x$ ;

4)  $y = 4 \sin x - 5 \cos x$ ;

6)  $y = 2x^{-2} + 3x^{-3}$ .

**20.2.°** Aflați derivata funcției:

1)  $y = 2x^5 - x$ ;

3)  $y = -3 \sin x + 2 \cos x$ ;

2)  $y = x^7 - 4\sqrt{x}$ ;

4)  $y = 0,4x^{-5} + \sqrt{3}$ .

**20.3.°** Aflați derivata funcției:

1)  $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$ ;

3)  $y = (2x + 1)\sqrt{x}$ ;

2)  $y = x^2 \sin x$ ;

4)  $y = \sqrt{x} \cos x$ .

**20.4.°** Găsiți derivata funcției:

1)  $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$ ;

3)  $y = x^4 \cos x$ ;

2)  $y = (x + 5)\sqrt{x}$ ;

4)  $y = x \operatorname{tg} x$ .

**20.5.°** Aflați derivata funcției:

1)  $y = \frac{x-1}{x+1}$ ;

3)  $y = \frac{x}{x^2-1}$ ;

5)  $y = \frac{3-x^2}{4+2x}$ ;

2)  $y = \frac{5}{3x-2}$ ;

4)  $y = \frac{x^3}{\cos x}$ ;

6)  $y = \frac{x^2-5x}{x-7}$ .

**20.6.°** Găsiți derivata funcției:

1)  $y = \frac{3x+5}{x-8}$ ;

3)  $y = \frac{2x^2}{1-6x}$ ;

5)  $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ ;

2)  $y = \frac{7}{10x-3}$ ;

4)  $y = \frac{\sin x}{x}$ ;

6)  $y = \frac{x^2+6x}{x+2}$ .

**20.7.°** Cu ce este egală valoarea derivatei funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , dacă:

1)  $f(x) = \frac{8}{x} + 5x - 2$ ,  $x_0 = 2$ ;

4)  $f(x) = (1+3x)\sqrt{x}$ ,  $x_0 = 9$ ;

2)  $f(x) = \frac{2-3x}{x+2}$ ,  $x_0 = -3$ ;

5)  $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x}$ ,  $x_0 = 1$ ;

3)  $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2} - 2 \sin x$ ,  $x_0 = 0$ ;

6)  $f(x) = x \sin x$ ,  $x_0 = 0$ ?

**20.8.°** Calculați valoarea derivatei funcției  $f$  în punctul  $x_0$ :

1)  $f(x) = \sqrt{x} - 16x$ ,  $x_0 = \frac{1}{4}$ ;

3)  $f(x) = x^{-2} - 4x^{-3}$ ,  $x_0 = 2$ ;

2)  $f(x) = \frac{\cos x}{1-x}$ ,  $x_0 = 0$ ;

4)  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x+1}$ ,  $x_0 = 1$ .

**20.9.\*\*** Punctul material cu masa de 4 kg se mișcă pe dreapta de coordonate conform legii  $s(t) = t^2 + 4$  (deplasarea se măsoară în metri, timpul – în secunde). Aflați impulsul  $P(t) = mv(t)$  a punctului material în momentul  $t_0 = 2$  s.

**20.10.** Un corp cu masa de 2 kg se mișcă pe dreapta de coordonate conform legii  $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$  (deplasarea se măsoară în metri, timpul – în secunde). Aflați energia cinetică  $E(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$  a corpului în momentul  $t_0 = 4$  s.



### NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

- 20.11.** Scrieți ecuația dreptei, care trece prin punctul  $M(-2; -3)$  și este paralelă cu axa absciselor.
- 20.12.** Scrieți ecuația dreptei, care trece prin punctul  $M(1; -4)$ , dacă coeficientul unghiular al acestei drepte este egal cu: 1) 4; 2) 0; 3) -1.

## 21. Ecuația tangentei

Admitem că funcția  $f$  este derivabilă în punctul  $x_0$ . Atunci la graficul funcției  $f$  în punctul cu abscisa  $x_0$  se poate duce o tangentă neverticală (fig. 21.1).

Din cursul de geometrie clasa a 9-a cunoașteți, că ecuația dreptei neverticale are înfățișarea  $y = kx + b$ , unde  $k$  – coeficientul unghiular al acestei drepte.

Ținând cont de conținutul geometric al derivatei, obținem:

$$k = f'(x_0).$$

Atunci ecuația tangentei se poate scrie astfel:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b. \quad (1)$$

Această dreaptă trece prin punctul  $M(x_0; f(x_0))$ . Așadar, coordonatele acestui punct satisfac ecuația (1). Atunci avem:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b.$$

$$\text{De aici } b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Atunci ecuația (1) se poate transcrie astfel:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Deci, dacă funcția  $f$  este derivabilă în punctul  $x_0$ , atunci **ecuația tangentei, duse la graficul funcției  $f$  în punctul cu abscisa  $x_0$ , are aspectul:**

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

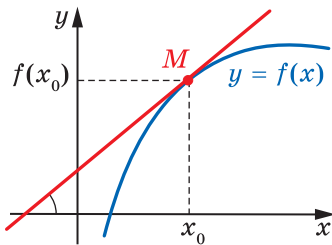


Fig. 21.1

**Problemă.** Alcătuiți ecuația tangentei la graficul funcției  $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$  în punctul cu abscisa  $x_0 = -2$ .

*Rezolvare.* Avem următoarele:

$$f(x_0) = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = -2;$$

$$f'(x) = -4 - 6x;$$

$$f'(x_0) = f'(-2) = -4 - 6 \cdot (-2) = 8.$$

Înlocuind valorile numerice aflate în ecuația tangentei obținem:  $y = 8(x + 2) - 2$ , adică  $y = 8x + 14$ .

*Răspuns:*  $y = 8x + 14$ . ◀



Scrieți ecuația tangentei, duse la graficul funcției  $f$  în punctul cu abscisa  $x_0$ .



## EXERCIȚII

**21.1.°** Alcătuiți ecuația tangentei, duse la graficul funcției  $f$  în punctul cu abscisa  $x_0$ , dacă:

1)  $f(x) = x^2 + 3x$ ,  $x_0 = -1$ ;

4)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$ ;

2)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = \frac{1}{2}$ ;

5)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = \pi$ ;

3)  $f(x) = 4\sqrt{x} - 3$ ,  $x_0 = 9$ ;

6)  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ,  $x_0 = -2$ .

**21.2.°** Alcătuiți ecuația tangentei, duse la graficul funcției  $f$  în punctul cu abscisa  $x_0$ , dacă:

1)  $f(x) = 2x^3 - 3x$ ,  $x_0 = 1$ ;

3)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ;

2)  $f(x) = 0,5x^2 - 2x + 2$ ,  $x_0 = 0$ ;

4)  $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$ ,  $x_0 = 3$ .

**21.3.°** Scrieți ecuația tangentei, duse la graficul funcției  $f(x) = x^2 - 3x - 3$  în punctul de intersecție a lui cu axa ordonatei.

**21.4.°** Scrieți ecuația tangentei, duse la graficul funcției  $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$  în punctul de intersecție a lui cu axa ordonatei.

**21.5.°** Scrieți ecuația tangentei, duse la graficul funcției  $f$  în punctul de intersecție a lui cu axa absciselor:

1)  $f(x) = 8x^3 - 1$ ;

2)  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ .

**21.6.** Scrieți ecuația tangentei, duse la graficul funcției  $f$  în punctul de intersecție a lui cu axa absciselor:

$$1) f(x) = \frac{x-1}{x^2+1};$$

$$2) f(x) = 3x - x^2.$$



### NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

**21.7.** Rezolvați inecuația:

$$1) x^2 + x - 12 > 0;$$

$$3) 6x - x^2 \geq 0;$$

$$2) x^2 - 3x - 10 \leq 0;$$

$$4) \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 9} \leq 0.$$

## 22. Criteriile de creștere și descreștere ale funcției

Cunoașteți, că dacă funcția este constantă, derivata ei este egală cu zero. Apare întrebarea: dacă funcția  $f$  este astfel, că pentru toate valorile ei  $x$  din intervalul  $I$  se îndeplinește egalitatea  $f'(x) = 0$ , atunci este oare funcția  $f$  constantă pe intervalul  $I$ ?

**Teorema 22.1 (criteriul de constanță al funcției).** *Dacă pentru toți  $x$  din intervalul  $I$  este adevărată egalitatea  $f'(x) = 0$ , atunci funcția  $f$  este constantă pe acest interval.*

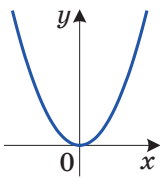


Fig. 22.1

În figura 22.1 este reprezentat graficul funcției  $f(x) = x^2$ . Această funcție are astfel de proprietăți: pe intervalul  $(-\infty; 0)$  ea descrește, iar pe intervalul  $(0; +\infty)$  crește. Totodată pe intervalul  $(-\infty; 0)$  derivata  $f'(x) = 2x$  obține valori negative, dar pe intervalul  $(0; +\infty)$  – valori pozitive.

Acest exemplu demonstrează, că semnul derivatei funcției pe un interval oarecare  $I$  este legat cu aceea, dacă este această funcție crescătoare sau (descrescătoare) pe intervalul  $I$ .

Legătura dintre semnul derivatei și creșterea (descreșterea) funcției stabilesc așa două teoreme.

**Teorema 22.2 (criteriul de creștere al funcției).** *Dacă pentru toate valorile lui  $x$  din intervalul  $I$  este adevărată inegalitatea  $f'(x) > 0$ , atunci funcția  $f$  crește pe acest interval.*

**Teorema 22.3 (criteriul de descreștere al funcției).** *Dacă pentru toate valorile lui  $x$  din intervalul  $I$  este adevărată inegalitatea  $f'(x) < 0$ , atunci funcția  $f$  descrește pe acest interval.*

**Problema 1.** Găsiți intervalele de creștere (descreștere) ale funcției  $f(x) = x^2 - 2x$ .

*Rezolvare.* Avem:  $f'(x) = 2x - 2$ . Rezolvând inecuațiile  $2x - 2 > 0$  și  $2x - 2 < 0$ , ajungem la concluzia:  $f'(x) > 0$  pe intervalul  $(1; +\infty)$ ;  $f'(x) < 0$  pe intervalul  $(-\infty; 1)$ . Deci, funcția  $f$  crește pe intervalul  $(1; +\infty)$  și descrește pe intervalul  $(-\infty; 1)$ .

În figura 22.2. este prezentat graficul funcției  $f(x) = x^2 - 2x$ . Din figură se vede, că într-adevăr funcția  $f$  crește pe intervalul  $[1; +\infty)$  și descrește pe intervalul  $(-\infty; 1]$ , inclusiv în punctul  $x = 1$ .

Scriind răspunsul, vom ține cont de următoarea regulă: dacă funcția este derivabilă în una din extremitățile intervalului de creștere (descreștere), atunci acest punct îl adăugăm la acest interval. În exemplul reprezentat funcția  $f(x) = x^2 - 2x$  este derivabilă în punctul  $x = 1$ , de aceea acest punct l-am adăugat la intervalele  $(1; +\infty)$  și  $(-\infty; 1)$ .

*Răspuns:* crește pe  $[1; +\infty)$ , descrește pe  $(-\infty; 1]$ . ◀

**Problema 2.** Găsiți intervalele de creștere (descreștere) ale funcției  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ .

*Rezolvare.* Avem:  $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$ .

Cercetăm semnul derivatei (fig. 22.3) și ținem cont de derivabilitatea funcției  $f$  în punctele  $x = -3$  și  $x = 1$ . Obținem, că funcția  $f$  crește pe fiecare din intervalele  $(-\infty; -3]$  și  $[1; +\infty)$  și descrește pe intervalul  $[-3; 1]$ . ◀

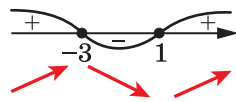


Fig. 22.3



1. Formulați criteriul de constanță al funcției.
2. Formulați criteriul de creștere al funcției.
3. Formulați criteriul de descreștere al funcției.



## EXERCIȚII

22.1.° Găsiți intervalele de creștere și descreștere ale funcției:

- 1)  $f(x) = x^2 + 4x - 7$ ;
- 2)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ ;
- 3)  $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$ ;
- 4)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$ .

**22.2.°** Găsiți intervalele de creștere și descreștere ale funcției:

- 1)  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ ;                      3)  $f(x) = x^4 + 4x - 20$ ;  
 2)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ ;                      4)  $f(x) = 8 - 4x - x^3$ .

**22.3.\*** Găsiți intervalele de creștere și descreștere ale funcției:

- 1)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$ ;      3)  $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ ;                      5)  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$ ;  
 2)  $f(x) = \frac{3x + 5}{2 - x}$ ;                      4)  $f(x) = x + \frac{9}{x}$ ;                      6)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$ .

**22.4.\*** Găsiți intervalele de creștere și descreștere ale funcției:

- 1)  $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$ ;      2)  $f(x) = \frac{2x - 9}{x - 5}$ ;                      3)  $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$ .

**22.5.\*\*** În figura 22.4 este prezentat graficul derivatei funcției  $f$ , derivabilă pe mulțimea numerelor reale. Indicați intervalele de descreștere ale funcției  $f$ .

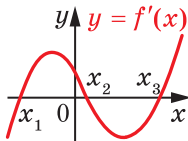


Fig. 22.4

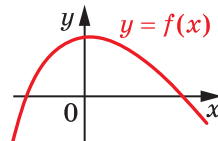


Fig. 22.5

**22.6.\*\*** În figura 22.5 este reprezentat graficul funcției  $y = f(x)$ , definită pe mulțimea numerelor reale. Printre graficele reprezentate în figura 22.6 indicați acela din ele, care poate fi graficul funcției  $y = f'(x)$ .

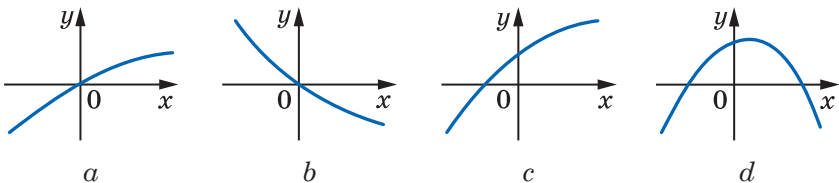


Fig. 22.6

**22.7.\*\*** Demonstrați, că funcția  $f(x) = 6 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$  este descreștoare.

**22.8.\*\*** Demonstrați, că funcția  $f(x) = 10x^3 - 9x^2 + 24x - 90$  este crescătoare.



## EXERCIȚII PENTRU REPETARE

22.9. Rezolvați ecuația  $1 + \frac{2x}{x+4} + \frac{27}{2x^2+7x-4} = \frac{6}{2x-1}$ .

22.10. Rezolvați inecuația  $x\sqrt{7-x} > 0$ .

## 23. Punctele de extremum ale funcției

Făcând cunoștință cu noțiunea de funcție derivabilă într-un punct, noi am examinat comportarea funcției în apropierea acestui punct sau, cum este primit de spus, în **vecinătatea lui**.

**Definiție.** Intervalul  $(a; b)$ , care conține punctul  $x_0$ , se numește **vecinătatea punctului  $x_0$** .

De exemplu, intervalul  $(-1; 3)$  – una din vecinătățile punctului 2,5. Totodată acest interval nu este vecinătatea punctului 3.

În figura 23.1 sunt reprezentate graficele a două funcții. Aceste funcții au o particularitate comună: există așa o vecinătate a punctului  $x_0$  că pentru toate valorile lui  $x$  din această vecinătate este adevărată inegalitatea  $f(x_0) \geq f(x)$ .

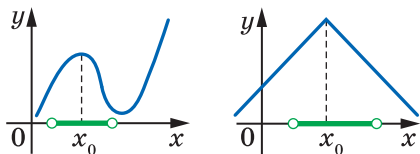


Fig. 23.1

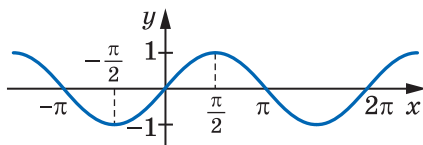


Fig. 23.2

**Definiție.** Punctul  $x_0$  este numit **punct de maximum** al funcției, dacă există așa o vecinătate a punctului  $x_0$ , că pentru toate valorile lui  $x$  din această vecinătate este adevărată inegalitatea  $f(x_0) \geq f(x)$ .

De exemplu, punctul  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  este punct de maximum al funcției

$y = \sin x$  (рис. 23.2). Se scrie astfel:  $x_{\max} = \frac{\pi}{2}$ .

În figura 23.1  $x_{\max} = x_0$ .

**Definiție.** Punctul  $x_0$  este numit **punct de minimum** al funcției, dacă există așa o vecinătate a punctului  $x_0$ , că pentru toate valorile lui  $x$  din această vecinătate este adevărată inegalitatea  $f(x_0) \leq f(x)$ .



De exemplu, punctul  $x_0 = -\frac{\pi}{2}$  este punct de minimum al funcției  $y = \sin x$  (fig. 23.2). Se scrie astfel:  $x_{\min} = -\frac{\pi}{2}$ .

În figura 23.3 sunt reprezentate graficele funcțiilor, pentru care  $x_0$  este punct de minimum, adică  $x_{\min} = x_0$ .



Fig. 23.3

Punctele de minimum și de maximum au denumire comună: ele sunt numite **puncte de extremum** ale funcției (de la latinescul *extremum* – margine, sfârșit).

În figura 23.4 punctele  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  sunt puncte de extremum.

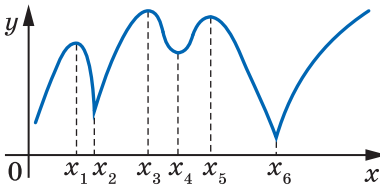


Fig. 23.4

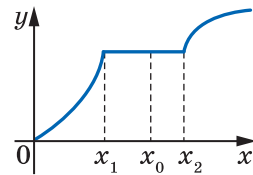


Fig. 23.5

În figura 23.5 este reprezentat graficul funcției  $f$ , care pe intervalul  $[x_1; x_2]$  este constantă. Punctul  $x_1$  este punct de maximum, punctul  $x_2$  – de minimum, iar oricare punct al intervalului  $(x_1; x_2)$  este în același timp cum punct de maximum, atât și punct de minimum al funcției  $f$ .



Fig. 23.6

Prezența extremumului în punctul  $x_0$  este legată de comportarea funcției în vecinătatea acestui punct. Astfel, pentru funcțiile, graficele cărora sunt reprezentate în figura 23.6, avem: în figura 23.6,

$a$  funcția crește pe intervalul  $(a; x_0]$  și descrește pe intervalul  $[x_0; b)$ ; în figura 26,  $b$  funcția descrește pe intervalul  $(a; x_0]$  și crește pe intervalul  $[x_0; b)$ .

Voi știți că, cu ajutorul derivatei se pot găsi intervalele de creștere (descreștere) ale funcției derivabile. Două teoreme ce sunt aduse mai jos, arată, cum cu ajutorul derivatei se pot afla punctele de extremum ale funcției derivabile.

**Teorema 23.1 (criteriul punctului de maximum al funcției).** Fie că funcția  $f$  este derivabilă pe intervalul  $(a; b)$  și  $x_0$  – un oarecare punct al acestui interval. Dacă pentru toate valorile lui  $x \in (a; x_0]$  este adevărată inegalitatea  $f'(x) \geq 0$ , iar pentru toți  $x \in [x_0; b)$  este adevărată inegalitatea  $f'(x) \leq 0$ , atunci punctul  $x_0$  este punct de maximum al funcției  $f$  (fig. 23.6, a).

**Teorema 23.2 (criteriul punctului de minimum al funcției).** Fie că funcția  $f$  este derivabilă pe intervalul  $(a; b)$  și  $x_0$  – un oarecare punct al acestui interval. Dacă pentru toate valorile lui  $x \in (a; x_0]$  este adevărată inegalitatea  $f'(x) \leq 0$ , iar pentru toți  $x \in [x_0; b)$  este adevărată inegalitatea  $f'(x) \geq 0$ , atunci punctul  $x_0$  este punct de minimum al funcției  $f$  (fig. 23.6, b).

Uneori este îndemână de se folosit de formularea simplificată a acestor două teoreme: dacă la trecerea peste punctul  $x_0$  derivata își schimbă semnul plus în minus, atunci  $x_0$  este punct de maximum; dacă derivata își schimbă semnul minus în plus atunci  $x_0$  este punct de minimum.

Deci, pentru funcția  $f$  punctele de extremum se pot căuta conform următoarei scheme.

- 1) De găsit  $f'(x)$ .
- 2) De cercetat semnul derivatei.
- 3) Folosindu-se de teoremele respective, de găsit punctele de extremum.

**Problemă.** Găsiți punctele de extremum ale funcției:

$$1) f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x; \quad 2) f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}.$$

*Rezolvare.* 1) Avem:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2).$$

Cercetăm semnul derivatei în vecinătățile punctelor  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$  (fig. 23.7). Obținem:  $x_{\max} = -1$ ,  $x_{\min} = 2$ .



Fig. 23.7

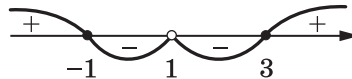


Fig. 23.8

$$\begin{aligned}
 2) \text{ Avem: } f'(x) &= \frac{(x^2 - x + 4)'(x-1) - (x-1)'(x^2 - x + 4)}{(x-1)^2} = \\
 &= \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 4)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}.
 \end{aligned}$$

Rezolvând inecuația  $x^2 - 2x - 3 > 0$  și având în vedere, că  $(x-1)^2 > 0$  pentru  $x \neq 1$ , obținem, că  $f'(x) > 0$  pe intervalele  $(-\infty; -1)$  și  $(3; +\infty)$ . Raționând analogic, se poate stabili, că  $f'(x) < 0$  pe intervalele  $(-1; 1)$  și  $(1; 3)$ . Figura 23.8 ilustrează rezultatele obținute.

Acum se pot face astfel de concluzii:  $x_{\max} = -1$ ,  $x_{\min} = 3$ . ◀



1. Care interval se numește vecinătatea punctului  $x_0$ ?
2. Care punct se numește punct de maximum al funcției? punct de minimum al funcției?
3. Formulați criteriul punctului de maximum; al punctului de minimum.



### EXERCIIII

**23.1.°** În figura 23.9 este ilustrat graficul funcției  $y = f(x)$ , determinată pe intervalul  $[-10; 9]$ . Indicați:

- 1) punctele de minimum;
- 2) punctele de maximum.

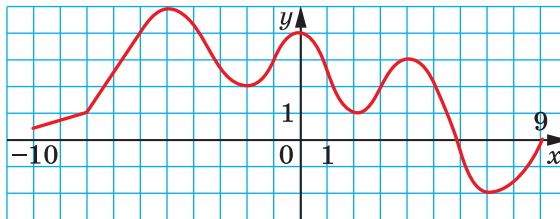


Fig. 23.9

**23.2.°** În figura 23.9 este ilustrat graficul funcției  $y = f(x)$ , determinată pe intervalul  $[-7; 7]$ . Indicați:

- 1) punctele de minimum;
- 2) punctele de maximum.

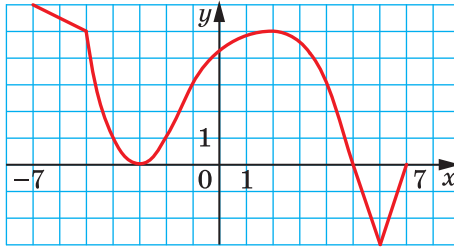


Fig. 23.10

23.3.° Aflați punctele de minimum și maximum ale funcției:

1)  $f(x) = 0,5x^4$ ;

3)  $f(x) = 12x - x^3$ ;

2)  $f(x) = x^2 - 6x$ ;

4)  $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$ .

23.4.° Aflați punctele de minimum și maximum ale funcției:

1)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ ;

3)  $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 4$ ;

2)  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ ;

4)  $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2$ .

23.5.\* Funcția  $y = f(x)$  este derivabilă pe mulțimea numerelor reale. În figura 23.11 este prezentat graficul derivatei ei. Indicați punctele de minimum și maximum ale funcției  $y = f(x)$ .

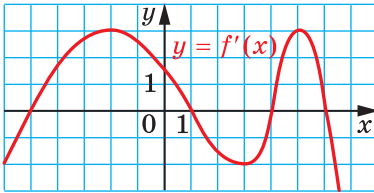


Fig. 23.11

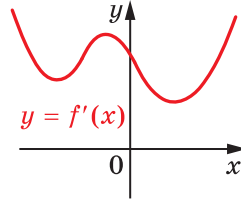


Fig. 23.12

23.6.\* Funcția  $y = f(x)$  este definită pe mulțimea numerelor reale și are derivată în fiecare punct al domeniului de definiție. În figura 23.12 este prezentat graficul funcției  $y = f'(x)$ . Câte puncte de extremum are funcția  $y = f(x)$ ?

23.7.\*\* Găsiți intervalele de creștere și descreștere, precum și punctele de extremum ale funcției:

1)  $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ;

2)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ;

3)  $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x + 2}$ .

**23.8.\*\*** Găsiți intervalele de creștere și descreștere, precum și punctele de extremum ale funcției:

$$1) f(x) = x + \frac{9}{x}; \quad 2) f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}; \quad 3) f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}.$$



### NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

**23.9.** Aflați cea mai mică valoare a funcției  $y = 3x^2 - 18x + 2$  pe intervalul:

$$1) [-1; 4]; \quad 2) [-4; 1]; \quad 3) [4; 5].$$

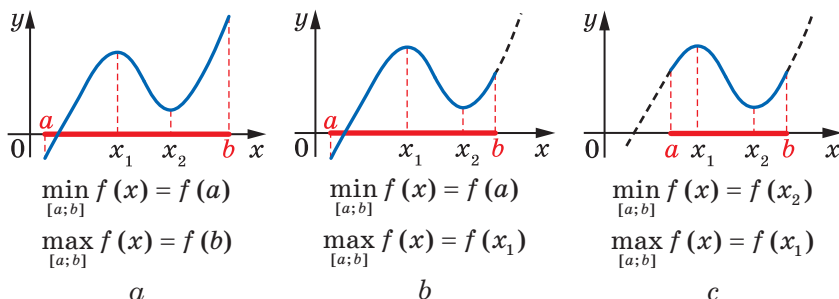
**23.10.** Aflați cea mai mare valoare a funcției  $y = -x^2 - 8x + 10$  pe intervalul:

$$1) [-5; -3]; \quad 2) [-1; 0]; \quad 3) [-11; -10].$$

## 24. Cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției

Ce cantitate de producție trebuie să producă o întreprindere, pentru a obține cel mai mare venit? Cum, dispunând de resurse mărginite, să realizezi volumul dat de producție în cel mai scurt timp? Cum să organizezi livrarea mărfurilor în punctele de vânzare astfel, ca consumul de carburanți să fie minimal? Probleme de așa fel și analogice, pentru căutarea soluțiilor optimale, ocupă un loc important în activitatea practică a omului.

În acest punct noi vom clarifica, cum se poate afla cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției pe intervalul  $[a; b]$ . Ne vom mărgini doar cu cercetarea funcțiilor derivabile.



**Fig. 24.1**

Se poate arăta, că funcția derivabilă pe intervalul  $[a; b]$  obține pe acest interval valorile cea mai mare și cea mai mică în extremitățile segmentelor, sau în punctele de extremum (fig. 24.1).

Ținând cont de aceasta, căutarea a celei mai mari și a celei mai mici valori ale funcției derivabile pe intervalul  $[a; b]$  se poate efectua, folosind o astfel de schemă.

1. De găsit punctele funcției  $f$ , în care derivata ei este egală cu zero.

2. De calculat valorile funcției în acele puncte găsite, care aparțin intervalului examinat, și în extremitățile acestui interval.

3. Din toate valorile găsite de ales cea mai mare și cea mai mică.

**Problema 1.** Găsiți cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției  $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$  pe intervalul  $[-2; 0]$ .

*Rezolvare.* Să aflăm derivata funcției date. Avem:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12.$$

Acum rezolvăm ecuația  $12x^2 - 18x - 12 = 0$ . De aici

$$2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$x = 2 \text{ sau } x = -\frac{1}{2}.$$

Intervalului  $[-2; 0]$  îi aparține numai punctul  $x = -\frac{1}{2}$ .

$$\text{Avem: } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}, f(-2) = -38, f(0) = 6.$$

$$\text{Deci, } \max_{[-2;0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}, \min_{[-2;0]} f(x) = f(-2) = -38.$$

$$\text{Răspuns: } \frac{37}{4}; -38. \blacktriangleleft$$

**Problema 2.** Reprezentați numărul 8 în formă de sumă a două numere nenegative astfel, ca suma primului număr și a pătratului celui de-al doilea număr să fie cea mai mică.

*Rezolvare.* Admitem că primul număr este egal cu  $x$ , atunci al doilea este egal cu  $8 - x$ . Din condiție reiese, că  $0 \leq x \leq 8$ .

Cercetăm funcția  $f(x) = x^3 + (8 - x)^2 = x^3 + 64 - 16x + x^2$ , definită pe intervalul  $[0; 8]$ , și aflăm, pentru care valori  $x$  ea obține cea mai mică valoare.

$$\text{Avem: } f'(x) = 3x^2 + 2x - 16. \text{ Rezolvăm ecuația } 3x^2 + 2x - 16 = 0.$$

$$\text{Obținem: } x = 2 \text{ sau } x = -\frac{8}{3}.$$

Din rădăcinile găsite intervalului  $[0; 8]$  aparține numai numărul 2. Avem:

$$f(2) = 44, f(0) = 64, f(8) = 512.$$

Deci, funcția  $f$  obține cea mai mică valoare pentru  $x = 2$ .

$$\text{Răspuns: } 8 = 2 + 6. \blacktriangleleft$$



Descrieți, cum se găsește cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției derivabile pe intervalul  $[a; b]$ .



### EXERCIIII

**24.1.\*** Aflați cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției  $f$  pe intervalul indicat:

1)  $f(x) = 3x^2 - x^3$ ,  $[-1; 3]$ ;

3)  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$ ,  $[-1; 4]$ ;

2)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ ,  $[0; 2]$ ;

4)  $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$ ,  $[-3; 0]$ .

**24.2.\*** Aflați cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției  $f$  pe intervalul indicat:

1)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ ,  $[0; 3]$ ;

3)  $f(x) = 2x^4 - 8x$ ,  $[-2; 1]$ ;

2)  $f(x) = x - 1 - x^3 - x^2$ ,  $[-2; 0]$ ;

4)  $f(x) = \frac{x^4}{4} - 8x^2$ ,  $[-1; 2]$ .

**24.3.\*\*** Prezentați numărul 8 în formă de sumă a două astfel de numere nenegative, ca produsul unuia din aceste numere și cubul celui de-al doilea număr să fie cel mai mare.

**24.4.\*\*** Prezentați numărul 12 în formă de sumă a două astfel de numere nenegative, ca produsul pătratului unuia din aceste numere și îndoiitul celui de-al doilea număr să fie cel mai mare.

**24.5.\*\*** Prezentați numărul 180 în formă de sumă a trei numere nenegative, ca două din ele să se rapoarte ca 1 : 2, iar produsul tuturor termenilor să fie cel mai mic.

**24.6.\*\*** Prezentați numărul 18 în formă de sumă a trei numere nenegative astfel, ca două din ele să se rapoarte ca 8 : 3, iar suma cuburilor acestor trei numere să fie cea mai mică.



### NE PREGĂTIM PENTRU STUDIAREA TEMEI NOI

**24.7.** Desenați graficul unei oarecare funcții, care are astfel de proprietăți: domeniul de definiție este intervalul  $[-3; 4]$ ; domeniul de valori este intervalul  $[-2; 3]$ ; zerourile funcției sunt egale cu  $-1$  și  $2$ ;  $f'(x) > 0$  pentru orice  $x$  din intervalele  $[-3; 0]$  și  $(2; 4]$ ;  $f'(x) < 0$  pentru orice  $x$  din intervalul  $(0; 2)$ .

## 25. Construirea graficelor funcțiilor

Când în clasele anterioare trebuia de construit grafice voi, de regulă, procedați astfel: Depuneți pe planul de coordonate un număr oarecare de puncte, care aparțineau graficului, apoi le uneți. Exactitatea construcției depindea de numărul de puncte.

În figura 25.1 sunt prezentate câteva puncte care aparțin graficului funcției  $y = f(x)$ . Aceste puncte se pot uni în mod diferit, de exemplu astfel, cum este arătat în figurile 25.2 și 25.3.

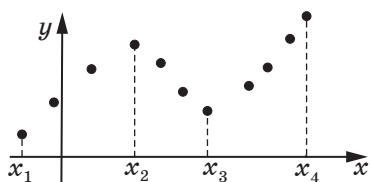


Fig. 25.1

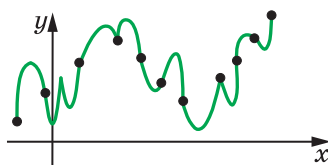


Fig. 25.2

În același timp dacă se cunoaște, că funcția  $f$  crește pe fiecare din intervalele  $[x_1; x_2]$  și  $[x_3; x_4]$ , descrește pe intervalul  $[x_2; x_3]$  și este derivabilă, atunci cel mai probabil va fi construit graficul, reprezentat în figura 25.4.

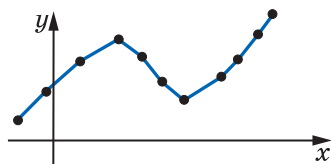


Fig. 25.3

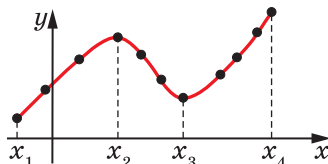


Fig. 25.4

Voi știți, ce proprietăți sunt caracteristice graficelor funcțiilor pare, impare, funcției periodice etc. În general, cu cât mai multe proprietăți ale funcției reușim să determinăm, cu atât mai exact se poate construi graficul ei.

Examinarea proprietăților funcției o vom realiza conform planului următor.

1. De găsit domeniul de definiție al funcției.
2. De cercetat funcția la paritate.
3. De găsit zerourile funcției.
4. De găsit intervalele de creștere și descreștere.
5. De găsit punctele de extremum și valorile funcției în punctele de extremum.



6. De depistat alte particularități ale funcției (neperiodicitatea funcției, comportarea funcției în vecinătățile unor puncte importante etc.).

Menționăm, că planul prezentat de cercetare poartă caracter de recomandare și nu este ceva fixat și inepuizabil. În timpul studierii funcțiilor este important de determinat așa proprietăți, care vor da posibilitatea de a construi corect graficul funcției.

**Problemă.** Cercetați funcția  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3$  și construiți graficul ei.

*Rezolvare.* 1. Funcția este determinată pe mulțimea numerelor reale, adică  $D(f) = \mathbb{R}$ .

2. Avem:  $f(-x) = \frac{3}{2}(-x)^2 - \frac{1}{4}(-x)^3 = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3$ . De aici  $f(-x) \neq f(x)$  și  $f(-x) \neq -f(x)$ , adică funcția  $y = f(-x)$  nu coincide nici cu funcția  $y = f(x)$ , nici cu funcția  $y = -f(x)$ . Astfel, funcția dată nu este nici pară, nici impară.

3. Avem:  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 = \frac{x^2}{4}(6 - x)$ . Numerele 0 și 6 sunt zero-urile funcției  $f$ .

4–5. Avem:  $f'(x) = 3x - \frac{3x^2}{4} = \frac{3x}{4}(4 - x)$ . Cercetând semnul derivatei (fig. 25.5), ajungem la concluzia, că funcția  $f$  crește pe intervalul  $[0; 4]$ , descrește pe fiecare din intervalele  $(-\infty; 0]$  și  $[4; +\infty)$ . Deci,  $x_{\max} = 4$ ,  $x_{\min} = 0$ . Dispunem de:  $f(4) = 8$ ,  $f(0) = 0$ .

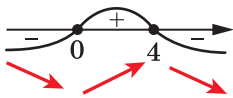


Fig. 25.5

Ținând cont de toate rezultatele obținute, construim graficul funcției (fig. 25.6). ◀

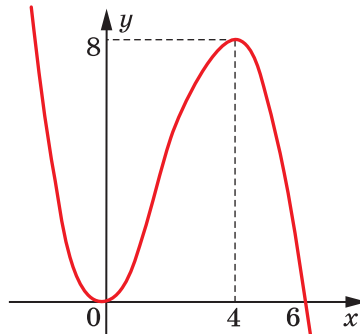


Fig. 25.6



Descrieți planul cercetării proprietăților funcției.



### EXERCIȚII

**25.1.\*\*** Cercetați funcția dată și construiți graficul ei:

1)  $f(x) = 3x - x^3 - 2;$

4)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2;$

2)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5;$

5)  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^3.$

3)  $f(x) = 3x - \frac{x^3}{9};$

**25.2.\*\*** Examinați funcția dată și construiți graficul ei:

1)  $f(x) = x^3 + 3x^2;$

3)  $f(x) = x - x^3.$

2)  $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3;$



## PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 3

### Creșterea argumentului $x$ în punctul $x_0$

$$\Delta x = x - x_0$$

### Creșterea funcției $f$ în punctul $x_0$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ sau } \Delta f = f(x) - f(x_0)$$

### Derivata funcției

Derivată a funcției  $f$  în punctul  $x_0$  se numește numărul, care este egal cu limita raportului creșterii funcției  $f$  în punctul  $x_0$  la creșterea corespunzătoare a argumentului cu condiția, că creșterea argumentului tinde spre zero.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ sau } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

### Conținutul geometric al derivatei

Coeficientul unghiular al tangentei, duse la graficul funcției  $f$  în punctul cu abscisa  $x_0$ , este egal cu valoarea derivatei funcției  $f$  în punctul  $x_0$ .

### Conținutul mecanic al derivatei

Dacă  $y = s(t)$  este legea mișcării punctului material pe dreapta de coordonate, atunci viteza instantanee în momentul  $t_0$  este egală cu derivata funcției  $y = s(t)$  în punctul  $t_0$ .

### Derivabilitatea funcției

Dacă funcția are derivată într-un punct oarecare, atunci această funcție se numește derivabilă în acest punct.

Dacă funcția  $f$  este derivabilă în fiecare punct al domeniului de definiție, atunci se spune că ea este derivabilă.

### Ecuția tangentei, duse la graficul funcției în punctul cu abscisa $x_0$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

### Regulile de calculare ale derivatelor

Derivata sumei	$(f + g)' = f' + g'$
Derivata produsului	$(fg)' = f'g + g'f$
Derivata câtului	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

### Criteriul de constanță al funcției

Dacă pentru  $x$  arbitrar din intervalul  $I$  este adevărată egalitatea  $f'(x) = 0$ , atunci funcția  $f$  este constantă pe acest interval.

### Criteriul de creștere al funcției

Dacă pentru toți  $x$  din intervalul  $I$  este adevărată inegalitatea  $f'(x) > 0$ , atunci funcția  $f$  crește pe acest interval.

### Criteriul de descreștere al funcției

Dacă pentru toți  $x$  din intervalul  $I$  este adevărată inegalitatea  $f'(x) < 0$ , atunci funcția  $f$  descrește pe acest interval.

### Vecinătatea punctului

Intervalul  $(a; b)$ , care conține punctul  $x_0$ , se numește vecinătatea punctului  $x_0$ .

### Punctele de extremum ale funcției

Punctul  $x_0$  este numit punct de maximum al funcției, dacă există așa o vecinătate a punctului  $x_0$ , că pentru toate punctele  $x$  din această vecinătate este adevărată inegalitatea  $f(x_0) \geq f(x)$ .

Punctul  $x_0$  este numit punct de minimum al funcției, dacă există așa o vecinătate a punctului  $x_0$ , că pentru toate punctele  $x$  din această vecinătate este adevărată inegalitatea  $f(x_0) \leq f(x)$ .

Punctele de minimum și de maximum au denumire comună: ele sunt numite puncte de extremum (extremitate) ale funcției.

### Criteriile ale punctelor de maximum și minimum

Fie că funcția  $f$  este derivabilă pe intervalul  $(a; b)$  și  $x_0$  – un punct oarecare al acestui interval.

Dacă pentru toate valorile lui  $x \in (a; x_0]$  este adevărată inegalitatea  $f'(x) \geq 0$ , iar pentru toate valorile lui  $x \in [x_0; b)$  este adevărată inegalitatea  $f'(x) \leq 0$ , atunci punctul  $x_0$  este maximumul funcției  $f$ .

Dacă pentru toate valorile lui  $x \in (a; x_0]$  este adevărată inegalitatea  $f'(x) \leq 0$ , iar pentru toate valorile lui  $x \in [x_0; b)$  este adevărată inegalitatea  $f'(x) \geq 0$ , atunci punctul  $x_0$  este minimumul funcției  $f$ .

### Planul de cercetare al proprietăților funcției

1. De găsit domeniul de definiție al funcției.
2. De cercetat funcția la paritate.
3. De găsit zerourile funcției.
4. De găsit intervalele de creștere și descreștere.
5. De găsit punctele de extremum și valorile funcției în punctele de extremum.
6. De depistat alte particularități ale funcției (neperiodicitatea funcției, comportarea funcției în vecinătățile unor puncte importante etc.).

## 26. Exerciții pentru repetarea cursului de algebră și elemente de analiză clasa a 10-a

### 1. Funcții, proprietățile și graficele lor

26.1. Găsiți domeniul de definiție al funcției:

$$1) f(x) = \sqrt{x-5};$$

$$4) f(x) = \frac{14}{x^2+4};$$

$$2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}};$$

$$5) f(x) = \frac{7x+13}{x^2-7x};$$

$$3) f(x) = \frac{9}{x^2-5};$$

$$6) f(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}.$$

26.2. Găsiți domeniul de valori al funcției:

$$1) f(x) = \sqrt{x} + 1;$$

$$3) g(x) = 3 - x^2;$$

$$2) f(x) = \sqrt{x} - 2;$$

$$4) f(x) = x^2 + 2.$$

26.3. Găsiți domeniul de definiție și construiți graficul funcției:

$$1) f(x) = \frac{x^2-4}{x+2};$$

$$2) f(x) = \frac{x^2-6x+9}{3-x}.$$

26.4. Aflați zerourile funcției:

$$1) f(x) = \sqrt{x+7};$$

$$3) f(x) = \sqrt{x^2-6};$$

$$2) f(x) = \frac{x^2+4x-5}{x-1};$$

$$4) f(x) = (x-3)\sqrt{x-4}.$$

26.5. Cercetați la paritate funcția:

$$1) f(x) = 7x^6;$$

$$4) f(x) = x^2 - x + 1;$$

$$2) f(x) = 3x^5 - 2x^7;$$

$$5) f(x) = \frac{1}{x^3-x}.$$

$$3) f(x) = \sqrt{9-x^2};$$

26.6. Aflați valoarea expresiei:

$$1) \sqrt[4]{5 \frac{1}{16}} \cdot \sqrt[5]{-\frac{32}{243}} + (-3 \sqrt[3]{6})^3;$$

$$2) \sqrt[3]{10+\sqrt{73}} \cdot \sqrt[3]{10-\sqrt{73}}.$$

26.7. Găsiți domeniul de definiție al funcției:

$$1) y = \sqrt[4]{3x-5}; \quad 2) y = \sqrt[6]{-x}; \quad 3) y = \sqrt[5]{x-4}; \quad 4) y = \sqrt[8]{6x-x^2}.$$

26.8. Simplificați expresia:

$$1) \sqrt[6]{a^6}, \text{ dacă } a \geq 0; \quad 2) \sqrt[4]{b^4}, \text{ dacă } b \leq 0; \quad 3) \sqrt[7]{c^7}.$$

26.9. Construiți graficul funcției:

$$1) y = (\sqrt{x-2})^7; \quad 2) y = \sqrt[7]{(x-2)^7}; \quad 3) y = (\sqrt[8]{x-2})^8; \quad 4) y = \sqrt[8]{(x-2)^8}.$$

**26.10.** Simplificați expresia:

$$1) \sqrt[4]{(2-\sqrt{7})^4} - \sqrt{7}; \quad 2) \sqrt[5]{(7-\sqrt{35})^5} - \sqrt[6]{(\sqrt{35}-6)^6}.$$

**26.11.** Scoateți factorul de sub semnul derivatei:

$$1) \sqrt[4]{a^{11}}; \quad 2) \sqrt[4]{162m^{10}n^7}; \quad 3) \sqrt[4]{-243y^5}.$$

**26.12.** Comparați numerele:

$$1) \sqrt[6]{80} \text{ și } \sqrt[3]{9}; \quad 2) \sqrt[3]{6} \text{ și } \sqrt{5}; \quad 3) \sqrt[4]{15} \text{ și } \sqrt{3}; \quad 4) \sqrt[4]{27} \text{ și } \sqrt[3]{9}.$$

**26.13.** Reduceți fracția:

$$1) \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}; \quad 2) \frac{\sqrt[6]{a}-2}{\sqrt[3]{a}-4}; \quad 3) \frac{m-\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt{m}-\sqrt[4]{m}}.$$

**26.14.** Calculați valoarea expresiei:

$$1) 3^{1,2} \cdot 3^{-0,7} \cdot 3^{1,5}; \quad 4) \frac{27^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}};$$

$$2) 11^{\frac{4}{3}} \cdot 11^{\frac{3}{4}} \cdot 11^{\frac{1}{12}}; \quad 5) 0,125^{-\frac{1}{3}} + 0,81^{-\frac{1}{2}} - 0,216^{-\frac{2}{3}}.$$

$$3) 36^{0,7} \cdot 6^{-0,4};$$

**26.15.** Demonstrați identitatea:

$$1) \left( \frac{m-n}{m^{\frac{3}{4}}+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}}} - \frac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}} \right) \cdot \left( \frac{n}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{4}} - n^{\frac{1}{4}};$$

$$2) \frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} - \frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} - \frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}} = b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}.$$

**26.16.** Rezolvați ecuația:

$$1) \sqrt{4x+20} = x+2; \quad 5) \sqrt{x+11} - \sqrt{3x+7} = 2;$$

$$2) \sqrt{6-x} = 3x-4; \quad 6) \sqrt{2x+5} + \sqrt{3-x} = 4;$$

$$3) \sqrt{4+2x-x^2} = x-2; \quad 7) \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 5 = 0;$$

$$4) \sqrt{2x^2-14x+13} = 5-x; \quad 8) \sqrt[3]{x^2-4x+4} + 2\sqrt[3]{x-2} - 3 = 0.$$

## 2. Funcții trigonometrice

**26.17.** Comparați cu zero valoarea expresiei:

$$1) \sin 168^\circ \cos 126^\circ; \quad 2) \operatorname{tg} 206^\circ \cos(-223^\circ).$$

**26.18.** Aflați valoarea expresiei:

$$1) \sin 780^\circ; \quad 2) \cos 1200^\circ; \quad 3) \cos \frac{11\pi}{6}.$$

26.19. Calculați  $\sin \alpha$ , dacă  $\operatorname{tg} \alpha = 3$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

26.20. Aflați cea mai mare și cea mai mică valori ale expresiei  $2 \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha$ .

26.21. Simplificați expresia

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cos(2\pi - \alpha).$$

26.22. Se dă:  $\sin \alpha = -0,8$ ,  $\cos \beta = 0,6$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ . Aflați  $\cos(\alpha + \beta)$ .

26.23. Demonstrați identitatea:

$$1) \frac{2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta);$$

$$2) \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

26.24. Simplificați expresia:

$$1) \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha};$$

$$2) \sin 6\alpha \operatorname{tg} 3\alpha + 2 \cos^2 3\alpha;$$

$$3) \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos 2\alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha;$$

$$4) \frac{2 \cos^2 2\alpha + \sin 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha - \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}.$$

26.25. Rezolvați ecuația:

$$1) 2 \sin\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{12}\right) + 2 = 0; \quad 3) 3 + \sqrt{3} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$2) 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) + \sqrt{3} = 0; \quad 4) \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = -1.$$

26.26. Găsiți cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

26.27. Găsiți cea mai mare rădăcină negativă a ecuației

$$\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**26.28.** Câte soluții ale ecuației  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1$  aparțin intervalului  $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ ?

**26.29.** Rezolvați ecuația:

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| 1) $2 \cos^2 x = 3 \sin x + 2$ ;    | 4) $3 \operatorname{tg}^2 x - 8 \cos^2 x + 1 = 0$ ;     |
| 2) $\cos 2x + \sin x = 0$ ;         | 5) $\sin x + 2 \cos x = 0$ ;                            |
| 3) $2 \cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$ ; | 6) $\sin x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$ . |

### 3. Derivata și aplicația ei

**26.30.** Găsiți derivata funcției:

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| 1) $y = 3x^4 - 2x^2 + 5$ ;    | 3) $y = \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} + 7$ ; |
| 2) $y = 4x^3 - \frac{2}{x}$ ; | 4) $y = 5 \sin x - 7 \cos x$ .         |

**26.31.** Găsiți derivata funcției:

- |                               |                               |                                    |
|-------------------------------|-------------------------------|------------------------------------|
| 1) $y = (x^2 - 1)(x^5 + 2)$ ; | 3) $y = \sqrt[3]{x} \cos x$ ; | 5) $y = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$ ;    |
| 2) $y = x^3 \sin x$ ;         | 4) $y = \frac{2x+3}{3x-2}$ ;  | 6) $y = \frac{x^2 - 3x}{\cos x}$ . |

**26.32.** Aflați abscisa punctului graficului funcției  $f(x) = x^2 - 5x$ , în care tangenta la acest grafic creează cu direcția pozitivă a axei absciselor un unghi de  $45^\circ$ .

**26.33.** Aflați coeficientul unghiular al tangentei duse la graficul funcției  $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$  în punctul de intersecție al lui cu axa ordonatelor.

**26.34.** Alcătuiți ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul cu abscisa  $x_0$ , dacă:

- |  |   |
|--|---|
| 1) $f(x) = x^3 + x$ , $x_0 = -1$ ;       | 3) $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$ , $x_0 = 3$ ;     |
| 2) $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$ , $x_0 = 4$ ; | 4) $f(x) = \sin x$ , $x_0 = -\frac{\pi}{3}$ . |

**26.35.** Aflați ecuațiile tangentelor duse la graficul funcției  $f(x) = x^2 - 4x$  în punctele de intersecție ale lui cu axa absciselor.

**26.36.** Un corp se mișcă pe dreapta de coordonate conform legii  $s(t) = t^2 + 3t - 2$  (deplasarea se măsoară în metri, timpul — în secunde). În care moment  $t$  viteza de mișcare a corpului va alcătui  $10 \text{ m/s}$ ?



**26.37.** Demonstrați, că funcția  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$  este crescătoare.

**26.38.** Găsiți intervalele de creștere și descreștere și punctele de extremum ale funcției:

1)  $y = 3x - x^3$ ;                      3)  $y = x + \frac{16}{x}$ ;                      5)  $y = x^2(x - 3)$ ;

2)  $y = \frac{x^5}{5} - x^4 - 3$ ;                      4)  $y = x + \frac{4}{x^2}$ ;                      6)  $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ .

**26.39.** Aflați cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției  $f$  pe intervalul indicat:

1)  $f(x) = x^3 - 3x$ ,  $[-2; 0]$ ;                      2)  $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ ,  $[-2; 4]$ .

**26.40.** Reprezentați numărul 64 în formă de sumă a astfel de doi termeni pozitivi, ca suma pătratelor lor să fie cea mai mică.

**26.41.** Găsiți un astfel de număr pozitiv, pentru care diferența dintre pătratul lui întreit și a cubului lui este cea mai mare.

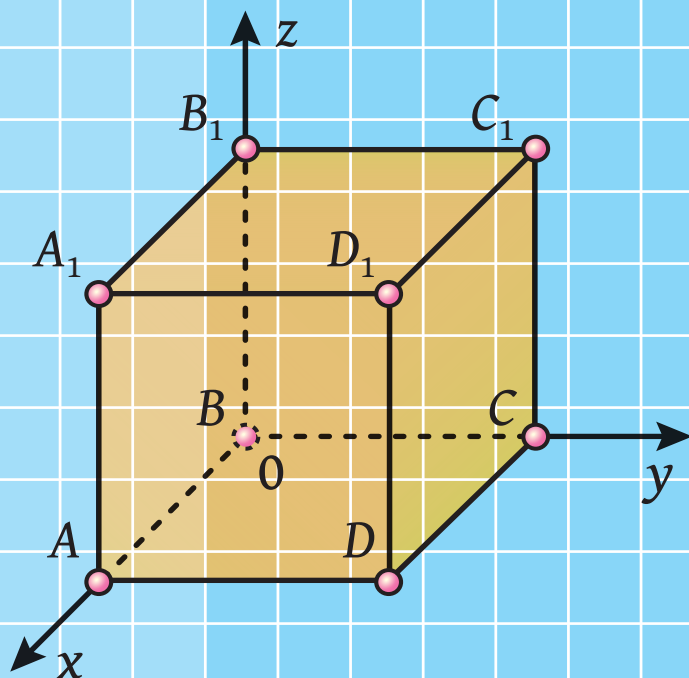
# Capitolul 2.

## Stereometrie

§ 4. Paralelismul în spațiu

§ 5. Perpendicularitatea în spațiu

§ 6. Coordonate și vectori  
în spațiu



# PARALELISMUL ÎN SPAȚIU

## §4



În acest paragraf veți face cunoștință cu noțiunile fundamentale ale stereometriei, axiomele stereometriei și consecințele lor. Veți obține cunoștințe inițiale despre poliedre. Veți afla despre amplasarea reciprocă a două drepte, a dreptei și a planului, a două plane în spațiu. Veți face cunoștință cu regulile conform cărora se reprezintă figurile spațiale pe plan.

## 27. Noțiunile fundamentale ale stereometriei. Axiomele stereometriei

Studiind matematica, voi ați făcut cunoștință cu majoritatea noțiunilor cu ajutorul definițiilor. Deci, din cursul de planimetrie vă sunt bine cunoscute definițiile de patrulater, trapez, circumferință etc.

Definiția oricărei noțiuni se bazează pe alte noțiuni, conținutul cărora vă este deja cunoscut. De exemplu, analizăm definiția trapezului: „Trapez se numește patrulaterul la care două laturi sunt paralele, iar celelalte două nu sunt paralele”. Vedem că definiția trapezului se bazează pe noțiuni deja introduse, ca patrulater, latura patrulaterului, laturi paralele și neparalele etc. Deci, definițiile se introduc pe principiul „nou bazat pe vechi”. Atunci este clar că trebuie să existe noțiuni primare a căror definiții nu sunt date. Ele sunt numite **noțiuni fundamentale** (fig. 27.1).

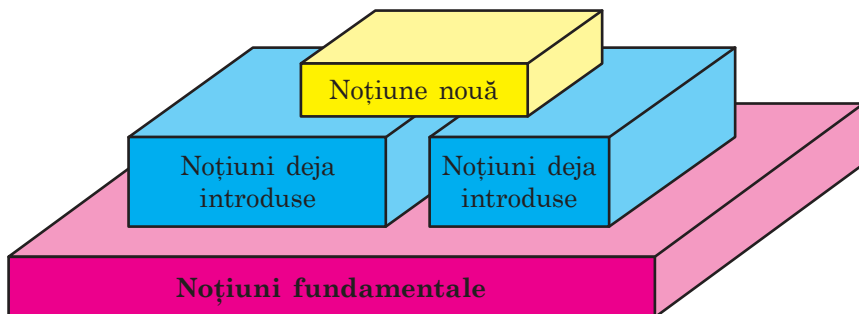


Fig. 27.1

În cursul de planimetrie, pe care l-ați studiat, nu au fost date definițiile la așa figuri ca punctul și dreapta. În stereometrie, pe lângă acestea, la noțiuni fundamentale vom referi încă o figură – **planul**.

Ca imagine intuitivă a planului poate servi suprafața unui bazin de apă în lipsa vântului, suprafața oglinzii, suprafața mesei lustruite, continuate în gând în toate direcțiile.

Folosind noțiunea de plan, putem considera că în planimetrie noi am cercetat un singur plan și toate figurile studiate aparțineau acestui plan. În stereometrie se consideră o mulțime de plane, situate în **spațiu**.

De regulă, planele se notează cu litere mici grecești  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ... . Pe desen planele se reprezintă în forma unui paralelogram (fig. 27.2) sau a altor părți limitate ale planului (fig. 27.3).



Fig. 27.2

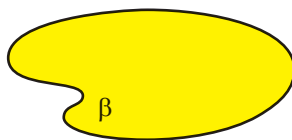


Fig. 27.3

Planul, tot așa ca și dreapta, constă din puncte, adică planul este o mulțime de puncte.

Există câteva cazuri de amplasare reciprocă a punctelor, a dreptelor și planelor în spațiu. Să dăm exemple.

În figura 27.4 este prezentat punctul  $A$ , care aparține planului  $\alpha$ . De asemenea se spune, că *punctul  $A$  se află în planul  $\alpha$  sau planul  $\alpha$  trece prin punctul  $A$* . Pe scurt aceasta se poate scrie astfel:  $A \in \alpha$ .

În figura 27.5 este ilustrat punctul  $B$ , care nu aparține planului  $\beta$ . Pe scurt această se poate scrie astfel:  $B \notin \beta$ .



Fig. 27.4

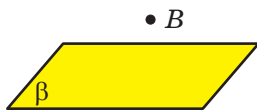


Fig. 27.5



Fig. 27.6

În figura 27.6 este prezentată dreapta  $a$ , care aparține planului  $\alpha$ . De asemenea se spune că *dreapta  $a$  se află în planul  $\alpha$  sau planul  $\alpha$  trece prin dreapta  $a$* . Pe scurt această se poate scrie astfel:  $a \subset \alpha$ .

Dacă dreapta și planul au doar un singur punct comun, atunci se spune că **dreapta intersectează planul**. În figura 27.7 este reprezentată dreapta  $a$ , care intersectează planul  $\alpha$  în punctul  $A$ . Se scrie:  $a \cap \alpha = A$ .

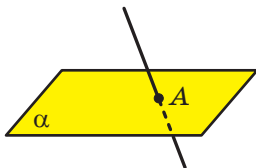


Fig. 27.7

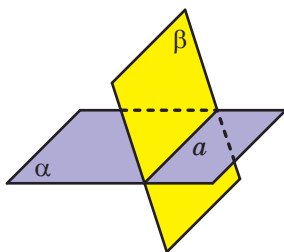


Fig. 27.8

Mai departe vorbind „două puncte”, „trei drepte”, „două plane” etc., vom considera că acestea sunt puncte diferite, drepte diferite și diferite plane.

Dacă două plane au un punct comun, se spune că aceste plane **se intersectează**.

În figura 27.8 sunt desenate planele  $\alpha$  și  $\beta$ , care se intersectează după dreapta  $a$ . Se scrie:  $\alpha \cap \beta = a$ .

La etapa începătoare de studiu a stereometriei este imposibil să se demonstreze teoremele, bazându-se pe alte afirmații, deoarece aceste afirmații încă nu sunt disponibile. Din această cauză, primele proprietăți care se referă la puncte, drepte și plane în spațiu sunt acceptate fără demonstrație și se numesc **axiome**.

Menționăm, că unele axiome din stereometrie după formulare cuvânt cu cuvânt coincid cu axiomele bine cunoscute ale planimetriei. De exemplu:

- *oricare ar fi dreapta, există puncte ce aparțin acestei drepte și puncte care nu-i aparțin;*
- *prin orice două puncte se poate duce o dreaptă și numai una singură.*

Noi nu vom face cunoștință cu construcția axiomatică strictă a stereometriei. Vom analiza doar câteva afirmații care exprimă proprietățile fundamentale ale planelor în spațiu, pe baza cărora se construiește, de obicei, cursul de stereometrie în școală.

**Axioma A1.** În orice plan al spațiului sunt adevărate axiomele planimetriei.

Dacă în orice plan al spațiului sunt adevărate axiomele planimetrii, atunci sunt juste și consecințele acestor axiome, adică teoremele planimetrii. Deci, în stereometrie, ne putem folosi de toate proprietățile figurilor plate pe care le cunoaștem.

**Axioma A2.** Prin orice trei puncte ale spațiului, care nu sunt situate pe o dreaptă, trece un plan și doar unul singur.

Figurile 27.9–27.11 reprezintă această axiomă.



Fig. 27.9



Fig. 27.10



Fig. 27.11

Din axioma menționată mai sus rezultă, că trei puncte ale spațiului care nu se află pe o dreaptă, definesc un singur plan, care trece prin aceste puncte. Deci, pentru a nota planul se pot indica orice trei puncte, care nu se află pe o dreaptă. De exemplu, în figura 27.12 este desenat planul  $ABC$ .

Notarea  $M \in ABC$  înseamnă că punctul  $M$  aparține planului  $ABC$ . Scrierea  $MN \subset ABC$  înseamnă că dreapta  $MN$  aparține planului  $ABC$  (fig. 27.12).

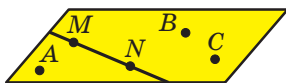


Fig. 27.12

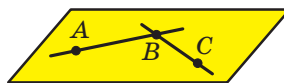


Fig. 27.13

**Axioma A3.** Dacă două puncte ale dreptei aparțin planului, atunci și toată dreapta aparține acestui plan.

De exemplu, în figura 27.13 punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  aparțin planului  $ABC$ . Atunci putem scrie:  $AB \subset ABC$ ,  $BC \subset ABC$ .

Din această axiomă rezultă, că atunci când dreapta nu aparține planului, ea are cu planul dat nu mai mult decât un singur punct comun.

Afirmația formulată în axioma **A3**, se folosește des în practică, atunci când se verifică dacă această suprafață este netedă (plată).

Pentru aceasta pe suprafață în locuri diferite se pune o șipcă dreaptă și se verifică dacă există spații între șipcă și suprafață (fig. 27.14).

**Axioma A4.** Dacă două plane au un punct comun, atunci ele se intersectează după o dreaptă.

Această axiomă poate fi ilustrată cu ajutorul unei foi de hârtie îndoită sau cu ajutorul manualului vostru (fig. 27.15).



Fig. 27.14

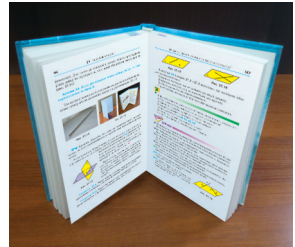
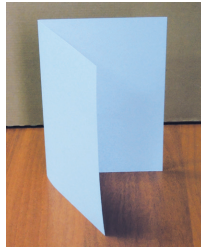


Fig. 27.15

**Problemă.** Demonstrați, că dacă două plane au un punct comun, atunci ele se intersectează după o dreaptă care trece prin acest punct.

*Rezolvare.* Fie că punctul  $A$  este comun pentru două plane  $\alpha$  și  $\beta$ , adică  $A \in \alpha$  și  $A \in \beta$  (fig. 27.16). După axioma A4 planele  $\alpha$  și  $\beta$  se intersectează după o dreaptă. Fie  $\alpha \cap \beta = a$ . Atunci toate punctele comune ale planelor  $\alpha$  și  $\beta$  aparțin dreptei  $a$ . Punctul  $A$  este comun pentru planele  $\alpha$  și  $\beta$ . Deci,  $A \in a$ . ◀

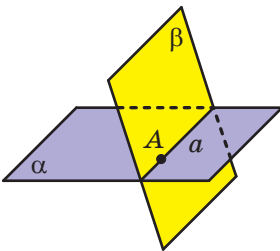


Fig. 27.16

Pe lângă axiome, există și alte proprietăți, care descriu plasarea reciprocă a punctelor, dreptelor și planelor în spațiu. Bazându-se pe axiome, se poate demonstra, de exemplu, astfel de afirmații (consecințe din axiomele stereometriei).

**Teorema 27.1.** Printr-o dreaptă și un punct, care nu îi aparține, trece un plan și numai unul singur (fig. 27.17).

**Teorema 27.2.** Prin două drepte, care se intersectează, trece un plan și numai unul singur (fig. 27.18).

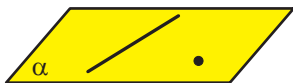


Fig. 27.17



Fig. 27.18

Din axioma **A2** și teoremele 27.1 și 27.2 rezultă, că *planul este determinat în mod unic*:

- 1) de trei puncte, care nu se află pe o dreaptă;
- 2) de o dreaptă și un punct, care nu aparține acestei drepte;
- 3) de două drepte, care se intersectează.

Astfel, noi am indicat trei moduri de a defini un plan.



1. Cum în matematică se numesc noțiunile primare, care nu se definesc?
2. Care figuri sunt în lista de bază a noțiunilor din stereometrie?
3. În ce caz se spune că dreapta intersectează planul?
4. În ce caz se spune că planele se intersectează?
5. Formulați axiomele **A1**, **A2**, **A3**, **A4**.
6. Ce consecințe din axiomele stereometriei voi știți?
7. Indicați modurile de definire a planului.



### EXERCIȚII

- 27.1.° Desenați planul  $\alpha$ , punctul  $M$  care aparține lui și punctul  $K$ , care nu-i aparține lui. Scrieți aceasta cu ajutorul simbolurilor corespunzătoare.
- 27.2.° Desenați planul  $\gamma$ , care trece prin dreapta  $a$ . Scrieți aceasta cu ajutorul simbolurilor corespunzătoare.
- 27.3.° Desenați planul  $\alpha$  și dreapta  $b$ , care intersectează planul dat în punctul  $A$ . Scrieți aceasta cu ajutorul simbolurilor corespunzătoare. Câte puncte ale dreptei  $b$  aparțin planului  $\alpha$ ?
- 27.4.° Desenați planele  $\beta$  și  $\gamma$ , care se intersectează după dreapta  $c$ . Scrieți aceasta cu ajutorul simbolurilor corespunzătoare.
- 27.5.° Scrieți cu ajutorul simbolurilor repartizarea reciprocă a punctelor, dreptelor și a planului, reprezentate în figură 27.19.
- 27.6.° Câte plane pot fi duse prin dreapta dată și punctul dat?
- 27.7.° Se dau punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  astfel, că  $AB = 5$  cm,  $BC = 6$  cm,  $AC = 7$  cm. Câte plane pot fi duse prin punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$ ?

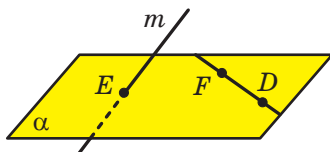


Fig. 27.19



27.8.\* Se dau punctele  $D$ ,  $E$  și  $F$  astfel, că  $DE = 2$  cm,  $EF = 4$  cm,  $DF = 6$  cm. Câte plane se pot duce prin punctele  $D$ ,  $E$  și  $F$ ?

27.9.\*\* Dreptele  $AB$  și  $AC$  intersectează planul  $\alpha$  în punctele  $B$  și  $C$ , punctele  $D$  și  $E$  aparțin acestui plan (fig. 27.20). Construiți punctul de intersecție al dreptei  $DE$  cu planul  $ABC$ .

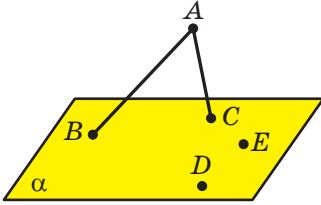


Fig. 27.20

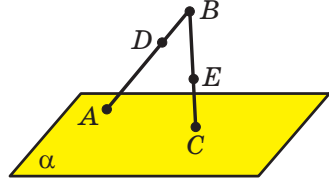


Fig. 27.21

27.10.\*\* Dreapta  $BA$  intersectează planul  $\alpha$  în punctul  $A$ , dreapta  $BC$  – în punctul  $C$  (fig. 27.21). Pe segmentul  $AB$  notăm punctul  $D$ , pe segmentul  $BC$  – punctul  $E$ . Construiți punctul de intersecție al dreptei  $DE$  cu planul  $\alpha$ .

27.11.\*\* Dreapta  $m$  – linia de intersecție a planelor  $\alpha$  și  $\beta$  (fig. 27.22). Punctele  $A$  și  $B$  aparțin planului  $\alpha$ , iar punctul  $C$  – planului  $\beta$ . Construiți liniile de intersecție a planului  $ABC$  cu planul  $\alpha$  și cu planul  $\beta$ .

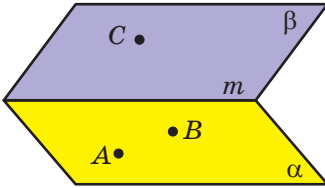


Fig. 27.22

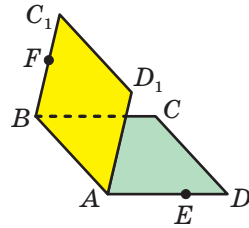


Fig. 27.23

27.12.\*\* Pătratele  $ABCD$  și  $ABC_1D_1$  nu sunt situate într-un plan (fig. 27.23). Pe segmentul  $AD$  este notat punctul  $E$ , iar pe segmentul  $BC_1$  – punctul  $F$ . Construiți punctul de intersecție:

- 1) al dreptei  $CE$  cu planul  $ABC_1$ ;
- 2) al dreptei  $FD_1$  cu planul  $ABC$ .

27.13.\*\* Cum cu ajutorul a două fire tâmplarul poate verifica dacă sunt situate capetele celor patru picioare ale scaunului în același plan?

27.14.\*\* Punctul  $M$  – punctul comun a două plane  $ABC$  și  $BCD$ . Găsiți segmentul  $BC$ , dacă  $BM = 4$  cm,  $MC = 7$  cm.

27.15. Punctul  $K$  – punctul comun al două plane  $MNF$  și  $MNE$ .  
Găsiți segmentul  $MN$ , dacă  $MK = KN = 5$  cm.



### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

27.16. Pe înălțimea  $BD$  a triunghiului isoscel  $ABC$  ( $AB = BC$ ) s-a notat punctul  $M$ . Găsiți raportul dintre aria triunghiului  $AMC$  și aria triunghiului  $ABC$ , dacă  $BD = 12$  cm,  $BM = 8$  cm.

## 28. Figuri spațiale. Noțiuni inițiale despre poliedre

În stereometrie în afară de puncte, drepte și plane se cercetează figuri în spațiu, adică figuri la care nu toate punctele sunt situate într-un plan. Cu unele din figurile spațiale voi deja sunteți cunoscuți. Astfel, în figura 28.1 sunt desenate cilindrul, conul și sfera. Aceste figuri le veți studia detaliat în clasa 11.



Fig. 28.1

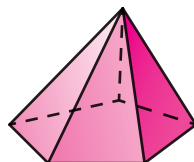


Fig. 28.2

În figura 28.2 este reprezentată încă o figură spațială bine cunoscută – piramida. Această figură este un tip aparte a **poliedrului**.

Exemple de poliedre sunt reprezentate în figura 28.3.

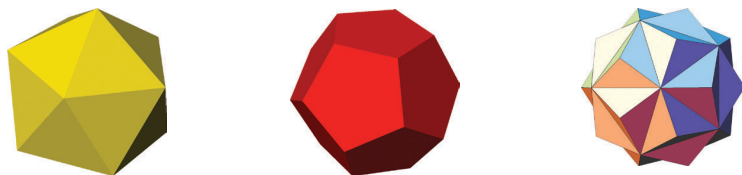


Fig. 28.3

**Suprafața** poliedrului se compune din poligoane. Ele se numesc **fețele poliedrului**. Laturile poligoanelor se numesc **muchiile poliedrului**, iar vârfurile – **vârfurile poliedrului** (fig. 28.4).

În figura 28.5 este reprezentată piramida pentagonală  $FABCDE$ . Suprafața acestui poliedru constă din cinci triunghiuri, care se numesc **fețele laterale ale piramidei** și un pentagon care se numește **baza piramidei**. Vârful  $F$ , care este comun pentru toate fețele laterale se numește **vârful piramidei**. Muchiile  $FA$ ,  $FB$ ,  $FC$ ,  $FD$  și  $FE$  se numesc **muchii laterale ale piramidei**, iar muchiile  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$  și  $EA$  – **muchii bazei piramidei**.

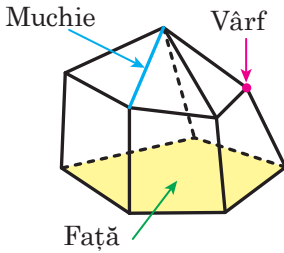


Fig. 28.4

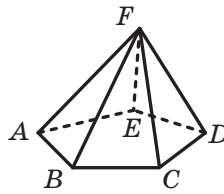


Fig. 28.5

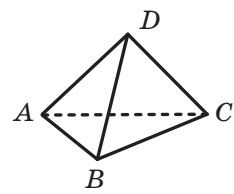


Fig. 28.6

În figura 28.6 este reprezentată piramida triunghiulară  $DABC$ . Piramida triunghiulară este numită de asemenea **tetraedru**.

Încă un tip apartine a poliedrului este **prisma**. În figura 28.7 este desenată prisma triunghiulară  $ABCA_1B_1C_1$ . Acest poliedru, are cinci fețe, două din care sunt triunghiurile egale  $ABC$  și  $A_1B_1C_1$ . Ele se numesc **bazele prisme**. Celelalte fețe ale prisme sunt paralelograme. Ele sunt numite **fețe laterale ale prisme**. Muchiile  $AA_1$ ,  $BB_1$  și  $CC_1$  se numesc **muchii laterale ale prisme**.

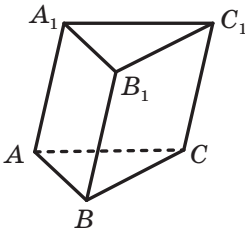


Fig. 28.7

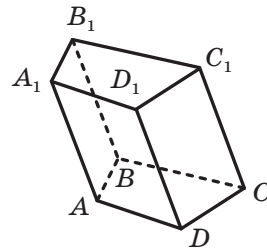


Fig. 28.8

În figura 28.8 este reprezentată prisma patrulateră  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Suprafața ei constă din două patrulatere egale  $ABCD$  și  $A_1 B_1 C_1 D_1$  (bazele prisme) și patru paralelograme (fețele laterale ale prisme).

Voi, sunteți cunoscuți de asemenea cu un tip aparte a prisme patrulateră – **paralelipipedul dreptunghiular**. În figura 28.9 este reprezentat paralelipipedul dreptunghiular  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Toate fețele paralelipipedul dreptunghiular sunt dreptunghiuri.

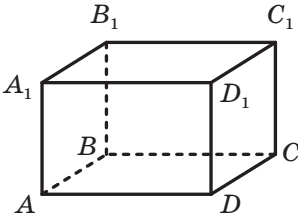


Fig. 28.9

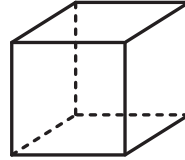


Fig. 28.10

La rândul său, un tip aparte a paralelipipedul dreptunghiular este **cubul**. Toate fețele cubului sunt pătrate (fig. 28.10).

Prisma patrulateră, baza căreia este un paralelogram, se numește **paralelipiped**.

În cursul de geometrie clasa 11 voi mai detaliat veți face cunoștință cu poliedrele și cu tipuri particulare ale lor.

**Problemă.** Pe muchiile  $AA_1$  și  $DD_1$  ale cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  s-au notat corespunzător punctele  $M$  și  $N$  astfel încât  $AM \neq DN$  (fig. 28.11). Construiți punctul de intersecție al dreptei  $MN$  cu planul  $ABC$ .

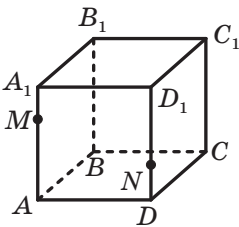


Fig. 28.11

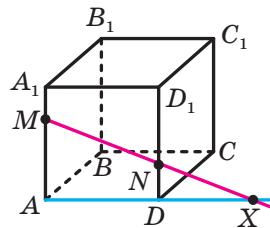


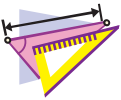
Fig. 28.12

*Rezolvare.* Punctele  $M$  și  $N$  aparțin planului  $AA_1 D_1$ . Atunci după axioma **A3** dreapta  $MN$  aparține acestui plan. Analogic dreapta  $AD$  de asemenea aparține planului  $AA_1 D_1$ . Din planimetrie este cunoscut, că dreptele care sunt situate într-un plan sau sunt paralele, sau se intersectează. Deoarece  $AM \neq DN$ , rezultă că dreptele  $AD$  și  $MN$  se intersectează. Fie  $X$  – punctul de intersecție al lor (fig. 28.12).

Punctele  $A$  și  $D$  aparțin planului  $ABC$ . Atunci după axioma A3 dreapta  $AD$  aparține aceluiași plan. Punctul  $X$  aparține dreptei  $AD$ . Deci, punctul  $X$  aparține planului  $ABC$ . Deoarece punctul  $X$  tot aparține dreptei  $MN$ , atunci dreapta  $MN$  intersectează planul  $ABC$  în punctul  $X$ . ◀



1. Numiți figurile spațiale cunoscute de voi.
2. Din ce figuri este alcătuită suprafața poliedrului? Cum ele se numesc?
3. Ce se numește muchia poliedrului? vârfurile poliedrului?
4. Ce tipuri de poliedre știți? Descrieți aceste poliedre.



### EXERCIIU

**28.1.°** În figura 28.13 este dat paralelipipedul dreptunghiular  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Indicați:

- 1) bazele paralelipipedului;
- 2) fețele laterale ale paralelipipedului;
- 3) muchiile laterale ale paralelipipedului;
- 4) muchiile bazei de jos ale paralelipipedului.

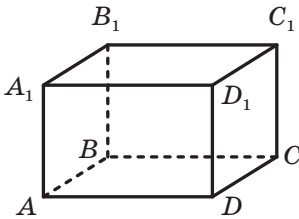


Fig. 28.13

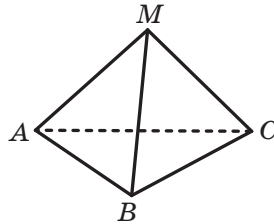


Fig. 28.14

**28.2.°** În figura 28.14 este desenată piramida  $MABC$ . Indicați:

- 1) baza piramidei;
- 2) vârful piramidei;
- 3) fețele laterale ale piramidei;
- 4) muchiile laterale ale piramidei;
- 5) muchiile bazei piramidei.

**28.3.°** Pe muchia  $BC$  a tetraedrului  $SABC$  s-a notat punctul  $D$ . Care dreaptă este linia de intersecție a planelor: 1)  $ASD$  și  $ABC$ ; 2)  $ASD$  și  $BSC$ ; 3)  $ASD$  și  $ASC$ ?

**28.4.\*** Punctul  $M$  aparține feței  $ASC$  a tetraedrului  $SABC$ , punctul  $D$  – muchiei  $BC$  (fig. 28.15). Construiți linia de intersecție a planului  $ABC$  și a planului, care trece prin dreapta  $SD$  și punctul  $M$ .

**28.5.\*** Pe muchiile laterale  $SA$  și  $SB$  ale piramidei  $SABCD$  s-au notat corespunzător punctele  $M$  și  $K$ . Construiți punctul de intersecție al dreptei  $MK$  cu planul  $ABC$ , dacă dreptele  $MK$  și  $AB$  nu sunt paralele.

**28.6.\*** Pe muchiile laterale  $SA$  și  $SC$  ale piramidei  $SABCD$  s-au notat corespunzător punctele  $M$  și  $K$ . Construiți punctul de intersecție al dreptei  $MK$  cu planul  $ABC$ , dacă dreptele  $MK$  și  $AC$  nu sunt paralele.

**28.7.\*** Este dat cubul  $ABCA_1B_1C_1D_1$ . Construiți dreptele, după care planul, ce trece prin punctele  $A$ ,  $C$  și  $B_1$ , intersectează fețele cubului.

**28.8.\*** Este dată prisma  $ABCA_1B_1C_1$  și planul, care trece prin dreptele  $AC_1$  și  $AB$ . Construiți dreptele, după care planul intersectează fețele prisme.

**28.9.\*\*** Punctul  $M$  aparține feței  $ASB$  a tetraedrului  $SABC$ , punctul  $K$  – feței  $BSC$  (fig. 28.16). Construiți punctul de intersecție al dreptei  $MK$  cu planul  $ABC$ .

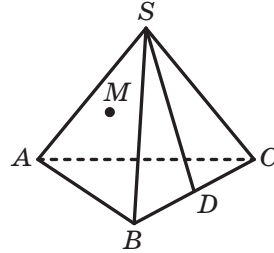


Fig. 28.15

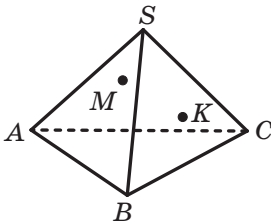


Fig. 28.16

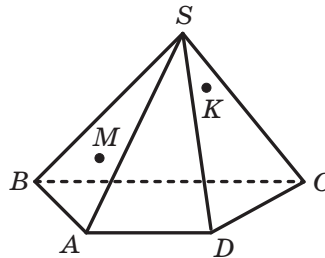


Fig. 28.17

**28.10.\*\*** Punctul  $M$  aparține feței  $ASB$  a piramidei  $SABCD$ , punctul  $K$  – feței  $CSD$  (fig. 28.17). Construiți punctul de intersecție al dreptei  $MK$  cu planul  $ABC$ .

28.11.\*\* Se dă piramida  $SABCD$  (fig. 28.18).

Construiți linia de intersecție a planelor  $ASB$  și  $CSD$ .

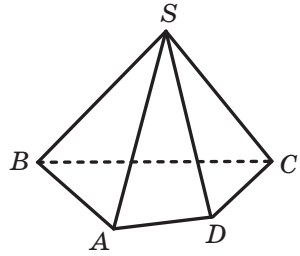


Fig. 28.18

28.12.\*\* Se dă piramida  $SABCDE$  (fig. 28.19).

Construiți linia de intersecție a planelor  $ASE$  și  $BSC$ .

28.13.\*\* Pe muchiile  $AB$  și  $CD$  ale tetraedrului  $DABC$  sunt notate corespunzător punctele  $E$  și  $F$ . Construiți linia de intersecție a planelor  $AFB$  și  $CED$ .

28.14.\*\* Se dă piramida  $MABCD$ , punctul  $K$  aparține segmentului  $BD$  (fig. 28.20). Construiți linia de intersecție a planelor  $MCK$  și  $MAB$ .

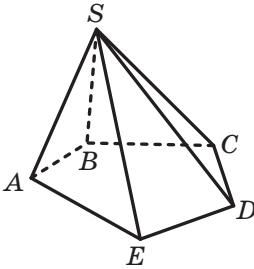


Fig. 28.19

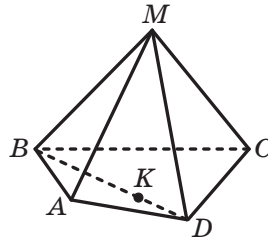


Fig. 28.20



## EXERCIIII PENTRU REPETARE

28.15. Diagonala trapezului isoscel îl împarte în două triunghiuri isoscele. Găsiți unghiurile trapezului.

## 29. Amplasarea reciprocă a două drepte în spațiu

Din cursul de planimetrie știți că două drepte se consideră că se intersectează, dacă ele au un singur punct comun. O asemenea definiție se dă dreptelor ce se intersectează și în stereometrie.

Știți de asemenea, că două drepte sunt numite paralele, dacă ele nu se intersectează. Se poate această definiție să fie transferată și în stereometrie?

Să ne adresăm la figura 29.1 pe care este prezentat cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Nici una din dreptele  $AB$  și  $AA_1$  nu au cu dreapta  $DC$  puncte comune. În acest caz dreptele  $AB$  și  $DC$  sunt situate în același plan – în planul  $ABC$ , iar dreptele  $AA_1$  și  $DC$  nu sunt situate în același plan, adică nu există plan care trece prin aceste drepte.

Exemplul dat arată că în stereometrie pentru două drepte care nu au un punct comun, există două cazuri de amplasare reciprocă: dreptele se află în același plan și dreptele nu se află în același plan. Pentru fiecare din aceste cazuri vom introduce definiția corespunzătoare.

**Definiție.** Două drepte în spațiu se numesc **paralele** dacă ele se află într-un plan și nu se intersectează.

Dacă dreptele  $a$  și  $b$  sunt paralele, atunci se scrie:  $a \parallel b$ .

**Definiție.** Două drepte în spațiu se numesc **neconcurrente** dacă ele nu se află într-un singur plan.

De exemplu, în figura 29.1 dreptele  $AB$  și  $DC$  – paralele, iar dreptele  $AA_1$  și  $DC$  – neconcurrente.

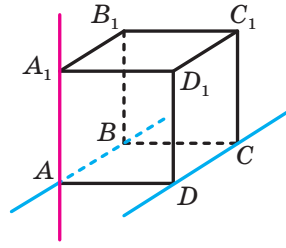
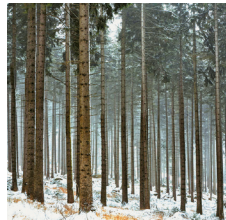


Fig. 29.1



Centrul mondial  
de cultură și arte,  
or. Kiev



Lemnul de pădure  
pentru construirea  
corăbiilor



Casă din bușteni

Fig. 29.2

O imagine intuitivă a dreptelor paralele o dau coloanele clădirii, lemnul de pădure pentru construirea corăbiilor, o casă din bușteni (figura 29.2).



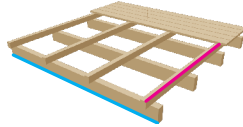


Fig. 29.3

O închipuire despre dreptele neconcurente oferă firele liniilor de transmisie electrică, diferite elemente ale construcțiilor (figura 29.3).

Deci, există trei cazuri posibile de amplasare reciprocă a două drepte în spațiu (figura 29.4):

- 1) drepte ce se intersectează;
- 2) drepte paralele;
- 3) drepte neconcurente.

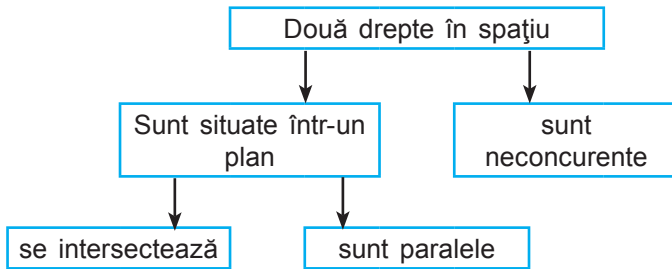


Fig. 29.4

Două segmente se numesc **paralele (neconcurente)**, dacă ele sunt situate pe drepte paralele (neconcurente).

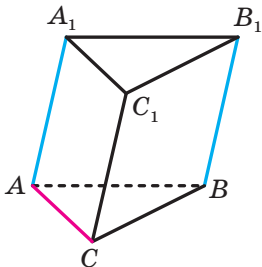


Fig. 29.5

De exemplu, muchiile  $AA_1$  și  $BB_1$  ale prismei triunghiulare  $ABCA_1B_1C_1$  (fig. 29.5) sunt paralele, iar muchiile  $AC$  și  $BB_1$  – neconcurente.

**Teorema 29.1.** Prin două drepte paralele trece un plan și numai unul singur.

*Demonstrație.* Fie date dreptele paralele  $a$  și  $b$ . Demonstrați, că există așa un plan unic  $\alpha$ , încât  $a \subset \alpha$  și  $b \subset \alpha$ .

Existența unui plan  $\alpha$ , care trece prin dreptele  $a$  și  $b$ , rezultă din definiția dreptelor paralele.

Dacă admitem, că există un alt plan, care trece prin dreptele  $a$  și  $b$ , atunci prin dreapta  $a$  și un punct al dreptei  $b$  vor trece două plane diferite, cea ce contrazice teoremei 27.1. ◀

În punctul 27 erau indicate trei moduri de definire a planului. Teorema 29.1 poate fi considerată ca încă un mod de a determina planul – cu ajutorul a două drepte paralele.

A stabili paralelismul a două drepte, care se află într-un plan, se poate cu ajutorul a bine cunoscutelor criterii de paralelism a două drepte din cursul de planimetrie. Dar cum de stabilit dacă două drepte sunt neconcurente? Răspunsul la această întrebare dă următoarea teoremă.

**Teorema 29.2 (criteriul dreptelor neconcurente).** *Dacă una din două drepte se află într-un plan, iar cea de-a două intersectează acest plan într-un punct, care nu aparține primei drepte, atunci dreptele date sunt neconcurente (fig. 29.6).*

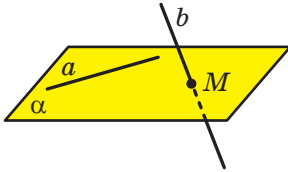


Fig. 29.6

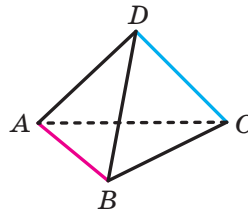
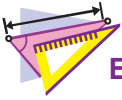


Fig. 29.7

În figura 29.7 muchiile  $AB$  și  $DC$  ale tetraedrului  $DABC$  sunt neconcurente. Într-adevăr, dreapta  $DC$  intersectează planul  $ABC$  în punctul  $C$ , care nu aparține dreptei  $AB$ . Deci, conform criteriului dreptelor neconcurente, dreptele  $AB$  și  $DC$  sunt neconcurente.



1. Care două drepte în spațiu se numesc paralele? neconcurente?
2. Care sunt cazurile de amplasare reciprocă a două drepte în spațiu?
3. Care două segmente sunt numite paralele? neconcurente?
4. Formulați teorema despre planul, care este dat de două drepte paralele.
5. Formulați criteriul dreptelor neconcurente.



## EXERCIȚII

- 29.1.° Se dă cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 29.8). Numiți muchiile lui:  
1) paralele cu muchia  $CD$ ; 2) neconcurente cu muchia  $CD$ .

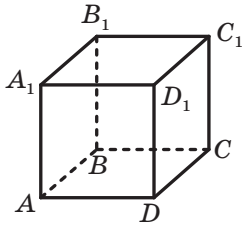


Fig. 29.8

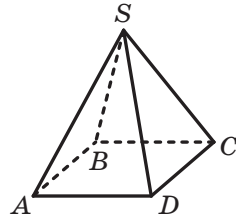


Fig. 29.9

- 29.2.° Indicați modele de drepte neconcurente, folosind obiecte din clasă.

- 29.3.° Se dă piramida  $SABCD$  (fig. 29.9). Numiți muchiile piramidei care sunt neconcurente cu muchia  $SA$ .

- 29.4.° Este dat paralelipipedul dreptunghiular  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 29.10). Indicați amplasarea reciprocă a dreptelor:

- 1)  $BC$  și  $A_1 C_1$ ;      3)  $BD$  și  $CC_1$ ;      5)  $DC_1$  și  $BB_1$ ;  
2)  $AB$  și  $C_1 D_1$ ;      4)  $AB_1$  și  $DC_1$ ;      6)  $AA_1$  și  $CC_1$ .

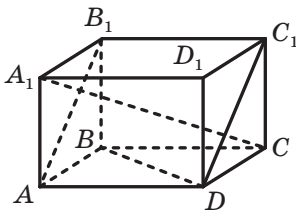


Fig. 29.10

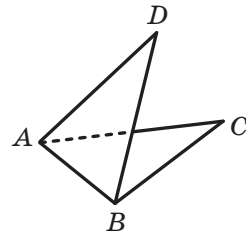


Fig. 29.11

- 29.5.° Este oare corectă afirmația:

- 1) două drepte, care nu sunt paralele, au un punct comun;
- 2) două drepte, care nu sunt neconcurente sunt situate într-un plan;
- 3) două drepte sunt neconcurente, dacă ele nu se intersectează și nu sunt paralele?

- 29.6.° Se dă cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 29.8). Demonstrați, că dreptele  $AA_1$  și  $BC$  sunt neconcurente.

- 29.7.°** Triunghiurile  $ABC$  și  $ADB$  sunt situate în plane diferite (fig. 29.11). Care este amplasarea reciprocă a dreptelor  $AD$  și  $BC$ ? Argumentați răspunsul.
- 29.8.\*** Cum poate fi amplasarea reciprocă a dreptelor  $b$  și  $c$ , dacă:
- 1) dreptele  $a$  și  $b$  se intersectează, iar dreptele  $a$  și  $c$  sunt paralele;
  - 2) dreptele  $a$  și  $b$  sunt paralele, iar dreptele  $a$  și  $c$  sunt neconcurente?
- 29.9.\*** Câte plane pot fi date cu trei perechi de drepte paralele două câte două? Faceți un desen.
- 29.10.\*** Capătul  $A$  al segmentului  $AB$  aparține planului  $\alpha$ . Prin punctul  $B$  și punctul  $C$  care aparțin segmentului  $AB$ , sunt duse drepte paralele, care intersectează planul  $\alpha$  corespunzător în punctele  $B_1$  și  $C_1$ .
- 1) Găsiți segmentul  $BB_1$ , dacă punctul  $C$  este mijlocul segmentului  $AB$  și  $CC_1 = 5$  cm.
  - 2) Găsiți segmentul  $CC_1$ , dacă  $AC : BC = 3 : 4$  și  $BB_1 = 28$  cm.
- 29.11.\*** Capătul  $C$  al segmentului  $CD$  aparține planului  $\beta$ . Pe segmentul  $CD$  este notat punctul  $E$  astfel, că  $CE = 6$  cm,  $DE = 9$  cm. Prin punctele  $D$  și  $E$  sunt duse drepte paralele, care intersectează planul  $\beta$  în punctele  $D_1$  și  $E_1$  corespunzător. Găsiți segmentul  $DD_1$ , dacă  $EE_1 = 12$  cm.
- 29.12.\*\*** Pe segmentul  $AB$ , care nu intersectează planul  $\alpha$ , este notat punctul  $C$  astfel, că  $AC = 4$  cm,  $BC = 8$  cm. Prin punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt duse drepte paralele, care intersectează planul  $\alpha$  în punctele  $A_1$ ,  $B_1$  și  $C_1$  corespunzător. Găsiți segmentul  $A_1C_1$ , dacă  $B_1C_1 = 10$  cm.
- 29.13.\*\*** Punctul  $C$  – mijlocul segmentului  $AB$ , care nu intersectează planul  $\beta$ . Prin punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt duse dreptele paralele, care intersectează planul  $\beta$  corespunzător în punctele  $A_1$ ,  $B_1$  și  $C_1$ . Găsiți segmentul  $AA_1$ , dacă  $BB_1 = 18$  cm,  $CC_1 = 15$  cm.
- 29.14.\*** Prin capetele segmentului  $AB$ , care intersectează planul  $\alpha$ , și mijlocul segmentului  $C$  sunt duse drepte paralele, care intersectează planul  $\alpha$  în punctele  $A_1$ ,  $B_1$  și  $C_1$  corespunzător (fig. 29.12). Găsiți segmentul  $CC_1$ , dacă  $AA_1 = 16$  cm,  $BB_1 = 8$  cm.
- 29.15.\*** Triunghiul  $ABC$  nu are puncte comune cu planul  $\alpha$ . Segmentul  $BM$  – mediana triunghiului  $ABC$ , punctul  $O$  – mijlocul segmentului  $BM$ . Prin punctele  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $M$  și  $O$  sunt duse dreptele paralele, care intersectează planul  $\alpha$  respectiv în punctele  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $M_1$  și  $O_1$ . Găsiți segmentul  $BB_1$ , dacă  $AA_1 = 17$  cm,  $CC_1 = 13$  cm,  $OO_1 = 12$  cm.

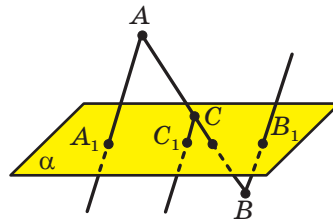


Fig. 29.12



## EXERCIIII PENTRU REPETARE

**29.16.** Punctul  $E$  – mijlocul medianei  $BM$  al triunghiului  $ABC$ . Dreapta  $AE$  intersectează latura  $BC$  în punctul  $K$ . Aflați raportul în care punctul  $K$  împarte segmentul  $BC$ , socotind de la vârful  $B$ .

## 30. Paralelismul drepte și a planului

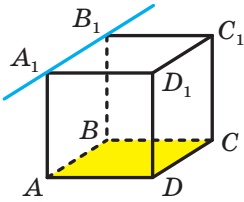


Fig. 30.1

Știți deja două cazuri posibile de amplasare reciprocă a drepte și a planului:

- 1) dreapta aparține planului, adică toate punctele drepte aparțin planului;
- 2) dreapta intersectează planul, adică dreapta are un singur punct comun cu planul.

Este clar că este posibil și al treilea caz, atunci când dreapta și planul nu au puncte comune. De exemplu dreapta care conține muchia

$A_1B_1$  a cubului  $ABCD A_1B_1C_1D_1$ , nu are puncte comune cu planul  $ABC$  (fig. 30.1).

**Definiție.** Dreapta și planul se numesc **paralele** dacă ele nu au puncte comune.

Dacă dreapta  $a$  și planul  $\alpha$  sunt paralele, atunci se scrie:  $a \parallel \alpha$ . De asemenea se spune că dreapta  $a$  este paralelă cu planul  $\alpha$ , iar planul  $\alpha$  paralel cu dreapta  $a$ .

O imagine intuitivă a unei drepte paralele cu un plan, dau unele echipamente sportive, de exemplu, paralele sunt paralele la planul podelii (fig. 30.2). Un alt exemplu este burlanul: el este paralel cu planul peretelui (fig. 30.3).



Fig. 30.2

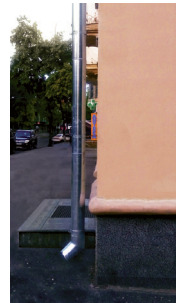


Fig. 30.3

Este dificil să se determine dacă dreapta și planul sunt paralele, cu ajutorul definiției. Este mult mai efectiv să ne folosim de o astfel de teoremă.

**Teorema 30.1 (criteriul de paralelism al dreptei și a planului).** *Dacă dreapta, care nu aparține planului dat este paralelă cu orice dreaptă care aparține planului dat, atunci dreapta dată este paralelă cu însuși planul.*

De exemplu, în figura 30.1 dreptele  $A_1B_1$  și  $AB$  conțin laturile opuse ale pătratului  $ABB_1A_1$ . Aceste drepte sunt paralele. Deoarece  $AB \subset ABC$ , atunci în virtutea criteriului de paralelism al dreptei și a planului  $A_1B_1 \parallel ABC$ .

Segmentul se numește **paralel la plan**, dacă el aparține dreptei, paralele cu acest plan. De exemplu, muchia  $AB$  a cubului este paralelă cu planului  $CDD_1$  (fig. 30.1).

Voi puteți stabili paralelismul a două drepte cu ajutorul teoremelelor-criterii cunoscute din planimetrie. Să examinăm teoremele care descriu condițiile suficiente pentru paralelismul a două drepte în spațiu.

**Teorema 30.2.** *Dacă planul trece prin dreapta dată, paralelă cu alt plan și intersectează acest plan, atunci dreapta de intersecție a planelor este paralelă cu această dreaptă.*

În figura 30.4, dreapta  $a$  este paralelă cu planul  $\alpha$ . Planul  $\beta$  trece prin dreapta  $a$  și intersectează planul  $\alpha$  printr-o dreaptă  $b$ . Atunci  $b \parallel a$ .

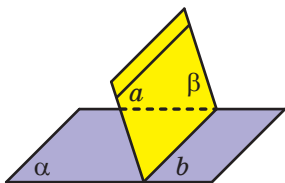


Fig. 30.4

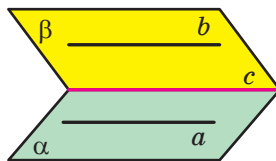


Fig. 30.5

**Teorema 30.3.** *Dacă prin fiecare din cele două drepte paralele este dus câte un plan, totodată aceste plane se intersectează după o dreaptă diferită de cele două, atunci dreapta de intersecție a planelor este paralelă cu fiecare din cele două drepte date.*

În figura 30.5 dreptele  $a$  și  $b$  sunt paralele, planul  $\alpha$  trece prin dreapta  $a$ , iar planul  $\beta$  – prin dreapta  $b$ ,  $\alpha \cap \beta = c$ . Atunci  $c \parallel a$  și  $c \parallel b$ .

**Teorema 30.4.** *Două drepte paralele cu a treia dreaptă sunt paralele între ele.*

**Problemă.** Demonstrați, că dacă dreapta este paralelă cu fiecare din două plane care se intersectează, atunci ea este paralelă cu dreapta de intersecție a lor.

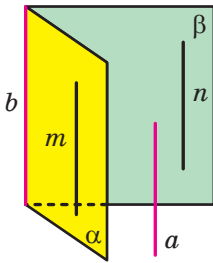


Fig. 30.6

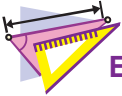
*Rezolvare.* Fie că se dă dreapta  $a$  și planele  $\alpha$  și  $\beta$  astfel, că  $a \parallel \alpha$ ,  $a \parallel \beta$ ,  $\alpha \cap \beta = b$  (fig. 30.6). Să demonstrăm, că  $a \parallel b$ .

În planele  $\alpha$  și  $\beta$  se vor găsi corespunzător astfel de drepte  $m$  și  $n$ , că  $m \parallel a$  și  $n \parallel a$ . Dacă cel puțin una din dreptele  $m$  și  $n$  coincide cu dreapta  $b$ , atunci afirmația problemei este demonstrată. Dacă fiecare din dreptele  $m$  și  $n$  diferă de dreapta  $b$ , atunci conform teoremei 30.4 obținem, că  $m \parallel n$ .

Folosind teorema 30.3, ajungem la concluzia, că  $b \parallel n$ . Dar  $n \parallel a$ , deci  $a \parallel b$ . ◀



1. În ce caz dreapta și planul sunt numite paralele?
2. Formulăți criteriul de paralelism al dreptei și a planului.
3. Care segment se numește paralel cu planul?
4. Formulăți teorema care descrie condiția suficientă a paralelismului a două drepte în spațiu.



## EXERCIȚII

- 30.1.° Indicați între obiectele care vă încojoară, modele de plan și dreaptă care îi este paralelă.
- 30.2.° Se dă cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 30.7). Cu planurile căror fețe ale cubului sunt paralele muchiile: 1)  $AD$ ; 2)  $C_1 D_1$ ; 3)  $BB_1$ ?
- 30.3.° Se dă paralelipipedul dreptunghiular  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 30.8), punctele  $E$  și  $F$  – mijlocurile muchiilor  $CC_1$  și  $DD_1$  corespunzător. Scrieți fețele paralelipipedului cărora le este paralelă dreapta: 1)  $AB$ ; 2)  $CC_1$ ; 3)  $AC$ ; 4)  $EF$ .

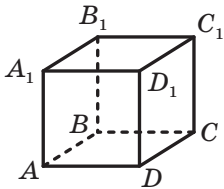


Fig. 30.7

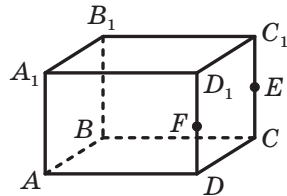


Fig. 30.8

- 30.4.°** Дряпга  $a$  ете паралелл ку плану  $\alpha$ . Ете коректл афірмаціл, кл дряпга  $a$  ете паралелл оркцрей дряпей кере апартїне планулі  $\alpha$ ?
- 30.5.°** Се дау дряпей  $a$  і  $b$  і плану  $\alpha$ . Ете оаре коректл афірмаціл:  
 1) дачл  $a \parallel \alpha$  і  $b \parallel \alpha$ , атунці  $a \parallel b$ ;  
 2) дачл  $a \parallel b$  і  $b \subset \alpha$ , атунці  $a \parallel \alpha$ ?
- 30.6.°** Дряпга  $a$  і плану  $\alpha$  сунт паралеле ку дряпга  $b$ . Кере поате фі ампласарея рецїпрокл а дряпей  $a$  і планулі  $\alpha$ ?
- 30.7.°** Дряпей  $a$  і  $b$  се інтерсектезл, іар плану  $\alpha$  ете паралел ку дряпга  $a$ . Кере поате фі ампласарея рецїпрокл а дряпей  $b$  і а планулі  $\alpha$ ?
- 30.8.°** Пункете  $M$  і  $K$  – мїлокурїле коеспунзлтоаре але латурїле  $AB$  і  $BC$  але трїунгїулі  $ABC$ . Пункел  $D$  ну апартїне планулі  $ABC$ . Демонстраї, кл  $MK \parallel AD$ .
- 30.9.°** Пункете  $E$  і  $F$  – мїлокурїле коеспунзлтоаре але латурїле латерале  $AB$  і  $CD$  але трапезулі  $ABCD$ . Дряпга  $EF$  ете сїтуатл пе плану  $\alpha$ , дїферїт де плану трапезулі. Демонстраї, кл дряпей  $AD$  і  $BC$  сунт паралеле ку плану  $\alpha$ .
- 30.10.°** Сегменте  $BC$  і  $AD$  – базеле трапезулі  $ABCD$ . Трїунгїулі  $BMC$  і трапезулі  $ABCD$  ну сунт сїтуате пе ун план (фіг. 30.9). Пункел  $E$  – мїлокул сегментулі  $BM$ , пункел  $F$  – мїлокул сегментулі  $CM$ . Демонстраї, кл  $EF \parallel AD$ .

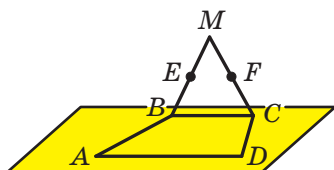


Fig. 30.9

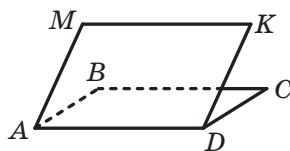


Fig. 30.10

- 30.11.°** Паралелогерамеле  $ABCD$  і  $AMKD$  ну сунт сїтуате пе ун план (фіг. 30.10). Демонстраї, кл патрїлатерел  $BMKC$  ете паралелограм.

- 30.12.°** Плану  $\alpha$  ете паралел ку латурл  $AC$  а трїунгїулі  $ABC$ , інтерсектезл латурїле  $AB$  і  $BC$  їн пункете  $A_1$  і  $C_1$  коеспунзлтор (фіг. 30.11). Афілатї сегментулі  $A_1C_1$ , дачл  $AC = 18$  см і  $AA_1 : A_1B = 7 : 5$ .

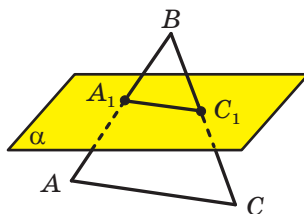


Fig. 30.11



- 30.13.\*** Planul  $\alpha$  care este paralel cu latura  $AB$  a triunghiului  $ABC$ , intersectează laturile  $AC$  și  $BC$  în punctele  $E$  și  $F$  corespunzător. Găsiți raportul  $AE : EC$ , dacă  $CF : CB = 3 : 11$ .
- 30.14.\*\*** Vârful  $A$  și  $C$  ale triunghiului  $ABC$  aparțin planului  $\alpha$ , iar vârful  $B$  nu aparține acestui plan. Pe laturile  $AB$  și  $BC$  sunt notate corespunzător punctele  $E$  și  $F$  astfel, că  $BA : BE = BC : BF$ . Demonstrați, că dreapta  $EF$  este paralelă cu planul  $\alpha$ .
- 30.15.\*\*** Punctul  $M$  – mijlocul laturii  $AB$  a triunghiului  $ABC$ . Planul  $\alpha$  trece prin punctul  $M$  paralel la dreapta  $AC$  și intersectează latura  $BC$  în punctul  $K$ . Demonstrați, că punctul  $K$  – mijlocul laturii  $BC$ . Aflați aria patrulaterului  $AMKC$ , dacă aria triunghiului  $ABC$  este egală cu  $28 \text{ cm}^2$ .
- 30.16.\*\*** Pe muchia  $CC_1$  a paralelipipedului dreptunghiular  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  este notat punctul  $M$  (fig. 30.12). Construiți linia de intersecție a planelor: 1)  $ADM$  și  $BB_1 C_1$ ; 2)  $AA_1 M$  și  $DCC_1$ .

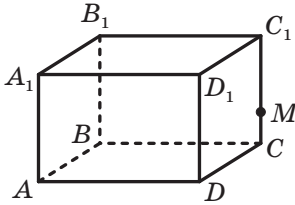


Fig. 30.12

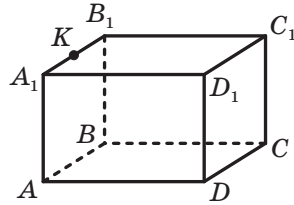


Fig. 30.13

- 30.17.\*\*** Pe muchia  $A_1 B_1$  a paralelipipedului dreptunghiular  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  este notat punctul  $K$  (fig. 30.13). Construiți linia de intersecție a planelor: 1)  $CC_1 K$  și  $ABB_1$ ; 2)  $CDK$  și  $ABB_1$ .



### EXERCII PENTRU REPETARE

- 30.18.** Laturile laterale ale trapezului dreptunghiular se raportează ca  $3 : 5$ , iar diferența bazelor este egală cu  $16 \text{ cm}$ . Aflați aria trapezului, dacă diagonala cea mai mică este egală cu  $13 \text{ cm}$ .

## 31. Paralelismul planelor

Analizăm variantele posibile pentru amplasarea reciprocă a două plane.

Voi știți, că două plane pot avea puncte comune, adică să se intersecteze. Este clar că două plane ar putea să nu aibă puncte co-

mune. De exemplu, planele  $ABC$  și  $A_1B_1C_1$ , care conțin bazele prizmei, nu au puncte comune (fig. 31.1).

**Definiție.** Două plane se numesc **paralele**, dacă ele nu au puncte comune.

Dacă planele  $\alpha$  și  $\beta$  sunt paralele, atunci se scrie:  $\alpha \parallel \beta$ . De asemenea, este primit să spunem că planul  $\alpha$  este paralel cu planul  $\beta$  sau planul  $\beta$  este paralel cu planul  $\alpha$ .

O imagine intuitivă a planelor paralele este dată de podul și podeaua camerei; suprafața apei turnată în acvariu și fundul lui (figura 31.2).

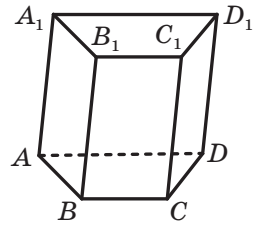


Fig. 31.1



Fig. 31.2

Din definiția planelor paralele rezultă, că *orice dreaptă care se află în unul din cele două plane paralele este paralelă și cu cel de-al doilea plan.*

În cazurile, când este necesar să se determine dacă două plane sunt paralele, este convenabil să folosim o astfel de teoremă.

**Teorema 31.1 (criteriul de paralelism a două plane).** Dacă două drepte care se intersectează ale unui plan sunt paralele corespunzător cu două drepte din alt plan, atunci aceste plane sunt paralele.

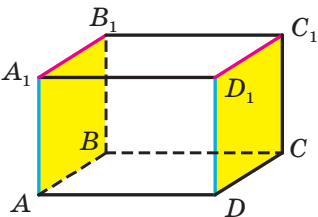


Fig. 31.3

De exemplu, în figura 31.3 este reprezentat paralelipipedul dreptunghiular  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Avem:  $AA_1 \parallel DD_1$  și  $A_1 B_1 \parallel D_1 C_1$ . Atunci după criteriul de paralelism a două plane  $AA_1 B_1 \parallel DD_1 C_1$ .

Vom spune, că **două poligoane sunt paralele**, dacă ele sunt situate în două plane paralele. De exemplu, fețele  $AA_1B_1B$  și  $DD_1C_1C$  ale paralelipipedului dreptunghiular  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  sunt paralele (fig. 31.3).

Să analizăm câteva proprietăți ale planelor paralele.

**Teorema 31.2.** *Printr-un punct în spațiu, care nu aparține planului dat, trece un plan paralel cu planul dat, și numai unul singur* (fig. 31.4).

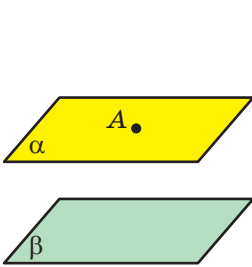


Fig. 31.4

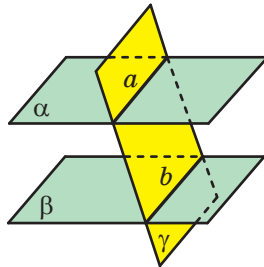


Fig. 31.5

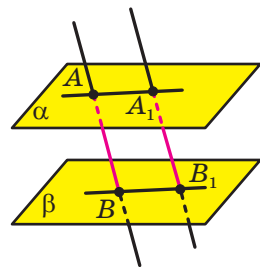


Fig. 31.6

**Teorema 31.3.** *Dreptele de intersecție a două plane paralele cu al treilea plan sunt paralele* (fig. 31.5).

**Problemă.** Demonstrați, că segmentele dreptelor paralele, care se conțin între planele paralele, sunt egale.

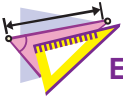
*Rezolvare.* Fie că se dau planele paralele  $\alpha$  și  $\beta$  și dreptele paralele  $AB$  și  $A_1B_1$  astfel, că  $A \in \alpha$ ,  $A_1 \in \alpha$ ,  $B \in \beta$ ,  $B_1 \in \beta$  (fig. 31.6). Să demonstrăm, că  $AB = A_1B_1$ .

Dreptele paralele  $AB$  și  $A_1B_1$  specifică un plan  $\gamma$ , totodată  $\alpha \cap \gamma = AA_1$  și  $\beta \cap \gamma = BB_1$ .

După teorema 31.3 obținem, că  $AA_1 \parallel BB_1$ . Deci, patrulaterul  $AA_1B_1B$  – paralelogram. De aici  $AB = A_1B_1$ . ◀



1. Care plane se umesc paralele?
2. Formulați criteriul de paralelism al planelor.
3. În ce caz se spune, că două poligoane sunt paralele?
4. Formulați proprietățile planelor paralele.



## EXERCITII

**31.1.°** Este oare corectă afirmația:

- 1) dacă două plane sunt paralele, atunci orice dreaptă a unui plan este paralelă oricărei drepte a celui de-al doilea plan.
- 2) dacă dreapta care se află într-un plan este paralelă cu dreapta din cel de-al doilea plan, atunci planele date sunt paralele?

**31.2.°** Paralelogramele  $ABCD$  și  $AEFD$  nu sunt situate într-un plan (fig. 31.7). Demonstrați, că planele  $ABE$  și  $DCF$  sunt paralele.

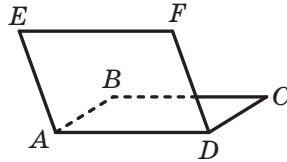


Fig. 31.7

**31.3.°** Se poate oare de afirmat, că planul  $\alpha$  este paralel cu planul trapezului, dacă planul  $\alpha$  este paralel:

- 1) cu bazele trapezului;
- 2) cu laturile laterale ale trapezului?

**31.4.°** Este oare corectă afirmația: dacă dreptele de intersecție a două plane cu al treilea plan sunt paralele, atunci planele date sunt paralele?

**31.5.°** Planele  $\alpha$  și  $\beta$  sunt paralele. În planul  $\alpha$  sunt luate punctele  $C$  și  $D$ , iar în planul  $\beta$  – punctele  $C_1$  și  $D_1$  astfel, că dreptele  $CC_1$  și  $DD_1$  sunt paralele. Aflați segmentele  $DD_1$  și  $C_1D_1$ , dacă  $CD = 12$  cm,  $CC_1 = 4$  cm.

**31.6.°** Triunghiul  $ABC$  se află în planul  $\alpha$ . Prin vârfurile lui sunt duse drepte paralele, care intersectează planul  $\beta$ , paralel cu planul  $\alpha$ , în punctele  $A_1$ ,  $B_1$  și  $C_1$ . Aflați perimetrul triunghiului  $A_1B_1C_1$ , dacă perimetrul triunghiului  $ABC$  este egal cu 20 cm.

**31.7.°** Punctele  $M$ ,  $N$  și  $K$  – mijlocurile muchiilor  $AB$ ,  $AC$  și  $AD$  ale tetraedrului  $DABC$ . Demonstrați, că planele  $MNK$  și  $BCD$  sunt paralele.

**31.8.°** Pe muchiile  $DA$ ,  $DB$  și  $DC$  ale tetraedrului  $DABC$  sunt notate corespunzător punctele  $E$ ,  $F$  și  $K$  astfel, că  $\frac{DE}{DA} = \frac{DF}{DB} = \frac{DK}{DC}$ . Demonstrați, că planele  $EFK$  și  $ABC$  sunt paralele.

- 31.9.\*** Se dau planele paralele  $\alpha$  și  $\beta$ . Segmentul  $AB$  și punctul  $C$  sunt situate în planul  $\alpha$ , punctul  $D$  – în planul  $\beta$  (fig. 31.8). Construiți linia de intersecție: 1) a planului  $\beta$  cu planul  $ABD$ ; 2) a planului  $\beta$  cu planul  $BCD$ .

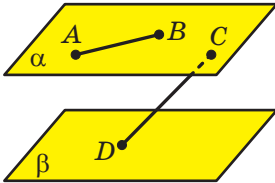


Fig. 31.8

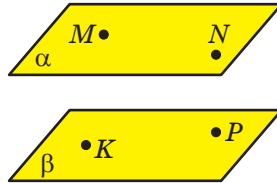


Fig. 31.9

- 31.10.\*** Se dau planele paralele  $\alpha$  și  $\beta$ . Punctele  $M$  și  $N$  sunt situate în planul  $\alpha$ , punctele  $K$  și  $P$  – în planul  $\beta$  (fig. 31.9). Construiți linia de intersecție:

- 1) a planului  $\alpha$  cu planul  $MKP$ ;
- 2) a planului  $\beta$  cu planul  $MNK$ .

- 31.11.\*\*** Planele paralele  $\alpha$  și  $\beta$  intersectează latura  $BA$  a unghiului  $ABC$  în punctele  $A_1$  și  $A_2$  corespunzător, iar latura  $BC$  – în punctele  $C_1$  și  $C_2$  corespunzător. Aflați

- 1) segmentul  $A_1C_1$ , dacă  $A_2C_2 = 36$  cm,  $BA_1 : BA_2 = 5 : 9$ ;
- 2) segmentul  $C_1C_2$ , dacă  $A_1C_1 = 14$  cm,  $A_2C_2 = 21$  cm,  $BC_1 = 12$  cm.

- 31.12.\*\*** Planele  $\alpha$  și  $\beta$  sunt paralele. Punctele  $A$  și  $B$  sunt situate în planul  $\alpha$ , punctele  $C$  și  $D$  – în planul  $\beta$ . Segmentele  $AC$  și  $BD$  se intersectează în punctul  $O$ .

- 1) Demonstrați, că  $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$ .

- 2) Aflați segmentul  $AB$ , dacă  $CD = 32$  cm,  $AC : AO = 7 : 3$ .

- 31.13.\*\*** Punctul  $M$  aparține muchiei  $A_1D_1$  a cubului  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Construiți linia de intersecție a planelor  $BDD_1$  și  $CC_1M$ .

- 31.14.\*\*** Punctul  $E$  aparține muchiei  $B_1C_1$  a cubului  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Construiți linia de intersecție a planelor  $ACC_1$  și  $BED$ .



### EXERCIIILE PENTRU REPETARE

- 31.15.** Diagonalele pătratului  $ABCD$  se intersectează în punctul  $O$ . Pe segmentul  $OC$  este notat punctul  $M$  astfel, că  $CM : MO = 1 : 2$ . Aflați  $\text{tg} \angle BMO$ .

## 32. Proiectarea paralelă

Numeroase fenomene și procese, pe care le întâlnim în viața zi de zi, servesc ca exemple de transformări, în care imaginea unei figuri din spațiu este o figură plată. Unul dintre aceste fenomene poate fi văzut în vremea însorită când obiectul aruncă umbra pe o suprafață plată (figura 32.1). Acest exemplu reprezintă **transformarea unei figuri**, numită **proiectare paralelă**. Cu ajutorul acestei transformări pe plan se creează imaginile figurilor spațiale.



Fig. 32.1

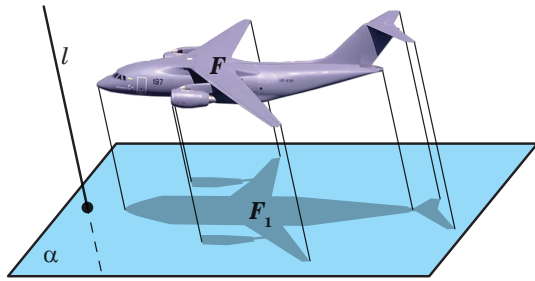


Fig. 32.2

Multe desene din manualul vostru, în care sunt reprezentate figuri spațiale, pot fi considerate ca umbre pe care le aruncă pe planul paginii obiectele iluminate cu raze paralele.

Să aflăm mai multe despre proiectarea paralelă.

Fie că se dă planul  $\alpha$ , dreapta  $l$ , care intersectează acest plan și figura  $F$  (fig. 32.2). Prin fiecare punct al figurii  $F$  ducem o dreaptă paralelă cu dreapta  $l$  (dacă punctul figurii  $F$  aparține dreptei  $l$ , atunci o considerăm pe însăși dreapta  $l$ ). Punctele de intersecție ale tuturor dreptelor duse cu planul  $\alpha$  formează o oarecare figură  $F_1$ . Transformarea descrisă a figurii  $F$  se numește proiectare paralelă. Figura  $F_1$  se numește **proiecția paralelă a figurai  $F$  pe planul  $\alpha$  în direcția dreptei  $l$** . Figura  $F_1$  se numește de asemenea și **imaginea figurii  $F$  pe planul  $\alpha$  în direcția dreptei  $l$** .

Alegând poziții favorabile ale planului  $\alpha$  și a dreptei  $l$ , se poate obține o imagine intuitivă a acestei figuri  $F$ . Acest lucru este legat cu faptul că proiectarea paralelă are o serie de proprietăți minunate (vezi teoremele 32.1-32.3). Datorită acestor proprietăți imaginea figurii se aseamănă cu însăși figura.

Fie că se dă planul  $\alpha$  și dreapta  $l$ , care intersectează acest plan.

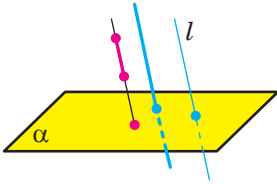


Fig. 32.3

Dacă dreapta este paralelă cu dreapta  $l$ , atunci proiecția ei pe planul  $\alpha$  este un punct (fig. 32.3). Proiecția dreptei  $l$  de asemenea este un punct.

Dacă segmentul este paralel cu dreapta  $l$  sau se află pe dreapta  $l$ , atunci proiecția lui pe planul  $\alpha$  este un punct (fig. 32.3).

În teoremele aduse mai jos vom cerceta drepte și segmente, care nu sunt paralele cu dreapta  $l$  și nu se află pe ea.

**Teorema 32.1.** *Proiecția paralelă a dreptei este o dreaptă; proiecția paralelă a segmentului este segment* (fig. 32.4).

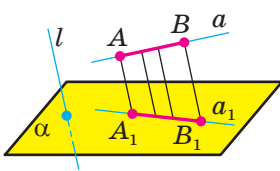


Fig. 32.4

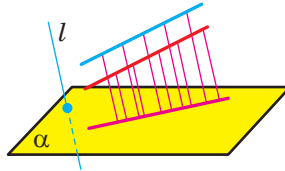


Fig. 32.5

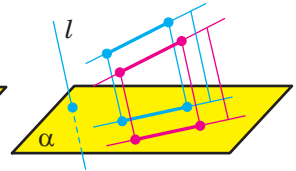


Fig. 32.6

**Teorema 32.2.** *Proiecția paralelă a două drepte paralele este sau o dreaptă (fig. 32.5), sau două drepte paralele (fig. 32.6). Proiecția paralelă a două segmente paralele se află pe o dreaptă s-au pe drepte paralele (fig. 32.6).*

**Teorema 32.3.** *Raportul proiecțiilor paralele ale segmentelor care se află pe o dreaptă sau pe drepte paralele, este egal cu raportul a înseși segmentelor date (fig. 32.7).*

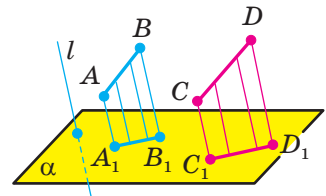
Să cercetăm imaginile unor poligoane pe planul  $\alpha$  în direcția dreptei  $l$ .

Dacă dreapta  $l$  este paralelă cu planul poligonului sau aparține planului dat, atunci imaginea poligonului este un segment.

Acum, să analizăm cazul când dreapta  $l$  intersectează planul poligonului.

Din proprietățile proiectării paralele, rezultă că proiecția paralelă a triunghiului este triunghi (figura 32.8).

Deoarece la proiectarea paralelă se păstrează paralelismul segmentelor, rezultă că imaginea paralelogramului (în particular a dreptunghiului, rombului, pătratului) este paralelogram (fig. 32.9).



$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}$$

Fig. 32.7

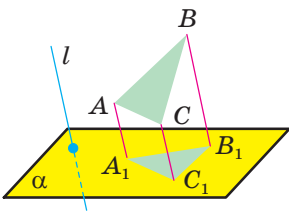


Fig. 32.8

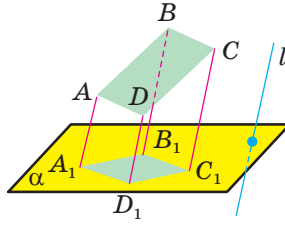


Fig. 32.9

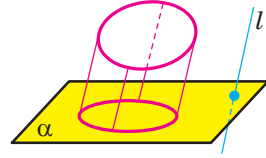


Fig. 32.10

De asemenea din proprietățile proiectării paralele rezultă, că imaginea trapezului este trapez.

Proiecția paralelă a unei circumferințe este o figură, numită **elipsă** (fig. 32.10).

Reprezentarea obiectelor cu ajutorul proiectării paralele pe larg se folosește în diferite ramuri ale industriei, de exemplu, în construcția de automobile (fig. 32.11).

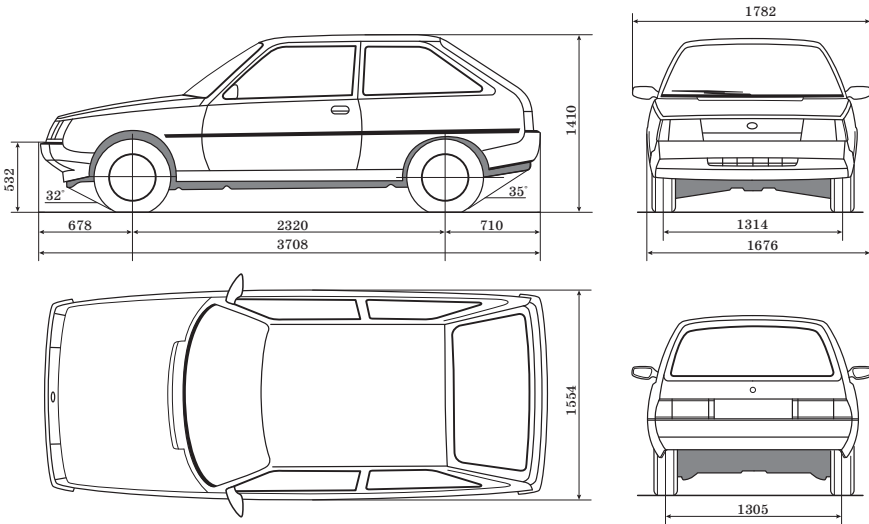
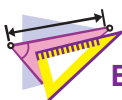


Fig. 32.11



1. Descrieți transformarea figurii, care se numește proiectare paralelă.
2. Formulăți proprietățile proiectării paralele.





## EXERCIȚII

- 32.1.°** Figura este compusă din trei puncte. Din ce număr de puncte poate fi formată proiecția paralelă a acestei figuri?
- 32.2.°** Poate fi oare proiecția paralelă a două drepte, care se intersectează:
- 1) două drepte care se intersectează;
  - 2) două drepte paralele;
  - 3) o dreaptă;
  - 4) o dreaptă și un punct în afara ei?
- 32.3.°** Care figură geometrică nu poate fi proiecție paralelă a două drepte neconcurente:
- 1) două drepte paralele;
  - 2) două drepte, care se intersectează;
  - 3) o dreaptă;
  - 4) o dreaptă și un punct în afara ei?
- 32.4.°** 1) Pot oare segmentele egale să fie proiecția paralelă a segmentelor neegale?  
 2) Pot oare segmentele neegale să fie proiecții paralele a segmentelor egale?  
 3) Poate oare proiecția paralelă a segmentului să fie mai mare decât segmentul dat?  
 4) Poate oare proiecția paralelă a dreptei să fie paralelă cu dreapta dată?
- 32.5.°** Poate oare figura reprezentată în figura 32.12 să fie proiecția paralelă a triunghiului?
- 32.6.°** Poate oare proiecția paralelă a trapezului să fie patrulaterul  $A_1B_1C_1D_1$ , unghiurile căruiu  $A_1, B_1, C_1$  și  $D_1$  corespunzător sunt egale cu:
- 1)  $10^\circ, 40^\circ, 140^\circ, 170^\circ$ ;
  - 2)  $50^\circ, 130^\circ, 50^\circ, 130^\circ$ ?
- 32.7.°** Poate oare proiecția paralelă a paralelogramului să fie patrulaterul cu laturile 6 cm, 8 cm, 6 cm, 9 cm?

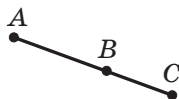


Fig. 32.12

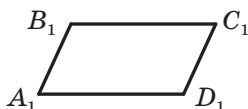


Fig. 32.13

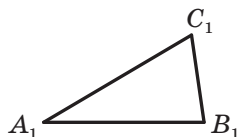


Fig. 32.14

- 32.8.\*** Punctele  $A_1, B_1$  și  $C_1$  sunt proiecții paralele ale punctelor  $A, B$  și  $C$ , care sunt situate pe o dreaptă (punctul  $B$  este situat între punctele  $A$  și  $C$ ). Găsiți segmentul  $B_1C_1$ , dacă  $AB = 8$  cm,  $BC = 6$  cm,  $A_1B_1 = 12$  cm.
- 32.9.\*** Punctele  $A_1, B_1$  și  $C_1$  sunt proiecțiile paralele ale punctelor  $A, B$  și  $C$ , care sunt situate pe o dreaptă (punctul  $B_1$  este situat între punctele  $A_1$  și  $C_1$ ). Găsiți segmentul  $A_1C_1$ , dacă  $AB = 10$  cm,  $AC = 16$  cm,  $B_1C_1 = 3$  cm.
- 32.10.\*\*** Paralelogramul  $A_1B_1C_1D_1$  este imaginea dreptunghiului  $ABCD$  (fig. 32.13). Construiți imaginea perpendicularei, duse din punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului pe latura  $BC$ .
- 32.11.\*\*** Triunghiul  $A_1B_1C_1$  este imaginea triunghiului dreptunghic  $ABC$  cu ipotenuza  $AB$  (fig. 32.14). Construiți imaginea perpendicularei duse din mijlocul ipotenuzei pe cateta  $AC$ .
- 32.12.\*\*** Triunghiul  $A_1B_1C_1$  – imaginea triunghiului  $ABC$ . Construiți imaginea bisectoarei a triunghiului  $ABC$ , dusă din vârful  $B$ , dacă  $AB : BC = 1 : 2$ .
- 32.13.\*\*** Triunghiul  $A_1B_1C_1$  – imaginea triunghiului isoscel  $ABC$  cu baza  $AC$ . Construiți imaginea centrului circumferinței înscrise în triunghiul  $ABC$ , dacă  $AB : AC = 5 : 4$ .



## EXERCIȚII PENTRU REPETARE

- 32.14.** În dreptunghiul  $ABCD$  este cunoscut, că  $AB = 6$  cm,  $AD = 2\sqrt{3}$  cm. Aflați unghiul făcut de dreptele  $AC$  și  $BD$ .

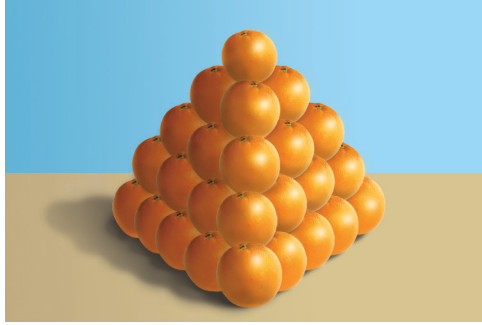


## UCRAINA ARE TALENTE!

Cum trebuie de clădit portocalele într-o cutie mare, pentru ca să încapă în ea cât mai multe? Această întrebare, care la prima vedere este simplă și neserioasă, are o istorie veche. În a. 1611, astronomul, matematicianul și filozoful german Iohannes Kepler, cunoscut prin descoperirea legilor mișcării planetelor ale sistemului Solar, a formulat problema despre împachetarea optimală a bilelor în spațiu. Kepler a înaintat ipoteza, conform căreia optimală va fi amplasarea bilelelor astfel, precum sunt expuse portocalele în magazine sau pește (fig. 32.15).

Pe parcursul a 400 de ani cei mai de vază matematicieni au încercat să argumenteze această presupunere. Ultimul cuvânt în aceas-

tă întrebare a fost spus abia în a. 2017. Demonstrarea ipotezei lui Kepler, care conținea o alegere computațională colosală de variante și care s-a controlat cu multă migală 19 ani, în sfârșit a fost recunoscută corectă.



**Fig. 32.15**

Un rol important în această istorie multiseclară l-au jucat tinerii savanți ucraineni în domeniul matematicii A. Bondarenko, M. Viazovsika și D. Radcenko, care au învățat la universitatea de stat din Kiev Taras Șevcenko. În anul 2016 au apărut articolele cu rezolvarea problemei lui Kepler pentru cazurile spațiului cu dimensionalitățile 8 și 24. Marina Viazovsika, autoarea acestor articole, a fost premiată cu premiul Salem. Acest premiu este deosebit de prestigios. Mai presus este doar premiul lui Fields – analogic premiului Nobel pentru matematicieni.

Acesta este un succes strălucitor al savanților ucraineni!



## PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 4

### Principalele axiome ale stereometriei

A1. În oricare punct al spațiului sunt adevărate axiomele planimetrii.

A2. Prin oricare trei puncte arbitrare ale spațiului, ce nu aparțin unei drepte, trece un plan, și numai unul singur.

A3. Dacă două puncte ale dreptei aparțin planului, atunci și toată dreapta aparține acestui plan.

A4. Dacă două plane au un punct comun, atunci ele se intersectează după o dreaptă.

### Planul se definește univoc de:

- 1) trei puncte, ce nu se află pe o dreaptă;
- 2) o dreaptă și un punct, care nu-i aparține acestei drepte;
- 3) două drepte, ce se intersectează;
- 4) două drepte paralele.

### Amplasarea reciprocă a două drepte în spațiu

Două drepte se numesc, că se intersectează, dacă ele au numai un singur punct comun.

Două drepte în spațiu se numesc paralele, dacă ele se află într-un plan, și nu se intersectează.

Două drepte în spațiu se numesc neconcurente, dacă ele nu se află într-un plan.

### Proprietățile dreptelor paralele

Prin două drepte paralele trece un plan, și numai unul singur.

### Criteriul dreptelor neconcurente

Dacă una din două drepte se află în plan, iar a doua intersectează acest plan într-un punct, care nu aparține primei drepte, atunci aceste drepte sunt neconcurente.

### Paralelismul în spațiu

O dreaptă și un plan se numesc paralele, dacă ele nu au puncte comune.

Două plane se numesc paralele, dacă ele nu au puncte comune.

**Criteriul de paralelism al dreptei și al planului**

Dacă dreapta, ce nu aparține planului dat, este paralelă cu o oarecare dreaptă, ce aparține acestui plan, atunci dreapta dată este paralelă cu însuși planul.

**Condițiile de paralelism a două drepte în spațiu**

Dacă planul trece prin dreapta dată, care este paralelă altui plan, și intersectează acest plan, atunci dreapta de intersecție a planelor este paralelă cu această dreaptă.

Dacă prin fiecare din două drepte paralele se duce un plan, și totodată aceste plane se intersectează după o dreaptă, diferită de cele două date, atunci această dreaptă este paralelă cu fiecare din cele două drepte date.

Două drepte, paralele cu a treia dreaptă, sunt paralele între ele.

**Criteriile de paralelism a două plane**

Dacă două drepte, ce se intersectează ale unui plan sunt paralele corespunzător cu două drepte ale altui plan, atunci acest plane sunt paralele.

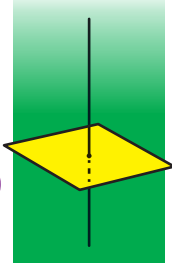
**Proprietățile planelor paralele**

Printr-un punct al spațiului, care nu aparține acestui plan, trece un plan, paralel cu planul dat, și numai unul singur.

Dreptele de intersecție a două plane paralele cu al treilea plan sunt paralele.

Segmentele dreptelor paralele, care se află între planele paralele, sunt egale.

# PERPENDICULARITATEA ÎN SPAȚIU §5



În acest paragraf veți face cunoștință cu noțiunea de unghi format de două drepte în spațiu, de unghi făcut de dreaptă și plan, a unghiului dintre două plane; veți afla, ce este proiecția ortogonală, veți studia proprietățile proiecției ortogonale a poligonului.

## 33. Unghiul dintre drepte în spațiu

Deoarece două drepte arbitrare ale spațiului, ce se intersectează, se află într-un plan, atunci unghiul dintre ele îl vom defini tot așa, ca și în planimetrie.

**Definiție.** Unghiul dintre două drepte, ce se intersectează, se numește mărimea aceluia din unghiuri, creat la intersecția lor, care nu este mai mare decât  $90^\circ$  (fig. 33.1).

Se consideră că unghiul dintre două drepte paralele este egal cu  $0^\circ$ . Deci, dacă  $\varphi$  este unghiul dintre două drepte, care se află într-un plan, atunci  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ .

Să introducem noțiunea de unghi dintre drepte neconcurente.

**Definiție.** Unghiul dintre două drepte neconcurente se numește unghiul dintre dreptele, care se intersectează și sunt corespunzător paralele cu dreptele neconcurente date.

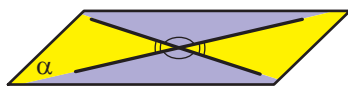


Fig. 33.1

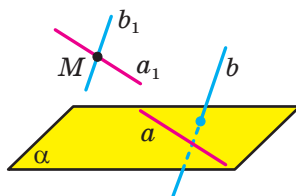


Fig. 33.2

Fie că dreptele  $a$  și  $b$  sunt neconcurente. Prin punctul  $M$  al spațiului ducem două drepte  $a_1$  și  $b_1$  astfel, că  $a_1 \parallel a$ ,  $b_1 \parallel b$  (fig. 33.2). Conform definiției, unghiul dintre dreptele neconcurente  $a$  și  $b$  este egal cu unghiul dintre dreptele  $a_1$  și  $b_1$ , ce se intersectează.

Apare întrebarea naturală: depinde oare unghiul dintre dreptele neconcurente  $a$  și  $b$  de alegerea punctului  $M$ ? Să dăm răspuns la această întrebare ne ajută așa o teoremă.

**Teorema 33.1.** *Unghiul dintre două drepte ce se intersectează, este egal cu unghiul dintre altele două drepte, ce se intersectează și sunt corespunzător paralele cu cele date.*

Folosindu-vă de teorema 33.1, se poate arăta, că unghiul dintre dreptele neconcurente  $a$  și  $b$  este egal cu unghiul dintre dreptele  $a$  și  $b_1$  ce se intersectează, unde  $b_1 \parallel b$ .

De exemplu, în figura 33.3. este reprezentată prisma triunghiulară  $ABCA_1B_1C_1$ . Unghiul dintre dreptele neconcurente  $AA_1$  și  $BC$  este egal cu unghiul dintre dreptele  $BB_1$  și  $BC$ , ce se intersectează.

**Definiție.** Două drepte în spațiu se numesc **perpendiculare**, dacă unghiul dintre ele este egal cu  $90^\circ$ .

Menționăm, că dreptele perpendiculare se pot ori intersecta, sau să fie neconcurente.

Dacă dreptele  $a$  și  $b$  sunt perpendiculare, atunci se scrie:  $a \perp b$ .

Două segmente în spațiu se numesc **perpendiculare**, dacă ele se află pe drepte perpendiculare.

De exemplu, muchiile  $AD$  și  $CC_1$  ale cubului  $ABCA_1B_1C_1D_1$  sunt perpendiculare (fig. 33.4). Într-adevăr, deoarece  $DD_1 \parallel CC_1$ , atunci unghiul dintre dreptele  $AD$  și  $CC_1$  este egal cu unghiul dintre dreptele  $AD$  și  $DD_1$ . Dar  $\angle ADD_1 = 90^\circ$ , de aceea  $AD \perp CC_1$ .

**Problemă.** În figura 33.5 este reprezentat cubul  $ABCA_1B_1C_1D_1$ . Aflați unghiul dintre dreptele  $A_1D$  și  $D_1C$ .

*Rezolvare.* Să unim punctele  $A_1$  și  $B$ . Deoarece  $A_1D_1 \parallel BC$ , de aceea punctele  $A_1$ ,  $D_1$ ,  $C$  și  $B$  se află într-un plan. Acest plan intersectează planele paralele  $AA_1B$  și  $DD_1C$  după dreptele paralele  $A_1B$  și  $D_1C$ . Deci, unghiul dintre dreptele  $A_1D$  și  $D_1C$  este egal cu unghiul  $DA_1B$ .

Unim punctele  $B$  și  $D$ . Segmentele  $A_1D$ ,  $A_1B$  și  $BD$  sunt egale ca diagonale ale pătratelor egale. De aici, triunghiul  $A_1BD$  este echilateral. Atunci  $\angle DA_1B = 60^\circ$ .

*Răspuns:*  $60^\circ$ . ◀

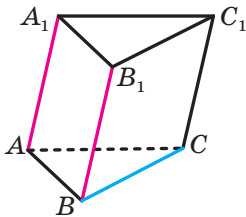


Fig. 33.3

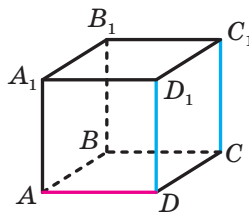


Fig. 33.4

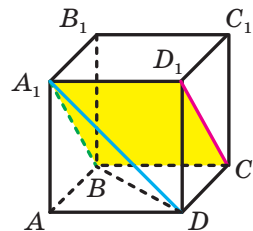


Fig. 33.5



1. Ce se numește unghi dintre două drepte, ce se intersectează?
2. Cu ce este egal unghiul dintre două drepte paralele?
3. Ce se numește unghi dintre două drepte neconcurente?
4. Care două drepte în spațiu se numesc perpendiculare?
5. Care două segmente în spațiu se numesc perpendiculare?



## EXERCIIU

- 33.1.°** Câte drepte în spațiu se pot duce perpendicular la dreapta dată prin punctul: 1) care aparține dreptei date; 2) care nu aparține dreptei date?
- 33.2.°** Se dă cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 33.6). Aflați unghiul dintre dreptele: 1)  $CD$  și  $BC$ ; 2)  $AA_1$  și  $C_1 D_1$ ; 3)  $AA_1$  și  $D_1 C$ ; 4)  $AC$  și  $B_1 D_1$ ; 5)  $A_1 C_1$  și  $AC$ .
- 33.3.°** Se dă cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 33.6). Aflați unghiul dintre dreptele: 1)  $AB$  și  $BB_1$ ; 2)  $AB$  și  $B_1 D_1$ ; 3)  $A_1 D$  și  $B_1 C$ ; 4)  $B_1 D_1$  și  $C_1 C$ .

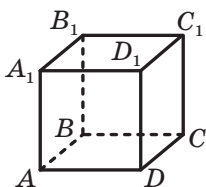


Fig. 33.6

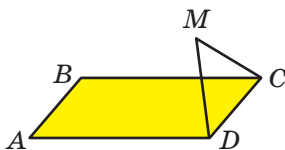


Fig. 33.7

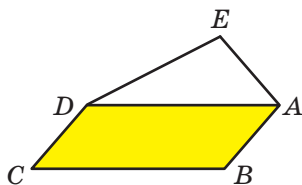


Fig. 33.8

- 33.4.°** Punctul  $M$  care nu aparține planului dreptunghiului  $ABCD$ , este astfel, că triunghiul  $CMD$  este echilateral (fig. 33.7). Aflați unghiul dintre dreptele  $AB$  și  $MC$ .
- 33.5.°** Punctul  $M$  nu aparține planului pătratului  $ABCD$ ,  $\angle MBA = 40^\circ$ ,  $\angle MBC = 90^\circ$ . Aflați unghiul dintre dreptele: 1)  $MB$  și  $AD$ ; 2)  $MB$  și  $CD$ .
- 33.6.°** Trapezul  $ABCD$  cu bazele  $AD$  și  $BC$  și triunghiul  $MEF$  nu se află într-un plan, punctul  $E$  – mijlocul segmentului  $AB$ , punctul  $F$  – mijlocul segmentului  $CD$ ,  $ME = FE$ ,  $\angle MEF = 110^\circ$ . Găsiți unghiul dintre dreptele: 1)  $AD$  și  $EF$ ; 2)  $AD$  și  $ME$ ; 3)  $BC$  și  $MF$ .
- 33.7.°** Paralelogramul  $ABCD$  și triunghiul  $AED$  nu se află într-un plan (fig. 33.8). Aflați unghiul dintre dreptele: 1)  $BC$  și  $AE$ , dacă  $\angle AED = 70^\circ$ ,  $\angle ADE = 30^\circ$ .



**33.8.\*** Se știe, că  $AB \perp AC$ ,  $AB \perp AD$ ,  $AC \perp AD$  (fig. 33.9). Aflați segmentul  $CD$ , dacă  $BC = 17$  cm,  $AB = 15$  cm,  $BD = 3\sqrt{29}$  cm.

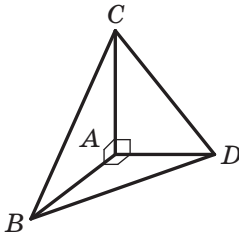


Fig. 33.9

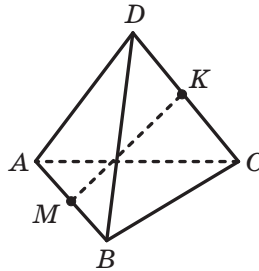


Fig. 33.10

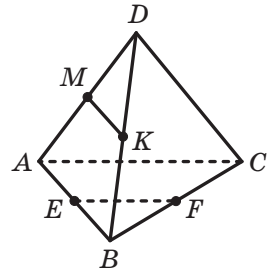


Fig. 33.11

**33.9.\*** Se știe, că  $AB \perp AC$ ,  $AB \perp AD$ ,  $AC \perp AD$  (fig. 33.9). Aflați segmentul  $BC$ , dacă  $CD = 2\sqrt{43}$  cm,  $BD = 12$  cm,  $\angle ABD = 60^\circ$ .

**33.10.\*\*** Fiecare muchie a tetraedrului  $DABC$  este egală cu  $a$ , punctele  $M$  și  $K$  – mijlocurile muchiilor  $AB$  și  $CD$  corespunzător (fig. 33.10). Găsiți segmentul  $MK$ .

**33.11.\*\*** Punctele  $E$ ,  $F$ ,  $M$  și  $K$  sunt corespunzător mijlocurile muchiilor  $AB$ ,  $BC$ ,  $AD$  și  $BD$  ale tetraedrului  $DABC$  (fig. 33.11). Găsiți unghiul dintre dreptele  $EF$  și  $MK$ , dacă  $\angle BAC = \alpha$ .

**33.12.\*\*** Diagonalele feței  $ABCD$  ale cubului  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  se intersectează în punctul  $O$ . Aflați unghiul dintre dreptele  $OB_1$  și  $A_1 C_1$ .

**33.13.\*\*** Baza paralelipipedului dreptunghic  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  este un pătrat, latura căruiă este egală cu  $a$ . Aflați unghiul dintre dreptele  $AD_1$  și  $B_1 C$ , dacă muchia laterală a paralelipipedului este egală cu  $a\sqrt{3}$ .



### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

**33.14.** Diagonalele  $AC$  și  $BD$  ale paralelogramului  $ABCD$  sunt egale corespunzător cu 24 cm și 10 cm,  $AD = 13$  cm. Aflați perimetrul paralelogramului.

## 34. Perpendicularitatea dreptei și a planului

În viața de toate zilele noi vorbim: bățul steagului este perpendicular pe suprafața pământului (fig. 34.1), catargele sunt perpendiculare la suprafața punții (fig. 34.2), șurubul se sucește în scândură perpendicular la suprafața ei (fig. 34.3) etc.



Fig. 34.1



Fig. 34.2



Fig. 34.3

Aceste exemple dau o închipuire despre dreapta, perpendiculară pe plan.

**Definiție.** Dreapta se numește **perpendiculară pe plan**, dacă ea este perpendiculară pe orice dreaptă, ce se află în acest plan (fig. 34.4).

Dacă dreapta  $a$  este perpendiculară pe planul  $\alpha$ , atunci se scrie:  $a \perp \alpha$ . De asemenea este primit de spus, că planul  $\alpha$  este perpendicular pe dreapta  $a$  sau dreapta  $a$  și planul  $\alpha$  sunt perpendiculare.

Din definiție reiese, că dacă dreapta  $a$  este perpendiculară pe planul  $\alpha$ , atunci ea intersectează acest plan.

Segmentul se numește **perpendicular pe plan**, dacă el aparține dreptei, perpendiculare pe acest plan.

De exemplu, intuitiv se înțelege, că muchia  $AA_1$  a paralelipipedului dreptunghiular  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  este perpendiculară pe planul  $ABCD$  (fig. 34.5). De demonstrat acest fapt nu este complicat, folosindu-ne de așa o teoremă.

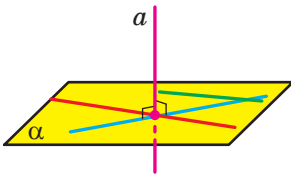


Fig. 34.4

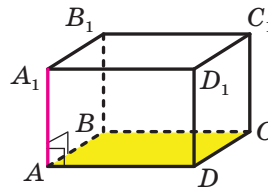


Fig. 34.5

**Teorema 34.1 (criteriul de perpendicularitate a dreptei și a planului).** Dacă dreapta este perpendiculară pe două drepte, ce se află în plan și se intersectează, atunci ea este perpendiculară și pe acest plan.



Fig. 34.6

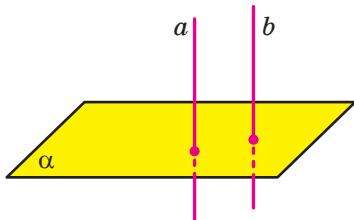
În figura 34.5 dreapta  $AA_1$  este perpendiculară pe două drepte ce se intersectează  $AB$  și  $AD$  ale planului  $ABC$ . Atunci conform criteriului de perpendicularitate a dreptei și a planului  $AA_1 \perp ABC$ , deci, și muchia  $AA_1$  de asemenea este perpendiculară pe planul  $ABC$ .

Teorema 34.1 deseori este folosită în practică. De exemplu, suportul pentru bradul de Anul Nou are forma unei cruci. Dacă bradul se stabilește astfel, ca tulpina bradului să fie perpendiculară pe componentele crucii, atunci bradul este perpendicular pe planul podelei (fig. 34.6).

Să prezentăm încă o teoremă, care poate fi considerată ca încă un criteriu de perpendicularitate al dreptei și a planului.

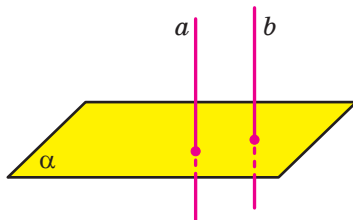
**Teorema 34.2.** *Dacă una din două drepte paralele este perpendiculară pe plan, atunci și a doua dreaptă este perpendiculară pe acest plan* (fig. 34.7).

De exemplu, în figura 34.5 dreapta  $AA_1$  este perpendiculară pe planul  $ABC$ , iar dreapta  $CC_1$  este paralelă la dreapta  $AA_1$ . Deci, conform teoremei 34.2 dreapta  $CC_1$  de asemenea este perpendiculară pe planul  $ABC$ .



Dacă  $a \parallel b$  și  $a \perp \alpha$ ,  
atunci  $b \perp \alpha$

Fig. 34.7



Dacă  $a \perp \alpha$  și  $b \perp \alpha$ ,  
atunci  $a \parallel b$

Fig. 34.8

Să formulăm teorema care este criteriul de paralelism a două drepte.

**Teorema 34.3.** *Dacă două drepte sunt perpendiculare pe unul și același plan, atunci ele sunt paralele.* (fig. 34.8).

Este adevărată și așa o teoremă.

**Teorema 34.4.** *Prin punctul dat se poate duce o singură dreaptă, perpendiculară pe planul dat, și numai una.*

**Problemă.** Planul  $\alpha$ , perpendicular pe cateta  $AC$  a triunghiului dreptunghic  $ABC$ , intersectează cateta  $AC$  în punctul  $E$ , iar ipotenuza  $AB$  – în punctul  $F$  (fig. 34.9). Aflați segmentul  $EF$ , dacă  $AE : EC = 3 : 4$ ,  $BC = 21$  cm.

*Rezolvare.* Deoarece dreapta  $AC$  este perpendiculară pe planul  $\alpha$ , atunci dreapta  $AC$  este perpendiculară pe orice dreaptă a acestui plan, în particular, pe dreapta  $EF$ . Dreptele  $EF$  și  $BC$  se află într-un plan și sunt perpendiculare pe dreapta  $AC$ , de aceea  $EF \parallel BC$ . Din aceasta reiese, că triunghiurile  $AEF$  și  $ACB$  sunt asemenea. Deci, se poate scrie:  $EF : CB = AE : AC$ . De aici  $EF : 21 = 3 : 7$ ,  $EF = 9$  cm.

*Răspuns:* 9 cm. ◀

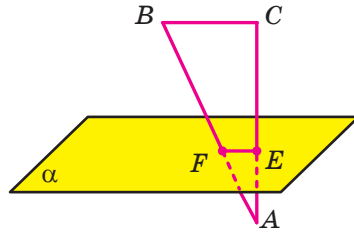
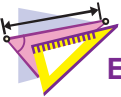


Fig. 34.9



1. Care dreaptă se numește perpendiculară pe plan?
2. Care segment se numește perpendicular pe plan?
3. Formulați criteriul de perpendicularitate a dreptei și a planului.
4. Formulați teorema despre două drepte paralele, una din care este perpendiculară pe plan.
5. Formulați teorema despre două drepte, perpendiculare pe unul și același plan.



## EXERCIIU

- 34.1.° Dreapta  $a$  este perpendiculară pe planul  $\alpha$ . Există oare în planul  $\alpha$  drepte, neperpendiculare pe dreapta  $a$ ?
- 34.2.° Dreapta  $m$  este perpendiculară pe dreptele  $a$  și  $b$  ale planului  $\alpha$ . Reiese oare din aceasta, că dreapta  $m$  este perpendiculară pe planul  $\alpha$ ?
- 34.3.° Este oare corectă afirmația, că dacă dreapta nu este perpendiculară pe plan, atunci ea nu este perpendiculară pe nici o dreaptă a acestui plan?
- 34.4.° Se dă cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 34.10). Numiți fețele cubului, pe care este perpendiculară dreapta: 1)  $AA_1$ ; 2)  $AD$ .
- 34.5.° Se dă cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 34.10). Numiți muchiile cubului, care sunt perpendiculare pe planul feței: 1)  $AA_1 B_1 B$ ; 2)  $A_1 B_1 C_1 D_1$ .

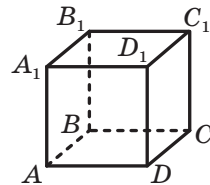


Fig. 34.10

34.6.° Este oare corectă afirmația, că dreapta este perpendiculară pe plan, dacă ea este perpendiculară pe

- 1) pe o latură și mediana triunghiului, care se află în acest plan;
- 2) pe o latură și linia medie a triunghiului, care se află în acest plan;
- 3) pe două laturi ale trapezului, care se află în acest plan;
- 4) pe două diametre ale circumferinței, care se află în acest plan?

34.7.° Prin centrul  $O$  al triunghiului regulat  $ABC$  s-a dus dreapta  $DO$ , perpendiculară pe planul  $ABC$  (fig. 34.11). Aflați segmentul  $DO$ , dacă  $AB = 6$  cm,  $DA = 4$  cm.

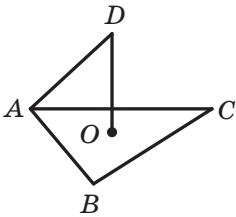


Fig. 34.11

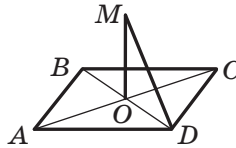


Fig. 34.12

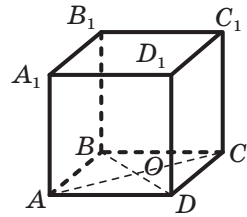


Fig. 34.13

34.8.° Prin centrul  $O$  al pătratului  $ABCD$  s-a dus dreapta  $MO$ , perpendiculară pe planul pătratului (fig. 34.12). Aflați distanța de la punctul  $M$  până la vârful  $D$ , dacă  $AD = 4\sqrt{2}$  cm,  $MO = 2$  cm.

34.9.° Punctul  $O$  – centrul feței  $ABCD$  a cubului  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ , muchia căruia este egală cu  $a$  (fig. 34.13), Aflați:

- 1) distanța de la punctul  $O$  până la vârful  $B$  al cubului;
- 2) tangenta unghiului dintre dreptele  $B_1O$  și  $DD_1$ .

34.10.° Diagonala  $B_1D$  a paralelipipedului dreptunghic  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  este egală cu 17 cm, iar diagonala  $AB_1$  a feței laterale  $AA_1B_1B$  este egală cu 15 cm (fig. 34.14). Aflați muchia  $AD$  a paralelipipedului.

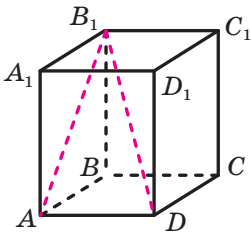


Fig. 34.14

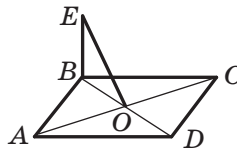


Fig. 34.15

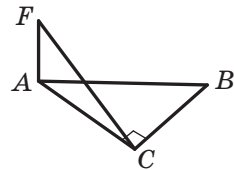


Fig. 34.16

- 34.11.** Prin vârful  $B$  al rombului  $ABCD$  s-a dus dreapta  $BE$ , perpendiculară pe planul rombului (fig. 34.15). Demonstrați, că dreapta  $AC$  este perpendiculară pe planul  $BEO$ .
- 34.12.** Prin vârful  $A$  al triunghiului dreptunghic  $ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) s-a dus dreapta  $AF$ , perpendiculară pe planul  $ABC$  (fig. 34.16). Demonstrați, că dreapta  $BC$  este perpendiculară pe planul  $AFC$ .
- 34.13.** Segmentul  $AB$  nu intersectează planul  $\alpha$ . Prin punctele  $A$  și  $B$  s-au dus drepte, care sunt perpendiculare pe planul  $\alpha$  și-l intersectează în punctele  $C$  și  $D$  corespunzător. Aflați segmentul  $CD$ , dacă  $AC = 34$  cm,  $BD = 18$  cm,  $AB = 20$  cm.
- 34.14.** Segmentul  $AB$  nu intersectează planul  $\alpha$ . Prin punctele  $A$  și  $B$  s-au dus drepte, care sunt perpendiculare pe planul  $\alpha$  și-l intersectează în punctele  $A_1$  și  $B_1$  corespunzător. Aflați segmentul  $AB$ , dacă  $AA_1 = 2$  cm,  $BB_1 = 12$  cm,  $A_1B_1 = 10$  cm.



### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

- 34.15.** De la un punct până la o dreaptă sunt duse două oblice, proiecțiile cărora pe dreaptă sunt egale cu 5 cm și 9 cm. Găsiți distanța de la punctul dat până la această dreaptă, dacă una din oblice este cu 2 cm mai mare decât alta.

## 35. Perpendiculara și oblica

Fie că figura  $F_1$  este proiecției paralele a figurii  $F$  pe planul  $\alpha$  în direcția dreptei  $l$ . Dacă  $l \perp \alpha$ , atunci figura  $F_1$  se numește **proiecția ortogonală** a figurii  $F$  pe planul  $\alpha$ .

De exemplu, baza  $ABCD$  a paralelipipedului dreptunghic  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  este proiecția ortogonală a bazei  $A_1 B_1 C_1 D_1$  pe planul  $ABC$  în direcția  $AA_1$ . (fig. 35.1).

În cele ce urmează, vorbind despre proiecția figurii, dacă nu este condiționat altceva, vom avea în vedere proiecția ortogonală.

Fie că este dat planul  $\alpha$  și punctul  $A$ , care nu-i aparține. Prin punctul  $A$  s-a dus dreapta  $a$ , perpendiculară pe planul  $\alpha$ . Fie că  $a \cap \alpha = B$  (fig. 35.2). Segmentul  $AB$  se

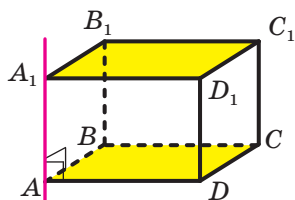


Fig. 35.1

numește **perpendiculara** dusă din punctul  $A$  pe planul  $\alpha$ , punctul  $B$  – **baza perpendicularei**. Baza  $B$  a perpendicularei  $AB$  este proiecția punctului  $A$  pe planul  $\alpha$ .

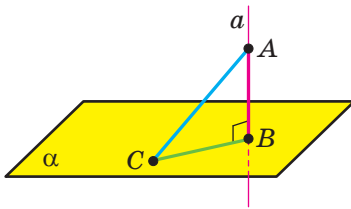


Fig. 35.2

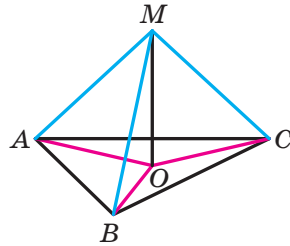


Fig. 35.3

Notăm pe planul  $\alpha$  un oarecare punct  $C$ , diferit de punctul  $B$ . Ducem segmentul  $AC$  (fig. 35.2). Segmentul  $AC$  se numește **oblică**, dusă din punctul  $A$  la planul  $\alpha$ , punctul  $C$  – **baza oblicei**. Segmentul  $BC$  este **proiecția oblicei**  $AC$ .

**Teorema 35.1.** *Dacă dintr-un punct sunt duse la plan o perpendiculară și o oblică, atunci oblica este mai mare decât perpendiculara.*

**Problemă 1.** Demonstrați, că dacă un punct, ce nu aparține planului poligonului, este egal depărtat de la vârfurile lui, atunci proiecția acestui punct pe planul poligonului este centrul circumferinței circumscrise lui.

*Rezolvare.* Să facem demonstrarea pentru un triunghi. Pentru alte poligoane demonstrarea va fi analogică.

Fie, că punctul  $M$  nu aparține planului  $ABC$ , totodată  $MA = MB = MC$ . Coborâm din punctul  $M$  perpendiculara  $MO$  pe planul  $ABC$  (fig. 35.3). Să demonstrăm, că punctul  $O$  – centrul circumferinței circumscrise triunghiului  $ABC$ .

Deoarece  $MO \perp ABC$ , atunci  $\angle MOA = \angle MOB = \angle MOC = 90^\circ$ . În triunghiurile dreptunghice  $MOA$ ,  $MOB$ ,  $MOC$  cateta  $MO$  este comună, ipotenuzele sunt egale, deci, aceste triunghiuri sunt egale după catetă și ipotenuză. Din egalitatea acestor triunghiuri rezultă, că  $OA = OB = OC$ , adică punctul  $O$  – centrul circumferinței circumscrise triunghiului  $ABC$ . ◀

Menționăm, că dacă trebuie să determinăm distanța dintre două figuri geometrice, încercăm să găsim distanța dintre cele mai apropiate puncte ale lor. De exemplu, din cursul de planimetrie este cunos-

cut, că distanța de la un punct, care nu aparține dreptei, până la această dreaptă se numește distanța de la punctul dat până la punctul cel mai apropiat al dreptei, adică lungimea perpendicularii, coborâte din punct pe dreaptă.

Teorema 35.1 arată, că este rațional de primit așa o definiție.

**Definiție.** Dacă punctul nu aparține planului, atunci **distanța de la punct până la plan** se numește lungimea perpendicularii coborâte din punct pe plan. Dacă punctul aparține planului se consideră, că **distanța de la punct până la plan** este eglă cu zero.

**Problemă 2.** Demonstrați, că dacă dreapta este paralelă cu planul, atunci toate punctele dreptei sunt egal depărtate de la plan.

*Rezolvare.* Fie  $A$  și  $B$  – două puncte arbitrare ale dreptei  $a$  care este paralelă cu planul  $\alpha$ . Punctele  $A_1$  și  $B_1$  – bazele perpendicularelor, coborâte corespunzător din punctele  $A$  și  $B$  pe planul  $\alpha$  (fig. 35.4). Să demonstrăm, că  $AA_1 = BB_1$ .

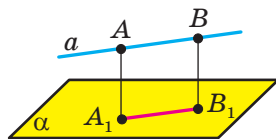


Fig. 35.4

Conform teoremei 34.3  $AA_1 \parallel BB_1$ . Deci, punctele  $A, A_1, B_1, B$  sunt situate într-un plan. Planul  $ABB_1$  trece prin dreapta  $a$ , paralelă cu planul  $\alpha$  și intersectează planul  $\alpha$  după dreapta  $A_1B_1$ . Atunci după teorema 30.2 obținem:  $AB \parallel A_1B_1$ . Astfel în patrulaterul  $AA_1B_1B$  fiecare două laturi opuse sunt paralele. Deci, patrulaterul  $AA_1B_1B$  – paralelogram. De aici  $AA_1 = BB_1$ .

Deoarece punctele  $A$  și  $B$  sunt alese arbitrar pe dreapta  $a$ , atunci afirmația problemei este demonstrată. ◀

Proprietatea demonstrată dă posibilitatea de acceptat așa definiții.

**Definiție.** **Distanța de la dreaptă până la planul paralel ei** se numește distanța de la orice punct al acestei drepte până la plan.

Folosind rezultatul, obținut în problema cheie 2 se poate rezolva astfel de problemă.

**Problemă 3.** Demonstrați, că dacă două plane sunt paralele, atunci toate punctele unui plan sunt egal depărtate de la alt plan.

**Definiție.** **Distanța dintre două plane paralele** se numește distanța de la orice punct al unui plan până la alt plan.



Результати отримані в проблемах – ключі 2 і 3, використовуються в практиці, наприклад, в будівництві (фиг. 35.5).



Fig. 35.5

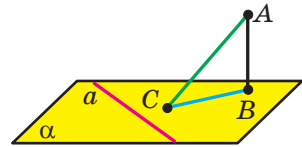


Fig. 35.6

**Теорема 35.2 (теорема трьох перпендикулярних)** *Якщо пряма, яка належить площині, є перпендикулярною до проекції нахиленої на цю площину, тоді вона є перпендикулярною і до самої нахиленої. І навпаки, якщо пряма, яка належить площині є перпендикулярною до нахиленої, тоді вона є перпендикулярною і до проекції нахиленої на цю площину.*

*Демонстрація.* Демонструємо першу частину теореми.

Нехай пряма  $a$ , яка належить площині  $\alpha$  є перпендикулярною до проекції  $BC$  нахиленої  $AC$  (фиг. 35.6). Ся демонструємо, що  $a \perp AC$ .

Авемо:  $AB \perp \alpha$ ,  $a \subset \alpha$ , , отже  $AB \perp a$ . Ам отримали, що пряма  $a$  є перпендикулярною до двох прямих  $AB$  і  $BC$  площини  $ABC$ , які перетинаються; отже,  $a \perp ABC$ . Оскільки  $AC \subset ABC$ , тоді  $a \perp AC$ .

Демонстрація другої частини теореми є аналогічною до демонстрації першої частини. ◀

**Ключ Problemă 4.** Точка  $M$  не належить площині опуклого полігону і є однаково віддаленою від усіх прямих, які утворюють латуні цього полігону. Проекція точки  $M$  на площину полігону є точкою  $O$ , яка належить полігону. Демонструємо, що точка  $O$  – центр вписаного кола.

*Розв'язок.* Ся робимо демонстрацію для трикутника. Для інших полігонів демонстрація буде аналогічною.

Coborâm din punctul  $O$  perpendicularele  $ON$ ,  $OK$  și  $OE$  corespunzător pe dreptele  $AB$ ,  $BC$  și  $CA$  (fig. 35.7). Unim punctul  $M$  cu punctele  $E$ ,  $K$  și  $N$ .

Segmentul  $ON$  este proiecția oblicei  $MN$  pe planul  $ABC$ . Conform construcției  $ON \perp AB$ . Atunci conform teoremei celor trei perpendiculare obținem:  $MN \perp AB$ .

Analogic se poate demonstra, că  $MK \perp BC$  și  $ME \perp CA$ . Deci, lungimea segmentelor  $MN$ ,  $MK$  și  $ME$  sunt distanțele de la punctul  $M$  până la dreptele  $AB$ ,  $BC$  și  $CA$  corespunzător. Conform condiției  $MN = MK = ME$ .

În triunghiurile dreptunghice  $MON$ ,  $MOK$ ,  $MOE$  cateta  $MO$  este comună, ipotenuzele egale; deci, aceste triunghiuri sunt egale după catetă și ipotenuză. Din egalitatea acestor triunghiuri rezultă, că  $ON = OK = OE$ .

Lungimea segmentelor  $ON$ ,  $OK$  și  $OE$  sunt distanțele de la punctul  $O$  până la dreptele, care conțin laturile triunghiului  $ABC$ . Noi am arătat, că aceste distanțe sunt egale. Deoarece punctul  $O$  aparține triunghiului  $ABC$ , atunci punctul  $O$  – centrul circumferinței înscrise în triunghiul  $ABC$ .

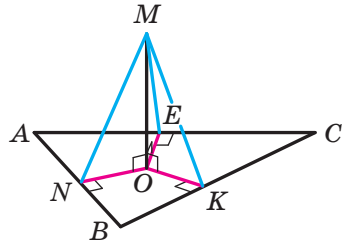
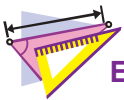


Fig. 35.7



1. În ce caz se spune, că figura  $F_1$  este proiecția ortogonală a figurii  $F$ ?
2. Descrieți, care segment se numește: 1) perpendiculara, coborâtă din punct pe plan; 2) oblica, dusă din punct pe plan.
3. Formulați teorema despre perpendiculara și oblica, duse pe plan dintr-un punct.
4. Ce se numește distanță de la punct până la plan? distanță de la dreaptă până la planul paralel ei? distanță dintre două plane paralele?
5. Formulați teorema despre cele trei perpendiculare.



## EXERCITII

35.1.° În figura 35.8 este desenat cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Indicați proiecția segmentului  $C_1 D$  pe planul:

- 1)  $ABC$ ;
- 2)  $BB_1 C$ ;
- 3)  $AA_1 B_1$ .

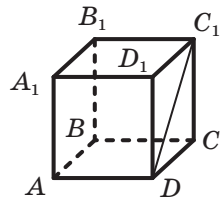


Fig. 35.8

35.2.° În figura 35.9 este desenat paralelipipedul dreptunghiular  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Indicați proiecția segmentului  $DB_1$  pe planul:

- 1)  $A_1 B_1 C_1$ ;                      2)  $CDD_1$ ;                      3)  $AA_1 D_1$ .

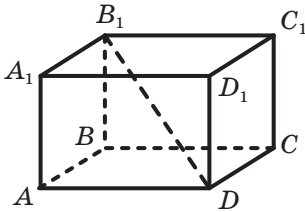


Fig. 35.9

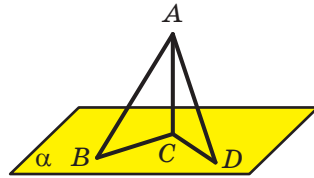


Fig. 35.10

35.3.° Dintr-un punct la plan sunt duse perpendiculara cu lungimea de 12 cm și oblica cu lungimea 13 cm. Aflați proiecția acestei oblice pe planul dat.

35.4.° Din punctul  $A$  pe planul  $\alpha$  sunt duse perpendiculara și oblica cu lungimea de  $\sqrt{7}$  cm. Proiecția oblicei date pe plan este egală cu  $\sqrt{3}$  cm. Găsiți distanța de la punctul  $A$  până la planul  $\alpha$ .

35.5.° Din punctul  $A$  s-au dus pe planul  $\alpha$  perpendiculara  $AC$  și oblicele  $AB$  și  $AD$  (fig. 35.10). Găsiți proiecția oblicei  $AD$  pe planul  $\alpha$ , dacă  $\angle BAC = 45^\circ$ ,  $AB = 8$  cm,  $AD = 9$  cm.

35.6.° Din punctul  $M$  s-au dus pe planul  $\alpha$  perpendiculara  $MH$  și oblicele  $MA$  și  $MB$  (fig. 35.11). Găsiți oblica  $MA$ , dacă  $BH = 6\sqrt{6}$  cm,  $MB = 18$  cm,  $\angle MAH = 60^\circ$ .

🔑 35.7.° Demonstrați, că oblicele egale, duse la plan dintr-un punct, au proiecții egale.

🔑 35.8.° Demonstrați, că dacă proiecțiile a două oblice, duse la plan dintr-un punct sunt egale, atunci sunt egale și oblicele.

35.9.° Distanța dintre dreptele paralele, care aparțin corespunzător planelor paralele  $\alpha$  și  $\beta$ , este egală cu 7 cm. Este oare corectă afirmația, că distanța dintre planele  $\alpha$  și  $\beta$  este egală cu 7 cm?

35.10.° Din punctul  $M$  s-au dus la planul  $\alpha$  oblicele egale  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  și  $MD$ . Pot oare punctele  $A$ ,  $B$ ,  $C$  și  $D$  să fie vârfurile:

- 1) dreptunghiului;                      3) trapezului dreptunghic;  
2) rombului;                              4) trapezului isoscel?

35.11.° În figura 35.12 este desenat pătratul  $ABCD$ , dreapta  $NC$  este perpendiculară pe plan lui. Demonstrați, că dreptele  $BD$  și  $NO$  sunt perpendiculare.

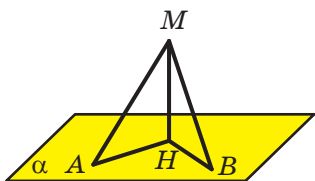


Fig. 35.11

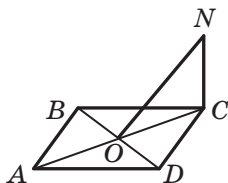


Fig. 35.12

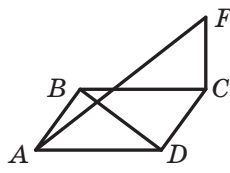


Fig. 35.13

**35.12.** În figura 35.13 este desenat rombul  $ABCD$ . Dreapta  $FC$  este perpendiculară la planul lui. Demonstrați, că dreptele  $AF$  și  $BD$  sunt perpendiculare.

**35.13.** În figura 35.14 este reprezentat triunghiul echilateral  $ABC$ , punctul  $D$  – mijlocul laturii  $BC$ . Dreapta  $AM$  este perpendiculară la planul  $ABC$ . Demonstrați, că  $MD \perp BC$ .

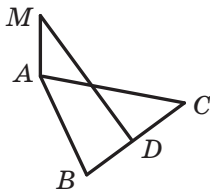


Fig. 35.14

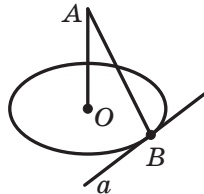


Fig. 35.15

**35.14.** Dreapta  $AO$  este perpendiculară pe planul circumferinței cu centrul  $O$  (fig. 35.15). Dreapta  $a$  aparține planului circumferinței și se atinge de circumferința dată în punctul  $B$ . Demonstrați, că  $AB \perp a$ .

**35.15.** Demonstrați, că dacă punctul aparține dreptei, care este perpendiculară pe planul poligonului și trece prin centrul circumferinței circumscrise poligonului, atunci acest punct este egal depărtat de la vârfurile poligonului.

**35.16.** Din punctul  $A$  s-au dus la planul  $\alpha$  oblicele  $AB$  și  $AC$  cu lungimea de 25 cm și 17 cm respectiv. Găsiți distanța de la punctul  $A$  până la planul  $\alpha$ , dacă proiecțiile oblicelor date pe acest plan se raportează ca 5 : 2.

**35.17.** Din punctul  $D$  s-au dus la planul  $\alpha$  oblicele  $DA$  și  $DB$  suma cărora este egală cu 28 cm. Găsiți aceste oblice, dacă proiecțiile lor pe planul  $\alpha$  sunt egale corespunzător cu 9 cm și 5 cm.

**35.18.** Punctul  $M$  este situat la distanța de 6 cm de la fiecare vârf al triunghiului regulat  $ABC$ , latura căruia este egală cu 9 cm. Găsiți distanța de la punctul  $M$  până la planul  $ABC$ .

- 35.19.\*** Катети трикутника прямокутного  $ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) є рівними до 6 см і 8 см. Точка  $D$  є віддалена від кожної вершини даного трикутника на 13 см. Знайдіть відстань від точки  $D$  до площини  $ABC$ .
- 35.20.\*** Відрізок  $BD$  є перпендикулярним до площини трикутника рівностороннього  $ABC$  з основою  $AC$  (рис. 35.16). Побудуйте перпендикуляр, опущений з точки  $D$  на пряму  $AC$ .
- 35.21.\*** Відрізок  $BD$  є перпендикулярним до площини трикутника прямокутного  $ABC$  з прямим кутом у вершині  $C$  (рис. 35.17). Побудуйте перпендикуляр, опущений з точки  $D$  на пряму  $AC$ .

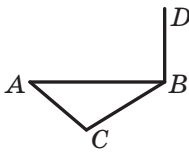


Fig. 35.16

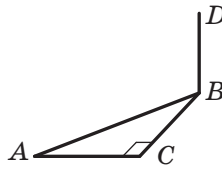


Fig. 35.17

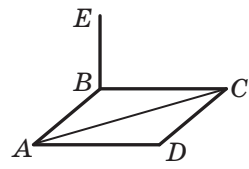


Fig. 35.18

- 35.22.\*** Відрізок  $BE$  є перпендикулярним до площини ромба  $ABCD$  (рис. 35.18). Побудуйте перпендикуляр, опущений з точки  $E$  на пряму  $AC$ .
- 35.23.\*** Точка  $M$  є рівно віддалена від усіх прямих, які утворюють трикутник рівносторонній  $ABC$ . Проекція точки  $M$  на площину  $ABC$  є точка  $O$ , яка належить трикутнику. Знайдіть відстань від точки  $M$  до сторони  $AB$ , якщо відстань від цієї точки до площини  $ABC$  є рівною до  $3\sqrt{2}$  см,  $AB = 18$  см.
- 35.24.\*** Сторона ромба є рівною до 10 см, а діагональ – 16 см. Точка  $M$  є розташована на відстані до 5,2 см від кожної прямої, яка утворює сторону ромба. Знайдіть відстань від точки  $M$  до площини ромба.
- 35.25.\*\*** З точки  $M$  до площини  $\alpha$  є проведені дві похилі  $MN$  і  $MK$ , які утворюють з їхніми проекціями на площину дані кутами  $60^\circ$ . Знайдіть відстань між основами похилених, якщо кут між похиленими є  $90^\circ$ , а відстань від точки  $M$  до площини  $\alpha$  є рівною до  $\sqrt{3}$  см.
- 35.26.\*\*** З точки  $A$  до площини  $\alpha$  є проведені дві похилі  $AB$  і  $AC$ , які утворюють з їхніми проекціями на площину дані кутами  $30^\circ$ . Знайдіть похилі дані і відстань від точки  $A$  до площини  $\alpha$ , якщо кут між проекціями похилених є  $90^\circ$ , а відстань між основами похилених є рівною до 6 см.

- 35.27.\*\*** Segmentul  $DA$  – perpendicular pe planul triunghiului  $ABC$ ,  $AB = 10$  cm,  $AC = 17$  cm,  $BC = 21$  cm. Găsiți distanța de la punctul  $D$  până la dreapta  $BC$ , dacă distanța de la punctul  $D$  până la planul  $ABC$  este egală cu 15 cm.
- 35.28.\*\*** Segmentul  $AB$  – diametrul circumferinței cu centrul  $O$ , segmentul  $BC$  – coarda ei,  $AB = 12$  cm,  $\angle ABC = 30^\circ$ . Segmentul  $AE$  este perpendicular la planul circumferinței date. Găsiți distanța de la punctul  $E$  până pe planul circumferinței, dacă distanța de la punctul  $E$  până la dreapta  $BC$  este egală cu 10 cm.
- 35.29.\*\*** Segmentul  $MA$  – perpendicular la planul rombului  $ABCD$ . Găsiți distanța de la punctul  $M$  până la dreapta  $CD$ , dacă  $\angle BAD = 30^\circ$ ,  $AD = 10$  cm,  $MA = 5\sqrt{3}$  cm.
- 35.30.\*\*** Segmentul  $DA$  – perpendicular pe planul triunghiului  $ABC$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $AB = 14$  cm. Găsiți distanța de la punctul  $D$  până la planul  $ABC$ , dacă acest punct este îndepărtat de la dreapta  $BC$  cu  $2\sqrt{43}$  cm.
- 35.31.\*\*** Punctul  $M$  nu aparține planului triunghiului  $ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) și este situat la distanța de  $2\sqrt{5}$  cm de la fiecare dreaptă, care conține laturile lui. Proiecția punctului  $M$  pe planul  $ABC$  este punctul  $O$ , care aparține triunghiului dat. Punctul de tangență al ipotenuzei  $AB$  cu circumferința, înscrisă în triunghiului  $ABC$ , o împarte în segmentele cu lungimile de 3 cm și 10 cm. Găsiți distanța de la punctul  $M$  până la planul  $ABC$ .
- 🔑 35.32.\*\*** Punctul  $M$  nu aparține planului poligonului, iar proiecția lui pe planul poligonului este centrul circumferinței înscrise în poligon. Demonstrați, că punctul  $M$  este egal depărtat de la laturile poligonului dat.
- 35.33.\*\*** Bazele trapezului isoscel sunt egale cu 16 cm și 36 cm. Prin centrul  $O$  al circumferinței înscrise în acest trapez la planul lui este dusă perpendiculara  $MO$ . Punctul  $M$  este situat la distanța de 16 cm de la planul trapezului. Găsiți distanța de la punctul  $M$  până la laturile trapezului.
- 35.34.\*\*** Punctul  $O$  – centrul circumferinței înscrise în trapezul  $ABCD$ ,  $BC \parallel AD$ ,  $AB \perp AD$ ,  $CD = 12$  cm,  $\angle ADC = 45^\circ$ . Segmentul  $MO$  – perpendicular la planul trapezului. Punctul  $M$  este îndepărtat de la planul trapezului cu  $6\sqrt{2}$  cm. Găsiți distanța de la punctul  $M$  până la laturile trapezului.
- 35.35.\*** Se dă cubul  $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$ . Demonstrați, că  $CD_1 \perp AB_1C_1$ .



## EXERCIȚII PENTRU REPETARE

**35.36.** Latura triunghiului regulat, circumscris unei circumferințe, este egală cu 12 cm. Găsiți latura pătratului, circumscris circumferinței date.

## 36. Unghiul dintre dreaptă și plan

Știți că în vremurile străvechi călătorii se orientau după stele. Ei măsurau unghiul care forma cu planul orizontului semidreapta, dusă din punctul dat până la corpul ceresc.

Astăzi, este de asemenea important ca omul în activitatea sa să poată determina unghiurile sub care unele obiecte sunt înclinate față de planul dat (Fig. 36.1).

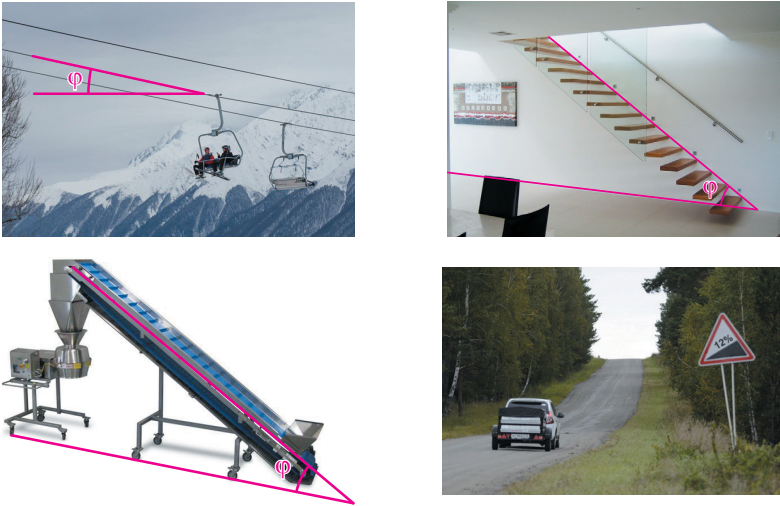


Fig. 36.1

Aceste exemple arată că este rațional de introdus noțiunea de unghi dintre dreaptă și plan.

**Definiție.** Dacă dreapta este paralelă cu planul sau aparține lui, atunci se consideră că **unghiul dintre așa o dreaptă și plan** este egal cu  $0^\circ$ .

Dacă dreapta este perpendiculară pe plan, se consideră, că **unghiul dintre așa o dreaptă și plan** este egal cu  $90^\circ$ .

Дакэ дрепта интерсектеазэ планул ши ну есте перпендикулярэ пе ел, атунци **унghiул динте** аша о **дрептэ ши план** се нумеште **унghiул динте дреаптэ ши проекция еи пе план** (fig. 6.2).

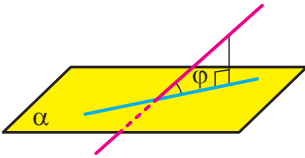


Fig. 36.2

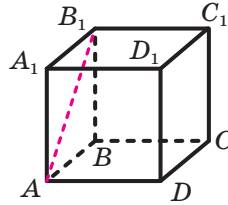


Fig. 36.3

Дин дефиниция резултэ, кэ дакэ  $\varphi$  – унghi динте дреаптэ ши план, атунци  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ .

Де асемenea се спуне, кэ дрепта формeазэ унghiул  $\varphi$  ку планул.

**Унghiул динте сегмент ши план** се нумеште унghiул динте дреapta care conține acest segment ши plan.

Де exemplu, considerăm cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 36.3). Унghiул динте diagonala  $AB_1$  ал феџи  $AA_1 B_1 B$  ши планул  $ABC$  есте егал ку  $45^\circ$ . Їнтр-адевър, дрепта  $AB$  – проiekция дрептеи  $AB_1$  пе планул  $ABC$ . Атунци унghiул динте дреapta  $AB_1$  ши планул  $ABC$  есте егал ку мэрimea унghiулу  $B_1 AB$ . Деoarece патрyлатерул  $AA_1 B_1 B$  – пэтрat, атунци  $\angle B_1 AB = 45^\circ$ .

**Problemă.** Демонстраџи, кэ дакэ динтр-ун punct sunt дuse пе plan обlice, care формeазэ унghiури егале ку планул, атунци проiekция punctулуи даt пе plan есте егал депэртатэ де ла бazele обlice.

*Rezolvare.* Fie кэ  $MA$  ши  $MB$  – обlice, care формeазэ ку планул  $\alpha$  унghiури егале, сегменте  $OA$  ши  $OB$  – проiekцияле acestor обlice (fig. 36.4). Sэ demonstrăm, кэ  $OA = OB$ .

Дрепта  $OA$  есте проiekция дрептеи  $MA$  пе планул  $\alpha$ . Деoarece унghiул  $MAO$  есте асчуџит, атунци ел есте егал ку унghiул динте дрепте  $OA$  ши  $MA$ . Деци, мэрimea унghiулу  $MAO$  есте егалэ ку унghiул динте обlica  $MA$  ши планул  $\alpha$ . Аналогич, се poate demonstra, кэ мэрimea унghiулу  $MBO$  есте егалэ ку унghiул динте обlica  $MB$  ши планул  $\alpha$ . Reieșind дин condiție  $\angle MAO = \angle MBO$ .

Деoarece  $MO \perp \alpha$ , атунци  $\angle MOA = \angle MOB = 90^\circ$ . Обџinem, кэ три-унghiури дрептунghiце  $MOA$  ши  $MOB$  sunt егале дупэ catetэ ши унghiул асчуџит opus. Де aici  $OA = OB$ . ◀

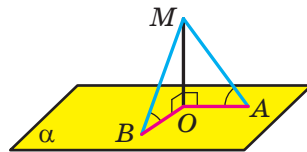
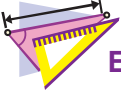


Fig. 36.4





1. Cu ce este egal unghiul făcut de dreaptă și plan, dacă dreapta este paralelă cu planul? dreapta aparține planului? dreapta este perpendiculară pe plan?
2. Ce se numește unghi dintre o dreaptă și plan, dacă dreapta intersectează planul și nu este perpendiculară pe el?



### EXERCIIU

**36.1.°** Este dat cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , punctul  $O$  – centrul feței  $ABCD$  (fig. 36.5). Indicați unghiul dintre:

- 1) dreapta  $AB_1$  și planul  $A_1 B_1 C_1$ ;
- 2) dreapta  $AC_1$  și planul  $ABC$ ;
- 3) dreapta  $AC_1$  și planul  $CDD_1$ ;
- 4) dreapta  $OA_1$  și planul  $ABC$ ;
- 5) dreapta  $AC$  și planul  $ADD_1$ .

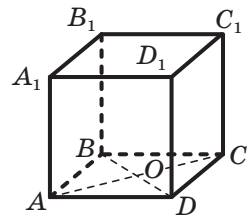


Fig. 36.5

**36.2.°** Dintr-un punct la plan sunt duse o perpendiculară și o oblică, care formează cu planul dat unghiul de  $50^\circ$ . Cu ce este egal unghiul dintre oblica dată și perpendiculară?

**36.3.°** Din punctul  $M$  la planul  $\alpha$  sunt duse o perpendiculară  $MA$  și oblica  $MB$ , care formează cu planul  $\alpha$  unghiul  $\varphi$ . Aflați: 1) proiecția oblicei  $MB$  pe planul  $\alpha$ , dacă distanța de la punctul  $M$  până la acest plan este egală cu  $d$ ; 2) oblica  $MB$ , dacă proiecția ei pe planul  $\alpha$  este egală cu  $a$ .

**36.4.°** Din punctul  $A$  la planul  $\alpha$  este dusă o oblică. Cu ce este egal unghiul dintre oblică și planul  $\alpha$ , dacă distanța de la punctul  $A$  până la planul  $\alpha$ : 1) este egală cu proiecția oblicei pe planul  $\alpha$ ; 2) este de două ori mai mică decât oblica dată?

**36.5.°** Câte oblice, care formează cu planul  $\alpha$  un unghi de  $40^\circ$ , se pot duce din punctul  $A$ , care nu aparține acestui plan?

**36.6.°** Dreapta  $MA$  este perpendiculară la planul  $ABC$  (fig. 36.6),  $AB = AM = 6$  cm,  $AC = 2\sqrt{3}$  cm. Găsiți unghiul, care formează cu planul  $ABC$  dreapta: 1)  $MB$ ; 2)  $MC$ .

**36.7.°** Punctul  $O$  – centrul triunghiului regulat  $ABC$  (fig. 36.7), latura căruia este egală cu 6 cm. Dreapta  $MA$  este perpendiculară pe planul  $ABC$ . Găsiți unghiul dintre dreapta  $MO$  și planul  $ABC$ , dacă  $MA = 2$  cm.

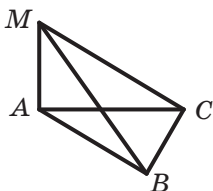


Fig. 36.6

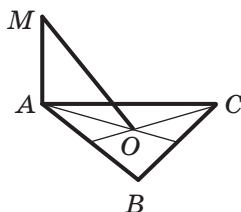


Fig. 36.7

- 36.8.** Demonstrați că oblicele egale, duse la plan dintr-un punct, formează cu acest plan unghiuri egale.
- 36.9.** Demonstrați, că dacă unghiurile formate cu planul de oblicele, duse la el dintr-un punct, sunt egale, atunci sunt egale și înseși oblicele.
- 36.10.** Din punctul  $M$  la planul  $\alpha$  sunt duse perpendiculara  $MB$  și oblicele  $MA$  și  $MC$ . Găsiți unghiul dintre dreapta  $MC$  și planul  $\alpha$ , dacă  $MA = 5\sqrt{2}$  cm,  $MC = 10$  cm, iar unghiul dintre dreapta  $MA$  și planul  $\alpha$  este egal cu  $45^\circ$ .
- 36.11.** Din punctul  $A$  la planul  $\alpha$  sunt duse perpendiculara  $AH$  și oblicele  $AB$  și  $AC$ , care formează cu planul unghiuri egale, corespunzător, cu  $45^\circ$  și  $60^\circ$ . Găsiți segmentul  $AB$ , dacă  $AC = 4\sqrt{3}$  cm.
- 36.12.** Din punctul  $D$  la planul  $\alpha$  sunt duse oblicele  $DA$  și  $DB$ , care formează cu planul dat unghiuri egale cu  $30^\circ$ . Unghiul dintre proiecțiile oblicelor date și planul  $\alpha$  este egal cu  $120^\circ$ . Găsiți distanța dintre bazele oblicelor, dacă  $DA = 2$  cm.
- 36.13.** Din punctul  $B$  la planul  $\alpha$  sunt duse oblice  $BA$  și  $BC$ , care formează cu planul dat unghiuri a câte  $45^\circ$ . Distanța dintre bazele oblicelor este egală cu 16 cm. Găsiți distanța de la punctul  $B$  până la planul  $\alpha$ , dacă unghiul dintre oblice este de  $60^\circ$ .
- 36.14.** Punctul  $A$  este situat la distanța de  $3\sqrt{3}$  cm de la planul  $\alpha$ . Oblicele  $AB$  și  $AC$  formează cu planul unghiuri de  $60^\circ$  și  $45^\circ$  corespunzător, iar unghiul dintre oblice este egal cu  $90^\circ$ . Găsiți distanța dintre bazele oblicelor.
- 36.15.** Din punctul  $M$  la planul  $\alpha$  sunt duse oblicele  $MA$  și  $MB$ . Oblica  $MA$  formează cu planul  $\alpha$  unghi de  $45^\circ$ , iar oblica  $MB$  – unghi de  $30^\circ$ . Găsiți distanța dintre bazele oblicelor, dacă  $MA = 6$  cm, iar unghiul dintre oblice este egal cu  $45^\circ$ .
- 36.16.** Punctul  $M$  este situat la distanța de 12 cm de la fiecare vârf al pătratului  $ABCD$ , unghiul dintre dreapta  $MA$  și planul pătratului este egal cu  $60^\circ$ . Găsiți distanța de la punctul  $M$  până la latura pătratului.

**36.17.** Punctul  $M$  este egal depărtat de la laturile pătratului  $ABCD$ , latura căruia este egală cu  $9\sqrt{6}$  cm și este situat la distanța de 9 cm de la planul pătratului. Găsiți unghiul dintre dreapta  $MA$  și planul pătratului.



### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

**36.18.** Laturile triunghiului sunt egale cu 2 cm,  $2\sqrt{7}$  cm și  $4\sqrt{3}$  cm. Găsiți unghiul triunghiului opus laturii mijlocii a lui.

## 37. Unghi diedru. Unghi dintre plane

În figura 37.1 este reprezentată figura, care constă din două semiplane, care au graniță comună. Această figură împarte spațiul în două părți, care sunt marcate în figura 37.2 cu culori diferite. Fiecare din aceste părți împreună cu semiplanele se numește **unghi diedru**. Semiplanele se numesc **fețe ale unghiului diedru**, iar granița comună – **muchia unghiului diedru**.

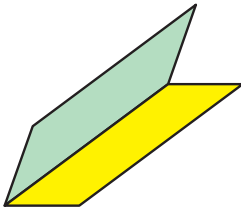


Fig. 37.1

După cum vedem unghiurile diedre «galben» și «albastru», desenate în figura 37.2, sunt esențial diferite. Această deosebire se exprimă prin așa o proprietate. Pe fețele unghiului diedru alegem punctele arbitrare  $M$  și  $N$  (fig. 37.3). Segmentul  $MN$  aparține unghiului diedru «galben», iar unghiului diedru «albastru» îi aparțin numai extremitățile segmentului.

Mai departe spunând «unghi diedru», vom avea în vedere așa un unghi diedru, care conține orice segment cu extremitățile pe fețele lui (unghiul diedru «galben»).

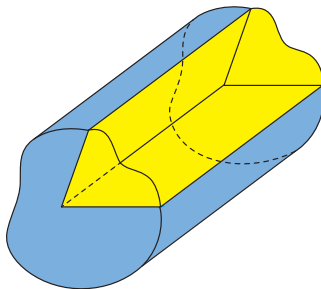


Fig. 37.2

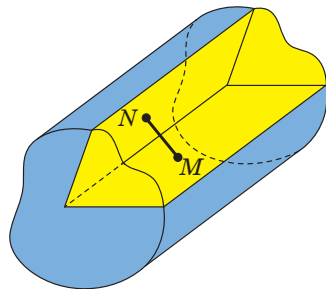


Fig. 37.3



Fig. 37.4

O imagine intuitivă a unghiului diedru este tabla din clasă semi-deschisă, acoperișul în două ape, notebook-ul deschis (fig. 37.4).

Unghiul diedru se consideră analogul spațial a unghiului de pe plan.

Voi deja știți cum de determinat mărimea unghiului pe plan. Să ne învățăm să determinăm mărimea unghiului diedru.

Notăm pe muchia  $MN$  a unghiului diedru un punct arbitrar  $O$ . Prin punctul  $O$  în fețele unghiului diedru ducem semidreptele  $OA$  și  $OB$ , perpendiculare la muchia  $MN$  (fig. 37.5). Unghiul  $AOB$ , format de aceste semidrepte, se numește **unghi liniar al unghiului diedru**. Deoarece  $MN \perp OA$  și  $MN \perp OB$ , atunci  $MN \perp AOB$ . Astfel, *dacă printr-un punct arbitrar al muchiei unghiului diedru se duce un plan perpendicular la muchie, atunci acest plan intersectează unghiul diedru după unghiul liniar al lui*.

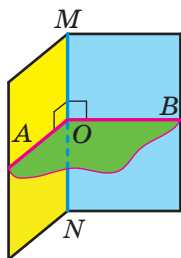


Fig. 37.5

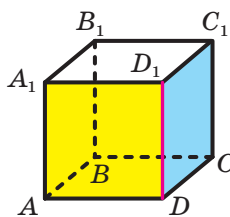


Fig. 37.6

**Definiție.** Mărimea unghiului diedru se numește mărimea unghiului liniar a lui.

Unghiul diedru se numește ascuțit, drept, obtuz sau desfășurat, dacă unghiul liniar a lui respectiv este ascuțit, drept, obtuz sau desfășurat.

De exemplu, să cercetăm cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 37.6). Unghiul diedru cu muchia  $DD_1$ , fețele căruia aparțin planelor  $ADD_1$  și  $CDD_1$ , este drept. Într-adevăr, deoarece  $AD \perp DD_1$  și  $CD \perp DD_1$ , atunci un-

ghiul  $ADC$  – unghi liniar a unghiului diedru cu muchia  $DD_1$ . Unghiul  $ADC$  este drept.

În urma intersecției a două plane se formează patru unghiuri diedre diferite de cel desfășurat (fig. 37.7). Aici sunt posibile două cazuri:

- 1) toate cele patru unghiuri diedre sunt drepte (fig. 37.7, a);
- 2) din patru unghiuri diedre două unghiuri egale sunt ascuțite și două unghiuri egale sunt obtuze (fig. 37.7, b).

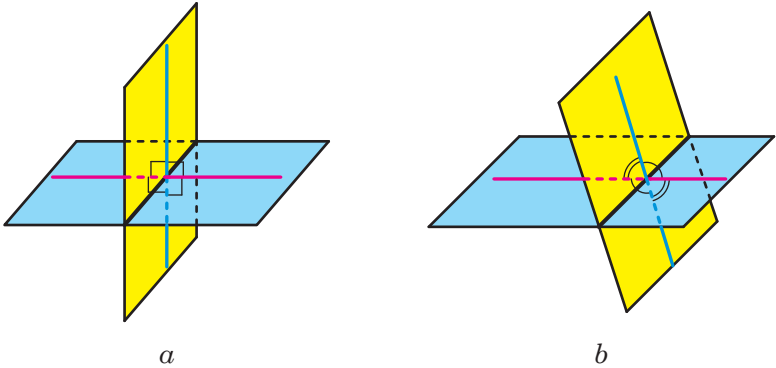


Fig. 37.7

În ambele cazuri din patru unghiuri diedre se va găsi așa un unghi, că mărimea lui nu este mai mare de  $90^\circ$ .

**Definiție.** Unghi dintre două plane ce se intersectează se numește mărimea aceluia din unghiurile diedre formate, care nu este mai mare de  $90^\circ$ . Unghiul dintre două plane paralele este egal cu  $0^\circ$ .

Unghiul dintre un poligon și planul, care nu conține acest poligon, se numește unghiul dintre planul, ce conține poligonul și planul dat.

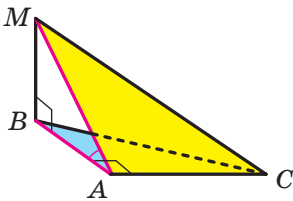


Fig. 37.8

Unghi dintre două poligoane, care se află în plane diferite, se numește unghiul dintre planele, în care se află aceste poligoane.

**Problemă.** Triunghiurile dreptunghice  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) și  $ABM$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) au cateta comună  $AB$  (fig. 37.8). Segmentul  $MB$  este perpendicular pe planul  $ABC$ . Este cunoscut, că  $MB = 4$  cm,  $AC = 6$  cm,  $MC = 10$  cm. Găsiți unghiul dintre planele  $ABC$  și  $AMC$ .

*Rezolvare.* Segmentul  $BA$  este proiecția oblicei  $MA$  pe planul  $ABC$ . Deoarece  $BA \perp AC$ , în virtutea teoremei despre trei perpendiculare  $MA \perp AC$ . Deci, unghiul  $MAB$  – unghi liniar al unghiului diedru cu muchia  $AC$ , fețele căruia aparțin planelor  $ABC$  și  $AMC$ . Deoarece unghiul  $MAB$  este ascuțit, atunci unghiul dintre planele  $ABC$  și  $AMC$  este egal cu mărimea unghiului  $MAB$ .

Pentru latura  $AM$  a triunghiului dreptunghic  $AMC$  se poate scrie:  $AM = \sqrt{MC^2 - AC^2}$ . De aici  $AM = \sqrt{100 - 36} = 8$  (cm).

Pentru unghiul  $MAB$  a triunghiului dreptunghic  $MAB$  se poate scrie:  $\sin \angle MAB = \frac{MB}{MA}$ . De aici  $\sin \angle MAB = \frac{1}{2}$  și  $\angle MAB = 30^\circ$ .

*Răspuns:*  $30^\circ$ . ◀

Are loc teorema, care stabilește legătura dintre aria poligonului dat și aria proiecției lui.

**Teorema 37.1 (aria proiecției ortogonale a poligonului).** *Aria proiecției poligonului convex este egală cu produsul ariei lui și a cosinusului unghiului  $\alpha$  făcut de poligon și proiecția lui, unde  $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ .*

**Definiție.** Două plane se numesc **perpendiculare**, dacă unghiul dintre ele este egal cu  $90^\circ$ .

Dacă planele  $\alpha$  și  $\beta$  sunt perpendiculare, atunci se scrie:  $\alpha \perp \beta$ . De asemenea este primit de spus, că planul  $\alpha$  este perpendicular pe planul  $\beta$ , sau planul  $\beta$  este perpendicular pe planul  $\alpha$ .

O reprezentare intuitivă despre planele perpendiculare este dată de planul peretelui și al podului camerei, planul ușii și al podelei, planul plasei și a terenului de tenis (figura 37.9).



Fig. 37.9

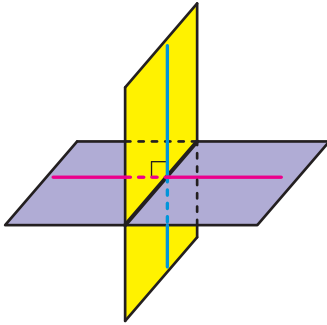


Fig. 37.10

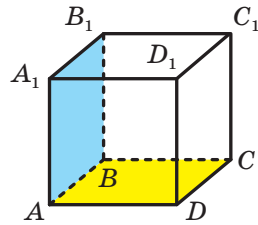


Fig. 37.11

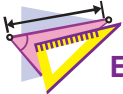
Evident, că plane perpendiculare în urma intersecției formează patru unghiuri diedre drepte (fig. 37.10).

**Teorema 37.2 (criteriul de perpendicularitate al planelor).** *Dacă unul din două plane trece prin dreapta, care este perpendiculară pe cel de-al doilea plan, atunci aceste plane sunt perpendiculare.*

De exemplu, planul feței  $AA_1B_1B$  al paralelipipedului dreptunghiular  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 37.11) este perpendicular pe planul feței  $ABCD$ . Într-adevăr, planul  $AA_1B_1$  trece prin dreapta  $AA_1$  care este perpendiculară pe planul  $ABCD$ .



1. Care figură se numește unghi liniar al unghiului diedru?
2. Ce se numește mărime a unghiului diedru?
3. Ce se numește unghi dintre două plane, care se intersectează?
4. Cu ce este egal unghiul dintre două plane paralele?
5. Formulați teorema despre aria proiecției ortogonale a poligonului.
6. Care plane se numesc perpendiculare?
7. Formulați criteriul de perpendicularitate al planelor.



## EXERCIȚII

**37.1.°** Arătați pe obiectele care vă înconjoară, modele de unghiuri diedre.

**37.2.°** Se dă cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 37.12).

- 1) Dintre unghiurile date indicați unghiul liniar al unghiului diedru, fețele cărui aparțin planelor  $ABC$  și  $AB_1C_1$ :
  - a)  $\angle A_1AB$ ;   b)  $\angle A_1AB_1$ ;   c)  $\angle B_1DA$ ;   d)  $\angle B_1AB$ ;   e)  $\angle B_1DB$ .
- 2) Găsiți mărimea unghiului diedru dat.

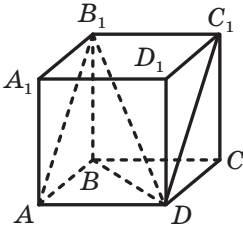


Fig. 37.12

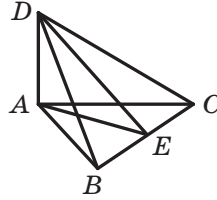


Fig. 37.13

37.3.° Segmentul  $AD$  – perpendiculara pe planul triunghiului regulat  $ABC$  (fig. 37.13), punctul  $E$  – mijlocul laturii  $BC$ . Dintre unghiurile date indicați unghiul liniar al unghiului diedru, fețele căruia aparțin planelor  $ABC$  și  $BCD$ :

- 1)  $\angle ABD$ ;      2)  $\angle AED$ ;      3)  $\angle BAD$ ;      4)  $\angle ACD$ .

37.4.° Pe una dintre fețele unghiului diedru, mărimea căruia este egală cu  $30^\circ$ , este notat punctul  $A$  (fig. 37.14). Distanța de la punctul  $A$  până la muchia unghiului diedru este egală cu 18 cm. Cu ce este egală distanța de la punctul  $A$  până la a doua față a unghiului diedru?

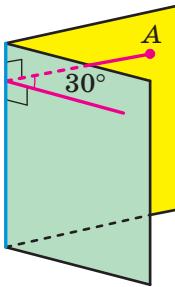


Fig. 37.14

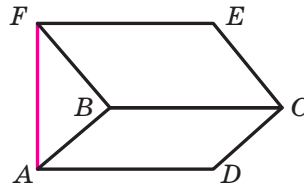


Fig. 37.15

37.5.° Pe una din fețele unghiului diedru ascuțit este notat un punct, distanța de la care până la altă față este egală cu  $4\sqrt{3}$  cm, iar până la muchia unghiului diedru – cu 8 cm. Care este mărimea unghiului diedru dat?

37.6.° Dreptunghiurile  $ABCD$  și  $BCEF$  sunt situate în plane diferite (fig. 37.15), totodată dreapta  $AF$  este perpendiculară pe planul  $ABC$ . Găsiți unghiul diedru fețele căruia conțin dreptunghiurile date, dacă  $AF = \sqrt{15}$  cm,  $CD = \sqrt{5}$  cm.



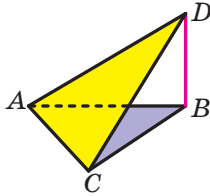


Fig. 37.16

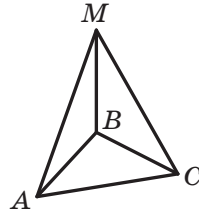


Fig. 37.17

**37.7.°** Трикутники  $ABC$  і  $ACD$  знаходяться в різних площинах (fig. 37.16), при цьому пряма  $BD$  перпендикулярна до площини  $ABC$ . Знайдіть кут двох площ, що містять дані трикутники, якщо  $\angle ACD = 90^\circ$ ,  $BC = 6$  см,  $CD = 12$  см.

**37.8.°** Дано площину  $\alpha$  і пряму  $a$ , паралельну їй. Скільки таких площ можна провести через пряму  $a$ , щоб кут  $\varphi$  між площиною  $\alpha$  і площиною, що проходить через  $a$ , задовольняв умову:

- 1)  $\varphi = 90^\circ$ ;                      2)  $\varphi = 0^\circ$ ;                      3)  $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ ?

**37.9.°** Відрізок  $MB$  – перпендикуляр до площини рівностороннього трикутника  $ABC$  (fig. 37.17). Знайдіть кут між площинами  $ABM$  і  $CBM$ .

**37.10.°** Відрізок  $CE$  – перпендикуляр до площини квадрата  $ABCD$  (fig. 37.18). Знайдіть кут між площинами  $BCE$  і  $DCE$ .

**37.11.°** Відрізок  $BK$  – перпендикуляр до площини ромба  $ABCD$  (fig. 37.19),  $\angle ABC = 100^\circ$ . Знайдіть кут між площинами  $ABK$  і  $CBK$ .

**37.12.°** Знайдіть площу проекції багатокутника на будь-який площину, якщо площа багатокутника дорівнює  $18\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>, а кут між площиною багатокутника і площиною проекції дорівнює  $45^\circ$ .

**37.13.°** Знайдіть площу багатокутника, якщо площа його проекції на будь-який площину дорівнює  $24$  см<sup>2</sup>, а кут між площиною багатокутника і площиною проекції дорівнює  $30^\circ$ .

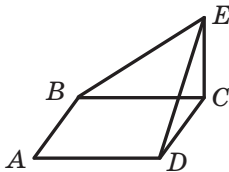


Fig. 37.18

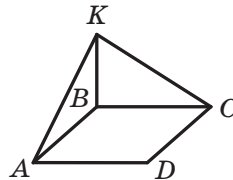


Fig. 37.19

**37.14.**° Arătați pe obiectele care vă înconjoară, modele de plane perpendiculare.

**37.15.**° În figura 37.20 este desenat cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Determinați, dacă sunt oare perpendiculare planele:

- |                               |                          |
|-------------------------------|--------------------------|
| 1) $A_1 B_1 C_1$ și $CDD_1$ ; | 3) $AA_1 C_1$ și $ABC$ ; |
| 2) $ABC$ și $A_1 B_1 C_1$ ;   | 4) $ACC_1$ și $BDD_1$ .  |

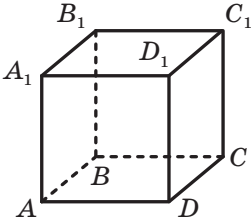


Fig. 37.20

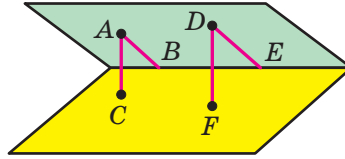


Fig. 37.21

**37.16.**° Pe o față a unghiului diedru ascuțit sunt notate punctele  $A$  și  $D$  (fig. 37.21). Din punctul  $A$  au coborât perpendicularele  $AB$  și  $AC$  corespunzător pe muchie și pe a doua față a unghiului diedru. Din punctul  $D$ , sunt coborâte perpendicularele  $DE$  și  $DF$  corespunzător, pe muchie și pe a doua față a unghiului diedru. Găsiți segmentul  $DE$ , dacă  $AB = 21$  cm,  $AC = 12$  cm,  $DF = 20$  cm.

**37.17.**° Pe o față a unghiului diedru ascuțit sunt notate punctele  $A$  și  $B$ , depărtate de la cea de-a doua față cu 14 cm și 8 cm corespunzător. Distanța de la punctul  $A$  până la muchia unghiului diedru este egală cu 42 cm. Găsiți distanța de la punctul  $B$  până la muchia unghiului diedru.

**37.18.**° Bazele trapezului isoscel sunt egale cu 10 cm și 18 cm, iar latura laterală – 8 cm. Găsiți aria proiecției trapezului dat pe planul  $\alpha$ , dacă unghiul dintre planul trapezului și planul  $\alpha$  este egal cu  $30^\circ$ .

**37.19.**° Prin una din laturile rombului, diagonalele căruia sunt egale cu 6 cm și 12 cm, este dus planul  $\alpha$ , care formează cu planul rombului un unghi de  $30^\circ$ . Aflați aria proiecției rombului dat pe planul  $\alpha$ .

**37.20.**° Punctul  $B$  este situat în interiorul unghiului diedru și este depărtat de la fețele lui cu  $\sqrt{2}$  cm și  $\sqrt{3}$  cm, iar de la muchie – cu 2 cm. Găsiți unghiul diedru dat.

**37.21.**° Punctul  $C$  este situat în interiorul unghiului diedru. Unghiul dintre perpendicularele coborâte din punctul  $C$  pe fețele unghiului diedru este egal cu  $110^\circ$ . Găsiți unghiul diedru dat.

- 37.22.** Pe fețele unghiului diedru, care este egal cu  $45^\circ$ , sunt duse drepte, paralele cu muchia lui și îndepărtate de la muchie cu  $2\sqrt{2}$  cm și 3 cm corespunzător. Găsiți distanța dintre dreptele paralele date.
- 37.23.** Planul  $\alpha$  intersectează fețele unghiului diedru după dreptele paralele  $m$  și  $n$ . Distanța de la muchia unghiului diedru până la dreapta  $m$  este egală cu 3 cm, până la dreapta  $n$  – 5 cm, iar distanța dintre dreptele  $m$  și  $n$  este de 7 cm. Găsiți unghiul diedru dat.
- 37.24.** Planele dreptunghiurilor  $ABCD$  și  $CBFE$  sunt perpendiculare (fig. 37.22). Găsiți distanța de la punctul  $E$  până la dreapta  $AD$  și distanța de la punctul  $D$  până la dreapta  $BF$ , dacă  $AB = BF = 5$  cm,  $BC = 12$  cm.

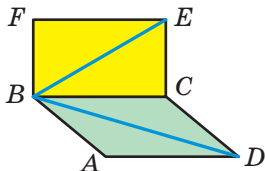


Fig. 37.22

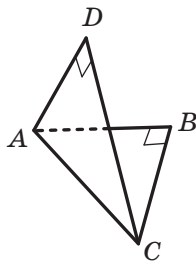


Fig. 37.23

- 37.25.** Planele triunghiurilor regulate  $ABC$  și  $ADC$  sunt perpendiculare. Găsiți unghiul dintre dreapta  $BD$  și planul  $ABC$ .
- 37.26.** Triunghiurile isoscele dreptunghice  $ABC$  și  $ADC$  au ipotenuza  $AC$  comună cu lungimea de 6 cm, iar planele lor sunt perpendiculare (fig. 37.23). Aflați distanța dintre punctele  $B$  și  $D$ .
- 37.27.** Capetele segmentului aparțin la două plane perpendiculare, iar distanțele de la capetele segmentului până la linia de intersecție a planelor sunt egale cu 15 cm și 16 cm. Distanța dintre bazele perpendicularelor, duse din capetele segmentului pe linia de intersecție a acestor plane, este egală cu 12 cm. Găsiți segmentul dat.
- 37.28.** Punctele  $A$  și  $B$  sunt situate în planele perpendiculare  $\alpha$  și  $\beta$  corespunzător. Din punctele  $A$  și  $B$  sunt coborâte perpendicularele  $AC$  și  $BD$  pe linia de intersecție a planelor  $\alpha$  și  $\beta$ . Găsiți distanța de la punctul  $B$  până la linia de intersecție a planelor  $\alpha$  și  $\beta$ , dacă distanța de la punctul  $A$  până la această linie este egală cu 9 cm,  $AB = 17$  cm,  $CD = 12$  cm.
- 37.29.** Planele  $\alpha$  și  $\beta$  sunt perpendiculare. Punctul  $A$  este situat în planul  $\alpha$ , iar punctul  $B$  – în planul  $\beta$ . Punctul  $A$  este depărtat de

la linia de intersecție a planelor  $\alpha$  și  $\beta$  cu 5 cm, iar punctul  $B$  – cu  $5\sqrt{2}$  cm. Găsiți unghiul dintre dreapta  $AB$  și planul  $\alpha$ , dacă unghiul dintre dreapta  $AB$  și planul  $\beta$  este egal cu  $30^\circ$ .

- 37.30.\*\*** Capetele segmentului cu lungimea de 6 cm aparțin la două plane perpendiculare, iar distanțele de la capetele segmentului până la linia de intersecție a planelor sunt egale cu 3 cm și  $3\sqrt{3}$  cm. Aflați unghiurile, pe care le face acest segment cu planele date.
- 37.31.\*\*** Planele trapezelor  $ABCD$  și  $AEFD$  cu baza comună  $AD$  sunt perpendiculare,  $\angle BAD = \angle EAD = 90^\circ$ ,  $\angle ADC = \angle ADF = 60^\circ$ ,  $CD = 4$  cm,  $DF = 8$  cm. Aflați distanța dintre: 1) dreptele  $BC$  și  $EF$ ; 2) punctele  $C$  și  $F$ .
- 37.32.\*\*** Planul pătratului  $ABCD$  și planul dreptunghiului  $AEFD$  sunt perpendiculare. Aflați distanța dintre dreptele  $BC$  și  $EF$ , dacă aria pătratului este egală cu  $25$  cm<sup>2</sup>, iar aria dreptunghiului –  $60$  cm<sup>2</sup>.
- 37.33.\*\*** Muchia  $DA$  a tetraedrului  $DABC$  este perpendiculară pe planul  $ABC$  (fig. 37.24),  $AB = BC = AC = 8$  cm,  $BD = 4\sqrt{7}$  cm. Găsiți unghiul diedru, fețele căruia conțin triunghiurile  $ABC$  și  $BCD$ .

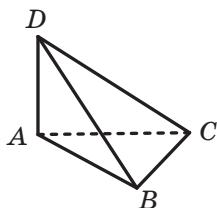


Fig. 37.24

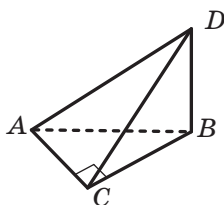


Fig. 37.25

- 37.34.\*\*** Muchia  $DB$  a tetraedrului  $DABC$  este perpendiculară pe planul  $ABC$  (fig. 37.25),  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = BC = 7$  cm,  $AD = 7\sqrt{5}$  cm. Găsiți unghiul diedru, fețele căruia conțin triunghiurile  $ABC$  și  $ACD$ .
- 37.35.\*** Punctul  $M$  este mijlocul muchiei  $CC_1$  a cubului  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Aflați unghiul dintre planele  $BMD$  și  $A_1 BD$ .



## EXERCIȚII PENTRU REPETARE

- 37.36.** Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 15 cm și 25 cm, iar mediana, dusă la a treia latură este egală cu 16 cm. Aflați a treia latură a triunghiului.

**PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 5****Unghiul dintre drepte în spațiu**

Unghiul dintre drepte, ce se intersectează, se numește mărimea aceluia din unghiurile, create la intersecția lor, care nu este mai mare de  $90^\circ$ .

Se consideră, că unghiul dintre două drepte paralele este egal cu  $0^\circ$ .

Unghiul dintre două drepte neconcurente se numește unghiul dintre drepte, care se intersectează și respectiv sunt paralele cu dreptele neconcurente date.

Două drepte în spațiu se numesc perpendiculare, dacă unghiul dintre ele este egal cu  $90^\circ$ .

**Perpendicularitatea dreptei și a planului**

Dreapta se numește perpendiculară pe plan, dacă ea este perpendiculară la orice dreaptă, ce aparține acestui plan.

Dacă dreapta este perpendiculară pe două drepte, ce se află într-un plan și se intersectează, atunci ea este perpendiculară și pe acest plan.

Dacă una din două drepte paralele este perpendiculară pe un plan, atunci și a doua dreaptă este perpendiculară pe acest plan.

Dacă două drepte sunt perpendiculare pe unul și același plan, atunci ele sunt paralele.

Printr-un punct dat se poate duce o dreaptă, perpendiculară la planul dat, și numai una singură.

**Proiecția ortogonală a figurii**

Fie că figura  $F_1$  este proiecția paralelă a figurii  $F$  pe planul  $\alpha$  în direcția  $l$ . Dacă  $l \perp \alpha$ , atunci figura  $F_1$  este numită proiecția ortogonală a figurii  $F$  pe planul  $\alpha$ .

**Distanța de la punct până la plan**

Dacă punctul nu aparține planului, atunci distanța de la punctul dat până la plan se numește lungimea perpendicularei, coborâte din acest punct pe plan. Dacă punctul aparține planului, atunci se consideră ca distanța de la punct până la plan este egală cu zero.

**Distanța de la dreaptă până la planul, paralel ei**

Distanța de la o dreaptă până la planul, paralel ei, se numește distanța de la orice punct al acestei drepte până la plan.

**Distanța dintre două plane paralele**

Distanța dintre două plane paralele se numește distanța de la orice punct al unui plan până la alt plan

**Teorema celor trei perpendiculare**

Dacă dreapta care aparține unui plan, este perpendiculară pe proiecția unei oblice pe acest plan, atunci ea este perpendiculară și pe însăși oblica dată. Și invers, dacă dreapta, care aparține planului, este perpendiculară pe oblica dusă la acest plan, atunci ea este perpendiculară și pe proiecția ei pe acest plan.

**Unghiul dintre o dreaptă și plan**

Dacă dreapta este paralelă cu planul sau îi aparține lui, atunci se consideră ca unghiul dintre o astfel de dreaptă și plan este egal cu  $0^\circ$ .

Dacă dreapta este perpendiculară pe plan, atunci se consideră că unghiul făcut de o astfel de dreaptă și plan este egal cu  $90^\circ$ .

Dacă dreapta intersectează planul și nu este perpendiculară pe el, atunci unghiul dintre o astfel de dreaptă și plan se numește unghiul dintre dreaptă și proiecția ei pe acest plan.

**Mărimea unghiului diedru**

Mărimea unghiului diedru se numește mărimea unghiului liniar al lui.

**Unghiul dintre două plane, ce se intersectează**

Unghiul dintre două plane, ce se intersectează, se numește mărimea aceluși unghi din unghiurile diedre create, care nu este mai mare de  $90^\circ$ .

**Aria proiecției ortogonale a poligonului**

Aria proiecției ortogonale a poligonului convex este egală cu produsul ariei lui și a cosinusului unghiului  $\alpha$  dintre poligon și proiecția lui, unde  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ .

**Plane perpendiculare**

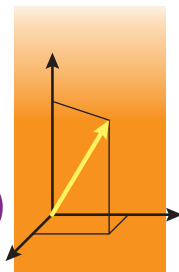
Două plane se numesc perpendiculare dacă unghiul dintre ele este egal cu  $90^\circ$ .

**Criteriul de perpendicularitate al planelor**

Dacă unul din plane trece printr-o dreaptă, perpendiculară pe alt plan, atunci aceste plane sunt perpendiculare.

# COORDONATE ȘI VECTORI ÎN SPAȚIU

## §6



În acest paragraf voi o să face cunoștință cu sistemul cartezian de coordonate în spațiu, o să vă învățați a afla coordonatele punctelor în spațiu, lungimea segmentului și coordonatele mijlocului lui.

O să generalizați și extindeți cunoștințele voastre despre vectori.

### 38. Sistemul cartezian de coordonate în spațiu

În clasele anterioare ați făcut cunoștință cu sistemul rectangular de coordonate pe plan – acestea-s două drepte de coordonate perpendiculare cu origine comună de referință (fig. 38.1).

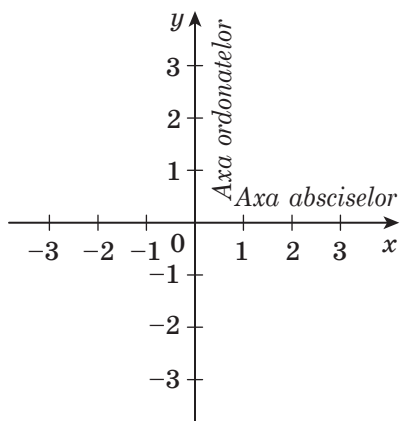


Fig. 38.1

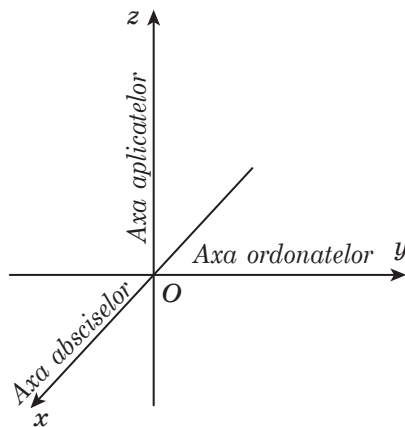


Fig. 38.2

Sistemul de coordonate se poate introduce și în spațiu.

**Sistem rectangular de coordonate în spațiu** se numește trei drepte de coordonate reciproc perpendiculare două câte două cu origine comună de referință (fig. 38.2). Punctul, în care se intersectează cele trei drepte de coordonate, se înseamnă cu litera  $O$ . El se numește **originea de coordonate**. Dreptele de coordonate se înseamnă cu literele  $x$ ,  $y$  și  $z$ , ele se numesc respectiv **axa absciselor**, **axa ordonatelor** și **axa aplicatelor**.

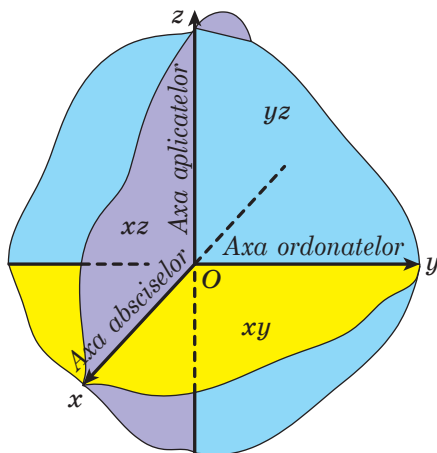


Fig. 38.3

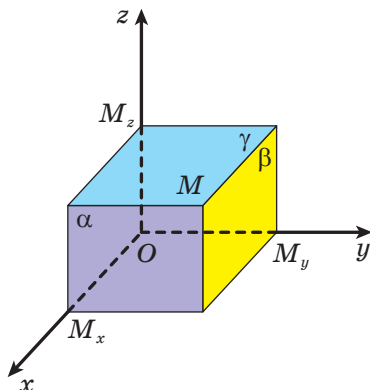


Fig. 38.4

Planele, care trec prin perechile dreptelor de coordonate  $x$  și  $y$ ,  $x$  și  $z$ ,  $y$  și  $z$ , se numesc **plane de coordonate**, ele se înseamnă corespunzător  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$  (fig. 38.3).

Spațiul în care este dat sistemul de coordonate, se numește **spațiu de coordonate**. Dacă axele de coordonate sunt însemnate cu literele  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , atunci spațiul de coordonate se înseamnă  $xyz$ .

Din cursul de planimetrie cunoașteți, că fiecărui punct  $M$  al planului de coordonate  $xy$  i se pun în corespondență două numere ordonate  $(x, y)$ , care sunt numite coordonatele punctului  $M$ . Se înseamnă astfel:  $M(x; y)$ .

Analogic fiecărui punct  $M$  al spațiului de coordonate i se pune în corespondență tripletul de numere ordonate  $(x, y, z)$ , care este determinat astfel. Ducem prin punctul  $M$  trei plane  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  perpendiculare pe axele de coordonate  $x$ ,  $y$  și  $z$  corespunzător. Punctele de intersecție ale planelor cu axele de coordonate le înseamnă  $M_x$ ,  $M_y$  și  $M_z$  (fig. 38.4). Coordonata punctului  $M_x$  pe axa  $x$  se numește **abscisa** punctului  $M$  și se înseamnă cu litera  $x$ . Coordonata punctului  $M_y$  pe axa  $y$  se numește **ordonata** punctului  $M$  și se înseamnă cu litera  $y$ . Coordonata punctului  $M_z$  pe axa  $z$  se numește **aplicata** punctului  $M$  și se înseamnă cu litera  $z$ .

Aceste trei numere ordonate obținute  $(x; y; z)$  în așa un mod se numesc **coordonatele punctului  $M$**  în spațiu. Se scrie astfel:  $M(x; y; z)$ .

Dacă punctul  $M$  are coordonatele  $M(x; y; z)$ , atunci numerele  $|x|$ ,  $|y|$ ,  $|z|$ , sunt egale cu distanța de la punctul  $M$  până la planele  $yz$ ,  $xz$ ,  $xy$ . Folosind acest fapt, se poate demonstra, de exemplu, că punctele cu coordonatele  $M(x; y; z)$  și  $N(x; y; -z)$  se află pe dreapta,



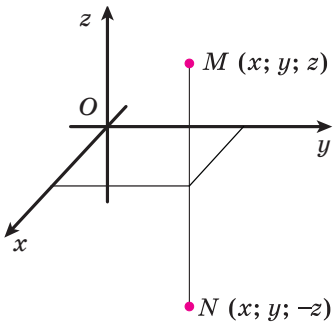


Fig. 38.5

perpendiculară la planul  $xy$ , și sunt egal depărtate de la acest plan (fig.38.5). În asemenea caz se spune, că punctele  $M$  și  $N$  sunt **simetrice față de planul  $xy$** .

Dacă punctul aparține unui plan de coordonate sau unei axe de coordonate, atunci unele coordonate ale lui sunt egale cu zero. De exemplu, punctul  $A(x; y; 0)$  aparține planului de coordonate  $xy$ , iar punctul  $B(0; 0; z)$  – axei aplicatelor.

Este adevărată afirmația.

**Teorema 38.1.** *Distanța dintre două puncte  $A(x_1; y_1; z_1)$  și  $B(x_2; y_2; z_2)$  se poate afla cu formula*

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

**Teorema 38.2.** *Fiecare coordonată a mijlocului unui segment este egală cu semisuma coordonatelor corespunzătoare ale extremităților lui, adică mijlocul segmentului cu capetele în punctele  $A(x_1; y_1; z_1)$  și  $B(x_2; y_2; z_2)$  este punctul*

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Demonstrarea teoremelor 38.1 și 38.2 este analogică, cu demonstrațiile teoremelor corespunzătoare din cursul de planimetrie.

De exemplu, mijlocul segmentului cu capetele în punctele  $A(x; y; z)$  și  $B(-x; -y; -z)$  este originea de coordonate – punctul  $O(0; 0; 0)$ . În asemenea caz se spune, că punctele  $A$  și  $B$  sunt **simetrice față de originea de coordonate**.



1. Cum se numesc trei drepte de coordonate perpendiculare două câte două cu originea comună de referință?
2. Cum se numește dreapta de coordonate însemnată prin litera  $x$ ? litera  $y$ ? litera  $z$ ?
3. Descrieți în ce mod fiecărui punct  $M$  al spațiului de coordonate i se pune în corespondență tripletul ordonat de numere  $(x; y; z)$ .
4. În care caz se spune, că două puncte sunt simetrice față de planul de coordonate  $xy$ ? planul  $xz$ ? planul  $yz$ ?
5. Cum de găsit distanța dintre două puncte, dacă sunt cunoscute coordonatele lor?

6. Cum de găsit coordonatele mijlocului unui segment, dacă sunt cunoscute coordonatele extremităților lui?
7. În care caz se spune că două puncte sunt simetrice față de originea de coordonate?



## EXERCIIII

- 38.1.°** Determinați, dacă se află oare punctul dat pe axa de coordonate, și în cazul răspunsului afirmativ, indicați această axă:  
 1)  $A(4; -3; 0)$ ;                      3)  $C(-6; 0; 0)$ ;                      5)  $E(0; 0; -2)$ ;  
 2)  $B(1; 0; -5)$ ;                      4)  $D(0; 7; 0)$ ;                      6)  $F(3; 0; 0)$ .
- 38.2.°** Determinați, dacă se află oare punctul dat pe planul de coordonate, și în cazul răspunsului afirmativ, indicați acest plan:  
 1)  $A(4; -3; 5)$ ;                      3)  $C(3; 3; 0)$ ;                      5)  $E(0; 4; 0)$ ;  
 2)  $B(0; -2; 6)$ ;                      4)  $D(2; 0; 8)$ ;                      6)  $F(-1; 1; 2)$ .
- 38.3.°** Care este distanța de la punctul  $M(4; -5; 2)$  până la planul de coordonate:  
 1)  $xy$ ;                                      2)  $xz$ ;                                      3)  $yz$ ?
- 38.4.°** Ce coordonate are proiecția punctului  $M(-3; 2; 4)$  pe planul de coordonate:  
 1)  $xz$ ;                                      2)  $yz$ ;                                      3)  $xy$ ?
- 38.5.°** Aflați distanța dintre punctele  $A$  și  $B$ , dacă:  
 1)  $A(3; -4; 2)$ ,  $B(5; -6; 1)$ ;                      2)  $A(-2; 3; 1)$ ,  $B(-3; 2; 0)$ .
- 38.6.°** Aflați distanța dintre punctele  $C(6; -5; -1)$  și  $D(8; -7; 1)$ .
- 38.7.°** Determinați coordonatele mijlocului segmentului  $CD$ , dacă  $C(-2; 6; -7)$ ,  $D(4; -10; -3)$ .
- 38.8.°** Găsiți coordonatele mijlocului segmentului  $EF$ , dacă  $E(3; -3; 10)$ ,  $F(1; -4; -8)$ .
- 38.9.\*** Care din punctele  $A(-1; 6; 2)$ ,  $B(-1; -6; 2)$ ,  $C(1; 6; -2)$ ,  $D(1; -6; 2)$  se află într-un plan, paralel cu planul  $xz$ ?
- 38.10.\*** Care din punctele  $M(5; 10; -3)$ ,  $N(5; 9; 3)$ ,  $K(4; -9; 3)$ ,  $P(4; -9; 2)$  se află într-un plan, paralel cu planul  $xy$ ?
- 38.11.\*** Ce coordonate are punctul, simetric cu punctul  $M(1; -5; 2)$  față de planele:  
 1)  $xz$ ;                                      2)  $yz$ ;                                      3)  $xy$ ?
- 38.12.\*** Ce coordonate are punctul, simetric cu punctul  $N(-7; 1; 0)$  față de originea de coordonate:
- 38.13.\*** Care din punctele  $A(5; -8; 1)$ ,  $B(5; 8; 1)$ ,  $C(-5; 7; 1)$ ,  $D(5; -7; -1)$  se află pe o dreaptă, paralelă cu axa ordonatelor?

- 38.14.\*** Care din punctele  $D(2; 3; 4)$ ,  $E(-2; 3; 4)$ ,  $K(2; 3; -4)$ ,  $M(-2; -3; 4)$  se află pe o dreaptă, paralelă cu axa aplicatelor?
- 38.15.\*** Cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  este amplasat în sistemul rectangular de coordonate, așa cum este prezentat în figura 38.6. Punctul  $A$  are coordonatele  $(1; -1; 0)$ . Aflați coordonatele celorlalte vârfuri ale cubului.

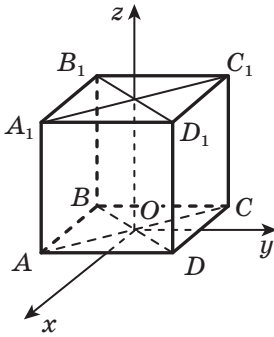


Fig. 38.6

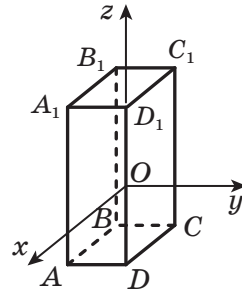


Fig. 38.7

- 38.16.\*** Muchiile laterale ale paralelipipedului dreptunghiular  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  sunt paralele cu axa aplicatelor (fig. 38.7),  $AD = 3$ ,  $AB = 5$ ,  $AA_1 = 8$ . Originea de coordonate, punctul  $O$ , este mijlocul muchiei  $DD_1$ . Aflați coordonatele vârfurilor paralelipipedului.
- 38.17.\*** Punctele  $A(3; -2; 6)$  și  $C(-1; 2; -4)$  sunt vârfurile unui pătrat  $ABCD$ . Găsiți aria acestui pătrat.
- 38.18.\*** Punctele  $A(5; -5; 4)$  și  $B(8; -3; 3)$  sunt vârfurile unui triunghi echilateral  $ABC$ . Găsiți perimetrul acestui triunghi.
- 38.19.\*** Punctul  $S$  – mijlocul segmentului  $AD$ ,  $A(-1; -2; -3)$ ,  $S(5; -1; 0)$ . Aflați coordonatele punctului  $D$ .
- 38.20.\*** Distanța dintre punctele  $A(1; y; 3)$  și  $B(3; -6; 5)$  este egală cu  $2\sqrt{6}$ . Aflați valoarea lui  $y$ .
- 38.21.\*** Punctul  $A$  se află pe axa absciselor. Distanța de la punctul  $A$  până la punctul  $C(1; -1; -2)$  este egală cu 3. Aflați coordonatele punctului  $A$ .
- 38.22.\*\*** Găsiți distanța de la punctul  $M(-3; 4; 9)$  până la axa aplicatelor.
- 38.23.\*\*** Găsiți distanța de la punctul  $K(12; 10; -5)$  până la axa ordonatelor.



## EXERCITII PENTRU REPETARE

- 38.24.** Bazele trapezului isoscel sunt egale cu 13 cm și 37 cm, iar diagonalele lui sunt perpendiculare. Aflați aria trapezului.

## 39. Vectorii în spațiu

În cursul de planimetrie voi ați studiat vectorii pe plan. Acum voi începeți studierea vectorilor în spațiu. Multe noțiuni și proprietăți, legate cu vectorii pe plan, se pot aproape cuvânt cu cuvânt de la atribuit vectorilor în spațiu. Demonstrarea a astfel de afirmații despre vectorii în spațiu este în totalitate analogică cu demonstrațiile afirmațiilor corespunzătoare despre vectorii din plan.

Să examinăm segmentul  $AB$ . Dacă noi convenim ca punctul  $A$  să-l considerăm începutul (**originea**) segmentului, iar punctul  $B$  – **sfârșitul (extremitatea)** lui, atunci astfel de segment se va caracteriza nu numai cu lungimea, dar și cu direcția de la punctul  $A$  până la punctul  $B$ . Dacă este indicat, care punct este originea segmentului, și care punct – extremitatea lui, atunci astfel de segment se numește **segment orientat** sau **vector**.

Vectorul cu originea în punctul  $A$  și extremitatea în punctul  $B$  se înseamnă astfel  $\overline{AB}$  (se citește: "vectorul  $AB$ "). Pentru însemnarea vectorilor de asemenea se folosesc literele mici ale alfabetului latin care săgeți deasupra.

În figura 39.1. sunt prezentați vectorii  $\overline{AB}$ ,  $\overline{MN}$  și  $\vec{p}$ .

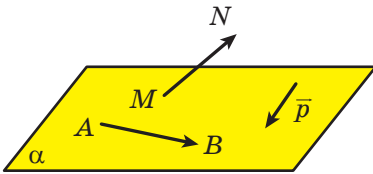


Fig. 39.1

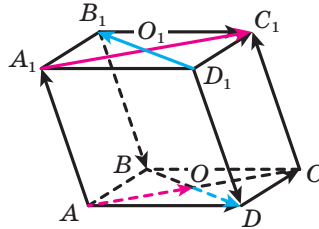


Fig. 39.2

În comparație cu segmentul, la care capetele sunt puncte diferite, la vector originea și extremitatea pot să coincidă.

Au convenit de numit vectorul, la care originea și extremitatea este unul și același punct, **vector nul** sau **nul-vector** și să-l însemne  $\vec{0}$ .

**Modulul** vectorului  $\overline{AB}$  se numește lungimea segmentului  $AB$ . Se înseamnă:  $|\overline{AB}|$ . Modulul vectorului  $\vec{a}$  se înseamnă astfel:  $|\vec{a}|$ . Se consideră că modulul vectorului nul este egal cu zero. Se scrie  $|\vec{0}| = 0$ .

**Definiție.** Doi vectori nenuli se numesc **coliniari**, dacă ei se află pe drepte paralele sau pe aceeași dreaptă. Vectorul nul este **considerat coliniar oricărui vector**.

În figura 39.2 este reprezentată prisma patrulateră  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Vectorii  $\overline{AO}$  și  $\overline{A_1 C_1}$  sunt coliniari. Se scrie:  $\overline{AO} \parallel \overline{A_1 C_1}$ .

Vectorii nenuli coliniari pot fi **coorientați** și **orientați opus**. De exemplu, în figura 39.2 vectorii  $\overline{AO}$  și  $\overline{A_1C_1}$  sunt coorientați. Se scrie  $\overline{AO} \uparrow\uparrow \overline{A_1C_1}$ . Vectorii  $\overline{OD}$  și  $\overline{D_1B_1}$  sunt orientați opus. Se scrie:  $\overline{OD} \uparrow\downarrow \overline{D_1B_1}$ .

**Definiție.** Doi vectorii nenuli se numesc **egali**, dacă **modulii lor sunt egali și ei sunt coorientați**. Oricare doi vectori nuli sunt egali.

În figura 39.2  $\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$ ,  $\overline{B_1B} = \overline{D_1D}$ ,  $\overline{O_1C_1} = \overline{AO}$ ,  $\overline{AD} = \overline{B_1C_1}$ .

Frecvent vorbind despre vectori, noi nu concretizăm, care punct este originea vectorului. Astfel în figura 39.3,  $\vec{a}$  este prezentat vectorul  $\vec{a}$ . În figura 39.3,  $b$  sunt prezentați vectorii, egali cu vectorul  $\vec{a}$ . Fiecare din ei de asemenea este primit să fie numit vectorul  $\vec{a}$ .

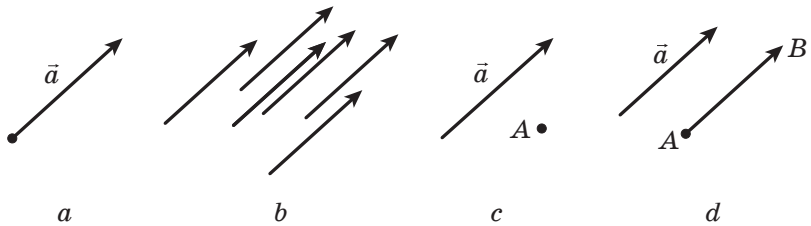


Fig. 39.3

În figura 39.3,  $c$  este prezentat vectorul  $\vec{a}$  și punctul  $A$ . Să construim vectorul  $\overline{AB}$ , care este egal cu vectorul  $\vec{a}$ . În acest caz se spune, că vectorul  $\vec{a}$  **este depus de la punctul  $A$**  (fig. 39.3,  $d$ ).

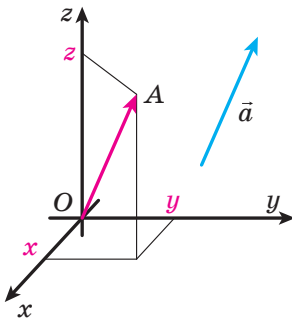


Fig. 39.4

Să examinăm în spațiul de coordonate vectorul  $\vec{a}$ . De la originea de coordonate depunem vectorul  $\overline{OA}$ , egal cu vectorul  $\vec{a}$  (fig. 39.4). **Coordonatele vectorului  $\vec{a}$**  se numesc **coordonatele punctului  $A$** . Scrierea  $\vec{a}(x; y; z)$  înseamnă, că vectorul  $\vec{a}$  are coordonatele  $(x; y; z)$ .

*Vectorii egali au coordonatele corespunzătoare egale, și invers, dacă coordonatele corespunzătoare ale vectorilor sunt egale, atunci și înșiși vectorii sunt egali.*

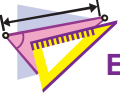
**Teorema 39.1.** Dacă punctele  $A(x_1; y_1; z_1)$  și  $B(x_2; y_2; z_2)$  sunt corespunzător coordonatele originii și extremității vectorului  $\vec{a}$ , atunci numerele  $x_2 - x_1$ ,  $y_2 - y_1$  și  $z_2 - z_1$  sunt egale corespunzător cu prima, cu a doua, și cu a treia coordonate ale vectorului  $\vec{a}$ .

Din formula distanței dintre două puncte reiese, că **dacă vectorul  $\vec{a}$  are coordonatele  $(a_1; a_2; a_3)$ , atunci**

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$



1. Cum se înseamnă vectorul cu originea în punctul  $A$  și extremitatea în punctul  $B$ ?
2. Care vector se numește nul?
3. Ce se numește modulul vectorului?
4. Care vectori sunt numiți coliniari?
5. Care doi vectori nenuli se numesc egali?
6. Ce se poate spune despre coordonatele vectorilor egali?
7. Ce se poate spune despre vectorii, coordonatele corespunzătoare ale cărora sunt egale?
8. Cum de găsit coordonatele vectorului, dacă sunt cunoscute coordonatele originii și a extremității lui?
9. Cum de găsit modulul vectorului, dacă sunt cunoscute coordonatele lui?



### EXERCIȚII

**39.1.°** În figura 39.5. este reprezentată prisma triunghiulară  $ABCA_1B_1C_1$ , baza căreia este un triunghi regulat. Sunt oare egali vectorii:

- 1)  $\vec{AC}$  și  $\vec{A_1C_1}$ ;
- 2)  $\vec{AC}$  și  $\vec{A_1B_1}$ ;
- 3)  $\vec{BB_1}$  și  $\vec{C_1C}$ ;
- 4)  $\vec{BB_1}$  și  $\vec{AA_1}$ ?

**39.2.°** Punctele  $E$  și  $F$  sunt corespunzător mijlocurile muchiilor  $AA_1$  și  $AD$  ale paralelipipedului dreptunghiular  $ABCA_1B_1C_1D_1$  (fig. 39.6),  $AB \neq AD$ . Indicați vectorii cu originea și extremitatea în vârfurile paralelipipedului, care:

- 1) sunt coorientați cu vectorul  $\vec{EF}$ ;
- 2) sunt orientați opus cu vectorul  $\vec{AB_1}$ ;
- 3) au modulii egali cu vectorul  $\vec{BC_1}$ .

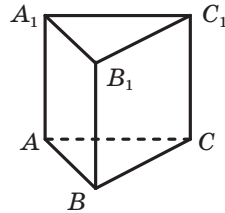


Fig. 39.5

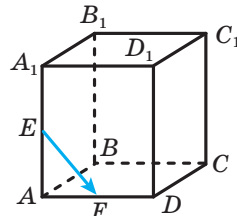


Fig. 39.6

**39.3.°** Punctele  $M$  și  $K$  sunt mijlocurile corespunzătoare ale muchiilor  $CC_1$  și  $CD$  ale paralelipipedului dreptunghiular  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Indicați vectorii cu originea și extremitatea în vârfurile paralelipipedului, care:

- 1) sunt coorientați cu vectorul  $\overline{AD}$ ;
- 2) sunt orientați opus cu vectorul  $\overline{MK}$ ;
- 3) au moduli egali cu vectorul  $\overline{AC_1}$ .

**39.4.°** Desenați tetraedrul  $DABC$ . Depuneți:

- 1) de la punctul  $A$  vectorul, egal cu vectorul  $\overline{CA}$ ;
- 2) de la punctul  $B$  vectorul, egal cu vectorul  $\overline{AC}$ ;
- 3) de la punctul  $D$  vectorul, egal cu vectorul  $\overline{BC}$ .

**39.5.°** Desenați cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Depuneți:

- 1) de la punctul  $A$  vectorul, egal cu vectorul  $\overline{A_1 A}$ ;
- 2) de la punctul  $C$  vectorul, egal cu vectorul  $\overline{A_1 C_1}$ ;
- 3) de la punctul  $D_1$  vectorul, egal cu vectorul  $\overline{B_1 D}$ .

**39.6.°** Ce coordonate are vectorul nul?

**39.7.°** Aflați coordonatele vectorului  $\overline{AB}$ , dacă:

- 1)  $A(3; 4; 2)$ ,  $B(1; -4; 5)$ ;
- 2)  $A(-6; 7; -1)$ ,  $B(2; 9; 8)$ .

**39.8.°** Aflați coordonatele vectorului  $\overline{CD}$ , dacă  $C(-1; 10; 4)$ ,  $D(-1; 0; 2)$ .

**39.9.°** Găsiți modulul vectorului  $\overline{m}(2; -5; \sqrt{7})$ .

**39.10.°** Găsiți modulul vectorului  $\overline{MK}$ , dacă  $M(10; -4; 20)$ ,  $K(8; -2; 19)$ .

**39.11.°** Găsiți coordonatele extremității vectorului  $\overline{PF}(2; -3; 6)$ , dacă  $P(3; 5; -1)$ .

**39.12.°** Găsiți coordonatele originii vectorului  $\overline{ST}(-3; 4; -2)$ , dacă  $T(4; 2; 0)$ .

**39.13.°** Sunt date punctele  $A(-2; 3; 5)$ ,  $B(1; 2; 4)$ ,  $C(4; -3; 6)$ . Găsiți coordonatele unui așa punct  $D$ , ca  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

**39.14.°** Se dau punctele  $A(5; -12; 7)$ ,  $B(0; y; 3)$ ,  $C(x; 17; -14)$ ,  $D(15; 0; z)$ . Pentru care valori  $x$ ,  $y$  și  $z$  este adevărată egalitatea  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ?

**39.15.°** Modulul vectorului  $\overline{a}(-4; y; 12)$  este egal cu 13. Aflați valoarea lui  $y$ .

- 39.16.\*** Pentru care valori ale lui  $k$  vectorii  $\vec{a}(4; k+3; 10)$  și  $\vec{b}(k; 4; k+9)$  au moduli egali?
- 39.17.\*\*** Folosind vectorii, demonstrați că patrulaterul  $ABCD$  cu vârfurile în punctele  $A(-4; 2; 5)$ ,  $B(-6; 3; 0)$ ,  $C(12; -8; 1)$  și  $D(14; -9; 6)$  este paralelogram.
- 39.18.\*\*** Sunt date coordonatele a trei vârfuri ale paralelogramului  $A(10; -8; -1)$ ,  $C(-2; 4; 4)$  și  $D(11; -20; 10)$ . Folosind vectorii, aflați coordonatele punctului  $B$ .
- 39.19.\*\*** Modulul vectorului  $\vec{m}$  este egal cu  $4\sqrt{3}$ , coordonatele lui sunt egale. Găsiți coordonatele vectorului  $\vec{m}$ .
- 39.20.\*\*** Modulul vectorului  $\vec{c}(x; y; z)$  este egal cu 9, coordonatele  $x$  și  $z$  sunt egale, iar coordonatele  $x$  și  $y$  sunt numere opuse. Determinați coordonatele vectorului  $\vec{c}$ .



### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

- 39.21.** Pe o parte de centrul circumferinței sunt duse două coarde cu lungimile de 30 cm și 48 cm. Aflați distanța dintre coarde, dacă raza circumferinței este egală cu 25 cm.

## 40. Adunarea și scăderea vectorilor

Admitem că în spațiu se dau vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ . Depunem de la un punct arbitrar oarecare  $A$  al spațiului vectorul  $\vec{AB}$ , egal cu vectorul  $\vec{a}$ . Mai departe de la punctul  $B$  depunem vectorul  $\vec{BC}$ , egal cu vectorul  $\vec{b}$ . Vectorul  $\vec{AC}$  se va numi **suma vectorilor**  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  (fig. 40.1) și se scrie:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$ .

Algoritmul descris de adunare a doi vectori este numit **regula triunghiului**.

Se poate demonstra, că suma vectorilor  $\vec{a} + \vec{b}$  nu depinde de alegerea punctului  $A$ .

Menționăm, că *pentru orice trei puncte*  $A$ ,  $B$  și  $C$  este adevărată egalitatea  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ . Ea exprimă regula triunghiului.

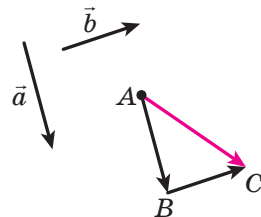


Fig. 40.1



Proprietățile adunării vectorilor sunt analogice cu proprietățile de adunare a numerelor.

**Pentru oricare vectori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$  sunt juste egalitățile:**

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a};$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ (legea comutativă);}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \text{ (legea asociativă).}$$

Suma a trei și a unui număr mai mare de vectori se află astfel: de la început se adună primul și al doilea vectori, apoi la suma obținută se adună al treilea vector ș.a.m.d. De exemplu,  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ .

Pentru tetraedrul  $DABC$ , reprezentat în figura 40.2, se poate scrie:  $\vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DB} = \vec{AD} + \vec{DB} = \vec{AB}$ .

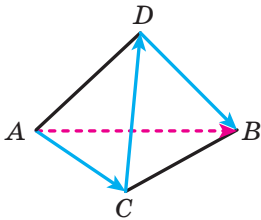


Fig. 40.2

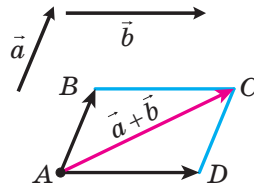


Fig. 40.3

Pentru adunarea a doi vectori necoliniari  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este comod de folosit **regula paralelogramului**.

Depunem de la un punct arbitrar oarecare  $A$  vectorul  $\vec{AB}$ , egal cu vectorul  $\vec{a}$ , și vectorul  $\vec{AD}$ , egal cu vectorul  $\vec{b}$  (fig. 40.3). Construim paralelogramul  $ABCD$ . Atunci suma căutată  $\vec{a} + \vec{b}$  este egală cu vectorul  $\vec{AC}$ .

Să cercetăm vectorii  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  și  $\vec{OC}$ , care nu se află într-un plan (fig. 40.4). Să aflăm suma acestor vectori.

Construim paralelipipedul astfel, ca segmentele  $OA$ ,  $OB$  și  $OC$  să fie muchiile lui (fig. 40.5). Segmentul  $OD$  este diagonala acestui paralelipiped. Vom demonstra, că  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD}$ .

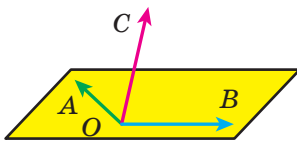


Fig. 40.4

Deoarece patrulaterul  $OBKA$  – paralelogram, atunci  $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OK}$ . Avem:  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OK} + \vec{OC}$ . Deoarece patrulaterul  $OCDK$  – paralelogram, atunci  $\vec{OK} + \vec{OC} = \vec{OD}$ .

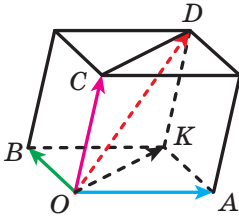


Fig. 40.5

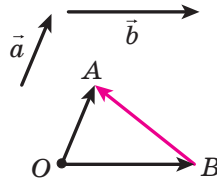


Fig. 40.6

Modalitatea descrisă de adunare a trei vectori, care sunt depuși de la un punct și nu se află într-un plan, se numește **regula paralelipipedului**.

**Definiție.** Diferența vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  se numește un astfel de vector  $\vec{c}$ , suma căruia cu vectorul  $\vec{b}$  este egală cu vectorul  $\vec{a}$ .

Se scrie:  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ .

Vom arăta, cum de construit vectorul, care este egal cu diferența vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ .

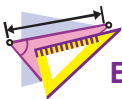
De la un punct arbitrar  $O$  depunem vectorii  $\vec{OA}$  și  $\vec{OB}$ , corespunzător egali cu vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  (fig. 40.6). Atunci  $\vec{OB} + \vec{BA} = \vec{OA}$ . Conform definiției diferenței a doi vectori  $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ , adică  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{BA}$ , deci, vectorul  $\vec{BA}$  este egal cu diferența vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ .

Menționăm, că pentru oricare trei puncte  $O$ ,  $A$  și  $B$  este adevărată egalitatea  $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ . Ea exprimă regula aflării diferenței a doi vectori, depuși de la un punct.

**Teorema 40.1.** Dacă coordonatele vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt egale corespunzător cu  $(a_1; a_2; a_3)$  și  $(b_1; b_2; b_3)$ , atunci coordonatele vectorului  $\vec{a} + \vec{b}$  sunt egale cu  $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$ , iar coordonatele vectorului  $\vec{a} - \vec{b}$  sunt egale cu  $(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$ .



1. Descrieți regula triunghiului pentru aflarea sumei vectorilor.
2. Descrieți regula paralelogramului pentru aflarea sumei a doi vectori.
3. Descrieți regula paralelipipedului pentru aflarea sumei a trei vectori.
4. Care vector este numit diferență a doi vectori?
5. Cu ce sunt egale coordonatele vectorului, care este egal cu suma a doi vectori dați?
6. Cu ce sunt egale coordonatele vectorului, care este egal cu diferența a doi vectori dați?



## EXERCIIII

- 40.1.° Se dă prisma  $ABCA_1B_1C_1$  (fig. 40.7). Aflați suma vectorilor:  
 1)  $\overline{BC} + \overline{AA_1}$ ;                                      2)  $\overline{BA} + \overline{A_1C_1}$ .
- 40.2.° Se dă cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Aflați suma vectorilor:  
 1)  $\overline{A_1B_1} + \overline{DD_1}$ ;                                      2)  $\overline{AC} + \overline{C_1D_1}$ .
- 40.3.° Se dă paralelipipedul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 40.8). Aflați suma  
 $\overline{AB} + \overline{DD_1} + \overline{CD} + \overline{B_1C_1}$ .

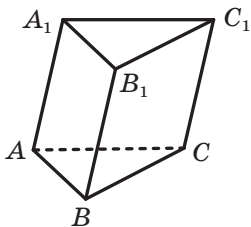


Fig. 40.7

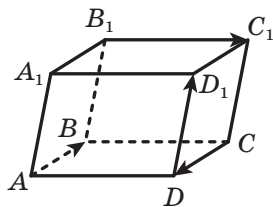


Fig. 40.8

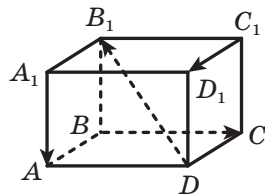


Fig. 40.9

- 40.4.° Se dă paralelipipedul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 40.9). Aflați suma  
 $\overline{A_1A} + \overline{C_1D_1} + \overline{DB_1} + \overline{BC}$ .
- 40.5.° Se dau vectorii  $\vec{a} (3; -6; 4)$  și  $\vec{b} (-2; 4; -5)$ . Aflați:  
 1) coordonatele vectorului  $\vec{a} + \vec{b}$ ;    2)  $|\vec{a} + \vec{b}|$ .
- 40.6.° Se dau vectorii  $\vec{m} (-7; -1; 8)$  și  $\vec{n} (-3; 2; -4)$ . Aflați:  
 1) coordonatele vectorului  $\vec{m} + \vec{n}$ ;    2)  $|\vec{m} + \vec{n}|$ .
- 40.7.° Se dau vectorii  $\vec{a} (-10; 15; -20)$  și  $\vec{b} (2; 6; -12)$ . Găsiți:  
 1) coordonatele vectorului  $\vec{a} - \vec{b}$ ;    2)  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .
- 40.8.° Se dau vectorii  $\vec{m} (3; -1; 2)$  și  $\vec{n} (4; -2; -3)$ . Aflați:  
 1) coordonatele vectorului  $\vec{m} - \vec{n}$ ;    2)  $|\vec{m} - \vec{n}|$ .
- 40.9.° Se dă prisma  $ABCA_1B_1C_1$  (fig. 40.7). Aflați diferența vectorilor:  
 1)  $\overline{AB} - \overline{A_1C_1}$ ;                      2)  $\overline{AA_1} - \overline{BC_1}$ ;                      3)  $\overline{BA_1} - \overline{B_1C_1}$ .
- 40.10.° Se dă cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Aflați diferența vectorilor:  
 1)  $\overline{AB} - \overline{DC_1}$ ;                                      2)  $\overline{AC} - \overline{DD_1}$ .

40.11.\* Simplificați expresia  $\overline{AB} + \overline{BM} + \overline{MA} + \overline{NK}$ .

40.12.\* Simplificați expresia  $\overline{AB} + \overline{DE} + \overline{EA} + \overline{FD} + \overline{BM}$ .

40.13.\*\* Se dă cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Aflați vectorul, care este egal cu  $\overline{AA_1} + \overline{B_1 C} - \overline{C_1 D_1}$ .

40.14.\*\* Se dă cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Aflați vectorul, care este egal cu  $\overline{AA_1} - \overline{DC_1} + \overline{BC}$ .

40.15.\*\* Aflați coordonatele unui astfel de punct  $A$ , că  $\overline{AB} + \overline{AC} = \vec{0}$ , dacă  $B(4; -2; 12)$ ,  $C(3; -1; 4)$ .

40.16.\*\* Aflați coordonatele unui astfel de punct  $M$ , că  $\overline{CM} - \overline{MD} = \vec{0}$ , dacă  $C(1; -5; 3)$ ,  $D(-2; 0; 6)$ .



### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

40.17. Coardele  $AB$  și  $AC$  ale circumferinței sunt perpendiculare,  $AB = 12$  cm,  $AC = 16$  cm. Găsiți distanța de la punctul  $A$  până la dreapta  $BC$ .

## 41. Înmulțirea vectorului cu un număr

**Definiție. Produsul** vectorului nenul  $\vec{a}$  și a numărului  $k$ , diferit de zero, se numește un astfel de vector  $\vec{b}$ , că:

$$1) |\vec{b}| = |k| |\vec{a}|;$$

2) dacă  $k > 0$ , atunci  $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ ; dacă

$k < 0$ , atunci  $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ .

Se scrie:  $\vec{b} = k\vec{a}$ .

Dacă  $\vec{a} = \vec{0}$  sau  $k = 0$ , se consideră, că  $k\vec{a} = \vec{0}$ .

În figura 41.1. este reprezentat paralelogramul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Avem:  $\overline{AC} = 2 \overline{O_1 C_1}$ ,

$$\overline{B_1 O_1} = -\frac{1}{2} \overline{DB}, \quad \overline{A_1 C_1} = -2 \overline{OA}.$$

Din definiție reiese, că

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

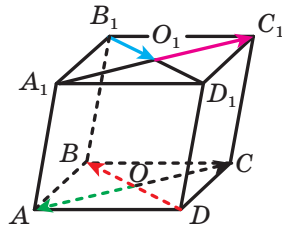


Fig. 41.1

**Teorema 41.1.** Pentru oricare vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  se îndeplinesc egalitatea  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$ .

Această teoremă oferă posibilitatea de-a reduce scăderea vectorilor la adunarea lor; pentru ca din vectorul  $\vec{a}$  de scăzut vectorul  $\vec{b}$ , se poate la vectorul  $\vec{a}$  de adunat vectorul  $(-1) \cdot \vec{b}$ .

Produsul  $-1 \cdot \vec{a}$  se înseamnă  $-\vec{a}$  și este numit vectorul, **opus** vectorului  $\vec{a}$ . De exemplu, se scrie:

$$\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Din definiția înmulțirii vectorului cu un număr reiese, că *dacă*  $\vec{b} = k\vec{a}$ , *atunci vectorii*  $\vec{a}$  *și*  $\vec{b}$  *sunt coliniari*.

Deci, din egalitatea  $\vec{OA} = k\vec{OB}$  obținem, că *punctele*  $O$ ,  $A$  *și*  $B$  *se află pe o dreaptă*.

**Teorema 41.2.** *Dacă vectorii*  $\vec{a}$  *și*  $\vec{b}$  *sunt coliniari și*  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , *atunci există un așa număr*  $k$ , *că*  $\vec{b} = k\vec{a}$ .

**Teorema 41.3.** *Dacă coordonatele vectorului*  $\vec{a}$  *sunt egale cu*  $(a_1; a_2; a_3)$ , *atunci coordonatele vectorului*  $k\vec{a}$  *sunt egale cu*  $(ka_1; ka_2; ka_3)$ .

Înmulțirea vectorului cu un număr are astfel de proprietăți.

*Pentru oricare numere*  $k, m$  *și pentru oricare vectori*  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  *sunt adevărate egalitățile:*

$$(km)\vec{a} = k(m\vec{a}) \text{ (proprietatea asociativă);}$$

$$(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a} \text{ (prima proprietate distributivă);}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \text{ (a doua proprietate distributivă).}$$

Aceste proprietăți permit de transformat expresiile, care conțin suma vectorilor, diferența lor și produsul cu un număr, analogic cum noi transformam expresiile algebrice. De exemplu,

$$2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}.$$



1. Ce se numește produsul vectorului nenul  $\vec{a}$  și a numărului  $k$ , diferit de zero?
2. Care vector se numește opus vectorului dat?
3. Ce se poate spune despre vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , dacă  $\vec{b} = k\vec{a}$ , unde  $k$  – un număr oarecare?
4. Este cunoscut, că vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt coliniari, totodată  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Cum se poate exprima vectorul  $\vec{b}$  prin vectorul  $\vec{a}$ ?
5. Vectorul  $\vec{a}$  are coordonatele  $(a_1; a_2; a_3)$ . Cu ce sunt egale coordonatele vectorului  $k\vec{a}$ ?

6. Ce se poate spune despre vectorii, coordonatele cărora sunt egale cu  $(a_1; a_2; a_3)$  și  $(ka_1; ka_2; ka_3)$ ?  
 7. Scrieți proprietatea asociativă și proprietățile distributive ale înmulțirii vectorului cu un număr.



## EXERCIȚII

41.1.° Modulul vectorului  $\vec{m}$  este egal cu 4. Cu ce este egal modulul vectorului  $\vec{n}$ , dacă:

- 1)  $\vec{n} = 3\vec{m}$ ;                                      2)  $\vec{n} = -5\vec{m}$ ?

41.2.° Ce fel de vectori – coliniari sau orientați opus sunt vectorii nenuli  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , dacă:

- 1)  $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a}$ ;    2)  $\vec{a} = -2\vec{b}$ ?

41.3.° Se dă vectorul  $\vec{a}(4; -8; -20)$ . Care sunt coordonatele vectorului  $\vec{b}$ , dacă:

- 1)  $\vec{b} = 5\vec{a}$ ;    2)  $\vec{b} = -\frac{3}{4}\vec{a}$ ?

41.4.° Se dau vectorii  $\vec{a}(-3; 2; 5)$  și  $\vec{b}(-2; -4; 1)$ . Aflați coordonatele vectorului  $\vec{c}$ , dacă:

- 1)  $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ ;                                      2)  $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$ .

41.5.° Se dau vectorii  $\vec{m}(1; 7; -8)$  și  $\vec{n}(3; -1; 6)$ . Aflați coordonatele vectorului  $\vec{a}$ , dacă:

- 1)  $\vec{a} = -2\vec{m} + 5\vec{n}$ ;                                      2)  $\vec{a} = -\vec{m} - 6\vec{n}$ .

41.6.° Se dă paralelipipedul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 41.2). Indicați toți vectorii, originea și extremitatea a fiecăruia din ei să fie vârfuri ale paralelipipedului, și să fie opuși vectorului:

- 1)  $\vec{AD}$ ;                                      2)  $\vec{B_1 D}$ ;                                      3)  $\vec{AC}$ .

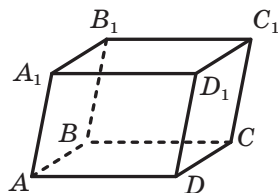


Fig. 41.2

41.7.° Se dă paralelipipedul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 41.2). Indicați toți vectorii, originea și extremitatea fiecăruia din ei să fie vârfuri ale paralelipipedului, și să fie opuși vectorului:

- 1)  $\vec{B_1 B}$ ;                                      2)  $\vec{CD_1}$ .

41.8.° Care sunt coordonatele vectorului, opus vectorului  $\vec{a}(13; -10; 9)$ ?

- 41.9.\* Aflați modulul vectorului  $\vec{c} = -6\vec{a} - 7\vec{b}$ , dacă  $\vec{a} (-1; 1; 1)$ ,  $\vec{b} (2; 2; -2)$ .
- 41.10.\* Aflați modulul vectorului  $\vec{p} = 8\vec{a} - 9\vec{b}$ , dacă  $\vec{a} (0,5; -0,5; 1,5)$ ,  $\vec{b} \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{9}\right)$ .
- 41.11.\* Sunt oare coliniari vectorii  $\vec{AB}$  și  $\vec{CD}$ , dacă  $A (4; -1; -4)$ ,  $B (0; 5; 6)$ ,  $C (0; 2; 7)$ ,  $D (2; -1; 2)$ ?
- 41.12.\* Sunt oare coliniari vectorii  $\vec{DE}$  și  $\vec{FK}$ , dacă  $D (2; -3; 4)$ ,  $E (-1; 6; 2)$ ,  $F (-2; 8; 6)$ ,  $K (-3; 11; 7)$ ?
- 41.13.\* Găsiți valorile ale lui  $x$  și  $y$  pentru care vectorii  $\vec{a} (x; y; 2)$  și  $\vec{b} (-2; 3; 1)$  vor fi coliniari.
- 41.14.\* Găsiți valorile ale lui  $x$  și  $z$  pentru care vectorii  $\vec{m} (-1; 7; z)$  și  $\vec{n} (x; 4; 5)$  vor fi coliniari.
- 41.15.\*\* Se dă vectorul  $\vec{a} (3; 2; 1)$ . Găsiți vectorul  $\vec{AB}$ , coliniar lui, dacă  $A (1; 1; 1)$ , iar punctul  $B$  aparține planului  $yz$ .
- 41.16.\*\* Sunt date punctele  $A (-3; 6; 4)$ ,  $B (6; -1; 2)$ ,  $C (0; 3; -2)$ . Găsiți un astfel de punct  $D$ , care aparține planului  $xz$ , că  $\vec{AD} \parallel \vec{BC}$ .
- 41.17.\*\* Se dă vectorul  $\vec{a} (-2; 6; 3)$ . Aflați coordonatele vectorului  $\vec{b}$ , dacă vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt orientați opus, iar modulul vectorului  $\vec{b}$  este egal cu 1.
- 41.18.\*\* Este dat:  $\vec{m} \uparrow \uparrow \vec{n}$ ,  $|\vec{m}| = 5\sqrt{6}$ ,  $\vec{n} (1; -1; 2)$ . Aflați coordonatele vectorului  $\vec{m}$ .
- 41.19.\*\* Se află oare pe o dreaptă punctele:  
 1)  $A (5; 6; -4)$ ,  $B (7; 8; 2)$  și  $C (3; 4; 14)$ ;  
 2)  $D (-1; -7; -8)$ ,  $E (0; -4; -4)$  și  $F (2; 2; 4)$ ?
- 41.20.\*\* Punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt astfel, că  $\vec{AB} (10; 15; -5)$  și  $\vec{AC} (-6; y; z)$ . Pentru care valori ale lui  $y$  și  $z$  punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  se află pe o dreaptă?
- 41.21.\*\* Punctul  $E$  – mijlocul muchiei  $CC_1$  al cubului  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Exprimați vectorul  $\vec{AE}$  prin vectorii  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  și  $\vec{AA_1}$ .
- 41.22.\*\* Se dă paralelipipedul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Punctul  $M$  – mijlocul muchiei  $A_1 B_1$ , punctul  $K$  – mijlocul muchiei  $CC_1$ . Exprimați vectorul  $\vec{MK}$  prin vectorii  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  și  $\vec{AA_1}$ .

41.23.\*\* Se dă cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Punctul  $E$  – mijlocul muchiei  $CC_1$ , punctul  $F$  – mijlocul muchiei  $AD$ . Exprimați vectorul  $\overrightarrow{EF}$  prin vectorii  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  și  $\overrightarrow{AA_1}$ .



### EXERCIȚII PENTRU REPETARE

41.24. Baza triunghiului isoscel este egală cu 48 cm, iar aria lui –  $432 \text{ cm}^2$ . Aflați raza circumferinței, înscrise în triunghi.

## 42. Produsul scalar al vectorilor

Fie vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  – doi vectori nenuli și necoliniari. De la un punct arbitrar  $O$  depunem vectorii  $\overrightarrow{OA}$  și  $\overrightarrow{OB}$ , care sunt egali corespunzător cu vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  (fig. 42.1). Mărimea unghiului  $AOB$  o vom numi **unghiul dintre vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$** .

Unghiul dintre vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  se înseamnă astfel:  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ . Evident, că dacă  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ , atunci  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$  (fig. 42.2).

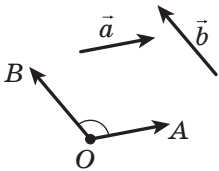


Fig. 42.1

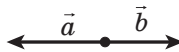


Fig. 42.2

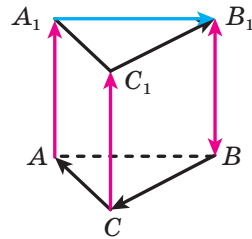


Fig. 42.3

Dacă  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ , atunci se consideră, că  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ . Dacă măcar unul din vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este nul, atunci de asemenea se consideră, că  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ .

Vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  se numesc **perpendicularari**, dacă unghiul dintre ei este egal cu  $90^\circ$ . Se scrie:  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

În figura 42.3 este reprezentată prisma triunghiulară, baza căreia este un triunghi regulat, iar muchia laterală este perpendiculară la planul bazei.

Avem:  $\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C_1B_1}) = 60^\circ$ ,  $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{A_1B_1}) = 120^\circ$ ,  $\angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}) = 0^\circ$ ,  $\angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$ ,  $\angle(\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{B_1B}) = 180^\circ$ .



**Definiție. Produsul scalar a doi vectori** este numit **produsul modulilor lor și a cosinusului unghiului dintre ei**.

Produsul scalar al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  se înseamnă astfel:  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Avem:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$ .

Dacă măcar unul din vectorii  $\vec{a}$  sau  $\vec{b}$  este nul, atunci evident că  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

Produsul scalar  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  se numește **pătratul scalar** al vectorului  $\vec{a}$  și se înseamnă  $\vec{a}^2$ .

*Pătratul scalar al vectorului este egal cu pătratul modulului lui, adică  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ .*

**Teorema 42.1. Produsul scalar a doi vectori nenuli este egal cu zero atunci și numai atunci, când acești vectori sunt perpendiculari.**

De exemplu, pentru vectorii prezentați în figura 42.3, avem:  $\overline{AA_1} \cdot \overline{BC} = 0$ ,  $\overline{B_1A_1} \cdot \overline{C_1C} = 0$ .

**Teorema 42.2. Produsul scalar al vectorilor  $\vec{a} (a_1; a_2; a_3)$  și  $\vec{b} (b_1; b_2; b_3)$  se poate calcula după formula**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

**Teorema 42.3. Cosinusul unghiului dintre doi vectori nenuli  $\vec{a} (a_1; a_2; a_3)$  și  $\vec{b} (b_1; b_2; b_3)$  se poate calcula după formula**

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Unele proprietăți ale produsului scalar al vectorilor sunt analogice cu proprietățile corespunzătoare ale produsului numerelor. De exemplu,

*pentru oricare vectori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  și oricare număr  $k$  sunt adevărate egalitățile:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b});$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Aceste proprietăți odată cu proprietățile adunării și înmulțirii vectorilor cu un număr oferă posibilitatea transformării expresiilor, care conțin produsul scalar al vectorilor, după regulile transformării expresiilor algebrice. De exemplu,

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b})^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \\ &= \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.\end{aligned}$$

**Problemă.** Baza unei prisme este un triunghi isoscel  $ABC$  ( $AB = AC$ ). Muchia laterală  $AA_1$  creează unghiuri egale cu muchiile  $AB$  și  $AC$  (fig. 42.4). Demonstrați, că  $AA_1 \perp BC$ .

*Rezolvare.* Fie  $\angle BAA_1 = \alpha$ . Ținând cont de condiție se poate scrie:  $\angle CAA_1 = \alpha$ .

Vom afla produsul scalar al vectorilor  $\overrightarrow{AA_1}$  și  $\overrightarrow{BC}$ .

$$\text{Avem: } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$$

Să scriem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AA_1} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} = \\ &= |\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \alpha - |\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos \alpha.\end{aligned}$$

Deoarece  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|$ , atunci produsul scalar examinat este egal cu 0. Deci,  $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BC}$ . ◀

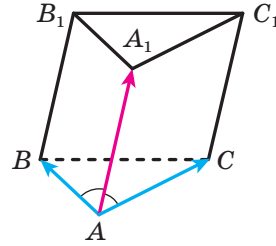
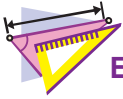


Fig. 42.4



1. Cu ce este egal unghiul dintre doi vectori orientați opus? Doi vectori coliniari?
2. Cu ce este egal unghiul dintre vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , dacă măcar unul din ei este nul?
3. Care vectori sunt numiți perpendiculari?
4. Ce se numește produsul scalar a doi vectori?
5. Ce se numește pătratul scalar al vectorului? cu ce este egal el?
6. Formulați condiția perpendicularității a doi vectori nenuli.
7. Cum se poate găsi produsul scalar al vectorilor, dacă sunt cunoscute coordonatele lor?
8. Scrieți proprietățile produsului scalar al vectorilor.



## EXERCIȚII

42.1.° Este dat cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig.42.5), punctul  $O$  – centrul feței  $ABCD$ . Cu ce este egal unghiul dintre vectorii:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\overline{AC}$ și $\overline{AD}$ ;   | 5) $\overline{AA_1}$ și $\overline{BO}$ ;    |
| 2) $\overline{AC}$ și $\overline{CD}$ ;   | 6) $\overline{AA_1}$ și $\overline{CC_1}$ ;  |
| 3) $\overline{AC}$ și $\overline{BO}$ ;   | 7) $\overline{AA_1}$ și $\overline{B_1 B}$ ; |
| 4) $\overline{AD}$ și $\overline{AA_1}$ ; | 8) $\overline{BO}$ și $\overline{CD}$ ?      |

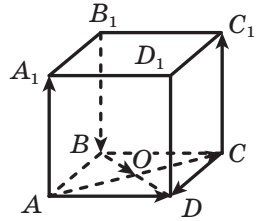


Fig. 42.5

42.2.° Unghiul dintre vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este egal cu  $40^\circ$ . Cu ce este egal unghiul dintre vectorii:

- 1)  $2\vec{a}$  și  $\vec{b}$ ;    2)  $\vec{a}$  și  $-\vec{b}$ ;    3)  $-3\vec{a}$  și  $-5\vec{b}$ ;    4)  $-7\vec{a}$  și  $10\vec{b}$ ?

42.3.° Aflați produsul scalar al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , dacă:

- 1)  $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 5$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ ;  
 2)  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 7$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$ .

42.4.° Aflați produsul scalar al vectorilor  $\vec{m}$  și  $\vec{n}$ , dacă  $|\vec{m}| = 2$ ,  $|\vec{n}| = 1$ ,  $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 120^\circ$ .

42.5.° Aflați produsul scalar al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , dacă:

- 1)  $\vec{a} (1; -2; 3)$ ,  $\vec{b} (2; -4; 3)$ ;    2)  $\vec{a} (-9; 4; 5)$ ,  $\vec{b} (3; -1; 4)$ .

42.6.° Aflați produsul scalar al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , dacă:

- 1)  $\vec{a} (4; -1; 6)$ ,  $\vec{b} (-7; 2; 8)$ ;    2)  $\vec{a} (1; -3; 9)$ ,  $\vec{b} (-1; 3; 0)$ .

42.7.° Se dau vectorii  $\vec{m} (3; -2; 4)$  și  $\vec{n} (2; 2; z)$ . Pentru care valoare  $z$  se îndeplinește egalitatea  $\vec{m} \cdot \vec{n} = 18$ ?

42.8.° Se dau vectorii  $\vec{a} (9; c; -1)$  și  $\vec{b} (-2; 3; c)$ . Pentru care valoare  $c$  se îndeplinește egalitatea  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -24$ ?

42.9.° Printre vectorii  $\vec{a} (1; 1; 2)$ ,  $\vec{b} (1; 2; 1)$  și  $\vec{c} (-5; 3; 1)$  indicați perechea vectorilor ce sunt perpendiculari.

42.10.° Unghiul dintre vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este egal cu  $45^\circ$ ,  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$ . Aflați:

- 1)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ ;    2)  $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$ ;    3)  $(\vec{a} - \vec{b})^2$ .

- 42.11.\*** Unghiul dintre vectorii  $\vec{m}$  și  $\vec{n}$  este egal cu  $150^\circ$ ,  $|\vec{m}| = 2$ ,  $|\vec{n}| = \sqrt{3}$ . Aflați:
- 1)  $(3\vec{m} - 4\vec{n}) \cdot \vec{m}$ ;      2)  $(\vec{m} + \vec{n})^2$ .
- 42.12.\*** Unghiul dintre vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este egal cu  $120^\circ$ ,  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ .  
Calculați produsul scalar  $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 7\vec{b})$ .
- 42.13.\*** Unghiul dintre vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este egal cu  $60^\circ$ ,  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ .  
Calculați produsul scalar  $(5\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 5\vec{b})$ .
- 42.14.\*** Pentru care valoare a lui  $x$  vectorii  $\vec{a}(x; -x; 1)$  și  $\vec{b}(x; 2; 1)$  sunt perpendiculari?
- 42.15.\*** Pentru care valoare a lui  $p$  vectorii  $\vec{a}(p; -2; 1)$  și  $\vec{b}(p; 1; -p)$  sunt perpendiculari?
- 42.16.\*** Aflați produsul scalar al vectorilor  $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$ , dacă  $\vec{a}(2; -1; -2)$ ,  $\vec{b}(4; -3; 2)$ .
- 42.17.\*** Aflați pătratul scalar  $(\vec{m} - 2\vec{n})^2$ , dacă  $\vec{m}(2; 1; -3)$ ,  $\vec{n}(4; -2; 0)$ .
- 42.18.\*\*** Fiecare muchie a tetraedrului  $DABC$  este egală cu  $a$ , punctul  $M$  – mijlocul muchiei  $AB$ . Aflați produsul scalar al vectorilor:
- 1)  $\vec{CM}$  și  $\vec{DC}$ ;      2)  $\vec{AB}$  și  $\vec{CD}$ .
- 42.19.\*\*** Baza piramidei  $MABCD$  este un pătrat, iar fiecare muchie a ei este egală cu  $a$ . Aflați produsul scalar al vectorilor  $\vec{AM}$  și  $\vec{AC}$ .
- 42.20.\*\*** Aflați unghiul dintre vectorii  $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$  și  $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$ , dacă  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$ .
- 42.21.\*\*** Aflați unghiul dintre vectorii  $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}$  și  $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$ , dacă  $|\vec{m}| = 1$ ,  $|\vec{n}| = \sqrt{3}$ ,  $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 30^\circ$ .
- 42.22.\*\*** Aflați cosinusul unghiului dintre vectorii  $\vec{AB}$  și  $\vec{CD}$ , dacă  $A(3; -2; 1)$ ,  $B(-1; 2; 1)$ ,  $C(4; -1; 5)$ ,  $D(1; 3; 0)$ .
- 42.23.\*\*** Vârfurile triunghiului sunt punctele  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(-5; 4; 3)$  și  $C(0; 3; -1)$ . Aflați unghiul  $A$  al triunghiului.



### EXERCIIU PENTRU REPETARE

- 42.24.** Latura laterală a unui trapez este egală cu 10 cm, iar raza circumferinței înscrise în el este egală cu 4 cm. Aflați aria trapezului.



## PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 6

### Distanța dintre puncte

Distanța dintre două puncte  $A(x_1; y_1; z_1)$  și  $B(x_2; y_2; z_2)$  se poate găsi conform formulei  $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ .

### Coordonatele mijlocului segmentului

Fiecare coordonată a mijlocului unui segment este egală cu semi-suma coordonatelor respective ale capetelor lui.

### Amplasarea reciprocă a doi vectori

Doi vectori nenuli se numesc coliniari, dacă ei se află pe drepte paralele sau pe o dreaptă. Vectorul nul se consideră coliniar oricărui vector.

### Egalitatea vectorilor

Doi vectori nenuli se numesc egali, dacă modulii lor sunt egali și ei sunt coorientați. Oricare doi vectori nuli sunt egali.

### Coordonatele vectorului

Dacă punctele  $A(x_1; y_1; z_1)$  și  $B(x_2; y_2; z_2)$  sunt corespunzător originea și extremitatea vectorului  $\vec{a}$ , atunci numere  $x_2 - x_1$ ,  $y_2 - y_1$  și  $z_2 - z_1$  sunt egale corespunzător cu prima, cu a doua și cu a treia coordonate ale vectorului  $\vec{a}$ .

### Modulul vectorului

Dacă vectorul  $\vec{a}$  are coordonatele  $(a_1; a_2; a_3)$ , atunci  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ .

### Operații cu vectori

Pentru oricare trei puncte  $A$ ,  $B$  și  $C$  este adevărată egalitatea  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .

Diferența vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  se numește un astfel de vector  $\vec{c}$ , suma căruia cu vectorul  $\vec{b}$  este egală cu vectorul  $\vec{a}$ .

Pentru oricare trei puncte  $A$ ,  $B$  și  $C$  este adevărată egalitatea  $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$ .

Produsul vectorului nenul  $\vec{a}$  și a numărului  $k$ , diferit de zero, se numește un astfel de vector  $\vec{b}$ , că 1)  $|\vec{b}| = |k| |\vec{a}|$ ; 2) dacă  $k > 0$ , atunci  $\vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a}$ ; dacă  $k < 0$ , atunci  $\vec{b} \uparrow \downarrow \vec{a}$ .

Dacă vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt coliniari și  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , atunci există un așa număr  $k$ , că  $\vec{b} = k\vec{a}$ .

Produsul  $-1 \cdot \vec{a}$  se înseamnă  $-\vec{a}$  și este numit vector opus vectorului  $\vec{a}$ .

Produsul scalar a doi vectori se numește produsul modulilor lor și a cosinusului unghiului dintre ei.

Produsul scalar a doi vectori nenuli este egal cu zero atunci și numai atunci, când acești vectori sunt perpendiculari.

Dacă coordonatele vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt corespunzător egale cu  $(a_1; a_2; a_3)$  și  $(b_1; b_2; b_3)$ , atunci:

- coordonatele vectorului  $\vec{a} + \vec{b}$  sunt egale cu  $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$ ;
- coordonatele vectorului  $\vec{a} - \vec{b}$  sunt egale cu  $(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$ ;
- coordonatele vectorului  $k\vec{a}$  sunt egale cu  $(ka_1; ka_2; ka_3)$ ;
- produsul scalar al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este egal cu  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ;
- $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$  (unde vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt nenuli).

## 43. Exerciții pentru repetarea cursului de geometrie clasa a 10-a

### Paralelismul în spațiu

- 43.1. Diagonalele dreptunghiului  $ABCD$  se intersectează în punctul  $O$ . Punctul  $M$  nu se află în planul  $ABC$ . Se poate oare duce planul prin:
- 1) dreapta  $AM$  și punctele  $O$  și  $C$ ;
  - 2) dreapta  $AC$  și punctele  $B$  și  $M$ ?
- 43.2. Punctul  $M$  aparține feței  $BB_1C_1C$  a cubului  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , punctul  $K$  aparține muchiei  $AD$  (fig. 43.1). Construiți punctul de intersecție al dreptei  $MK$  cu planul  $ABB_1$ .

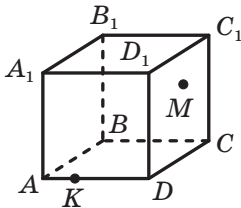


Fig. 43.1

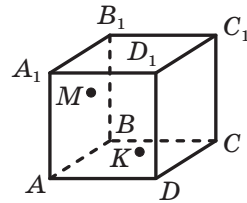


Fig. 43.2

- 43.3. Punctul  $M$  aparține feței  $AA_1B_1B$  a cubului  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , punctul  $K$  – feței  $AA_1D_1D$  (fig. 43.2). Construiți punctul de intersecție al dreptei  $MK$  cu planul  $A_1B_1C_1$ .
- 43.4. Pe muchiile  $BB_1$ ,  $CC_1$  și  $DD_1$  ale prisme  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  sunt notate corespunzător punctele  $M$ ,  $N$  și  $K$ , totodată  $BM \neq CN$ ,  $BM \neq DK$  și  $CN \neq DK$ . Construiți linia de intersecție a planelor  $ABC$  și  $MNK$ .
- 43.5. Punctul  $M$  – mijlocul muchiei  $A_1B_1$  al prisme  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , punctul  $K$  – mijlocul muchiei  $CD$ . Construiți linia de intersecție a planelor  $AMK$  și  $BB_1C_1$ .
- 43.6. Pe muchiile  $AB$ ,  $AD$ ,  $AC$ , și  $BC$  ale tetraedrului  $DABC$  sunt notate respectiv punctele  $E, F, M$  și  $K$ . Construiți linia de intersecție a planelor  $EFM$  și  $DAK$ .
- 43.7. Pe muchiile  $DA$  și  $DB$  ale tetraedrului  $DABC$  sunt notate respectiv punctele  $M$  și  $K$ . Construiți linia de intersecție a planelor  $ABC$  și  $MKC$ .
- 43.8. Dreapta  $MK$ , care nu se află în planul paralelogramului  $ABCD$ , este paralelă cu dreapta  $AD$ . Care este amplasarea reciprocă a dreptelor: 1)  $MK$  și  $BC$ ; 2)  $MK$  și  $AB$ ?

- 43.9. Se cunoaște că dreptele  $a$  și  $b$  sunt paralele, iar dreapta  $c$  intersectează dreapta  $b$  și nu intersectează dreapta  $a$ . Demonstrați, că dreptele  $a$  și  $c$  sunt neconcurente.
- 43.10. Segmentele  $AB$  și  $CD$  – diametre ale unei circumferințe. Planul  $\alpha$  nu are puncte comune cu circumferința dată. Prin punctele  $A, B, C$  și  $D$  s-au dus drepte paralele, care se intersectează cu planul  $\alpha$  corespunzător în punctele  $A_1, B_1, C_1$  și  $D_1$ . Găsiți segmentul  $CC_1$ , dacă  $AA_1 = 5$  cm,  $BB_1 = 9$  cm,  $DD_1 = 3$  cm.
- 43.11. Punctul  $M$  nu se află în planul paralelogramului  $ABCD$ . Demonstrați, că  $AB \parallel CM$ .
- 43.12. Triunghiurile  $ABC$  și  $ABD$  nu se află într-un plan. Punctul  $M$  – mijlocul segmentului  $AC$ , punctul  $N$  – mijlocul segmentului  $BC$ . Pe segmentul  $AD$  s-a notat punctul  $K$ , iar pe segmentul  $BD$  – punctul  $E$  astfel, că  $KE \parallel ABC$ . Demonstrați, că  $KE \parallel MN$ .
- 43.13. Pe muchiile  $DA, DB$  și  $DC$  ale tetraedrului  $DABC$  s-au notat corespunzător punctele  $E, F$  și  $M$  astfel, că  $\angle ABE = \angle FEB$ ,  $\angle CBM = \angle FMB$ . Demonstrați, că planele  $ABC$  și  $EFM$  sunt paralele.
- 43.14. Se cunoaște, că  $\alpha \parallel \beta$ ,  $a \parallel b$ . Dreapta  $a$  intersectează planul  $\alpha$  în punctul  $A$ , planul  $\beta$  – în punctul  $B$ , iar dreapta  $b$  intersectează planul  $\beta$  în punctul  $C$  (fig. 43.3). Construiți punctul de intersecție al dreptei  $b$  cu planul  $\alpha$ .

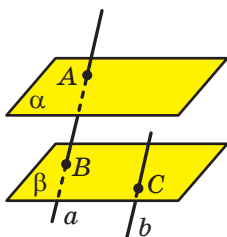


Fig. 43.3

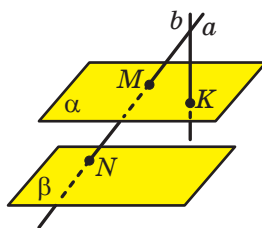


Fig. 43.4

- 43.15. Se dau planele paralele  $\alpha$  și  $\beta$  și dreptele  $a$  și  $b$ , ce se intersectează. Dreapta  $a$  intersectează planul  $\alpha$  în punctul  $M$ , planul  $\beta$  – în punctul  $N$ , iar dreapta  $b$  intersectează planul  $\alpha$  în punctul  $K$  (fig. 43.4). Construiți punctul de intersecție al dreptei  $b$  și a planului  $\beta$ .
- 43.16. Medianele feței  $ADB$  a tetraedrului se intersectează în punctul  $E$ , iar medianele feței  $BDC$  – în punctul  $F$ . Demonstrați, că dreapta  $EF$  este paralelă planului  $ABC$ .



43.17. Este oare corectă afirmația:

- 1) dacă proiecțiile paralele ale două drepte pe un plan sunt paralele, atunci aceste drepte sunt paralele;
- 2) dacă figura plană este egală cu proiecția sa paralelă, atunci planul, în care se află figura dată, și planul, în care se află proiecția ei, sunt paralele?

43.18. Punctele  $A_1$ ,  $B_1$  și  $C_1$  sunt proiecțiile vârfurilor  $A$ ,  $B$  și  $C$  ale paralelogramului  $ABCD$  (fig. 43.5). Construiți imaginea paralelogramului  $ABCD$ .

$B_1 \bullet \bullet C_1$

43.19. Triunghiul  $A_1B_1C_1$  este imaginea triunghiului isoscel  $ABC$  cu ipotenuza  $AB$ . Construiți imaginea pătratului, care are cu triunghiul  $ABC$  un unghi comun și toate vârfurile lui se află pe laturile acestui triunghi.

$A_1 \bullet$

Fig. 43.5

### Perpendicularitatea în spațiu

43.20. Dreapta  $m$  este paralelă cu latura  $AC$  a triunghiului  $ABC$  și nu se află în planul  $ABC$ ,  $\angle ABC = \angle BAC = 30^\circ$ .

- 1) Demonstrați, că dreptele  $m$  și  $BC$  sunt neconcurrente.
- 2) Găsiți unghiul dintre dreptele  $m$  și  $BC$ .

43.21. Fața  $ABCD$  a paralelipipedului dreptunghiular  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  este pătrat, iar muchia  $AA_1$  este de două ori mai mare decât muchia  $AB$ . Aflați unghiul dintre dreptele: 1)  $AB_1$  și  $CD$ ; 2)  $AB_1$  și  $CD_1$ ; 3)  $AB_1$  și  $A_1C_1$ .

43.22. Prin vârful  $B$  al triunghiului  $ABC$  s-a dus o dreaptă  $BD$ , perpendiculară la planul  $ABC$  (fig. 43.6). Punctul  $M$  – mijlocul segmentului  $AC$ . Aflați segmentele  $DA$  și  $DM$ , dacă  $AB = BC = 10$  cm,  $AC = 12$  cm,  $DB = 24$  cm.

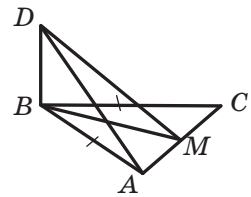


Fig. 43.6

43.23. Prin centrul  $O$  al pătratului  $ABCD$  s-a dus dreapta  $MO$ , perpendiculară la planul pătratului. Punctul  $K$  este mijlocul segmentului  $CD$ ,  $MC = 6$  cm,  $\angle MCK = 60^\circ$ .

- 1) Demonstrați, c dreapta  $CD$  este perpendiculară pe planul  $MOK$ .
- 2) Aflați segmentul  $MO$ .

43.24. Segmentul  $AB$  nu intersectează planul  $\alpha$ , iar dreapta  $AB$  intersectează planul  $\alpha$  în punctul  $C$ . Prin punctele  $A$  și  $B$  s-au dus drepte, care sunt perpendiculare pe planul  $\alpha$  și îl intersectează

în punctele  $A_1$  și  $B_1$  corespunzător. Aflați segmentul  $B_1C$ , dacă  $AA_1 = 16$  cm,  $BB_1 = 6$  cm,  $A_1B_1 = 4$  cm.

43.25. Segmentul  $AB$  intersectează planul  $\alpha$ . Prin punctele  $A$  și  $B$  și mijlocul  $C$  al segmentului  $AB$  s-au dus drepte, care sunt perpendiculare pe planul  $\alpha$  și îl intersectează în punctele  $A_1$ ,  $B_1$  și  $C_1$  corespunzător. Aflați segmentul  $CC_1$ , dacă  $AA_1 = 18$  cm,  $BB_1 = 9$  cm.

43.26. Din punctul  $M$  s-a dus perpendiculara  $MH$  pe planul  $\alpha$  și oblicele egale  $MA$  și  $MB$  (fig. 43.7). Găsiți distanța dintre bazele oblicelor, dacă  $\angle MAH = 30^\circ$ ,  $\angle AMB = 60^\circ$ ,  $MH = 5$  cm.

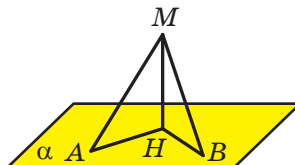


Fig. 43.7

43.27. Unghiul dintre diagonala dreptunghiului și una din laturile lui este egală cu  $30^\circ$ . Punctul  $M$  este depărtat de la fiecare vârf al dreptunghiului cu  $5\sqrt{3}$  cm, iar de la planul lui – cu  $5\sqrt{2}$  cm. Aflați aria dreptunghiului.

43.28. Segmentul  $MC$  – perpendicular pe planul triunghiului  $ABC$ .  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = BC = 6$  cm. Distanța de la punctul  $M$  până la dreapta  $AB$  este egală cu  $3\sqrt{6}$  cm. Aflați distanța de la punctul  $M$  până la planul  $ABC$ .

43.29. Segmentul  $MB$  este perpendicular pe planul dreptunghiului  $ABCD$ ,  $AB = 5$  cm,  $BC = 16$  cm. Aflați distanța de la punctul  $M$  până la dreapta  $AD$ , dacă distanța de la punctul  $M$  până la dreapta  $CD$  este egală cu 20 cm.

43.30. Prin centrul circumferinței  $O$ , înscrisă în triunghiul  $ABC$  cu laturile 6 cm, 25 cm și 29 cm, s-a dus perpendiculara  $DO$  la planul  $ABC$ . Distanța de la punctul  $D$  până la planul  $ABC$  este egală cu  $2\sqrt{15}$  cm. Aflați distanța de la punctul  $D$  până la laturile triunghiului.

43.31. Punctul  $M$ , egal depărtat de la vârfurile unui triunghi regulat  $ABC$ , este amplasat la distanța de 5 cm de la planul triunghiului. Aflați aria triunghiului  $ABC$ , dacă unghiul dintre dreapta  $MA$  și planul  $ABC$  este egal cu  $60^\circ$ .

43.32. Segmentul  $DC$  – perpendicular pe planul triunghiului dreptunghic  $ABC$ . ( $\angle ACB = 90^\circ$ ),  $DC = 9$  cm,  $AC = 15$  cm,  $BC = 20$  cm. Segmentul  $DE$  este perpendiculara coborâtă din punctul  $D$  pe dreapta  $AB$ . Aflați unghiul dintre dreapta  $DE$  și planul  $ABC$ .

43.33. Segmentul  $MK$  nu intersectează planul  $\alpha$ . Aflați unghiul dintre dreapta  $MK$  și planul  $\alpha$ , dacă  $MK = 6$  cm, iar capetele segmentului  $MK$  sunt depărtate de la planul  $\alpha$  cu  $8\sqrt{3}$  cm și cu  $5\sqrt{3}$  cm.

- 43.34. Latura  $BC$  a triunghiului regulat  $ABC$  se află în planul  $\alpha$ , înălțimea  $AH$  a triunghiului creează cu planul  $\alpha$  unghiul  $\varphi$ . Aflați unghiul dintre dreapta  $AB$  și planul  $\alpha$ .
- 43.35. Punctul  $A$  se află în interiorul unghiului diedru, mărimea căruia este egală cu  $\alpha$ . Distanța de la punctul  $A$  până la fiecare față a acestui unghi este egală cu  $h$ , Aflați distanța de la punctul  $A$ , până la muchia unghiului diedru.
- 43.36. Segmentul  $MC$  – perpendiculara pe planul triunghiului dreptunghic  $ABC$ . ( $\angle ACB = 90^\circ$ ). Aflați unghiul dintre planele  $ABC$  și  $ABM$ , dacă  $AC = 8$  cm,  $\angle BAC = 30^\circ$ , iar distanța de la punctul  $M$  până la dreapta  $AB$  este egală cu 12 cm.
- 43.37. Prin latura  $AB$  a triunghiului  $ABC$  s-a dus planul  $\alpha$ . Unghiul dintre planele  $ABC$  și  $\alpha$  este egal cu  $60^\circ$ . Aflați distanța de la punctul  $C$  până la planul  $\alpha$ , dacă  $AC = 7$  cm,  $AB = 10$  cm,  $BC = 13$  cm.
- 43.38. Unghiul dintre pătratul  $ABCD$  și dreptunghiul  $AEFD$  alcătuiește  $60^\circ$ . Aria pătratului este egală cu  $16$  cm<sup>2</sup>, iar aria dreptunghiului –  $32$  cm<sup>2</sup>. Aflați distanța dintre dreptele, care conțin laturile paralele ale pătratului și dreptunghiului dați.
- 43.39. Dreapta  $c$  este linia de intersecție a planelor perpendiculare  $\alpha$  și  $\beta$ . Punctul  $M$  este depărtat de planul  $\alpha$  cu 9 cm, iar de la planul  $\beta$  – cu 12 cm. Aflați distanța de la punctul  $M$  până la dreapta  $c$ .
- 43.40. Prin vârful unghiului drept  $C$  al triunghiului  $ABC$  s-a dus dreapta  $m$ , perpendiculară pe planul  $ABC$ . Pe dreapta  $m$  s-a notat punctul  $D$  astfel, că unghiul dintre planele  $ABC$  și  $ABD$  este egal cu  $30^\circ$ . Aflați aria triunghiului  $ABD$ , dacă  $AB = 16$  cm,  $\angle BAC = 45^\circ$ .
- 43.41. Proiecția trapezului, aria căruia este egală cu  $40\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>, este trapez isoscel cu bazele 7 cm și 13 cm și latura laterală 5 cm. Aflați unghiul dintre planele trapezelor date.

### Coordonate și vectori în spațiu

- 43.42. Se dau punctele  $A(7; 3; -1)$  și  $B(x; 5; z)$ . Se cunoaște, că mijlocul  $C$  al segmentului  $AB$  aparține axei ordonatelor.
- 1) Aflați coordonatele punctului  $C$ .
  - 2) Aflați valorile  $x$  și  $z$ .
- 43.43. Se dau punctele  $A(8; 0; 4)$ ,  $B(13; 4; 7)$ ,  $C(11; -3; 3)$ .
- 1) Demonstrați că triunghiul  $ABC$  este dreptunghic.
  - 2) Aflați aria cercului, circumscris triunghiului  $ABC$ .
- 43.44. Aflați aria triunghiului isoscel  $ABC$  cu baza  $AC$ , dacă este cunoscut, că  $A(1; 1; -2)$ ,  $C(-3; 3; 2)$ , iar punctul  $B$  aparține axei aplicatelor.

- 43.45. Se dau punctele  $A(-2; 1; 3)$ ,  $B(0; 5; 9)$  și  $C(-3; y; 6)$ . Pentru care valori ale lui  $y$  segmentul  $AB$  este de 2 ori mai lung decât segmentul  $AC$ ?
- 43.46. De la punctul  $C(2; -3; 1)$  s-a depus vectorul  $\overrightarrow{CD}$ , egal cu vectorul  $\overrightarrow{AB}$ . Aflați coordonatele punctului  $D$ , dacă  $A(-1; 0; 5)$ ,  $B(0; 4; -1)$ .
- 43.47. Se dau punctele  $A(1; 0; 1)$ ,  $B(2; 1; -1)$  și  $C(-1; 2; 0)$ . Aflați coordonatele unui așa punct  $D$ , ca  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ .
- 43.48. Vectorii  $\vec{a}(x; 3; -4)$  și  $\vec{b}(20; -12; 16)$  se află pe laturile opuse ale paralelogramului. Aflați valoarea lui  $x$ .
- 43.49. Se dau punctele  $A(-4; 1; 2)$ ,  $B(-2; 0; -1)$  și  $C(1; 1; 0)$ . Aflați coordonatele unui așa punct  $D$ , care aparține planului  $yz$ , ca vectorii  $\overrightarrow{AB}$  și  $\overrightarrow{CD}$  să fie coliniari.
- 43.50. Medianele feței  $BDC$  a tetraedrului  $DABC$  se intersectează în punctul  $O$ , punctul  $M$  – mijlocul muchiei  $AD$ . Exprimați vectorul  $\overrightarrow{MO}$  prin vectorii  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  și  $\overrightarrow{AD}$ .
- 43.51. Aflați cosinusul unghiului dintre vectorii  $\vec{a}(2; 2; 1)$  și  $\vec{b}(6; -2; -3)$ .
- 43.52. Aflați unghiul făcut de vectorii  $\vec{a}(3; -2; 4)$  și  $\vec{b}(2; 3; 0)$ .
- 43.53. Pentru care valori ale lui  $x$  vectorii  $\vec{a}(x; -2; 1)$  și  $\vec{b}(x; 2x; 3)$  sunt perpendiculari?
- 43.54. Aflați coordonatele vectorului  $\vec{m}$ , coliniar vectorului  $\vec{n}(1; -2; 1)$ , dacă  $\vec{m} \cdot \vec{n} = -3$ .
- 43.55. Aflați unghiul dintre vectorul  $\vec{a}(-1; 2; 5)$  și direcția pozitivă a axei absciselor.
- 43.56. Aflați unghiul dintre vectorul  $\vec{b}(6; -2; -3)$  și direcția negativă a axei aplicatelor.
- 43.57. Se cunoaște, că  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$ . Aflați  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .
- 43.58. Punctul  $M$  este mijlocul muchiei  $AB$  a cubului  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , punctul  $K$  – mijlocul muchiei  $A_1 B_1$ . Aflați unghiul dintre dreptele  $MB_1$  și  $DK$ .

## Рăспунсuri și indicații la exerciții

### Capitolul 1. Algebră și elemente de analiză

#### § 1. Funcții, proprietățile și graficele lor

1.16. 1) 16; 2) 32. 1.17. 2500 m<sup>2</sup>. 1.22. 2; 5. 1.23. -3; -1. 1.28. 3) {-6}.

2.7. 4)  $\min_{(-\infty; -2]} f(x) = 256$ ; cea mai mare valoare nu există.

2.11. 1) Dacă  $a = 6$ , atunci o singură soluție; dacă  $a > 6$ , atunci 2 soluții; dacă  $a < 6$ , atunci nici o soluție; 2) dacă  $a = 1$  sau  $a = -8$ , atunci o singură soluție; dacă  $a < -8$  sau  $a > 1$ , atunci două soluții; dacă  $-8 < a < 1$ , atunci soluții nu există.

3.5. 1)  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ ; 2)  $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ . 3.6. 1)  $\max_{[\frac{1}{2}; 1]} f(x) = 64$ ,

$\min_{[\frac{1}{2}; 1]} f(x) = 1$ ; 2)  $\max_{[-1; -\frac{1}{2}]} f(x) = 64$ ,  $\min_{[-1; -\frac{1}{2}]} f(x) = 1$ ; 3)  $\max_{[1; +\infty)} f(x) = 1$ , cea

mai mică valoare nu există. 3.7. 1)  $\max_{[\frac{1}{3}; 2]} f(x) = 27$ ,  $\min_{[\frac{1}{3}; 2]} f(x) = \frac{1}{8}$ ;

2)  $\max_{[-2; -1]} f(x) = -\frac{1}{8}$ ,  $\min_{[-2; -1]} f(x) = -1$ ; 3) cea mai mare valoare nu există,

$\min_{(-\infty; -3]} f(x) = -\frac{1}{27}$ .

4.4. 5) -1. 4.8. 6) Nu are rezolvare; 9) 5; -15. 4.9. 5) -0,5; 6) 0; 6. 4.12. 29. 4.13. -11,8. 4.14. 1)  $\mathbb{R}$ ; 2)  $[-1; +\infty)$ ; 3)  $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ . 4.15. 1)  $(-\infty; 2]$ ; 2)  $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ ; 3)  $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$ . 4.16. 4) -5 și -4. 4.20. 1) -1; 2) -1; 3) 4.21. -3; 1.

5.11. 0. 5.12.  $27\sqrt[3]{2}$ . 5.13. 3)  $\sqrt[12]{128}$ . 5.14. 3)  $\sqrt[3]{a}$ . 5.19. 1)  $a \leq 0$ ,  $b \leq 0$ ; 2)  $a \geq 0$ ,  $b \leq 0$ ; 3)  $a$  și  $b$  — numere arbitrare; 4)  $a$  și  $b$  — numere arbitrare. 5.20. 2)  $\mathbb{R}$ . 5.21. 2)  $-n$ ; 4)  $c^4$ . 5.22. 2)  $10x$ . 5.25. 1)  $[-4; +\infty)$ ; 2)  $\mathbb{R}$ . 5.26. 2)  $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ . 5.28. 1)  $m^2\sqrt[4]{-m}$ ; 2)  $a^2b^3\sqrt[4]{b}$ . 5.29. 1)  $-2a\sqrt[4]{2a^2}$ ; 2)  $-5a\sqrt[4]{-a}$ . 5.30. 1)  $-\sqrt[8]{3c^8}$ ; 2)  $\sqrt[6]{6b^6}$ , dacă  $b \geq 0$ ;  $-\sqrt[6]{6b^6}$ , dacă  $b < 0$ ; 3)  $-\sqrt[6]{-a^7}$ . 5.31. 1)  $\sqrt[6]{a^7}$ ; 2)  $-\sqrt[4]{-a^7}$ . 5.32.  $[3; 5]$ . 5.34. 6) 16.

6.5. 3)  $\frac{3}{4}$ ; 6)  $\frac{1}{2}$ . 6.6. 3) 4. 6.7. 3) 125. 6.8. 2) 49. 6.11. 1) 6; 2) 100;  
 3)  $12\frac{4}{9}$ ; 4) 2. 6.12. 1) 7; 2) 10; 3)  $122\frac{7}{9}$ . 6.13. 2)  $a^{0,5} - 2b^{0,5}$ ;  
 5)  $a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$ . 6.14. 3)  $1 + \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}$ . 6.15.  $\frac{a^{0,5}b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}}$ . 6.16.  $2m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$ .

7.3. 3) -1; 1. 7.4. 1)  $\frac{4}{3}$ ; 2)  $\frac{1}{2}$ ; 3) рăдăїїї ну ехистă; 4) 7. 7.5. 2) Рă-  
 дăїїї ну ехистă. 7.6. 1) 1; 2) 3; 3) 1; 2; 4) 5; 5) 4; 6) 2. 7.7. 1) -5;  
 2) 4; 3) -1; 4) 5. 7.8. 1) 4; 2) 2; 3. 7.9.  $\frac{1}{3}$ . 7.10. 1) 1;  $-\frac{27}{8}$ ; 2) 16; 3) 25;  
 4) 8; 5) 0; 16; 6)  $\frac{9}{8}$ . 7.11. 1) 16; 2) 1; 512; 3) -4; 11; 4) 2,8; -1,1. 7.12. 1) 0; 5;  
 2) 7. 7.13. 1) 6; 2) 2; 3) -1; 3; 4) -2. 7.14. 1) 2; 2) 8. 7.15. 1) 6; 9;  
 2)  $\frac{137}{16}$ ; 3) солуїїї ну сунт; 4) 1; -3. 7.16. 1) -5; 4; 2) -1. 7.17. 1) 1; 4;  
 2)  $-\sqrt{11}$ ;  $-\sqrt{6}$ ;  $\sqrt{6}$ ;  $\sqrt{11}$ ; 3) -1; 4; 4) -2; 5. 7.18. 1) -1; 5; 2) 1; 2;  
 3) -6; 4. 7.19. 27. 7.20. 10. 7.22.  $f(x) = -2x + 1$ .

## § 2. Функїїї тригонометриче

8.4. 3)  $10\pi$ . 8.5. 2)  $\frac{9\pi}{2}$ . 8.8. 8) Їн кадранул I. 8.9. 4) Їн кадранул  
 III; 7) чн кадранул II. 8.10. 3) (0; -1); 6) (1; 0). 8.11. 2) (-1; 0).  
 8.13. 1)  $\frac{3\pi}{2}$ ;  $-\frac{\pi}{2}$ ; 2)  $2\pi$ ;  $-2\pi$ . 8.14. 1)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; 2)  $\pi + 2\pi k$ ,  
 $k \in \mathbb{Z}$ ; 3)  $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 8.15. 1)  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; 2)  $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  
 3)  $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 8.16. 1)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ; 2) (0; -1); 3) (0; 1), (0; -1); 4) (1; 0),  
 (-1; 0). 8.19. 1) -2; 2)  $-\frac{4}{3}$ . 8.20. 80 000 де локуйтори.

9.1. 1) 5; 4)  $\frac{7}{4}$ . 9.2. 1) 1; 3)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 9.3. 1) Ну; 2) ну. 9.4. 1) Ну;  
 2) ну; 3) да. 9.5. 1) 3; -3; 3) 3; 1; 4) 1; 0. 9.6. 2) 1; -5. 9.11. *Индика-  
 їїе.* Фие сă пунїїїе  $P_1$  њи  $P_2$  сунт обїїїїїне чн резултатул ротаїїїїл рунїїїе

tului  $P_0$  cu unghiurile  $\alpha$  și  $\alpha + \frac{\pi}{2}$  corespunzător. Coborâm perpendiculararele  $P_1A$  și  $P_2B$  pe axele  $x$  și  $y$  corespunzător (fig. 9.3). Deoarece  $\angle P_1OP_2 = \frac{\pi}{2}$ , atunci se poate stabili, că  $\triangle OP_1A = \triangle OP_2B$ . De aici  $OA = OB$ . Deci, abscisa punctului  $P_1$  este egală cu ordonata punctului  $P_2$ , adică  $\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ . Altele cazuri de amplasare ale punctelor  $P_1$  și  $P_2$  se cercetează asemănător. Aparte se examinează cazurile, când punctele  $P_1$  și  $P_2$  se află pe axele de coordonate.

**10.4.** 1)  $-\frac{1}{2}$ ; 3)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . **10.5.**  $-\frac{1}{2}$ . **10.6.**  $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ . **10.7.** 1,5. **10.8.** 1) al II-a cadran. **10.12.** 1)  $2 \sin \alpha$ ; 2)  $-2 \cos \alpha$ ; 3) 0. **10.13.** 1) 0; 2) 0; 3) 0. **10.14.** 1) Este pară; 2) nu este nici para nici impară. **10.15.** 1) Impară; 2) pară. **10.16.** 1) 5; 2) 2.

**11.1.** 2)  $\sqrt{3}$ ; 3)  $-\frac{1}{2}$ ; 5)  $\frac{1}{2}$ . **11.2.** 1)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 2) 1; 4)  $\frac{1}{2}$ . **11.15.** 2)  $\cos 20^\circ > \cos 21^\circ$ ; 3)  $\sin \frac{10\pi}{9} > \sin \frac{25\pi}{18}$ . **11.16.** 2)  $\sin \frac{5\pi}{9} > \sin \frac{17\pi}{18}$ . **11.19.** 1)  $\sin 58^\circ > \cos 58^\circ$ ; 2)  $\sin 18^\circ < \cos 18^\circ$ ; 3)  $\cos 80^\circ < \sin 70^\circ$ . **11.21.** 1)  $[2; +\infty)$ ; 2)  $[3; +\infty)$ .

**12.1.** 5)  $2 \cos^2 \alpha$ . 6) 2. **12.2.** 3) 1; 4) 1. **12.5.** 1)  $\frac{2}{\cos^2 \alpha}$ ; 2)  $\frac{2}{\sin \alpha}$ ; 3)  $\sin^4 \alpha$ ; 4) 1. **12.6.** 1) 1; 2) 1; 3)  $\frac{2}{\cos \beta}$ ; 4)  $\frac{1}{\cos x}$ . **12.7.** 2)  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ ; 3)  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ . **12.8.** 1)  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$ . **12.11.**  $-\frac{1}{2}$ . *Indicație.* Împărțiți numărătorul și numitorul la  $\cos \alpha$ . **12.12.**  $-\frac{16}{11}$ . **12.13.** 2; 1. **12.14.** 3; -2. **12.15.** 1) 125; 2) 2.

**13.1.** 3) 0; 4) 0. **13.2.** 2) 0. **13.3.** 2)  $\frac{1}{2}$ ; 3) 0; 4)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 5)  $\sin 2\beta$ ; 6)  $\operatorname{tg} 15^\circ$ . **13.4.** 2)  $\frac{1}{2}$ ; 3)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 4)  $\cos(\alpha + \beta)$ . **13.5.**  $\frac{6}{7}$ . **13.7.** 2)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . **13.8.** 1)  $\sqrt{3}$ . **13.9.** 1)  $2 \cos \alpha$ ; 2)  $\operatorname{tg} 2\alpha$ ; 3)  $\cos^2 \alpha$ ; 4)  $\sin 25^\circ$ ;

5)  $\cos \alpha + \sin \alpha$ ; 6)  $\cos \frac{\alpha}{2}$ ; 7)  $-\cos \frac{\alpha}{2}$ ; 8)  $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha$ . **13.10.** 1)  $2 \sin 40^\circ$ ;

2)  $\cos^2 2\beta$ ; 3) 1; 4) 1; 5)  $\frac{1}{4} \sin 4\alpha$ ; 6)  $2 \sin 2\alpha$ ; 7)  $\frac{1}{2} \cos 2\alpha$ ; 8)  $\sin 3\alpha$ .

**13.11.** 1)  $\frac{1}{2}$ ; 4)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ . **13.12.** 1)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ; 2)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 3)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ . **13.15.**  $-\frac{24}{25}$ .

**13.16.**  $-\frac{4}{5}$ . **13.17.** 2. **13.18.** 5. **13.19.**  $-0,96$ . **13.20.**  $-\frac{8}{15}$ . **13.21.**  $\frac{7}{8}$ .

**13.22.**  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ . **13.23.**  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ . **13.25.** 1. **13.26.** 1) 2; 2)  $\operatorname{tg} 2\alpha$ ;

3)  $\sin 2\alpha$ ; 4)  $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ . **13.27.** 1)  $\frac{2}{\operatorname{tg} 4\alpha}$ ; 2)  $\operatorname{tg} 2\alpha$ . **13.28.** 2. **13.29.**  $-2$ .

**13.30.**  $-\frac{8}{9}$ . **13.31.**  $\frac{3}{4}$ . **13.32.** Для  $x = 1$ : 9, 6, 3; для  $x = 9$ : 41,

62, 83. **13.33.** Для  $x = 2$ : 1,  $-3$ , 9; для  $x = \frac{4}{3}$ :  $\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{5}{3}$ ,  $\frac{25}{3}$ .

**14.3.** 3)  $-\cos 38^\circ$ ; 4)  $-\sin \frac{\pi}{18}$ . **14.4.** 2)  $\sin \frac{\pi}{15}$ . **14.7.** 1)  $\frac{5}{3}$ ; 2) 1.

**14.8.**  $-1$ . **14.9.** 1)  $-\cos \alpha$ ; 2) 1. **14.11.** 0. **14.12.** 1) 1; 2) 1.

**15.3.** 2)  $\pm \frac{\pi}{5} + \frac{12\pi n}{5}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 6)  $\pm 3 \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} + 6\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**15.4.** 2)  $\pm \frac{25\pi}{6} + 10\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 3)  $\frac{4\pi}{3} + \frac{8\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **15.5.** 3)  $12 + 6\pi +$

$+ 12\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 4)  $\frac{\pi}{24} \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **15.6.** 2)  $\pm \frac{3\pi}{2} - 6 + 4\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**15.7.**  $-\frac{\pi}{6}$ . **15.8.** Для ехемплу,  $-3\pi$ . **15.9.** 4 розв'язки. **15.10.**  $\frac{7\pi}{12}$ ;  $\frac{31\pi}{12}$ ;

$\frac{5\pi}{4}$ ;  $\frac{13\pi}{4}$ . **15.11.** 1. **15.12.** 1)  $\left[0; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$ ; 2)  $[-3; -2) \cup (-2; 3]$ .

**16.3.** 2)  $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 3)  $\frac{(-1)^{n+1}}{8} \arcsin \frac{2}{9} + \frac{\pi n}{8}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**16.4.** 3)  $(-1)^{n+1} \cdot \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **16.7.** 3)  $-\frac{4\pi}{21} + \frac{4\pi n}{7}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**16.9.** 2)  $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **16.10.** 2)  $(-1)^{n+1} \cdot \frac{5\pi}{6} + 20 + 5\pi n$ ,

$n \in \mathbb{Z}$ . **16.11.** 2)  $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **16.12.** 2)  $-\frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$ ,



- $n \in \mathbb{Z}$ . **16.13.**  $\frac{13\pi}{12}$ . **16.14.**  $-\frac{13\pi}{90}$ . **16.15.**  $\frac{\pi}{2}$ ;  $-\frac{5\pi}{6}$ ;  $\frac{7\pi}{6}$ . **16.16.** 6 солүции.
- 16.17.** 4 солүции. **16.18.**  $-\frac{2\pi}{3}$ . **16.19.** 1) 5; 2) 3; 3) 7; 4) 4.
- 17.1.** 1)  $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 2)  $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  
 3)  $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 4)  $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $\arctg 3 + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **17.2.** 1)  $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  
 $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 2)  $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$ ,  $\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 3)  $\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $-\arctg \frac{3}{4} + \pi n$ ,  
 $n \in \mathbb{Z}$ ; 4)  $\pm 4 \arccos \frac{1}{3} + 8\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **17.3.** 1)  $\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 2)  $-\frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  
 $n \in \mathbb{Z}$ ; 3)  $\frac{1}{2} \arctg 4 + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **17.4.** 1)  $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 2)  $\frac{\pi}{3} + \pi n$ ,  
 $n \in \mathbb{Z}$ ; 3)  $\frac{1}{4} \arctg \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{4}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **17.5.** 1)  $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $(-1)^n \arcsin \frac{1}{3} +$   
 $+ \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 2)  $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 3)  $\pm \arccos(1 - \sqrt{2}) + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  
 4)  $2\pi n$ ,  $\pm \left( \pi - \arccos \frac{1}{3} \right) + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 5)  $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  
 $n \in \mathbb{Z}$ ; 6)  $\pm 2\pi + 6\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 7)  $\pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$ ,  $2\pi + 4\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  
 8)  $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **17.6.** 1)  $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 2)  $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  
 $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 3)  $(-1)^n \arcsin(2 - \sqrt{3}) + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 4)  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $2\pi n$ ,  
 $n \in \mathbb{Z}$ ; 5)  $(-1)^{n+1} \pi + 6\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 6)  $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $\pi + 4\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
- 17.7.** 1)  $\pm \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 2)  $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **17.8.** 1)  $\pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  
 2)  $\frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **17.10.** 3) -2; 4) 1.

### § 3. Derivata ùи äпликаrea ei

**18.7.** 8 m/s. **18.8.** 1) 20 m/s; 2) 10 m/s.

**19.4.** 1)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . **19.5.** 2)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . **19.8.** 1) 3; 2)  $\frac{1}{4}$ ; 3)  $-\frac{1}{4}$ ; 4) 1. **19.9.** 1) -32;

2)  $\frac{1}{27}$ ; 3)  $-\frac{1}{27}$ ; 4) 1. **19.12.** 1) 13,5; 2)  $\frac{13}{4}$ ; 3)  $\frac{3}{8}$ ; 4)  $\frac{176}{3}$ . **19.13.** 1) 5;

2)  $\frac{3}{16}$ .

**20.9.** 16 kg·m/s. **20.10.** 400 J. **20.12.** 1)  $y = 4x - 8$ ; 2)  $y = -4$ ; 3)  $y = -x - 3$ .

**21.1.** 1)  $y = x - 1$ ; 2)  $y = -4x + 4$ ; 3)  $y = \frac{2}{3}x + 3$ ; 4)  $y = x$ ; 5)  $y = -1$ ;

6)  $y = x + 4$ . **21.2.** 1)  $y = 3x - 4$ ; 2)  $y = -2x + 2$ ; 3)  $y = -x + \frac{\pi}{2}$ ;

4)  $y = 5x - 18$ . **21.3.**  $y = -3x - 3$ . **21.4.**  $y = -5x + 2$ . **21.5.** 1)  $y = 6x - 3$ ;

2)  $y = 2x - 2$ ,  $y = 2x + 2$ . **21.6.** 1)  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ; 2)  $y = -3x + 9$ ,  $y = 3x$ .

**21.7.** 4)  $[1; 3) \cup (3; 4]$ .

**22.1.** 1) Кређе пе интервалу  $[-2; +\infty)$ , декређе пе интервалу  $(-\infty; -2]$ ; 2) кређе пе  $(-\infty; 0]$  і  $[1; +\infty)$ , декређе пе  $[0; 1]$ ; 3) кређе пе  $[-1; 7]$ , декређе пе  $(-\infty; -1]$  і  $[7; +\infty)$ ; 4) кређе пе  $[2; +\infty)$ , декређе пе  $(-\infty; 2]$ . **22.2.** 1) Кређе пе  $(-\infty; 3]$ , декређе пе  $[3; +\infty)$ ; 2) кређе пе  $(-\infty; -3]$  і  $[1; +\infty)$ , декређе пе  $[-3; 1]$ ; 3) кређе пе  $[-1; +\infty)$ , декређе пе  $(-\infty; -1]$ . **22.3.** 1) Кређе пе  $[1; +\infty)$ , декређе пе  $(-\infty; 1]$ ; 2) кређе пе  $(-\infty; 2)$  і  $(2; +\infty)$ ; 3) кређе пе  $[1; +\infty)$ , декређе пе  $(-\infty; 0)$  і  $(0; 1]$ ; 4) кређе пе  $(-\infty; -3]$  і  $[3; +\infty)$ , декређе пе  $[-3; 0)$  і  $(0; 3]$ . **22.4.** 1) Кређе пе  $(-\infty; 3]$ , декређе пе  $[3; +\infty)$ ;

2) кређе пе  $(-\infty; 0)$  і  $[2; +\infty)$ , декређе пе  $(0; 2]$ . **22.9.**  $-\frac{1}{3}$ .

**23.3.** 1)  $x_{\min} = 0$ ; 2)  $x_{\min} = 3$ ; 3)  $x_{\min} = -2$ ,  $x_{\max} = 2$ ; 4)  $x_{\min} = 5$ ,  $x_{\max} = -1$ . **23.4.** 1)  $x_{\min} = 1$ ,  $x_{\max} = -1$ ; 2)  $x_{\min} = -2$ ,  $x_{\max} = 2$ ; 3)  $x_{\min} = 1$ ,

$x_{\max} = -7$ ; 4)  $x_{\min} = \frac{3}{2}$ . **23.7.** 1) Кређе пе  $(-\infty; -2]$  і  $[2; +\infty)$ , декређе-

те пе  $[-2; 0)$  і  $(0; 2]$ ,  $x_{\max} = -2$ ,  $x_{\min} = 2$ ; 2) кређе пе  $(-\infty; 0]$ , декређе-

те пе  $[0; +\infty)$ ,  $x_{\max} = 0$ . **23.8.** 1) Кређе пе  $(-\infty; -3]$  і  $[3; +\infty)$ , декређе-

те пе  $[-3; 0)$  і  $(0; 3]$ ,  $x_{\max} = -3$ ,  $x_{\min} = 3$ ; 2) кређе пе  $[0; +\infty)$ , декређе пе  $(-\infty; 0]$ ,  $x_{\min} = 0$ . **23.9.** 1)  $-25$ ; 2)  $-13$ ; 3)  $-22$ . **23.10.** 1) 26;

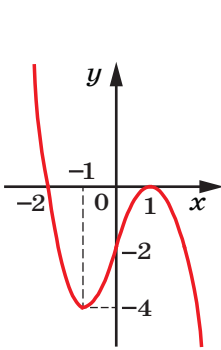
2) 17; 3)  $-10$ .

**24.1.** 1) 4; 0; 2) 13; 4; 3)  $-3$ ;  $-30$ ; 4)  $-4$ ;  $-8$ . **24.2.** 1) 0;  $-\frac{16}{3}$ ;

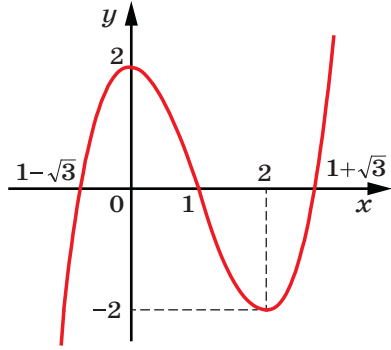
2) 1;  $-2$ ; 3) 48;  $-6$ ; 4) 0;  $-28$ . **24.3.**  $8 = 2 + 6$ . **24.4.**  $12 = 8 + 4$ .

**24.5.**  $180 = 40 + 80 + 60$ . **24.6.**  $18 = 8 + 3 + 7$ .

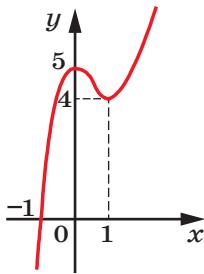
25.1. Vezi figura. 25.2. Vezi figura.



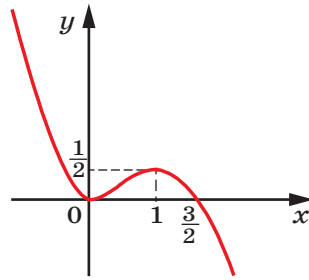
1)



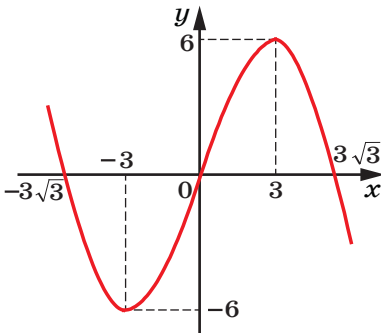
4)



2)

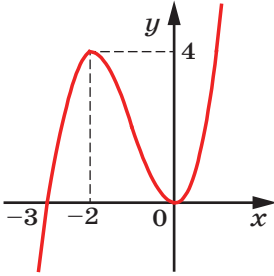


5)

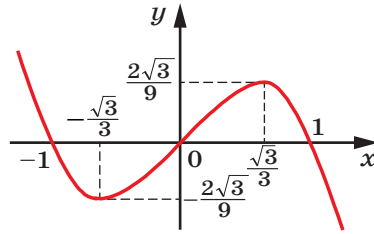


3)

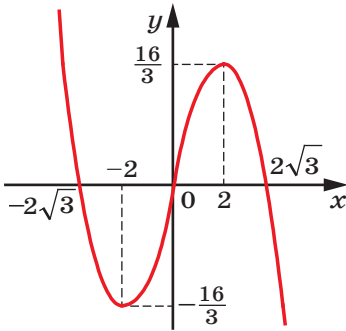
Pentru problema 25.1



1)



3)



2)

**Для задачі 25.2**

- 26.6.** 1)  $-163$ ; 2)  $3$ . **26.14.** 5)  $\frac{1}{3}$ . **26.16.** 1)  $4$ ; 2)  $2$ ; 3)  $3$ ; 4)  $-2$ ; 5)  $-2$ ;  
 6)  $\frac{2}{9}$ ;  $2$ ; 7)  $625$ ; 8)  $-25$ ; 3. **26.19.**  $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ . **26.20.**  $2$ ;  $-3$ . **26.21.** 1)  $0$ ;  
 2)  $0$ . **26.22.**  $-1$ . **26.24.** 1)  $\operatorname{tg} \alpha$ ; 2)  $2$ ; 3)  $0$ ; 4)  $1$ . **26.25.** 1)  $-\frac{7\pi}{2} + 12\pi k$ ,  
 $k \in \mathbb{Z}$ ; 2)  $\frac{7\pi}{3} + 4\pi k$  або  $-\pi + 4\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; 3)  $\frac{\pi}{12} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . **26.26.**  $\frac{\pi}{2}$ .  
**26.27.**  $-\frac{\pi}{24}$ . **26.28.** 2 розв'язки. **26.29.** 3)  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $\pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  
 4)  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; 6)  $\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . **26.32.**  $3$ . **26.33.**  $1$ . **26.34.** 3)  $y =$   
 $= -6x + 13$ ; 4)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ . **26.35.**  $y = -4x$  і  $y = 4x - 16$ . **26.36.**  $3,5$  с.

**26.38.** 2) Crește pe intervalele  $(-\infty; 0]$  și  $[4; +\infty)$ , descrește pe intervalul  $[0; 4]$ ,  $x_{\max} = 0$ ,  $x_{\min} = 4$ ; 3) crește pe intervalele  $(-\infty; -4]$  și  $[4; +\infty)$ , descrește pe intervalele  $[-4; 0]$  și  $(0; 4]$ ,  $x_{\max} = -4$ ,  $x_{\min} = 4$ ; 6) crește pe intervalele  $(-\infty; -3]$  și  $[1; +\infty)$ , descrește pe intervalele  $[-3; -1]$  și  $(-1; 1]$ ,  $x_{\max} = -3$ ,  $x_{\min} = 1$ . **26.39.** 2) 2; -2. **26.40.**  $32 + 32$ . **26.41.** 2.

## Capitolul 2. Stereometrie

### § 4. Paralelismul în spațiu

**27.6.** Infinit de multe sau una. **27.14.** 11 cm sau 3 cm. **27.15.** 10 cm. **27.16.** 1 : 3.

**28.15.**  $72^\circ$ ,  $108^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $108^\circ$ .

**29.9.** Un plan sau trei plane. **29.14.** 4 cm. **29.15.** 9 cm. **29.16.** 1 : 2.

**30.12.** 7,5 cm. **30.13.** 8 : 3. **30.14.** *Indicație.* Demonstrați, că  $\triangle ABC \sim \triangle EBF$ , și folosiți-vă de egalitatea unghiurilor triunghiurilor asemenea. **30.18.**  $156 \text{ cm}^2$ .

**31.13.** 2) 24 cm. **31.15.** 1,5.

**32.8.** 9 cm. **32.14.**  $60^\circ$ .

### § 5. Perpendicularitatea în spațiu

**33.4.**  $60^\circ$ . **33.5.** 1)  $90^\circ$ ; 2)  $40^\circ$ . **33.6.** 1)  $0^\circ$ ; 2)  $70^\circ$ ; 3)  $35^\circ$ . **33.7.**  $80^\circ$ .

**33.8.** 10 cm. **33.9.** 10 cm. **33.10.**  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ . **33.11.**  $\alpha$  sau  $180^\circ - \alpha$ . **33.12.**  $90^\circ$ .

*Indicație.* Demonstrați că unghiul căutat este egal cu unghiul dintre dreptele  $OB_1$  și  $AC$  și că triunghiul  $AB_1C$  este isoscel. **33.13.**  $60^\circ$ . **33.14.** 52 cm.

**34.7.** 2 cm. **34.8.**  $2\sqrt{5}$  cm. **34.9.** 1)  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ ; 2)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . **34.10.** 8 cm.

**34.13.** 12 cm. **34.14.** 14 cm. **34.15.** 12 cm.

**35.5.** 7 cm. **35.6.** 12 cm. **35.16.** 15 cm. **35.17.** 15 cm, 13 cm. **35.18.** 3 cm. **35.19.** 12 cm. **35.23.**  $3\sqrt{5}$  cm. **35.24.** 2 cm. **35.25.**  $2\sqrt{2}$  cm. **35.26.**  $2\sqrt{6}$  cm,  $2\sqrt{6}$  cm,  $\sqrt{6}$  cm. **35.27.** 17 cm. **35.28.** 8 cm. **35.29.** 10 cm.

**35.30.** 5 cm. **35.31.** 4 cm. **35.33.** 20 cm. **35.34.**  $3\sqrt{10}$  cm. **35.36.**  $4\sqrt{3}$  cm.

**36.7.**  $30^\circ$ . **36.10.**  $30^\circ$ . **36.11.**  $6\sqrt{2}$  cm. **36.12.** 3 cm. **36.13.**  $8\sqrt{2}$  cm.  
**36.14.**  $3\sqrt{10}$  cm. **36.15.** 6 cm. **36.16.**  $3\sqrt{14}$  cm. **36.17.**  $30^\circ$ . **36.18.**  $30^\circ$ .

**37.6.**  $60^\circ$ . **37.7.**  $60^\circ$ . **37.11.**  $80^\circ$ . **37.16.** 35 cm. **37.18.**  $84\text{ cm}^2$ .  
**37.20.**  $105^\circ$ . **37.21.**  $70^\circ$ . **37.22.**  $\sqrt{5}$  cm. **37.23.**  $120^\circ$ . **37.24.**  $5\sqrt{2}$  cm,  
 13 cm. **37.25.**  $45^\circ$ . **37.26.**  $3\sqrt{2}$  cm. **37.27.** 25 cm. **37.28.** 8 cm. **37.29.**  $45^\circ$ .  
**37.30.**  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ . **37.31.** 1)  $2\sqrt{15}$  cm; 2) 8 cm. **37.32.** 13 cm. **37.33.**  $45^\circ$ .  
**37.34.**  $60^\circ$ . **37.35.**  $90^\circ$ . **37.36.** 26 cm.

## § 6. Coordonate și vectori în spațiu

**38.18.** 66. **38.19.**  $3\sqrt{14}$ . **38.20.**  $y = -2$  sau  $y = -10$ . **38.21.**  $A(3; 0; 0)$   
 sau  $A(-1; 0; 0)$ . **38.22.** 5. **38.23.** 13. **38.24.**  $625\text{ cm}^2$ .

**39.10.** 3. **39.13.**  $D(7; -4; 5)$ . **39.14.**  $x = 20$ ,  $y = -29$ ,  $z = -18$ . **39.15.** -3  
 sau 3. **39.16.** -14 sau 2. **39.18.**  $B(-3; 16; -7)$ . **39.19.**  $\vec{m}(4; 4; 4)$  sau  
 $\vec{m}(-4; -4; -4)$ . **39.20.**  $\vec{c}(3\sqrt{3}; -3\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$  sau  $\vec{c}(-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$ .  
**39.21.** 13 cm.

**40.11.**  $\overline{NK}$ . **40.12.**  $\overline{FM}$ . **40.15.**  $A(3,5; -1,5; 8)$ .  
**40.16.**  $M(-0,5; -2,5; 4,5)$ . **40.17.** 9,6 cm.

**41.14.**  $x = -\frac{4}{7}$ ,  $z = \frac{35}{4}$ . **41.15.**  $\overline{AB}\left(-1; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ . **41.16.**  $D(6; 0; 10)$ .  
**41.17.**  $\vec{b}\left(\frac{2}{7}; -\frac{6}{7}; -\frac{3}{7}\right)$ . **41.18.**  $\vec{m}(5; -5; 10)$ . **41.19.** 1) Nu; 2) da.

**41.20.**  $y = -9$ ,  $z = 3$ . **41.21.**  $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AA_1}$ . **41.22.**  $\overline{MK} = \frac{1}{2}\overline{AB} +$   
 $+\overline{AD} - \frac{1}{2}\overline{AA_1}$ . **41.23.**  $\overline{EF} = -\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AD} - \frac{1}{2}\overline{AA_1}$ . **41.24.** 8 cm.

**42.7.** 4. **42.8.** -3. **42.9.**  $\vec{a}$  și  $\vec{c}$ . **42.12.** -19,5. **42.13.** -12. **42.14.** 1.  
**42.15.** -1 sau 2. **42.16.** 143. **42.17.** 70. **42.18.** 1)  $-\frac{a^2}{2}$ . *Indicație.* Ex-  
 primiți vectorul  $\overline{CM}$  prin vectorii  $\overline{CA}$  și  $\overline{CB}$ ; 2) 0. *Indicație.* Ex-  
 primiți vectorul  $\overline{AB}$  prin vectorii  $\overline{DA}$  și  $\overline{DB}$ . **42.19.**  $a^2$ . *Indicație.* Ex-

примаємо вектор  $\overline{AC}$  по векторах  $\overline{AB}$  і  $\overline{AD}$ . **42.20.**  $180^\circ - \arccos \frac{2\sqrt{13}}{13}$ .

**42.21.**  $180^\circ - \arccos \frac{7\sqrt{19}}{38}$ . **42.22.** 0,7. **42.23.**  $60^\circ$ . **42.24.**  $80 \text{ cm}^2$ .

**43.10.** 11 cm. **43.20.** 2)  $60^\circ$ . **43.21.** 1)  $\arctg 2$ ; 2)  $2 \arctg \frac{1}{2}$ ;

3)  $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$ . **43.22.** 26 cm,  $8\sqrt{10}$  cm. **43.23.** 2)  $3\sqrt{2}$  cm. **43.24.** 2,4 cm.

**43.25.** 4,5 cm. **43.26.** 10 cm. **43.27.**  $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . **43.28.** 6 cm.

**43.29.** 13 cm. **43.30.** 8 cm. **43.31.**  $\frac{25\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$ . **43.32.**  $\arctg \frac{3}{4}$ .

**43.33.**  $60^\circ$ . **43.34.**  $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi\right)$ . **43.35.**  $\frac{h}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ . **43.36.**  $\arccos \frac{1}{3}$ .

**43.37.** 6 cm. **43.38.**  $4\sqrt{3}$  cm. **43.39.** 15 cm. **43.40.**  $\frac{128\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$ .

**43.41.**  $45^\circ$ . **43.42.** 1)  $C(0; 4; 0)$ ; 2)  $x=-7, z=1$ . **43.43.** 2)  $\frac{69\pi}{4}$ . **43.44.** 9.

**43.45.**  $y=3$  або  $y=-1$ . **43.46.**  $D(3; 1; -5)$ . **43.47.**  $D(-2; 1; 2)$ .

**43.49.**  $D(0; 1,5; 1,5)$ . **43.50.**  $\overline{MO} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC} - \frac{1}{6}\overline{AD}$ . **43.51.**  $\frac{5}{21}$ .

**43.52.**  $90^\circ$ . **43.53.**  $x=1$  або  $x=3$ . **43.54.**  $\overline{m}(-0,5; 1; -0,5)$ .

**43.55.**  $180^\circ - \arccos \frac{\sqrt{30}}{30}$ . **43.56.**  $\arccos \frac{3}{7}$ . **43.57.**  $2\sqrt{5}$ .

**43.58.**  $\arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

## INDICE DE MATERIE

- A**bscisa 211  
 Aplicată 211  
 Arccosinus 87  
 Arcsinus 92  
 Arctangenta 93  
 Aria proiecției ortogonale a poligonului 200  
 Axa absciselor 210  
 — aplicatelor 210  
 — ordonatelor 210  
 Axiomele stereometriei 144
- B**aza oblicei 186  
 — perpendicularei 186  
 — piramidei 150  
 — prisme 150
- C**ea mai mare valoarea a funcției pe mulțime 7  
 Cea mai mică valoarea a funcției pe mulțime 7  
 Conținutul geometric al derivatei 109  
 Conținutul mecanic al derivatei 109  
 Consecință a ecuației 40  
 Coordonatele punctului 211  
 — vectorului 216  
 Cosinusul unghiului de rotație 55  
 Cosinusoidă 67  
 Criteriul de creștere al funcției 120  
 — dreptelor neconcurente 157  
 — de paralelism a două plane 165  
 — — a drepte și a planului 161  
 — — de perpendicularitate al planelor 202  
 — — — al drepte și al planului 181  
 — de descreștere al funcției 120  
 — de constanță al funcției 120  
 — punctului de maximum al funcției 125  
 — punctului de minimum al funcției 125  
 — Cub 151
- D**erivată(a) 186  
 — câtului 115  
 — produsului 114  
 — sumei 114  
 Diferența vectorilor 221  
 Derivabilitatea 110  
 Distanța de la o dreaptă până la planul paralel ei 187  
 — — un punct până la plan 187  
 — dintre două plane paralele 187  
 Domeniul de definiție al funcției, simetric față de originea de coordonate 8  
 Dreaptă paralelă cu planul 160  
 —, ce se află în plan 143  
 —, ce intersectează planul 144  
 —, perpendiculară pe plan 181
- E**cuația tangentei 118  
 — irațională 40  
 — — consecință 40  
 Elipsă 171  
 Expresie de sub radical 22
- F**ața laterală a piramidei 150  
 — poliedrului 149  
 — unghiului diedru 198  
 — — a prisme 150



- Formula cosinusului de argument  
 dublu 77  
 — — diferenței 76  
 — — sumei 76  
 — sinusului de argument  
 dublu 77  
 — — diferenței 76  
 — sumei 76  
 — tangentei de argument  
 dublu 77  
 — — diferenței 76  
 — — sumei 76
- Formulele adunării 76  
 — de reducere 82  
 — de reducere a puterii 77
- Funcție diferentiabilă 109  
 —, diferentiabilă în punct 109  
 — impară 8  
 — pară 8  
 — periodică 63  
 — putere cu exponent natu-  
 ral 13  
 — — — exponent irațional 35  
 — — cu exponent întreg 17  
 — — trigonometrică 57
- Identitatea trigonometrică funda-  
 mentală 73
- Înmulțirea vectorului cu un  
 număr 223
- Lungimea arcului de circumferin-  
 ță 63  
 — circumferinței 63
- Mărimea unghiului diedru 199  
 Măsura în radiani 50  
 Modulul vectorului 215  
 Muchia bazei piramidei 150  
 — laterală a piramidei 150  
 — laterală a prisme 150  
 — poliedrului 150  
 — unghiului diedru 198
- Noțiuni inițiale 142  
 Nul-vector 215
- Originea coordonatelor 210
- Paralelipiped 151  
 — dreptunghiular 151  
 Pătratul scalar al vectorului 228  
 Perioada funcției 63  
 — — principală 63  
 Perpendiculară 186  
 Plan 143  
 Plane paralele 165  
 — perpendiculare 201  
 —, ce se intersectează 144  
 Planul de coordonate 211  
 Poligoane paralele 166  
 Poliedru 149  
 Prismă 150  
 Produsul scalar al vectori-  
 lor 228  
 Proiecția oblicei 186  
 Proiecția ortogonală a  
 figurii 185  
 Proiectarea paralelă 169  
 Proiecția paralelă a figurii pe  
 plan 169  
 Punctul de extremum 124  
 — de maximum 123  
 — de minimum 123  
 Punctele simetrice față de  
 plan 212  
 —, — — originea de  
 coordonate 212  
 Putere cu exponent rațional 34
- Radian 49  
 Radical 22  
 Rădăcina de ordinul  $n$  21  
 — aritmetică de ordinul  $n$  23  
 — cubică 22  
 Rădăcină străină a ecuației 40  
 Regula paralelipipedului 221  
 — paralelogramului 220  
 — triunghiului 219

- S**pațiul de coordonate 211  
 Segment, paralel planului 161  
 —, perpendicular pe plan 181  
 Segmente neconcurente 156  
 — paralele 156  
 — perpendiculare 178  
 Sinusul unghiului de rotație 55  
 Sinusoidă 66  
 Sistemul cartezian de coordonate  
 în spațiu 210  
 Suma vectorilor 219
- T**angenta unghiului  
 de rotație 56  
 Teorema celor trei  
 perpendiculare 188  
 Tetraedru 150
- U**nghiul diedru 198  
 — dintre doi vectori 227  
 — dintre un segment și un  
 plan 195  
 — — doua poligoane 200
- — — drepte neconcuren-  
 te 177  
 — — — drepte paralele 177  
 — — — plane 200  
 — — — drepte, ce se  
 intersectează 177  
 — — poligon și plan 200  
 — — dreaptă și plan 194  
 Unghiul liniar al unghiului  
 diedru 199
- V**ârful poliedrului 150  
 — piramidei 150  
 Vecinătatea punctului 123  
 Vector 215  
 —, opus vectorului 224  
 Vector nul 215  
 Vectori coliniari 215  
 — perpendiculari 227  
 — orientați opus 216  
 — egali 216  
 — coorientați 216

## Cuprins

<i>De la autori</i> .....	3
<i>Însemnări convenționale</i> .....	4

### Capitolul 1. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ

<b>§ 1. Funcții, proprietățile și graficele lor</b> .....	6
1. Cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției. Funcții pare și impare .....	6
2. Funcția putere cu exponent natural .....	13
3. Funcția putere cu exponent întreg.....	17
4. Definiția rădăcinii de ordinul $n$ .....	21
5. Proprietățile rădăcinii de ordinul $n$ .....	27
6. Definiția și proprietățile puterii cu exponent rațional .....	33
7. Ecuații iraționale.....	39
• Școala de matematică din Lvov .....	44
<i>Principalul în paragraful 1</i> .....	47

### § 2. Funcții trigonometrice

8. Măsura în radiani a unghiurilor .....	49
9. Funcții trigonometrice de argument numeric .....	55
10. Semnele valorilor funcțiilor trigonometrice. Paritatea și imparitatea funcțiilor trigonometrice .....	59
11. Proprietățile și graficele funcțiilor trigonometrice .....	63
12. Relațiile fundamentale dintre funcțiile trigonometrice de același argument .....	72
13. Formulele adunării.....	76
14. Formulele de reducere.....	82
15. Ecuația $\cos x = b$ .....	85
16. Ecuațiile $\sin x = b$ și $\operatorname{tg} x = b$ .....	90
17. Ecuații trigonometrice, ce se reduc la cele algebrice .....	96
• Fii ca Ostrogradskii! .....	99
<i>Principalul în paragraful 2</i> .....	100

### § 3. Derivata și aplicarea ei

18. Problemele despre viteza instantanee și tangenta la graficul funcției .....	103
19. Definiția derivatei .....	108
20. Regulile de calculare a derivatei .....	114
21. Ecuația tangentei.....	118

22. Criteriile de creștere și descreștere ale funcției .....	120
23. Punctele de extremum ale funcției .....	123
24. Cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției.....	128
25. Construirea graficelor funcțiilor .....	131
<i>Principalul în paragraful 3.....</i>	<i>134</i>
26. Exerciții pentru repetarea cursului de algebră și elemente de analiză al clasei a 10-a .....	136

## Capitolul 2. STEROMETRIE

### § 4. Paralelismul în spațiu

27. Noțiunile fundamentale ale stereometriei. Axiomele stereometriei.....	142
28. Figuri spațiale. Noțiuni inițiale despre poliedre .....	149
29. Amplasarea reciprocă a două drepte în spațiu .....	154
30. Paralelismul dreptei și a planului .....	160
31. Paralelismul planelor .....	164
32. Proiectarea paralelă .....	169
• <b>Ucraina are talente!</b> .....	173
<i>Principalul în paragraful 4.....</i>	<i>175</i>

### § 5. Perpendicularitatea în spațiu

33. Unghiul dintre drepte în spațiu .....	177
34. Perpendicularitatea dreptei și a planului .....	180
35. Perpendiculara și oblica .....	185
36. Unghiul dintre dreaptă și plan .....	194
37. Unghiul diedru. Unghiul dintre plane .....	198
<i>Principalul în paragraful 5.....</i>	<i>208</i>

### § 6. Coordonate și vectori în spațiu

38. Coordonatele carteziene ale punctului în spațiu .....	210
39. Vectorii în spațiu .....	215
40. Adunarea și scăderea vectorilor .....	219
41. Înmulțirea vectorului cu un număr.....	223
42. Produsul scalar al vectorilor.....	227
<i>Principalul în paragraful 6.....</i>	<i>232</i>
43. Exerciții pentru repetarea cursului de geometrie clasa 10.....	234
<i>Răspunsuri și indicații la exerciții.....</i>	<i>240</i>
<i>Indice de materie .....</i>	<i>251</i>

*Навчальне видання*

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович  
НОМІРОВСЬКИЙ Дмитро Анатолійович  
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович  
та ін.

## **МАТЕМАТИКА**

### **АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ**

**РІВЕНЬ СТАНДАРТУ**

**Підручник для 10 класу  
закладів загальної середньої освіти  
з навчанням румунською/молдовською мовами**

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*

**Видано за рахунок державних коштів.  
Продаж заборонено**

Переклад з української мови  
Перекладач *Гаврилюк Юліана Мірчівна*

Румунською/молдовською мовами

Редактор *І. М. Грінчешин*  
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*

Формат 60×90/16.

Ум. друк. арк. 16,00. Обл.-вид. арк. 14,86.

Тираж 1397 пр. Зам. № ?????.

Державне підприємство  
„Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ”  
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4826 від 31.12.2014  
[www.svit.gov.ua](http://www.svit.gov.ua)  
e-mail: [office@svit.gov.ua](mailto:office@svit.gov.ua)

Віддруковано у ТДВ «Патент»  
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4078 від 31.05.2011 р.